

Instytut Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Witold Seredyński

# O pewnych własnościach geometrycznych przestrzeni Orlicza

praca doktorska napisana pod kierunkiem  
Prof. dr hab. Ryszarda Grzaślewicza



3128827/V

Wrocław 2002

# Spis treści

|   |                                                      |    |
|---|------------------------------------------------------|----|
| 1 | Preliminaria                                         | 5  |
| 2 | Stabilność                                           | 28 |
| 3 | Zbiory lokalnie niestożkowe — własności ogólne       | 37 |
| 4 | Zbiory lokalnie niestożkowe w przestrzeniach Orlicza | 42 |

# Wstęp

Analiza funkcjonalna jest jedną z czołowych dziedzin matematyki współczesnej powstałą na początku XX wieku jako wyraz potrzeby stworzenia jednolitej teorii różnych przestrzeni funkcyjnych z uwzględnieniem ich struktury liniowej i topologicznej. Jednym z najważniejszych pojęć tej dziedziny są przestrzenie unormowane i zupełne zwane przestrzeniami Banacha. Badane są też inne klasy przestrzeni — najogólniejsza z nich to przestrzenie liniowo-topologiczne. Inna ważna klasa to kraty liniowe wraz ze szczególnie ważnymi kratami Banacha. Interesującą i intensywnie badaną podklasą krat Banacha jest klasa przestrzeni Orlicza — te przestrzenie będą nas w pracy szczególnie interesowały.

W początkowym okresie rozwoju analizy funkcjonalnej skupiono się głównie na własnościach liniowo-topologicznych, czyli tych cechach rozpatrywanych przestrzeni, które nie zmieniają się przy homeomorfizmach liniowych. W nowszych czasach bardziej rozwinęły się również badania geometrycznych własności przestrzeni, zwłaszcza przestrzeni Banacha. Własności te mogą się zmienić po zmianie danej normy na inną normę równoważną, mimo to zasługują na badanie, gdyż wzbogacają naszą wiedzę o strukturze przestrzeni unormowanej. Do najważniejszych pojęć geometrycznych używanych w analizie funkcjonalnej należą pojęcia zbioru wypukłego i punktu ekstremalnego. Choć są to pojęcia afiniczne i dla zbiorów definiowanych w terminach liniowo-topologicznych cechy tych zbiorów wyrażone w tych terminach nie zmieniają się przy homeomorfizmach liniowych, to geometryczny charakter tych pojęć nie ulega wątpliwości, co widać w przypadku zbiorów definiowanych w terminach metrycznych. Na przykład własności zbioru punktów ekstremalnych kuli jednostkowej w przestrzeni Banacha silnie zależą od wybranej normy. Widać to już w przestrzeni 2-wymiarowej

— w metryce euklidesowej każdy punkt sfery jednostkowej jest ekstremalny, a jeśli jako równoważną normę przyjmiemy funkcjonal Minkowskiego  $4n$ -kąta foremnego symetrycznego względem obu osi, to tych punktów ekstremalnych będzie  $4n$ .

Sz szczególnie interesujące są badania geometrycznych własności kul w przestrzeniach Orlicza — widać w tych badaniach zależności między własnościami funkcji Orlicza (ogólniej: Younga)  $\varphi$  a własnościami kuli, przy czym własności te zależą zwykle też od wybranej normy — Orlicza lub Luxemburga. Na temat tych własności powstało już wiele prac, jak na przykład [3], [6], [7], [10], [18], [19].

W naszej pracy będziemy badać wyłącznie normę Luxemburga. Interesować nas będą dwie własności geometryczne — stabilność i (w większym stopniu) lokalna niestozkowosc. Pojęcie stabilności zbiorów wypukłych znane jest już dość dawno i napisano już na jej temat немало prac. Wymienimy choćby na przykład [4], [6], [7], [8], [9], [10], [13], [18], [19]. Mniej znaną i badaną dopiero w ostatnich czasach jest własność lokalnej niestozkowosci zbiorów wypukłych. Jest to własność znacznie mocniejsza od własności stabilności i głównie na niej jest skoncentrowana tematyka niniejszej pracy. Ciekawsze prace na jej temat to [1], [2], [16].

Rozdział pierwszy pracy to obszernie preliminaria i nie zawiera on istotnie nowych wyników. Ustalamy w nim oznaczenia, przypominamy ważniejsze definicje i twierdzenia (z wyjątkiem bardziej podstawowych) używane w pracy, wyjaśniamy pewne problemy związane z definiowaniem przestrzeni Orlicza, a przede wszystkim omawiamy teorię własności  $\Delta_r(\mu)$ . Teoria ta pochodzi z prac [17], [19]. Jest ona naturalnym uogólnieniem własności  $\Delta_2$ . Ponieważ jest ona mniej znana, a w naszej pracy intensywnie wykorzystana, więc przedstawiliśmy jej najważniejsze rezultaty wraz z dowodami w postaci jednego wielopodpunktowego lematu.

Rozdział drugi podaje pełną charakteryzację przestrzeni Orlicza z normą Luxemburga, w których dodatnia część kuli jednostkowej jest stabilna. Wynik ten jest ściśle związany z pracą [19], w której jest podana charakteryzacja przestrzeni Orlicza z normą Luxemburga, w których kula jednostkowa jest stabilna. W rozdziale tym powołujemy się nie tylko na wyniki cytowanej pracy, ale również na obszerne fragmenty zawartych w niej dowodów. W rozdziale tym są zawarte też pewne uwagi



dotyczące stabilności w kratkach liniowych ściśle związane z pracą [9].

W rozdziale trzecim zajmujemy się zbiorami lokalnie niestożkowymi w lokalnie wypukłych przestrzeniach liniowo-topologicznych. Dowodzimy w niej pewnej geometrycznej charakteryzacji takich zbiorów. W przypadku przestrzeni Hilberta charakteryzacja ta była znana i jest ona zawarta w pracy [16]. Zatem wynik niniejszego rozdziału jest wzmocnieniem wyniku cytowanej pracy.

Rozdział czwarty zawiera najważniejszy wynik niniejszej pracy. Jest to pełna charakteryzacja przestrzeni Orlicza z normą Luksemburga, w których kula jednostkowa jest zbiorem lokalnie niestożkowym. Wykorzystywane są w niej wyniki pracy [19]. Skończenie wymiarowy przypadek głównego twierdzenia tego rozdziału w połączeniu z wynikiem z pracy [16] jest wzmocnieniem wyniku z pracy [10].

W tym miejscu chciałbym złożyć serdeczne podziękowania wszystkim tym, którzy przyczynili się do powstania tej pracy. Szczególne podziękowanie chciałbym złożyć promotorowi, Profesorowi Ryszardowi Grząślewiczowi, za jego zachętę i wydatną pomoc merytoryczną. Dziękuję również za pomoc w kwestiach technicznych Doktorowi Przemysławowi Scherwentke. Dziękuję również Moim Bliskim za wsparcie i stworzenie bardzo dobrych warunków pracy.

# Rozdział 1

## Preliminaria

W rozdziale tym ustalimy oznaczenia i podamy szereg lematów i twierdzeń, które będą wykorzystane w następnych rozdziałach. Większość treści niniejszego rozdziału jest znana, toteż przytoczymy tylko niektóre dowody.

Przez  $\mathbb{N}$  będziemy oznaczać liczby naturalne bez zera:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ .  $\mathbb{R}$  będzie oznaczać zbiór liczb rzeczywistych. Przyjmiemy wygodną w teoriomiarowych rozważaniach umowę:  $0 \cdot \infty = 0$ . Różnicę mnogościową zbiorów  $A$  i  $B$  będziemy oznaczać  $A \setminus B$ . Parę uporządkowaną będziemy oznaczać  $\langle x, y \rangle$ . Pozostałe oznaczenia teoriomnogościowe będą standartowe.

Jeśli  $X$  jest zbiorem oraz  $A \subset X$ , to przez  $\chi_A$  będziemy oznaczać funkcję charakterystyczną (indykator) zbioru  $A$ , czyli :

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{dla } x \in A \\ 0, & \text{dla } x \in X \setminus A \end{cases}$$

Jeśli  $X$  jest przestrzenią topologiczną, to *otoczeniami punktu*  $x \in X$  będziemy nazywać zbiory otwarte zawierające  $x$ . Domknięcie zbioru  $A$  w przestrzeni  $X$  będziemy oznaczać przez  $\text{cl}_X A$ , wewnątrz przez  $\text{int}_X A$ , a brzeg przez  $\text{bd}_X A$ , przy czym w sytuacjach nie budzących wątpliwości indeks  $X$  będziemy pomijać.

*Zbiorem skierowanym* nazywamy zbiór  $\Gamma$  częściowo uporządkowany przez relację „ $\leq$ ” taki, że dla  $\alpha, \beta \in \Gamma$  istnieje  $\gamma \in \Gamma$  takie, że  $\alpha \leq \gamma, \beta \leq \gamma$ . Jeśli  $X$  jest przestrzenią topologiczną, to *netem* nazywamy odwzorowanie zbioru skierowanego  $\Gamma$  w

$X$  oznaczane przez  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ . *Podnetem* netu  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$  nazywamy net  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma_1}$ , gdzie  $\Gamma_1 \subset \Gamma$  spełnia:

$$\forall \alpha \in \Gamma \quad \exists \beta \in \Gamma_1 \quad \alpha \leq \beta.$$

Mówimy, że net  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$  spełnia „ $x_\alpha \in A$  dla dużych  $\alpha$ ”, jeśli istnieje  $\beta \in \Gamma$  takie, że dla każdego  $\alpha \geq \beta$  zachodzi  $x_\alpha \in A$ . Zauważmy, że jest to równoważne twierdzeniu, że dla każdego podnetu  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma_1}$  zachodzi  $\{x_\alpha : \alpha \in \Gamma_1\} \cap A \neq \emptyset$ . Definiujemy granicę:  $\lim_{\alpha \in \Gamma} x_\alpha = x$ , gdy dla każdego otoczenia  $U$  punktu  $x$  zachodzi  $x_\alpha \in U$  dla dużych  $\alpha$ . Net posiadający granicę nazywamy zbieżnym. W przestrzeniach Hausdorffa granica jest wyznaczona jednoznacznie. Ponadto:

$$x \in \text{cl } A \quad \Leftrightarrow \quad \text{Istnieje net } (x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma} \text{ taki, że } \lim_{\alpha \in \Gamma} x_\alpha = x.$$

Jeśli  $X$  jest przestrzenią liniową,  $x, y \in X$ , to przez  $[x, y]$  będziemy oznaczać zbiór (odcinek)  $\{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ . Podobnie definiujemy przedziały  $[x, y)$ ,  $(x, y]$ ,  $(x, y)$ . Na przykład  $[x, y) = \{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 < \lambda \leq 1\}$ , itd. Jeśli  $x \neq y$ , to  $[x, y]$  nazywamy *przedziałem domkniętym*, a  $(x, y)$  otwartym. Jeśli  $x = y$ , to  $[x, y] = \{x\}$  nie uważamy za przedział. Pozostałe oznaczenia będziemy stosować jedynie w przypadku  $x \neq y$ . Zamiast przedział będziemy też używać nazwy odcinek; (uwaga: pojedyncze punkty i zbiór pusty nie uważamy za odcinki). Konwencję tę będziemy stosować również dla  $X = \mathbb{R}$ , czyli na przykład  $[3, 2] = [2, 3]$ . Zatem użycie oznaczenia np.  $[x, y]$  dla  $x, y \in \mathbb{R}$  **nie** zakłada  $x < y$ . W przypadku  $\mathbb{R}$  dopuszczamy też końce równe  $\pm\infty$ .

W przestrzeni liniowej  $X$  odcinki  $[x, y]$  oraz  $[u, v]$  dla  $x \neq y$ ,  $u \neq v$  uważamy za *równoległe*, jeśli wektory  $y - x$  oraz  $v - u$  są równoległe, czyli gdy istnieje  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  taka, że  $y - x = \alpha(v - u)$ . Definicja ta pozostaje bez zmian dla pozostałych rodzajów odcinków, przy czym odcinki równoległe nie muszą być tego samego rodzaju.

Jeśli  $A \subset X$ , to przez  $\text{lin } A$  będziemy oznaczać podprzestrzeń przestrzeni  $X$  generowaną przez zbiór  $A$ . Jeśli ponadto  $B \subset X$ ,  $z \in X$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , to oznaczamy  $A + z := \{x + z : x \in A\}$ ,  $A \pm B := \{x \pm y : x \in A, y \in B\}$ ,  $\alpha A := \{\alpha x : x \in A\}$ .

Zbiór  $Q \subset X$  nazywamy *wypukłym*, jeśli zawiera każdy odcinek o końcach należących do  $Q$ . Jeżeli zbiór  $\text{int } Q$  zawiera wewnątrz każdego odcinka o końcach należących

do  $Q$ , to zbiór  $Q$  nazywamy *ściśle wypukłym*. Przez  $\text{conv } A$  będziemy oznaczać uwypuklenie zbioru  $A$ , czyli najmniejszy zbiór wypukły zawierający  $A$ .

Wszystkie przestrzenie liniowe w pracy są przestrzeniami nad ciałem liczb rzeczywistych. Liczb zespolonych nie będziemy używać.

Jeśli  $Q \subset X$  jest zbiorem wypukłym, to  $x \in Q$  nazywamy *punktem ekstremalnym*, jeśli nie należy do żadnego odcinka otwartego zawartego w  $Q$ , lub równoważnie, jeśli zachodzi implikacja:

$$x = \frac{y+z}{2} \quad \wedge \quad y, z \in Q \quad \Rightarrow \quad y = z = x.$$

Zbiór punktów ekstremalnych w  $Q$  oznaczamy przez  $\text{ext } Q$ .

Będziemy w pracy rozważali też przestrzenie liniowo-topologiczne, czyli przestrzenie liniowe zadaną topologią taką, że dodawanie i mnożenie przez skalar są funkcjami ciągłymi. Przestrzeń liniowo-topologiczną nazywamy *lokalnie wypukłą*, jeśli istnieje baza otoczeń zera złożona ze zbiorów wypukłych. Wiadomo, że w lokalnie wypukłych przestrzeniach topologicznych Hausdorffa istnieje baza otoczeń zera złożona ze zbiorów wypukłych i pochłaniających, tzn. zbiorów  $U$  mających tę własność, że dla  $x \in X$  istnieje  $\lambda > 0$  taka, że  $\lambda x \in U$ .

*Uporządkowaną przestrzeń liniową*  $\langle X, \leq \rangle$  nazywamy *przestrzeń liniową*  $X$  wraz z częściowym porządkiem spełniającym warunki:

$$\begin{aligned} x_1 \leq x_2 \quad \wedge \quad y_1 \leq y_2 &\Rightarrow x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2 \\ x \leq y \quad \wedge \quad \lambda \geq 0 &\Rightarrow \lambda x \leq \lambda y \end{aligned}$$

Jeśli dla każdej pary elementów z  $X$  istnieje kres dolny i kres górny w  $X$ , to  $\langle X, \leq \rangle$  nazywamy *kratką liniową*. Oznaczamy:

$$\begin{aligned} x \wedge y &:= \inf\{x, y\}, & x \vee y &:= \sup\{x, y\}, \\ x^+ &:= x \vee 0, & x^- &:= -(x \wedge 0), & |x| &:= x^+ + x^-. \end{aligned}$$

W kratkach liniowych prawdziwe są następujące wzory:

$$\begin{aligned} x &= x^+ - x^-, & x + y &= x \vee y + x \wedge y, & |x - y| &= x \vee y - x \wedge y. \\ |x| &= 0 \Rightarrow x = 0; & |\lambda x| &= |\lambda||x|, & |x + y| &\leq |x| + |y|. \\ |x \vee y - x_1 \vee y_1| &\leq |x - x_1| + |y - y_1|, & |x \wedge y - x_1 \wedge y_1| &\leq |x - x_1| + |y - y_1|. \end{aligned}$$

Stożkiem dodatnim przestrzeni liniowej uporządkowanej  $X$  nazywamy zbiór:

$$X^+ := \{x \in X : x \geq 0\}.$$

Oczywiście jest to zbiór wypukły.

Jeśli  $X$  jest uporządkowaną przestrzenią liniową (kratą liniową) i zarazem przestrzenią liniowo-topologiczną, to  $X$  nazywamy *przestrzenią uporządkowaną (kratą) liniowo-topologiczną*, jeśli istnieje baza otoczeń zera  $\mathcal{U}$  taka, że dla  $U \in \mathcal{U}$  zachodzi implikacja:

$$(x \in U \quad \wedge \quad y \in X \quad \wedge \quad |y| \leq |x|) \quad \Rightarrow \quad y \in U.$$

Wiadomo, że w uporządkowanych przestrzeniach liniowo-topologicznych Hausdorffa stożek dodatni jest domknięty, a jeśli przestrzeń jest kratą, to działania „ $\wedge$ ” oraz „ $\vee$ ” są ciągłe.

Ważnym przykładem przestrzeni liniowo-topologicznych są przestrzenie unormowane, w szczególności przestrzenie Banacha, których podstawowych własności nie przypominamy, gdyż są powszechnie znane. Jeśli  $X$  jest przestrzenią unormowaną, to  $B(X) := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$  będziemy nazywać *kulą jednostkową*, a  $S(X) := \{x \in X : \|x\| = 1\}$  będziemy nazywać *sferą jednostkową*. Jeśli przestrzeń unormowana jest też przestrzenią uporządkowaną, to oznaczamy:  $B^+(X) := \{x \in B(X) : x \geq 0\} = B(X) \cap X^+$ . Zbiór ten będziemy nazywać *dodatnią częścią kuli jednostkowej*. Jest on oczywiście domknięty i wypukły.

Przestrzenie unormowane  $X$  i  $Y$  będziemy nazywać *izometrycznie izomorficznymi* i oznaczać  $X \cong Y$ , jeśli są izomorficzne jako przestrzenie liniowe i odpowiedni izomorfizm zachowuje normę, tzn. jest izometrią.

*Kratą unormowaną* będziemy nazywać przestrzeń unormowaną z porządkiem kratowym spełniającym:

$$|x| \leq |y| \quad \Rightarrow \quad \|x\| \leq \|y\|.$$

Wiadomo, że krata unormowana jest kratą liniowo-topologiczną, w szczególności działania „ $\wedge$ ” i „ $\vee$ ” są ciągłe. Zachodzi też  $\|x\| = \||x|\|$ .

Funkcje rozpatrywane w pracy będą zwykle określone na pewnej przestrzeni miarowej. Przestrzeń miarową będziemy oznaczać przez  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ , gdzie  $\Omega$  jest zbiorem,  $\Sigma$

jest  $\sigma$ -ciałem jego podzbiorów, a  $\mu$  jest nieujemną miarą na  $\sigma$ -ciele  $\Sigma$ . W pracy ograniczymy się do miar  $\sigma$ -skończonych, czyli takich, dla których istnieje przedstawienie  $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ , gdzie  $\mu(\Omega_n) < +\infty$ . W szczególności każdy zbiór miary dodatniej zawiera podzbiór miary dodatniej skończonej. *Atomem* miary  $\mu$  nazywamy zbiór  $A \in \Sigma$  taki, że  $\mu(A) > 0$  oraz dla  $B \in \Sigma$ ,  $B \subset A$  zachodzi  $\mu(B) = 0$  lub  $\mu(B) = \mu(A)$ . Oczywiście dla miary  $\sigma$ -skończonej każdy atom ma miarę skończoną, atomy są parami prawie rozłączne lub prawie równe (tzn. dla atomów  $A, B$  zachodzi  $\mu(A \cap B) = 0$  lub  $\mu(A \div B) = 0$ , gdzie  $A \div B$  oznacza różnicę symetryczną zbiorów  $A$  i  $B$ ). Jeśli utożsamimy atomy prawie równe, miara  $\sigma$ -skończona może mieć co najwyżej przeliczalnie wiele atomów. Jeżeli  $\mu$  nie ma atomów, to miarę  $\mu$  nazywamy *bezatomową*. Jeżeli natomiast  $\Omega$  jest sumą atomów, to miarę  $\mu$  nazywamy *atomową*. Dla dowolnej miary  $\mu$  istnieje taki rozkład  $\Omega = \Omega_1 \dot{\cup} \Omega_2$  na zbiory rozłączne, że  $\mu \upharpoonright \Omega_1$  jest bezatomowa, natomiast  $\mu \upharpoonright \Omega_2$  jest atomowa. Niech  $\mathcal{N}$  oznacza  $\mathbb{N}$  gdy  $\mu$  ma nieskończenie wiele atomów, lub  $\{1, 2, \dots, N\}$  gdy  $\mu$  ma  $N$  atomów. W pracy zbiór atomów miary  $\mu$  będziemy zawsze oznaczać przez  $\{e_n : n \in \mathcal{N}\}$ .

Funkcję  $f: I \rightarrow [-\infty, +\infty]$  nazywamy *wypukłą* na przedziale  $I \subset \mathbb{R}$ , jeśli dla każdego  $t, s \in I$  oraz  $0 \leq \lambda \leq 1$  zachodzi:

$$f(\lambda t + (1 - \lambda)s) \leq \lambda f(t) + (1 - \lambda)f(s).$$

Jeśli dla  $t, s \in I$ ,  $t \neq s$ ,  $0 < \lambda < 1$  zachodzi:

$$f(\lambda t + (1 - \lambda)s) < \lambda f(t) + (1 - \lambda)f(s),$$

to  $f$  nazywamy *ściśle wypukłą* na  $I$ . Wiadomo, że jeśli  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  oraz  $I$  jest otwarty, a funkcja  $f$  jest wypukła, to  $f$  jest ciągła. Jeżeli jednak dopuścimy wartości  $\pm\infty$ , to jak później zobaczymy, w niektórych punktach wnętrza swojej dziedziny funkcja  $f$  może być nieciągła. Przytoczymy teraz dwie proste, ale użyteczne własności funkcji wypukłych.

**Lemat 1.1** *Jeżeli funkcja  $f$  jest wypukła na przedziale  $I$ ,  $x_1, x_2, x_3 \in I$ ,  $x_1 < x_2 < x_3$ , to  $f(x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_3)\}$ , a jeśli  $f(x_1) \neq f(x_3)$ , to nierówność jest ostra.*  $\square$

Z poniższego lematu będziemy korzystać w rozdziale czwartym:

**Lemat 1.2** *Jeśli funkcja  $f$  jest wypukła na pewnym przedziale oraz  $c > 0$ , to funkcja  $g(t) := f(t + c) - f(t)$  jest niemalejąca w swojej dziedzinie.*

*Dowód:*

Niech  $s < t$ . Ponieważ zachodzą tożsamości:

$$s + c = \frac{t - s}{t - s + c}s + \frac{c}{t - s + c}(t + c) \quad \text{oraz} \quad t = \frac{c}{t - s + c}s + \frac{t - s}{t - s + c}(t + c),$$

więc na mocy wypukłości funkcji  $f$  zachodzą nierówności:

$$\begin{aligned} f(s + c) &\leq \frac{t - s}{t - s + c}f(s) + \frac{c}{t - s + c}f(t + c), \\ f(t) &\leq \frac{c}{t - s + c}f(s) + \frac{t - s}{t - s + c}f(t + c) \end{aligned}$$

Po dodaniu powyższych nierówności stronami i przekształceniu otrzymamy  $f(s + c) - f(s) \leq f(t + c) - f(t)$  czyli  $g(s) \leq g(t)$ . □

Podamy teraz ważną definicję:

**Definicja 1.1** *Funkcję  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$  nazywamy funkcją Younga, jeśli spełnione są następujące warunki:*

- i)  $\varphi$  jest wypukła na  $\mathbb{R}$ ,
- ii)  $\varphi(0) = 0$ ,
- iii)  $\varphi$  jest parzysta, tzn.  $\varphi(-t) = \varphi(t)$  dla  $x \in \mathbb{R}$ ,
- iv)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty$ ,
- v)  $\varphi$  jest niemalejąca na  $(0, +\infty)$ ,
- vi) Istnieje  $x > 0$  takie, że  $0 < \varphi(x) < +\infty$ ,
- vii)  $\varphi$  jest lewostronnie ciągła na  $[0, +\infty)$ .

*Jeśli  $\varphi$  spełnia warunki i)—vi), to nazywać ją będziemy słabo Younga.*

Czasem w literaturze nie podaje się w definicji funkcji Younga wszystkich wymienionych wyżej własności. Na przykład w [14] podaje się tylko własności *i)*—*iv)*. Własność *v)* bowiem jest konsekwencją poprzednich, podajemy ją jednak dla jasności w definicji. Własność *vi)* wyklucza trywialny, ale niewygodny przypadek funkcji równej  $+\infty$  poza zerem. Jedynie warunek *vii)* zawęża nieco definicję z [14], ale jak zobaczymy niżej, że nie jest to zawężenie zbyt istotne, a przy tym jest użyteczne.

Dla ustalonej funkcji Younga  $\varphi$  wprowadzimy teraz **na stałe** następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} a(\varphi) &:= \sup \{ t : \varphi(t) = 0 \}; \\ c(\varphi) &:= \sup \{ t \geq 0 : \varphi(t) < +\infty \}. \end{aligned}$$

Oczywiście  $0 \leq a(\varphi) \leq c(\varphi) \leq +\infty$ ,  $0 < c(\varphi)$  oraz  $a(\varphi) < +\infty$ . Ponadto:

$$\varphi(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \in [-a(\varphi), a(\varphi)]$$

Powyższa równoważność zachodzi również w przypadku funkcji słabo Younga przy założeniu  $a(\varphi) < c(\varphi)$ . Ponadto funkcja słabo Younga jest rosnąca na  $[a(\varphi), c(\varphi))$  i malejąca na  $(-c(\varphi), a(\varphi)]$ , oraz ciągła na  $(-c(\varphi), c(\varphi))$ . Zauważmy, że jedynymi punktami ewentualnej nieciągłości funkcji (słabo) Younga są punkty  $-c(\varphi)$  oraz  $c(\varphi)$ . Zatem w przypadku, gdy  $c(\varphi) = +\infty$  funkcja Younga jest ciągła na  $\mathbb{R}$  i warunek *vii)* jest nieistotny. Jeśli  $0 < c(\varphi) < +\infty$  oraz  $\varphi$  spełnia warunki *ii)*–*iii)* definicji 1.1 oraz jest wypukłą na przedziale  $(-c(\varphi), c(\varphi))$  i równa  $+\infty$  na zbiorze  $(-\infty, -c(\varphi)) \cup (c(\varphi), +\infty)$ , to żeby była wypukłą na  $\mathbb{R}$  (i tym samym słabo Younga) powinien być spełniony warunek:

$$\lim_{t \rightarrow c(\varphi)^-} \varphi(t) \leq \varphi(c(\varphi)) \leq +\infty$$

Jeśli  $\varphi$  jest ograniczona na  $(-c(\varphi), c(\varphi))$ , to funkcja  $\varphi$  nie będzie wtedy ciągła na  $\mathbb{R}$ . A jeśli pierwszą nierówność w powyższym warunku zastąpimy równością, to  $\varphi$  będzie funkcją Younga.

Ustalmy jeszcze następujące oznaczenie — przez  $\varphi'_-(x)$  będziemy oznaczać lewo-, a przez  $\varphi'_+(x)$  prawostronną pochodną funkcji  $\varphi$  w punkcie  $x$ .



Ustalmy przestrzeń miarową  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  i niech  $\mathcal{M}$  oznacza zbiór wszystkich funkcji mierzalnych  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Jeśli  $\mu(\{\omega : f_1(\omega) \neq f_2(\omega)\}) = 0$ , to piszemy  $f_1 \stackrel{\text{a.e.}}{=} f_2$  i funkcje  $f_1$  oraz  $f_2$  nazywamy *prawie równymi* i utożsamiamy je. W podobny sposób będziemy utożsamiać funkcje prawie równe w dowolnych przestrzeniach funkcyjnych określonych na przestrzeni miarowej. W analogiczny sposób będziemy traktować nierówności między funkcjami i przeważnie będziemy opuszczać oznaczenie „a.e.”.

Niech  $\varphi$  będzie ustaloną funkcją (słabo) Younga. Definiujemy odwzorowanie  $I_\varphi: \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$  wzorem:

$$I_\varphi(x) := \int_{\Omega} \varphi(x(\omega)) d\mu.$$

Funkcję tę nazywamy *modularem* odpowiadającym funkcji (słabo) Younga  $\varphi$  (oraz mierze  $\mu$ ). Zdefiniujemy teraz dwie ważne przestrzenie:

$$L^\varphi(\mu) := \{x \in \mathcal{M} : \exists \lambda > 0 \quad I_\varphi(\lambda x) < +\infty\};$$

$$E^\varphi(\mu) := \{x \in \mathcal{M} : \forall \lambda > 0 \quad I_\varphi(\lambda x) < +\infty\}.$$

Łatwo sprawdzić, że są to przestrzenie (a nawet kraty) liniowe. Przestrzeń  $L^\varphi(\mu)$  nazywamy *przestrzenią Orlicza* odpowiadającą mierze  $\mu$  i funkcji (słabo) Younga  $\varphi$ . Znane są dwa różne (ale równoważne) sposoby unormowania przestrzeni  $L^\varphi(\mu)$ . Będziemy rozpatrywać w pracy tylko jeden z nich. Zdefiniujemy *normę Luxemburga* dla  $x \in L^\varphi(\mu)$ :

$$\|x\|_\varphi := \inf \left\{ \lambda > 0 : I_\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}.$$

Można wykazać, że jest to norma zupełna, a zatem  $\langle L^\varphi(\mu), \|\cdot\|_\varphi \rangle$  jest przestrzenią (a także kratą) Banacha. Dowód tej i innych własności przestrzeni Orlicza, które zaraz wymienimy pomijamy, gdyż można je znaleźć na przykład w [14]. Wiadomo też, że  $E^\varphi(\mu)$  jest domkniętą podprzestrzenią  $L^\varphi(\mu)$ , więc też jest przestrzenią (i kratą) Banacha. Dla ustalonego  $x \in L^\varphi(\mu)$  funkcja  $\ell_x: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$  określona wzorem  $\ell_x(\lambda) = I_\varphi(\lambda x)$  jest niemalejąca oraz dla  $\lambda_x := \sup\{\lambda > 0 : \ell_x(\lambda) < +\infty\}$  jest ciągła na  $[0, \lambda_x)$  (p. [14]). Wykażemy teraz ważny lemat:

**Lemat 1.3** *Jeśli  $\varphi$  jest funkcją Younga i miara  $\mu$  jest  $\sigma$ -skończona, to dla  $x \in L^\varphi(\mu)$  zachodzi:*

$$\|x\|_\varphi \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad I_\varphi(x) \leq 1$$

*Dowód:*

( $\Rightarrow$ ) Jeśli  $\|x\|_\varphi < 1$  lub infimum w definicji  $\|\cdot\|_\varphi$  jest realizowane, to teza jest oczywista. Niech  $\|x\|_\varphi = 1$  i niech infimum nie będzie realizowane. Wtedy dla  $\alpha = \frac{1}{\lambda} < 1$  zachodzi  $I_\varphi(\alpha x) \leq 1$ . Z założenia  $\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \varphi(\alpha x(\omega)) = \varphi(x(\omega))$  dla  $\omega \in \Omega$ . Gdyby  $I_\varphi(x) = +\infty$  to przyjmując  $A_n := \{\omega \in \Omega : \varphi(x(\omega)) \leq n\}$ , dla pewnego  $n \in \mathbb{N}$  zachodziłoby  $\int_{A_n} \varphi(x) d\mu > 2$ . Ponieważ  $\mu$  jest  $\sigma$ -skończona, zatem istniałby  $A \subset A_n$  miary skończonej taki, że  $\int_A \varphi(x) d\mu > 2$ . Ponieważ  $\varphi$  jest ciągła i ograniczona na  $x(A)$ , więc istnieje  $\alpha < 1$  takie, że  $|\varphi(t) - \varphi(\alpha t)| < \frac{1}{\mu(A)}$  dla  $t \in x(A)$ . Zatem:

$$\int_A \varphi(x) d\mu \leq \int_A |\varphi(x) - \varphi(\alpha x)| d\mu + \int_A \varphi(\alpha x) d\mu \leq 1 + 1 = 2,$$

co daje sprzeczność. Zatem  $I_\varphi(x) < +\infty$ . Na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej mamy  $I_\varphi(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} I_\varphi(\alpha x) \leq 1$ .

( $\Leftarrow$ ) Jeśli  $I_\varphi(x) \leq 1$ , to 1 należy do zbioru z prawej strony definicji  $\|\cdot\|_\varphi$ . Stąd  $\|x\|_\varphi \leq 1$ , co kończy dowód.  $\square$

**Uwaga:** Lemat powyższy jako Twierdzenie 3 ze str. 54 książki [14] jest podany bez założenia lewostronnej ciągłości funkcji  $\varphi$  (w naszej terminologii dla funkcji słabo Younga), ale jak zauważył M. Burnecki nie jest wtedy prawdziwy. Rzeczywiście, wystarczy wziąć trywialną miarę liczącą z jednym atomem oraz:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & \text{dla } t \in (-1, 1) \\ +\infty, & \text{dla } t \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \end{cases}.$$

Wtedy  $L^\varphi(\mu) = \mathbb{R}$ ,  $I_\varphi(x) = \varphi(x)$ ,  $\|x\|_\varphi = |x|$ . Zatem  $\|1\|_\varphi = 1$ , ale  $I_\varphi(1) = +\infty$ .

Ponieważ Lemat 1.3 w niektórych sytuacjach jest przydatny, powstaje naturalne pytanie, czy ograniczenie się do funkcji Younga zamiast słabo Younga nie ogranicza klasy badanych przestrzeni Orlicza. Odpowiedź na to pytanie daje następny lemat.

**Lemat 1.4** *Funkcja słabo Younga w punktach  $\pm c(\varphi)$  dla  $c(\varphi) < +\infty$  może przyjmować dowolną wartość z przedziału  $[\lim_{t \rightarrow c(\varphi)^-} \varphi(t), +\infty]$ , ale wartość ta nie ma wpływu na wartość normy Luxemburga. Ograniczenie się zatem do funkcji lewostronnie ciągłych w  $c(\varphi)$  nie ogranicza klasy rozpatrywanych przestrzeni.*

*Dowód*

O warunku dotyczącym wartości  $\varphi(c(\varphi))$  powiedzieliśmy już wcześniej. Niech  $\varphi \upharpoonright \mathbb{R} \setminus \{\pm c(\varphi)\} = \varphi_1 \upharpoonright \mathbb{R} \setminus \{\pm c(\varphi)\}$ , gdzie  $\varphi$  i  $\varphi_1$  są funkcjami słabo Younga. Wykażemy, że  $\|\cdot\|_\varphi = \|\cdot\|_{\varphi_1}$ .

Załóżmy nie wprost, że  $\|\cdot\|_\varphi \neq \|\cdot\|_{\varphi_1}$ . Niech na przykład  $\|x\|_\varphi < \|x\|_{\varphi_1}$ . Rozpatrzmy  $\|x\|_\varphi < \lambda < \lambda_1 < \|x\|_{\varphi_1}$ . Zachodzi wówczas:

$$\int_{\Omega} \varphi \left( \frac{x(\omega)}{\lambda} \right) d\mu \leq 1 \quad \text{oraz} \quad \int_{\Omega} \varphi_1 \left( \frac{x(\omega)}{\lambda} \right) d\mu > 1.$$

Zauważmy, że  $\mu(\{\omega : \frac{x(\omega)}{\lambda} > c(\varphi)\}) = 0$ , w przeciwnym bowiem razie pierwsza całka byłaby równa  $+\infty$ . Ponadto  $\mu(\{\omega : \frac{x(\omega)}{\lambda_1} = c(\varphi)\}) > 0$ , w przeciwnym bowiem razie obie całki byłyby równe. Analogicznie:

$$\mu \left( \left\{ \omega : \frac{x(\omega)}{\lambda_1} > c(\varphi) \right\} \right) = 0 \quad \text{oraz} \quad \mu \left( \left\{ \omega : \frac{x(\omega)}{\lambda_1} = c(\varphi) \right\} \right) > 0.$$

Ale

$$\left\{ \omega : \frac{x(\omega)}{\lambda_1} = c(\varphi) \right\} \subset \left\{ \omega : \frac{x(\omega)}{\lambda} > c(\varphi) \right\},$$

a więc  $\mu(\{\omega : \frac{x(\omega)}{\lambda} > c(\varphi)\}) > 0$ , co daje sprzeczność.  $\square$

Od tej pory możemy nie zajmować się funkcjami słabo Younga i zawsze zakładać, że  $\varphi$  jest lewostronnie ciągła w  $c(\varphi)$  o ile  $c(\varphi) < +\infty$ . Motywuje to naszą definicję — umożliwia bowiem stosowanie Lematu 1.3, a nie ogranicza ogólności rozważań.

Jedną z własności przestrzeni Orlicza, z której często będziemy korzystać bez specjalnego powoływania się jest następujący fakt:

**Fakt 1.1** *Jeśli  $\|x\|_\varphi = 1$ , to*

*albo  $I_\varphi(x) = 1$ , albo:*

*$I_\varphi(x) < 1$  oraz  $I_\varphi(\lambda x) = +\infty$  dla  $\lambda > 1$ .*

$\square$

Prosty dowód pomijamy. Z faktu tego wynika, że w przestrzeni  $E^\varphi(\mu)$  warunki  $\|x\|_\varphi = 1$  oraz  $I_\varphi(x) = 1$  są równoważne.

Przytoczymy jeszcze jedną własność modularu, którą wykorzystamy w rozdziale czwartym:

**Lemat 1.5** *Jeśli  $x, v \in L^\varphi(\mu)$ , to funkcja  $g: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$  określona wzorem  $g(\lambda) := I_\varphi(x + \lambda v)$  jest wypukła. Ponadto jeśli  $g(0), g(1) \leq 1$  oraz istnieje  $0 < \lambda_0 < 1$  takie, że  $g(\lambda_0) = 1$ , to  $g(\lambda) = 1$  dla każdego  $0 \leq \lambda \leq 1$ .*

*Dowód:*

Niech  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Wtedy:

$$\begin{aligned} g(\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2) &= I_\varphi(x + \alpha\lambda_1 v + (1-\alpha)\lambda_2 v) = \\ &= \int_{\Omega} \varphi(\alpha(x + \lambda_1 v) + (1-\alpha)(x + \lambda_2 v)) d\mu \leq \\ &\leq \alpha \int_{\Omega} \varphi(x + \lambda_1 v) d\mu + (1-\alpha) \int_{\Omega} \varphi(x + \lambda_2 v) d\mu = \\ &= \alpha g(\lambda_1) + (1-\alpha)g(\lambda_2), \end{aligned}$$

co kończy dowód pierwszej części naszego lematu. Część druga jest konsekwencją Lematu 1.1. □

Przypomnijmy, że kula jednostkowa  $B(X)$  w przestrzeni unormowanej  $X$  jest ściśle wypukła, jeśli dla  $x, y \in B(X)$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $x \neq y$  zachodzi  $\|\alpha x + (1-\alpha)y\| < 1$ . Wykażemy:

**Lemat 1.6** *Jeśli  $X \subset L^\varphi(\mu)$  jest podprzestrzenią  $L^\varphi(\mu)$  o tej własności, że dla każdego  $x \in X$  zachodzi równoważność:*

$$\|x\|_\varphi = 1 \quad \Leftrightarrow \quad I_\varphi(x) = 1,$$

*oraz jeśli  $\varphi$  jest ściśle wypukła, to  $B(X)$  jest ściśle wypukła.*

*Dowód:*

Przypuśćmy nie wprost, że istnieją  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ ,  $\|x\|_\varphi, \|y\|_\varphi \leq 1$ ,  $0 < \alpha < 1$  takie, że  $\|\alpha x + (1 - \alpha)y\| = 1$ . Ale z założenia:

$$\begin{aligned} 1 &= I_\varphi(\alpha x + (1 - \alpha)y) = \int_{\Omega} \varphi(\alpha x + (1 - \alpha)y) d\mu < \\ &< \int_{\Omega} (\alpha \varphi(x) + (1 - \alpha)\varphi(y)) d\mu = \alpha I_\varphi(x) + (1 - \alpha)I_\varphi(y) \leq \alpha + (1 - \alpha) = 1 \end{aligned}$$

skąd sprzeczność. Nierówność jest ostra, gdyż dla funkcji podcałkowych zachodzi nierówność nieostra, a na zbiorze miary dodatniej:  $\{\omega : x(\omega) \neq y(\omega)\}$  na mocy ścisłej wypukłości  $\varphi$  zachodzi  $\varphi(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha \varphi(x) + (1 - \alpha)\varphi(y)$ .  $\square$

Przy badaniu przestrzeni Orlicza będziemy często korzystać z następującego, dobrze znanego kryterium, którego prosty dowód pomijamy:

**Fakt 1.2** *Jeśli  $x \in L^\varphi(\mu)$  (odp.  $x \in E^\varphi(\mu)$ ) oraz  $x_n \in L^\varphi(\mu)$  (odp.  $x_n \in E^\varphi(\mu)$ ) dla  $n \in \mathbb{N}$ , to następujące warunki są równoważne:*

$$i) \lim_n \|x_n - x\|_\varphi = 0$$

$$ii) \forall \lambda > 0 \quad \lim_n I_\varphi(\lambda(x_n - x)) = 0 \quad (\text{odp. } \lim_n I_\varphi(x_n - x) = 0).$$

$\square$

Podamy teraz najważniejsze przykłady przestrzeni Orlicza.

Jeśli  $1 \leq p < +\infty$ , to  $\varphi(t) := \frac{|t|^p}{p}$  jest funkcją Younga. Można wykazać, że wtedy  $\|x\|_\varphi = \|x\|_p = \left( \int_{\Omega} |x|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$ , oraz  $L^\varphi(\mu) = E^\varphi(\mu) = L^p(\mu)$ .

Jeśli  $p > 1$  to  $\varphi$  jest funkcją ściśle wypukłą i taka jest też kula jednostkowa w przestrzeni  $L^p$ .

$$\text{Jeśli} \quad \varphi(t) := \begin{cases} 0, & \text{dla } t \in [-1, 1] \\ +\infty, & \text{dla } t \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \end{cases}, \quad \text{to}$$

$\|x\|_\varphi = \|x\|_\infty := \sup \text{ess} \{ |x(\omega)| : \omega \in \Omega \} := \sup \{ c : \mu(\{ \omega : |x(\omega)| > c \}) > 0 \}$  oraz  $L^\varphi(\mu) = L^\infty(\mu)$ .

Jeśli  $\mu$  jest miarą liczącą na  $\mathbb{N}$  (tzn.  $\mu(\{n\}) := 1$  dla  $n \in \mathbb{N}$ ), to przyjmuje się oznaczenie  $l^\varphi := L^\varphi(\mu)$ . Łatwo sprawdzić, że dla ostatnio rozpatrywanego  $\varphi$  i miary liczącej na  $\mathbb{N}$  zachodzi  $L^\varphi(\mu) = l^\infty$ , gdzie  $l^\infty$  jest przestrzenią ciągów ograniczonych z normą supremum. Zauważmy, że przestrzeń  $L^\varphi(\mu)$  jest skończenie wymiarowa jedynie gdy  $\mu$  jest miarą atomową o skończonej liczbie atomów. Warto też wiedzieć, że  $L^\varphi(\mu)$  jest izometryczna z  $L^\infty(\mu)$  jedynie w sytuacji  $0 < a(\varphi) = c(\varphi) < +\infty$ .

Wprowadźmy jeszcze jedno pojęcie i oznaczenie. Jeśli  $\mu$  jest miarą na  $\Omega$ ,  $\Omega_1 \subset \Omega$  oraz  $X$  jest jakąś przestrzenią funkcyjną (np.  $L^\varphi(\mu)$  lub  $E^\varphi(\mu)$ ) której elementami są funkcje określone na  $\Omega$ , natomiast  $Y$  jest jej podprzestrzenią złożoną z funkcji określonych na  $\Omega_1$ , to *rzutem* punktu  $x \in X$  na podprzestrzeń  $Y$  nazywamy funkcję  $x \upharpoonright \Omega_1$ , o ile ona należy do  $Y$  — co zawsze będzie miało miejsce w konkretnych sytuacjach. Rzut ten będziemy oznaczać przez  $\text{Pr}_Y x$ .

W teorii przestrzeni Orlicza ważną rolę odgrywa tzw. *warunek*  $\Delta_2$  dla funkcji Younga  $\varphi$ . Klasycznie się go rozpatrywało przy założeniu  $c(\varphi) = +\infty$ , czyli  $\varphi: \rightarrow [0, +\infty)$ . (Jeśli dodatkowo  $a(\varphi) = 0$ , to takie funkcje nazywają się *funkcjami Orlicza*). Jest to żądanie postaci  $\varphi(2t) \leq K\varphi(t)$  dla pewnej stałej  $K > 0$ , przy czym jeśli nierówność zachodzi dla wszystkich dodatnich  $t$ , to warunek nazywa się *globalnym warunkiem*  $\Delta_2$ , a jeśli dla  $t$  większych od pewnego  $t_0 > 0$ , to wtedy nazywa się *warunkiem*  $\Delta_2$  *dla dużych*  $t$ , jeśli natomiast dla  $t > 0$  mniejszych od pewnego  $t_0 > 0$ , to nazywamy go *warunkiem*  $\Delta_2$  *dla małych*  $t$ , lub krócej *warunkiem*  $\delta_2$ . Nie będziemy w tym miejscu opisywać roli tych warunków w teorii przestrzeni Orlicza, gdyż wynikną one z teorii znacznie ogólniejszej. Teoria ta jest stosowana w pracy [19] i będzie wykorzystywana również w niniejszej pracy, zatem przedstawimy ją teraz szczegółowiej. Podstawą jej będą definicje uogólniające warunek  $\Delta_2$  tak, aby mogły być stosowane w ogólnej sytuacji badanej przez nas. Warunki te będą zależeć nie tylko od funkcji  $\varphi$ , ale także od miary  $\mu$ . Po definicji zgromadzimy najważniejsze wyniki wyjaśniające jej rolę w jednym, wielopunktowym lemacie. Chociaż są to wyniki znane (cytowane przez M. Wisłę w [19]) przedstawimy również ich dowód. Najtrudniejszy fragment dowodu będzie wzorowany na Lemacie 4 z pracy [19] ze str. 510.

Podamy teraz definicje. W obydwu poniższych definicjach  $\varphi$  jest funkcją Younga,  $\mu$  jest miarą  $\sigma$ -skończoną, natomiast  $r > 1$  jest ustaloną liczbą rzeczywistą.

**Definicja 1.2**  $\varphi \in \Delta_r(\mu)$  wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z trzech warunków:

- a)  $\mu$  jest bezatomowa oraz istnieją  $c > 1$  oraz  $a_0 \geq 0$  takie, że  $\varphi(a_0) < +\infty$ , a w przypadku  $\mu(\Omega) = +\infty$  również  $a_0 = 0$  takie, że dla  $t > a_0$  zachodzi  $\varphi(rt) \leq c\varphi(t)$ .
- b)  $\mu$  jest atomowa i istnieją  $b > 0$ ,  $c > 1$  oraz ciąg liczb nieujemnych  $(d_n)_{n \in \mathcal{N}}$  spełniający  $\sum_{n \in \mathcal{N}} d_n < +\infty$  takie, że dla każdego  $n \in \mathcal{N}$  oraz dla  $t$  spełniającego  $\varphi(t)\mu(e_n) \leq b$  zachodzi  $\varphi(rt)\mu(e_n) \leq c\varphi(t)\mu(e_n) + d_n$ .
- c)  $\mu$  ma części bezatomowe i atomowe dodatniej miary równe odpowiednio  $\Omega_1$  oraz  $\Omega_2$ , przy czym  $\varphi \in \Delta_r(\mu \upharpoonright \Omega_1)$  oraz  $\varphi \in \Delta_r(\mu \upharpoonright \Omega_2)$ .

**Definicja 1.3**  $\varphi \in \Delta_r^0(\mu)$  wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z dwóch warunków:

- a) Bezatomowa część  $\mu$  ma dodatnią miarę oraz istnieją  $a_0 > 0$  oraz  $c > 1$  takie, że  $0 < \varphi(a_0) < +\infty$ , oraz  $\varphi(rt) \leq c\varphi(t)$  dla  $|t| \leq a_0$ .
- b)  $\mu$  jest atomowa i istnieją  $a_0 > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 1$ ,  $0 < \varphi(a_0) < +\infty$  oraz ciąg nieujemnych liczb  $(d_n)_{n \in \mathcal{N}}$  spełniający  $\sum_{n \in \mathcal{N}} d_n < +\infty$ , oraz dla każdego  $n \in \mathcal{N}$  i dla  $t$  spełniającego  $\varphi(t)\mu(e_n) \leq b$ ,  $|t| \leq a_0$  zachodzi  $\varphi(rt)\mu(e_n) \leq c\varphi(t)\mu(e_n) + d_n$ .

Najważniejsze własności wprowadzonych pojęć zgromadzimy w następującym lemacie:

**Lemat 1.7** Pojęcia  $\Delta_r(\mu)$  oraz  $\Delta_r^0(\mu)$  mają następujące własności:

1. Jeśli  $1 < r' \leq r$  oraz  $\varphi \in \Delta_r(\mu)$ , to  $\varphi \in \Delta_{r'}(\mu)$ . Analogiczną cechę ma własność  $\Delta_r^0(\mu)$ .
2. Jeśli  $c(\varphi) = +\infty$ , to następujące warunki są równoważne:

- (a) istnieje  $r > 1$  takie, że  $\varphi \in \Delta_r(\mu)$
  - (b) dla każdego  $r > 1$  zachodzi  $\varphi \in \Delta_r(\mu)$
  - (c)  $\varphi \in \Delta_2(\mu)$
3. Jeśli  $\mu$  jest bezatomowa i istnieje  $r > 1$  takie, że  $\varphi \in \Delta_r(\mu)$ , to  $c(\varphi) = +\infty$ .
4. Jeśli  $\mu$  jest bezatomowa, to warunki (a), (b), (c) z punktu 2 są równoważne.
5. Jeśli  $\mu$  jest atomowa,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(e_n) = +\infty$  oraz  $\varphi \in \Delta_r(\mu)$  lub  $\Delta_r^0(\mu)$  dla pewnego  $r > 1$ , to  $a(\varphi) = 0$ .
6. Jeśli  $\mu$  jest atomowa z nieskończoną liczbą atomów oraz  $0 < \inf\{\mu(e_n) : n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{\mu(e_n) : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$ , to warunki (a), (b), (c) z punktu 2 są równoważne i są zarazem równoważne warunkowi  $\delta_2$ .
7. Jeśli  $0 < a(\varphi) \leq c(\varphi) < +\infty$ , to  $\varphi \notin \Delta_r(\mu)$  dla  $r > \frac{c(\varphi)}{a(\varphi)}$ .
8. Jeśli  $\dim L^\varphi(\mu) < +\infty$ , to następujące warunki są równoważne:
- (a) istnieje  $r > 1$  takie, że  $\varphi \in \Delta_r(\mu)$ ,
  - (b)  $L^\varphi(\mu) \not\cong L^\infty(\mu)$  (lub inaczej  $a(\varphi) < c(\varphi)$ ).
9. Jeśli  $\varphi \notin \Delta_r(\mu)$  dla każdego  $r > 1$ , to istnieje  $x \in L^\varphi(\mu)$  takie, że  $\|x\|_\varphi = 1$  oraz  $I_\varphi(x) < 1$ .
10. Jeśli  $c(\varphi) = +\infty$ , to następujące warunki są równoważne:
- (a)  $\forall x \in L^\varphi(\mu) \quad I_\varphi(x) = 1 \Leftrightarrow \|x\|_\varphi = 1$ ,
  - (b)  $\varphi \in \Delta_2(\mu)$
11. Jeśli bezatomowa część  $\Omega_1$  miary  $\mu$  jest dodatnia oraz  $\varphi \in \Delta_r^0(\mu)$ , to  $\varphi \in \Delta_r^0(\mu)$ .
12. Jeśli miara bezatomowej części  $\mu$  jest nieskończona lub zerowa oraz dla pewnego  $r > 1$  zachodzi  $\varphi \in \Delta_r(\mu)$ , to  $\varphi \in \Delta_r^0(\mu)$ .
13. Jeśli  $\dim L^\varphi(\mu) < +\infty$  oraz  $L^\varphi(\mu) \not\cong L^\infty(\mu)$ , to  $\varphi \in \Delta_r^0(\mu)$  dla pewnego  $r > 1$ .



14. Jeśli  $c(\varphi) = +\infty$ , to następujące warunki są równoważne:

- (a) istnieje  $r > 1$  takie, że  $\varphi \in \Delta_r^0(\mu)$
- (b) dla każdego  $r > 1$  zachodzi  $\varphi \in \Delta_r^0(\mu)$
- (c)  $\varphi \in \Delta_2^0(\mu)$ .

15. Jeśli  $\varphi \in \Delta_r^0(\mu)$  dla pewnego  $r > 1$  oraz  $x \in L^\varphi(\mu)$  spełnia  $\|x\|_\infty < c(\varphi)$ , to:  
 $\|x\|_\varphi = 1 \Leftrightarrow I_\varphi(x) = 1$ .

16.  $E^\varphi(\mu) = L^\varphi(\mu) \Leftrightarrow (c(\varphi) = +\infty \wedge \varphi \in \Delta_2(\mu))$ .

*Dowód:*

1. Bezpośrednio z definicji.

2. (a) $\Rightarrow$ (b) Załóżmy, że istnieje  $r > 1$  takie, że  $\varphi \in \Delta_r(\mu)$ . Załóżmy najpierw, że  $\mu$  jest bezatomowa. Wtedy istnieje  $c > 1$  takie, że  $\varphi(rt) \leq c\varphi(t)$  dla  $t \geq a_0$ , przy czym  $a_0 = 0$  gdy  $\mu(\Omega) = +\infty$ . Dla  $t \geq \frac{a_0}{r} \geq a_0$  zachodzi  $\varphi(r^2t) \leq c\varphi(rt) \leq c^2\varphi(t)$ , czyli  $\varphi \in \Delta_{r^2}(\mu)$ . Załóżmy teraz, że  $\mu$  jest atomowa. Wtedy istnieją  $c > 1$ ,  $b > 0$ ,  $d_n \geq 0$  dla  $n \in \mathcal{N}$  takie, że  $\sum_{n \in \mathcal{N}} d_n < +\infty$ , oraz dla każdego  $n \in \mathcal{N}$  i  $t$  spełniającego  $\varphi(t)\mu(e_n) \leq b$  zachodzi  $\varphi(rt)\mu(e_n) \leq c\varphi(t)\mu(e_n) + d_n$ . Niech  $b_1 := \frac{b}{2c}$ ,  $c_1 := c^2$ ,  $n_0 \in \mathbb{N}$  będzie takie, że dla  $n \geq n_0$ ,  $n \in \mathcal{N}$  zachodzi  $d_n < \frac{b}{2}$  oraz niech:

$$d'_n := \begin{cases} \sup \{ \varphi(r^2t)\mu(e_n) : t > 0 \wedge \varphi(t)\mu(e_n) \leq b_1 \}, & \text{dla } n < n_0 \\ (c+1)d_n, & \text{dla } n \geq n_0 \end{cases}$$

Ponieważ  $c(\varphi) = +\infty$ , więc  $\sum_{n \in \mathcal{N}} d'_n < +\infty$ .

Niech  $\varphi(t)\mu(e_n) \leq b_1$ . Jeśli  $n < n_0$ , to:

$$\varphi(r^2t)\mu(e_n) \leq d'_n \leq c_1\varphi(t)\mu(e_n) + d'_n.$$

Jeśli  $n \geq n_0$ , to wobec  $b_1 \leq b$  zachodzi  $\varphi(rt)\mu(e_n) \leq c\varphi(t)\mu(e_n) + d_n \leq cb_1 + d_n \leq \frac{b}{2} + \frac{b}{2} =$   
czyli:

$$\varphi(r^2t)\mu(e_n) \leq c\varphi(rt)\mu(e_n) + d_n \leq c(c\varphi(t)\mu(e_n) + d_n) + d_n = c_1\varphi(t)\mu(e_n) + d'_n,$$

czyli  $\varphi \in \Delta_{r^2}(\mu)$ .

Kompilacja tych faktów pokazuje, że dla  $\varphi$  oraz  $\mu$  spełniających  $c(\varphi) = +\infty$  oraz  $\varphi \in \Delta_r(\mu)$  zachodzi  $\varphi \in \Delta_{r^2}(\mu)$ . Na mocy indukcji wynika stąd, że  $\varphi \in \Delta_{r^{2^k}}(\mu)$  dla każdego  $k \in \mathbb{N}$ . Ponieważ  $\lim_k r^{2^k} = +\infty$ , więc z powyższego oraz z punktu 1 wynika (b).

Implikacje (b) $\Rightarrow$ (c) oraz (c) $\Rightarrow$ (a) są trywialne.

3. Jeśli  $\varphi \in \Delta_r(\mu)$  oraz  $c(\varphi) < +\infty$ , to niech  $a_0 \leq t < +\infty$  będzie takie, że  $rt > c(\varphi)$ . Wtedy  $+\infty = \varphi(rt) \leq c\varphi(t) < +\infty$ , co daje sprzeczność.

4. Wynika natychmiast z punktów 3 i z 2.

5. Załóżmy, że  $a(\varphi) > 0$ . Wtedy  $\varphi(a(\varphi)) = 0$ , ale  $\varphi(ra(\varphi)) > 0$ . Z założenia wynika, że  $\mathcal{N} = \mathbb{N}$  oraz dla  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi  $\varphi(a(\varphi))\mu(e_n) \leq b$ , więc

$$\varphi(ra(\varphi))\mu(e_n) \leq c\varphi(a(\varphi))\mu(e_n) + d_n = d_n,$$

zatem po zsumowaniu  $+\infty = \varphi(ra(\varphi)) \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(e_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} d_n < +\infty$ , co daje sprzeczność.

6. (a) $\Rightarrow$ (b) Niech  $k := \inf\{\mu(e_n) : n \in \mathbb{N}\}$ ,  $s := \sup\{\mu(e_n) : n \in \mathbb{N}\}$ . Niech dla pewnego  $r > 1$  zachodzi  $\varphi \in \Delta_r(\mu)$ , przy czym  $b, c, d_n$  niech będą odpowiednimi stałymi. Wtedy dla  $\varphi(t) \leq \frac{b}{s}$  zachodzi  $\varphi(t)\mu(e_n) \leq \frac{b}{s} \cdot s = b$ , czyli

$$k\varphi(rt) \leq \varphi(rt)\mu(e_n) \leq c\varphi(t)\mu(e_n) + d_n \leq cs\varphi(t) + d_n,$$

a więc  $\varphi(rt) \leq \frac{cs}{k}\varphi(t) + \frac{d_n}{k}$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ . Ponieważ atomów jest nieskończenie wiele oraz  $\lim_n d_n = 0$ , więc dla  $b_1 := \frac{b}{s}$ ,  $c_1 := \frac{cs}{k}$  zachodzi:

$$\varphi(t) \leq b_1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(rt) \leq c_1\varphi(t).$$

W przypadku  $r = 2$  jest to warunek  $\delta_2$ . Niech  $b_1 \geq b_2 > 0$  będą takie, że:

$$\varphi(t) \leq b_2 \quad \Rightarrow \quad \varphi(rt) \leq b_1.$$

Zatem dla  $\varphi(t) \leq b_2$  zachodzi  $\varphi(r^2t) \leq c_1\varphi(rt) \leq c_1^2\varphi(t)$ . Niech  $b' := b_1k$ ,  $c' := c_1^2$ . Niech  $n \in \mathbb{N}$  oraz niech  $t$  spełnia  $\varphi(t)\mu(e_n) \leq cb'$ , czyli  $\varphi(t) \cdot k \leq \varphi(t)\mu(e_n) \leq b'$ , czyli  $\varphi(t) \leq \frac{b'}{k} = b_1$ , a więc  $\varphi(r^2t) \leq c'\varphi(t)$ , czyli  $\varphi(r^2t)\mu(e_n) \leq c'\varphi(t)\mu(e_n) + d_n$ , a więc  $\varphi \in \Delta_{r^2}$ . Tak jak w punkcie 2 wynika z tego, że dla każdego  $r > 1$  zachodzi  $\varphi \in \Delta_r(\mu)$ .

Pozostałe implikacje są oczywiste.

7. Jeśli  $r > \frac{c(\varphi)}{a(\varphi)}$ , to dla każdego  $a(\varphi) \leq t \leq c(\varphi)$  zachodzi  $rt > c(\varphi)$ , czyli  $\varphi(rt) = +\infty$ . Gdy w definicji własności  $\Delta_r(\mu)$  wstawimy  $t = \max\{a(\varphi), a_0\}$  lub  $t = a(\varphi)$ , w zależności od przypadku, łatwo otrzymujemy sprzeczność.

8. (a) $\Rightarrow$ (b) Jeśli  $L^\varphi(\mu) \cong L^\infty(\mu)$ , to  $0 < a(\varphi) = c(\varphi)$  oraz na mocy punktu 7 zachodzi  $\varphi \notin \Delta_r(\mu)$  dla  $r > \frac{c(\varphi)}{a(\varphi)} = 1$ .

(b) $\Rightarrow$ (a) Jeśli  $L^\varphi(\mu) \not\cong L^\infty(\mu)$ , to  $a(\varphi) < c(\varphi)$ . Niech  $1 < r < \frac{c(\varphi)}{a(\varphi)}$  ( $< +\infty$  gdy  $a(\varphi) = 0$ ). Niech  $k$  oraz  $s$  będą takie, jak w dowodzie punktu 6. Niech  $b > 0$  będzie takie, że dla  $t > 0$  spełniających  $\varphi(t) \leq \frac{b}{k}$  zachodzi  $rt < c(\varphi) - \varepsilon$  dla pewnego ustalonego  $\varepsilon > 0$ . Niech  $d_n = \varphi(c(\varphi) - \varepsilon)s$  dla  $n \leq \dim L^\varphi(\mu)$ . Wtedy dla  $\varphi(t)\mu(e_n) \leq b$  zachodzi  $k\varphi(t) \leq \varphi(t)\mu(e_n) \leq b$ , a więc  $\varphi(t) \leq \frac{b}{k}$ , czyli  $rt \leq c(\varphi) - \varepsilon$ , więc

$$\varphi(rt)\mu(e_n) \leq \varphi(rt)s \leq \varphi(c(\varphi) - \varepsilon)s = d_n \leq c\varphi(a)\mu(e_n) + d_n,$$

przy czym  $c > 0$  jest dowolne, czyli  $\varphi \in \Delta_r(\mu)$ .

9. Jeśli  $\mu$  ma niezerową część bezatomową  $\Omega_1$ , to na tej części  $\varphi \notin \Delta_2(\mu)$ . Zatem można skonstruować  $x \in L^\varphi(\mu \upharpoonright \Omega_1)$  taki, że  $\|x\|_\varphi = 1$  oraz  $I_\varphi(x) < 1$ . Wtedy bowiem  $\varphi \notin \Delta_2$  w klasycznym sensie — globalnie lub dla dużych  $t$  — i można zastosować odpowiednie twierdzenie z książki [14]. Jeżeli przyjmiemy  $x \upharpoonright \Omega \setminus \Omega_1 := 0$ , to tak przedłużony  $x$  również spełnia żądany warunek. Należy rozważyć przypadek miary atomowej. Dowód jest bardzo podobny do dowodu Lematu z pracy Wisły [19]. Gdyby  $\dim L^\varphi(\mu) < \infty$ , to na mocy punktu 8 zachodziłoby  $L^\varphi(\mu) \cong L^\infty(\mu)$  i można wtedy przyjąć  $x \equiv c(\varphi) = a(\varphi)$ . Przykład ten rozwiązuje problem również w przy-

padku nieskończonego wymiaru i  $a(\varphi) = c(\varphi)$ . Zatem można założyć, że atomów jest nieskończenie wiele i  $a(\varphi) < c(\varphi)$ .

Położmy dla  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\alpha_n(k) := \sup \left\{ \varphi \left( \left(1 + \frac{1}{k}\right) t \right) \mu(e_n) : \varphi(t) \mu(e_n) \leq \frac{1}{2^{k+1}} \wedge \varphi \left( \left(1 + \frac{1}{k}\right) t \right) > 2^{k+1} \varphi(t) \right\},$$

przy czym jeśli rozpatrywany zbiór jest pusty, to przyjmujemy  $\alpha_n(k) = 0$ .

Oczywiście  $0 \leq \alpha_n(k) \leq +\infty$  oraz dla  $k, n \in \mathbb{N}$  i dla  $t \in \mathbb{R}$  spełniających  $\varphi(t) \mu(e_n) \leq \frac{1}{2^{k+1}}$  zachodzi:

$$\varphi \left( \left(1 + \frac{1}{k}\right) t \right) \mu(e_n) \leq 2^{k+1} \varphi(t) \mu(e_n) + \alpha_n(k).$$

Ponieważ  $\varphi \notin \Delta_{1+\frac{1}{k}}(\mu)$ , więc  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n(k) = +\infty$  dla każdego  $k \in \mathbb{N}$ . Można znaleźć nieskończony zbiór  $K \subset \mathbb{N}$  oraz rodzinę parami rozłącznych zbiorów  $\{N_k \subset \mathbb{N} : k \in K\}$  takich, że  $\alpha_n(k) > 0$  dla  $n \in N_k$  oraz  $\sum_{n \in N_k} \alpha_n(k) > 2$  dla każdego  $k \in K$ . Konstrukcję tych zbiorów przeprowadzamy indukcyjnie względem  $k \in \mathbb{N}$ , przy czym dla tych  $k$ , dla których istnieje  $n$  takie, że  $\alpha_n(k) = +\infty$  przyjmujemy  $k \in K$  oraz wybieramy  $N_k := \{n\}$  w przypadku, gdy liczba  $n$  nie wystąpiła we wcześniej skonstruowanych zbiorach postaci  $N_i$ , natomiast jeśli  $n$  zostało już użyte, to przyjmujemy  $k \notin K$ . Konstrukcja mogłaby się nie udać jedynie w przypadku, gdyby dla pewnego  $n$  i dla nieskończenie wielu  $k$  zachodziłoby  $\alpha_n(k) = +\infty$ , co jest możliwe jedynie w przypadku, gdy  $a(\varphi) = c(\varphi)$ , który wykluczaliśmy.

Na mocy definicji  $\alpha_n(k)$  dla każdego  $k \in K$  oraz  $n \in N_k$  możemy znaleźć taką liczbę  $\beta_n(k)$ , że:

$$\varphi(\beta_n(k)) \mu(e_n) \leq \frac{1}{2^{k+1}}, \quad \varphi \left( \left(1 + \frac{1}{k}\right) \beta_n(k) \right) > 2^{k+1} \varphi(\beta_n(k))$$

oraz

$$\varphi \left( \left(1 + \frac{1}{k}\right) \beta_n(k) \right) \mu(e_n) > \begin{cases} \alpha_n(k) - 2^{-n}, & \text{gdy } \alpha_n(k) < +\infty \\ 1, & \text{gdy } \alpha_n(k) = +\infty \end{cases}$$

Wtedy:

$$\sum_{n \in N_k} \varphi \left( \left(1 + \frac{1}{k}\right) \beta_n(k) \right) \mu(e_n) > 1 \quad \text{dla każdego } k \in K.$$

Dla  $k \in K$  połóżymy:

$$n_k := \max \left\{ p \in N_k : \sum_{n \in N_k, n \leq p} \varphi \left( \left(1 + \frac{1}{k}\right) \beta_n(k) \right) \mu(e_n) < 1 \right\},$$

przy czym kładziemy  $n_k := 0$ , jeśli rozpatrywany zbiór jest pusty. Przyjmiemy:

$$m_k := \min \{ n \in N_k : n > n_k \} \quad \text{oraz} \quad x_k := \sum_{n \in N_k \cap \{1, 2, \dots, m_k\}} \beta_n(k) \chi_{e_n}.$$

Wtedy:

$$\begin{aligned} I_\varphi(x_k) &= \sum_{n \in N_k, n \leq n_k} \varphi(\beta_n(k)) \mu(e_n) + \varphi(\beta_{m_k}(k)) \mu(e_{m_k}) \leq \\ &\leq \sum_{n \in N_k, n \leq n_k} \frac{1}{2^{k+1}} \varphi \left( \left(1 + \frac{1}{k}\right) \beta_n(k) \right) \mu(e_n) + \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k}. \end{aligned}$$

Ponadto zachodzi:

$$I_\varphi \left( \left(1 + \frac{1}{k}\right) x_k \right) = \sum_{n \in N_k, n \leq m_k} \varphi \left( \left(1 + \frac{1}{k}\right) \beta_n(k) \right) \mu(e_n) \geq 1.$$

Położmy  $x := \sum_{k \in K} x_k$ . Wtedy  $I_\varphi(x) < \sum_{k \in K} \frac{1}{2^k} \leq 1$  oraz

$$I_\varphi \left( \left(1 + \frac{1}{k}\right) x \right) \geq \sum_{n \in N} 1 = +\infty \quad \text{dla każdego } k \in K, \text{ czyli } \|x\|_\varphi = 1.$$

10. (a) $\Rightarrow$ (b) Załóżmy, że  $\varphi \notin \Delta_2(\mu)$ . Zatem na mocy punktu 2 dla każdego  $r > 1$  zachodzi  $\varphi \notin \Delta_r(\mu)$ . Zatem na mocy punktu 9 istnieje  $x \in L^\varphi(\mu)$  taki, że  $\|x\|_\varphi = 1$  oraz  $I_\varphi(x) < 1$ , co kończy dowód implikacji ( $\Rightarrow$ ).

(b) $\Rightarrow$ (a) Załóżmy, że  $\varphi \in \Delta_2(\mu)$ . Jeśli  $\mu$  jest bezzatomowa, to istnieje  $c > 1$  oraz  $a_0 \geq 0$  takie, że  $\varphi(2t) \leq c\varphi(t)$  dla  $t \geq a_0$ , przy czym jeśli  $\mu(\Omega) = +\infty$ , to  $a_0 = 0$ . Jeśli  $I_\varphi(x) = 1$ , to oczywiście  $\|x\|_\varphi = 1$ . Jeśli  $\|x\|_\varphi = 1$  i  $I_\varphi(x) \neq 1$ , to musiałoby być  $I_\varphi(x) < 1$  oraz dla każdego  $\lambda > 1$  zachodziłoby  $I_\varphi(\lambda x) = +\infty$ , zatem:

$$\begin{aligned} +\infty &= I_\varphi(2x) = \int_{\Omega} \varphi(2x) d\mu = \int_{\{\omega: x(\omega) < a_0\}} \varphi(2x) d\mu + \int_{\{\omega: x(\omega) \geq a_0\}} \varphi(2x) d\mu \leq \\ &\leq \mu(\Omega)\varphi(2a_0) + c \int_{\Omega} \varphi(x) d\mu \leq \mu(\Omega)\varphi(2a_0) + c < +\infty, \end{aligned}$$

gdyż w przypadku  $\mu(\Omega) = +\infty$  zachodzi  $\mu(\Omega)\varphi(2a_0) = 0$ . Stąd sprzeczność.

Jeśli  $\mu$  jest atomowa, to dla  $n \in \mathcal{N}$  i dla  $t$  spełniającego warunek  $\varphi(t)\mu(e_n) \leq b$  zachodzi  $\varphi(2t)\mu(e_n) \leq c\varphi(t)\mu(e_n) + d_n$ , gdzie odpowiednie stałe spełniają warunki definicji 1.2. Jeśli  $\|x\|_\varphi = 1$ , ale  $I_\varphi(x) < 1$  oraz  $I_\varphi(2x) = +\infty$ , to przyjmując  $x = \sum_{n \in \mathcal{N}} x_n \chi_{e_n}$  otrzymamy  $I_\varphi(x) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \varphi(x_n)\mu(e_n) < 1$ , czyli istnieje  $n_0 \in \mathcal{N}$  takie, że dla  $n \geq n_0$ ,  $n \in \mathcal{N}$  zachodzi  $\varphi(x_n)\mu(e_n) \leq b$ , czyli  $\varphi(2x_n)\mu(e_n) \leq c\varphi(x_n)\mu(e_n) + d_n$ , zatem:

$$\begin{aligned} +\infty &= I_\varphi(2x) = \sum_{n < n_0, n \in \mathcal{N}} \varphi(2x_n)\mu(e_n) + \sum_{n \geq n_0, n \in \mathcal{N}} \varphi(2x_n)\mu(e_n) \leq \\ &\leq \sum_{n < n_0, n \in \mathcal{N}} \varphi(2x_n)\mu(e_n) + c \sum_{n \geq n_0, n \in \mathcal{N}} \varphi(x_n)\mu(e_n) + \sum_{n \geq n_0, n \in \mathcal{N}} d_n < +\infty. \end{aligned}$$

Sprzeczność dowodzi (a) w przypadku atomowym. W przypadku ogólnym należy rozbić  $\Omega$  na część atomową i bezatomową i zauważyć, że ewentualny kontrprzykład musiałby być kontrprzykładem na jednej z tych części.

11. Oczywiście.

12. Jeśli  $\mu$  jest atomowa,  $\varphi \in \Delta_r(\mu)$ , to  $a_0$  spełniające  $0 < \varphi(a_0) < +\infty$  można wybrać dowolnie. Jest to możliwe, gdyż na mocy 8 musi zachodzić  $a(\varphi) < c(\varphi)$ . Zatem  $\varphi \in \Delta_r^0(\mu)$ . Jeśli miara  $\mu$  ma nieskończoną część bezatomową, to istnieje  $c > 1$  takie, że  $\varphi(rt) \leq c\varphi(t)$  dla każdego  $t$  i można wybrać dowolne  $a_0$  spełniające  $0 < \varphi(a_0) < +\infty$ .

13. Niech  $\dim L^\varphi(\mu) < \infty$  oraz  $L^\varphi(\mu) \not\cong L^\infty(\mu)$ , ale  $\varphi \notin \Delta_r^0(\mu)$  dla każdego  $r > 1$ . Na mocy punktu 12 zachodzi  $\varphi \notin \Delta_r(\mu)$  dla  $r > 1$ , a to przeczy 8.

14. Dowód jest podobny do dowodu punktu 2, nietrywialna jest tylko implikacja (a)  $\Rightarrow$  (b). Jeśli  $\mu$  ma dodatnią część bezatomową, to  $\varphi(rt) \leq c(\varphi)$  dla  $|t| \leq a_0$ , czyli dla  $|t| \leq \frac{a_0}{r} \leq a_0$  zachodzi  $\varphi(r^2t) \leq c\varphi(rt) \leq c^2\varphi(t)$ . W przypadku miary atomowej postępujemy identycznie jak w punkcie 2, przyjmując dodatkowo  $a'_0 = \frac{a_0}{r}$ . W obu przypadkach otrzymamy  $\varphi \in \Delta_{r^2}^0(\mu)$ . Zakończenie dowodu jest takie, jak w punkcie 2.

15. Załóżmy, że teza jest fałszywa, czyli istnieją  $r > 1$ ,  $\varphi \in \Delta_r^0(\mu)$  oraz  $x \in L^\varphi(\mu)$

takie, że  $\|x\|_\infty < c(\varphi)$ ,  $\|x\|_\varphi = 1$ , ale  $I_\varphi(x) < 1$ . Niech  $\max\{\|x\|_\infty, a(\varphi)\} < d < c(\varphi)$ .  
Zatem  $0 < \varphi'_-(d) < +\infty$ . Definiujemy:

$$\varphi_1(t) := \begin{cases} \varphi(t), & \text{dla } 0 \leq t \leq d \\ \varphi'_-(d)(t-d) + \varphi(d), & \text{dla } t > d \end{cases}$$

i przedłużamy ją do funkcji parzystej. Na mocy wypukłości funkcji  $\varphi$  zachodzi  $\varphi_1(t) \leq \varphi'_-(d)t$ . Oczywiście  $\varphi_1$  jest wypukła,  $c(\varphi_1) = +\infty$  oraz  $\varphi_1 \in \Delta_r^0(\mu)$ , bo można przyjąć  $a_0 \leq d$ . Zatem na mocy 14. zachodzi  $\varphi_1 \in \Delta_r^0(\mu)$  dla każdego  $r > 1$ . Ponieważ o modularze i normie  $x$  decydują wartości  $< d$ , więc  $\|x\|_{\varphi_1} = \|x\|_\varphi = 1$  oraz  $I_{\varphi_1}(x) = I_\varphi(x) < 1$ . Niech  $r > 1$  będzie takie, że  $\|rx\|_\infty < d$  oraz niech  $a_0$  będzie dobrane według definicji  $\Delta_r^0(\mu)$  dla tego właśnie  $r$  oraz dla funkcji  $\varphi_1$ . Zauważmy, że jeśli  $a_0 < \frac{d}{r}$ , to na przedziale  $[a_0, \frac{d}{r}]$  zachodzi  $\varphi_1(t) \geq \varphi'_+(a_0)t$ , oraz  $\varphi'_+(a_0) > 0$ . Niech  $D$  oznacza  $\sum_{n \in \mathcal{N}} d_n$  w przypadku miary atomowej oraz 0 w pozostałych przypadkach. Zatem:

$$\begin{aligned} +\infty &= I_{\varphi_1}(rx) = \int_{\Omega} \varphi_1(rx) d\mu = \int_{\{\omega: |x(\omega)| \leq a_0\}} \varphi_1(rx) d\mu + \int_{\{\omega: |x(\omega)| > a_0\}} \varphi_1(rx) d\mu \leq \\ &\leq \int_{\{\omega: |x(\omega)| \leq a_0\}} c\varphi_1(x) d\mu + D + \int_{\{\omega: |x(\omega)| \geq a_0\}} \varphi'_-(d)rx(\omega) d\mu \leq \\ &\leq cI_{\varphi_1}(x) + D + \frac{\varphi'_-(d)}{\varphi'_+(a_0)}r \int_{\{\omega: |x(\omega)| \geq a_0\}} \varphi_1(x(\omega)) d\mu \leq \\ &\leq \left( c + r \frac{\varphi'_-(d)}{\varphi'_+(a_0)} \right) I_{\varphi_1}(x) + D < +\infty, \end{aligned}$$

co daje sprzeczność.

16. (a) $\Rightarrow$ (b) Załóżmy, że  $0 < c(\varphi) < +\infty$  lub  $\varphi \notin \Delta_2(\mu)$ . W pierwszym przypadku niech  $0 < \mu(A) < +\infty$  oraz  $x = \frac{3}{4}c(\varphi) \cdot \chi_A$ . Wtedy  $I_\varphi(x) < +\infty$ , czyli  $x \in L^\varphi(\mu)$ , ale  $I_\varphi(2x) = +\infty$ , czyli  $x \notin E^\varphi(\mu)$ . W drugim przypadku przy wykluczeniu pierwszego mamy  $c(\varphi) = +\infty$  i na mocy punktów 2 oraz 9 wynika istnienie  $x \in L^\varphi(\mu)$  takiego, że  $\|x\|_\varphi = 1$ , ale  $I_\varphi(x) < 1$ , czyli  $x \notin E^\varphi(\mu)$ . W obu przypadkach  $L^\varphi(\mu) \neq E^\varphi(\mu)$ .

(b) $\Rightarrow$ (a) Załóżmy (b). Na mocy 10 zachodzi  $I_\varphi(x) = 1 \Leftrightarrow \|x\|_\varphi = 1$ . Gdyby  $E^\varphi(\mu) \neq L^\varphi(\mu)$ , to istniałyby  $x \in L^\varphi(\mu)$  oraz  $r > 1$  takie, że  $I_\varphi(x) < +\infty$  oraz

$I_\varphi(rx) = +\infty$ . Na mocy punktu 2 zachodzi  $\varphi \in \Delta_r^0(\mu)$  i otrzymalibyśmy sprzeczność w podobny sposób jak w dowodzie punktu 10. Kończy to dowód naszej implikacji i tym samym całego lematu.  $\square$



## Rozdział 2

### Stabilność

Pojęcie zbioru wypukłego stabilnego było wprowadzone w pracy [13] i badane w [4].

**Definicja 2.1** Zbiór wypukły  $Q$  zawarty w liniowo-topologicznej lokalnie wypukłej przestrzeni Hausdorffa nazywamy stabilnym, jeśli odwzorowanie  $\Phi: Q \times Q \rightarrow Q$  określone wzorem  $\Phi(x, y) := \frac{x+y}{2}$  jest otwarte w topologii przestrzeni  $X$  zrelatywizowanej do  $Q$ .

Punkt  $z \in Q$  nazywa się punktem stabilności w  $Q$  (inaczej:  $z$  jest stabilny w  $Q$ ), jeśli dla dowolnych  $x, y \in Q$ ,  $x \neq y$  spełniających  $\frac{x+y}{2} = z$  oraz dla dowolnych zbiorów otwartych  $U, V$  takich, że  $x \in U$ ,  $y \in V$  istnieje zbiór otwarty  $W$  taki, że  $W \cap Q \subset \frac{1}{2}((U \cap Q) + (V \cap Q))$ .

Jeśli  $X$  jest przestrzenią unormowaną, to ostatni warunek można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x, y \in Q, z = \frac{x+y}{2} \quad \exists \delta > 0 \forall w \in Q \left( \|w - z\| < \delta \Rightarrow \right. \\ \left. \Rightarrow \exists u, v \in Q \quad \|u - x\| < \varepsilon, \|v - y\| < \varepsilon, w = \frac{1}{2}(u + v) \right). \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że jeśli  $z \in \text{int } Q$ , to  $z$  jest stabilny w  $Q$ . Ponadto  $Q$  jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jest stabilny w każdym swoim punkcie. W [13] wykazano, że jeśli  $\dim X \leq 2$ , to każdy wypukły  $Q \subset X$  jest stabilny, a także: ze stabilności zbioru wypukłego domkniętego  $Q$  wynika domkniętość zbioru  $\text{ext } Q$ . Odwrotna implikacja

nie zachodzi, aczkolwiek jest prawdziwa dla  $\dim X \leq 3$ . Stabilne są też zbiory ściśle wypukłe.

Klasycznym przykładem zbioru niestabilnego w  $\mathbb{R}^3$  jest:

### Przykład 2.1

$$A := \text{conv} \left( \{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1 \} \cup \{ (1, 0, \pm 1) \} \right)$$

Nie jest on stabilny, gdyż  $(1, 0, 0) \in \text{cext } A \setminus \text{ext } A$ . Jest on natomiast przekrojem dwóch zbiorów stabilnych  $A_1, A_2$ :

$$A_i := \text{conv} \left( \{ (1, 0, (-1)^i) \} \cup \{ (x, y, (-1)^{i+1}) : (x+1)^2 + y^2 = 4 \} \right).$$

Zatem rodzina zbiorów stabilnych nie jest zamknięta na przekroje. Niech:

$$B := \text{conv} \left( \{ (x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 1 \} \cup \{ (\pm 1, 0, \pm 1) \} \right), \quad (\text{p. [13]}).$$

Można wykazać, że  $\| \cdot \|_B : \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, +\infty]$  określona wzorem Minkowskiego  $\|x\|_B := \inf \{ \lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in B \}$  jest normą w  $\mathbb{R}^3$  i że jeśli  $X := \langle \mathbb{R}^3, \| \cdot \|_B \rangle$ , to  $B(X) = B$ . Jest to przykład niestabilnej kuli trójwymiarowej. Na mocy wyniku z [10]  $\langle \mathbb{R}^3, \| \cdot \|_B \rangle$  nie jest przestrzenią Orlicza z normą Luxemburga. Ponadto

$$B^+(X) = \text{conv} \left( \{ (x, y, 0) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1 \} \cup \{ (1, 0, 1) \} \right)$$

jest, jak łatwo sprawdzić, stabilny. Zatem ze stabilności  $B^+(X)$  nie wynika stabilność  $B(X)$ . Wiadomo jednak (p. [9]), że w kratkach unormowanych ze stabilności  $B(X)$  wynika stabilność  $B^+(X)$ .  $\square$

W rozdziale niniejszym odpowiemy na pytanie, czy w przestrzeni Orlicza ze stabilności  $B^+(X)$  wynika stabilność  $B(X)$ . Główne idee tego wyniku zawarte są w pracy M. Wisły [19] dotyczącej pełnej charakteryzacji kul stabilnych w przestrzeniach Orlicza z normą Luxemburga, a więc pewne partie dowodu pominiemy, odwołując się do wymienionej pracy.

Warto zwrócić uwagę, że pojęcie „dany zbiór  $Q$  jest stabilny” jest pojęciem czysto topologicznym, ale pojęcie „kula jednostkowa jest stabilna” ma już charakter geometryczny, gdyż zmiana normy nawet na równoważną może zmienić kształt kuli na tyle,

że stabilność się nie zachowa. Rzeczywiście, w podanym wyżej przykładzie  $B(X)$  nie jest stabilna, choć klasyczna kula w  $\langle \mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2 \rangle$  jest stabilna, a jak wiadomo normy  $\|\cdot\|_2$  i  $\|\cdot\|_B$  są równoważne.

Odnosząc kilka prostych faktów dotyczących stabilności.

**Stwierdzenie 2.1** *W kracie liniowej  $X$  stożek dodatni  $X^+$  jest stabilny.*

*Dowód:*

Niech  $U, V$  będą otwarte. Należy wykazać, że  $\frac{1}{2}((U \cap X^+) + (V \cap X^+))$  jest otwarty w  $X^+$ . Załóżmy, że nie. Istnieje zatem  $z \in \frac{1}{2}((U \cap X^+) + (V \cap X^+))$  oraz net  $(z_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ ,  $\lim_{\alpha \in \Gamma} z_\alpha = z$  taki, że dla każdego  $\alpha \in \Gamma$  zachodzi  $z_\alpha \notin \frac{1}{2}((U \cap X^+) + (V \cap X^+))$ ,  $z_\alpha \geq 0$ . Z założenia istnieją  $x \geq 0, y \geq 0, x \in U, y \in V$  takie, że  $z = \frac{x+y}{2}$ . Niech  $x_\alpha := (2z_\alpha) \wedge x$ ,  $y_\alpha := 2z_\alpha - x_\alpha$ . Oczywiście  $x_\alpha \geq 0$ , a ponieważ  $x_\alpha \leq 2z_\alpha$ , więc też  $y_\alpha \geq 0$ . Z ciągłości „ $\wedge$ ” wynika, że  $\lim_{\alpha \in \Gamma} x_\alpha = x$ , a także  $\lim_{\alpha \in \Gamma} y_\alpha = 2z - x = y$ . Zatem dla dużych  $\alpha$  zachodzi  $x_\alpha \in U, y_\alpha \in V$ . Czyli dla dużych  $\alpha$  zachodzi  $z_\alpha = \frac{1}{2}(x_\alpha + y_\alpha) \in \frac{1}{2}((U \cap X^+) + (V \cap X^+))$  wbrew wyborowi  $(z_\alpha)$ .  $\square$

Wprowadzimy teraz definicję, która będzie użyta w kolejnym lemacie. Definicja została zaczerpnięta z książki [15], przy czym przytoczymy ją w formie równoważnej zrehabilitowanej jako Corollary 2 na stronie 64 tej książki.

**Definicja 2.2** *Mówimy, że krata liniowa  $X$  ma własność PPP, jeśli dla każdych  $x, y \in X^+$  istnieje  $\sup\{x \wedge ny : n \in \mathbb{N}\}$*

Oczywiście przestrzenie Orlicza posiadają własność PPP.

**Lemat 2.1** *Niech  $X$  będzie unormowaną kratą o własności PPP. Wtedy jeśli  $z \in B(X)$  jest takim punktem, że  $|z|$  jest stabilny w  $B(X)$ , to również  $z$  jest stabilny w  $B(X)$ .*

*Dowód:*

Ustalmy  $z \in B(X)$  takie, że  $|z|$  jest stabilny w  $B(X)$  i zdefiniujemy odwzorowanie  $\varphi: X \rightarrow X$  wzorem:

$$\varphi(x) = \sup_{n \in \mathbf{N}}(nz^- \wedge x^+) - \sup_{n \in \mathbf{N}}(nz^- \wedge x^-).$$

Poprawność powyższej definicji wynika z własności *PPP*. Wiadomo, że  $\varphi$  jest rzutowaniem kratowym (tzn. jest odwzorowaniem liniowym zachowującym działania kratowe oraz spełniającym  $\varphi \circ \varphi = \varphi$ ). Dla  $z^- > 0$  wynika to z Proposition 2.11 z [15], str. 63, gdzie należy przyjąć  $A = \{z^-\}$ , a dla  $z^- = 0$  jest to oczywiste.

Zdefiniujemy teraz odwzorowanie  $\hat{\cdot}: X \rightarrow X$  następująco:

$$\hat{x} := x - 2\varphi(x)$$

odwzorowanie to jest oczywiście liniowe. Wykażemy, że spełnia ono wzory:

$$\hat{\hat{x}} = x, \quad |\hat{x}| = |x|$$

Rzeczywiście:

$$\begin{aligned} \hat{\hat{x}} &= \hat{x} - 2\varphi(\hat{x}) = x - 2\varphi(x) - 2\varphi(x - 2\varphi(x)) = \\ &= x - 2\varphi(x) - 2\varphi(x) + 4\varphi(\varphi(x)) = x - 4\varphi(x) + 4\varphi(x) = x \end{aligned}$$

Ponieważ dla  $x \geq 0$  zachodzi

$$0 \leq \varphi(x) = \sup_{n \in \mathbf{N}}(nz^- \wedge x) \leq x,$$

więc  $-x = x - 2x \leq x - 2\varphi(x) = \hat{x} \leq x$ , a stąd  $|\hat{x}| \leq x$  dla  $x \geq 0$ . Zatem dla dowolnego  $x \in X$  zachodzi:

$$\begin{aligned} |\hat{x}| &= |x - 2\varphi(x)| = |(x^+ - 2\varphi(x^+)) - (x^- - 2\varphi(x^-))| \leq \\ &\leq |x^+ - 2\varphi(x^+)| + |x^- - 2\varphi(x^-)| = |\hat{x}^+| + |\hat{x}^-| \leq x^+ + x^- = |x|, \end{aligned}$$

czyli  $|\hat{x}| \leq |x|$ . Z pokazanych własności wynika  $|x| = |\hat{\hat{x}}| \leq |\hat{x}| \leq |x|$ .

Wykazaliśmy zatem, że  $|\hat{x}| = |x|$ . Zatem także  $\|\hat{x}\| = \|x\|$ .

Niech  $x, y \in B(X)$  będą takie, że  $z = \frac{x+y}{2}$  oraz niech  $\varepsilon > 0$ . Ponieważ

$$\varphi(z) = \sup_{n \in \mathbf{N}}(nz^- \wedge z^+) - \sup_{n \in \mathbf{N}}(nz^- \wedge z^-) = -z^-,$$

więc  $\hat{z} = z - 2\varphi(z) = z^+ - z^- + 2z^- = z^+ + z^- = |z|$ , czyli  $|z| = \hat{z} = \frac{1}{2}(\hat{x} + \hat{y})$ . Na mocy definicji stabilności w punkcie zachodzi:

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0 \forall \tilde{w} \in B(x) \left( \|\tilde{w} - |z|\| < \delta \Rightarrow \exists \tilde{u}, \tilde{v} \in B(x) \right. \\ \left. \|\tilde{u} - \hat{x}\| < \varepsilon, \|\tilde{v} - \hat{y}\| < \varepsilon \tilde{w} = \frac{1}{2}(\tilde{u} + \tilde{v}) \right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Niech  $w \in B(X)$  spełnia  $\|w - z\| < \delta$ . Wtedy  $\|\widehat{w} - |z|\| = \|\widehat{w - z}\| = \|w - z\| < \delta$ , a zatem istnieją  $\tilde{u}, \tilde{v}$  spełniające 2.1 dla  $\tilde{w} := \widehat{w}$ .

Niech  $u := \tilde{u}, v := \tilde{v}$ . Wtedy  $\hat{u} = \tilde{u}$ , a więc  $\|u - x\| = \|\widehat{u - x}\| = \|\hat{u} - \hat{x}\| = \|\tilde{u} - \hat{x}\| < \varepsilon$  i analogicznie  $\|v - y\| < \varepsilon$ . Ponadto  $u, v \in B(X)$  oraz  $w = \widehat{\tilde{w}} = \frac{1}{2}(\widehat{\tilde{u}} + \widehat{\tilde{v}}) = \frac{1}{2}(\hat{u} + \hat{v}) = \frac{u+v}{2}$ . Ponieważ  $\varepsilon > 0$  było dowolne, więc  $z$  jest stabilny w  $B(X)$ .  $\square$

Teraz przytoczymy elementarny lemat, którego dowód (przedstawiony w pracy [9]) wynika z podstawowych własności krat unormowanych.

**Lemat 2.2** *W kracie unormowanej  $X$  zachodzą związki:*

1. *Jeśli  $x, y \in X$ , to  $\|x^+ - y^+\| \leq \|x - y\|$  oraz  $\|x^- - y^-\| \leq \|x - y\|$ .*
2. *Jeśli  $x, y \in X$  spełniają  $x + y \geq 0$ , to  $y^+ - x^- \geq 0$  oraz  $x^+ - y^- \geq 0$ .*

$\square$

Poniższy lemat jest lokalnym wariantem Twierdzenia z [9], a przytoczone przez nas rozumowanie jest analogiczne do tego przedstawionego w [9].

Następujący po nim wniosek pokrywa się z treścią cytowanego Twierdzenia:

**Lemat 2.3** *Niech  $X$  będzie kratą unormowaną. Jeśli  $z \in B^+(X)$  jest stabilny w  $B(X)$ , to  $z$  jest stabilny w  $B^+(X)$ .*

*Dowód:*

Założmy, że  $z \in B^+(X)$  jest stabilny w  $B(X)$ . Niech  $\varepsilon > 0$  oraz niech  $x, y \in B^+(X)$  spełniają  $z = \frac{x+y}{2}$ . Z definicji stabilności w punkcie istnieje  $\delta > 0$  taka, że dla każdego  $w \in B^+(X)$  (a nawet  $B(X)$ ) spełniającego  $\|z - w\| < \delta$  istnieją  $\tilde{u}, \tilde{v} \in B(X)$

takie, że  $w = \frac{1}{2}(\tilde{u} + \tilde{v})$ , oraz  $\|x - \tilde{u}\| < \frac{1}{5}\varepsilon$ ,  $\|y - \tilde{v}\| < \frac{1}{5}\varepsilon$ . Wtedy na mocy punktu 1 Lematu 2.2 zachodzi  $\|\tilde{u}^+ - x\| < \frac{1}{5}\varepsilon$ ,  $\|\tilde{v}^+ - y\| < \frac{1}{5}\varepsilon$ , oraz:

$$\|\tilde{u}^-\| = \|\tilde{u}^+ - x + x - \tilde{u}\| \leq \|\tilde{u}^+ - x\| + \|x - \tilde{u}\| < \frac{2}{5}\varepsilon$$

i analogicznie  $\|\tilde{v}^-\| < \frac{2}{5}\varepsilon$ . Połóżmy  $u := \tilde{u}^+ - \tilde{v}^-$ ,  $v := \tilde{v}^+ - \tilde{u}^-$ . Na mocy punktu 2 Lematu 2.2 zachodzi  $0 \leq u \leq \tilde{u}^+$  oraz  $0 \leq v \leq \tilde{v}^+$ , a stąd natychmiast wynika  $u, v \in B^+(X)$ . Oczywiście też  $w = \frac{u+v}{2}$  oraz:

$$\|u - x\| = \|\tilde{u}^- + (-\tilde{v}^-) + \tilde{u} - x\| \leq \|\tilde{u}^-\| + \|\tilde{v}^-\| + \|\tilde{u} - x\| < \frac{2}{5}\varepsilon + \frac{2}{5}\varepsilon + \frac{1}{5}\varepsilon = \varepsilon,$$

i analogicznie  $\|v - y\| \leq \|\tilde{v}^-\| + \|\tilde{u}^-\| + \|\tilde{v} - y\| < \varepsilon$ . Ponieważ  $\varepsilon > 0$  było dowolne, więc dowiedziona została stabilność punktu  $z$  w  $B^+(X)$   $\square$

**Wniosek 2.1** ([9]) *Jeśli w kracie unormowanej  $B(X)$  jest stabilna, to  $B^+(X)$  jest stabilna.*  $\square$

Jak pokazaliśmy na początku rozdziału implikacja powyższa nie da się odwrócić. Okazuje się jednak, że w przypadku przestrzeni Orlicza z normą Luxemburga implikację tę można odwrócić. Potrzebny jest lemat, który różni się od Proposition 1 z pracy M. Wisły [19] ze str. 504 jedynie zastąpieniem  $B(L^\varphi(\mu))$  przez  $B^+(L^\varphi(\mu))$ . Pominie my dowód, który jest identyczny jak w cytowanej pracy, należy tylko zwrócić uwagę na to, że wszystkie konstruowane w tym dowodzie obiekty należą do  $B^+(L^\varphi(\mu))$  oraz poprawić literówkę na stronie 505 w 14 wierszu od dołu, w definicji liczby  $q$ . Powinno być  $q := \max\{n \geq p - 1 : h(m) < 1\}$ ; (w pracy jest min). Oto lemat:

**Lemat 2.4** *Załóżmy, że  $L^\varphi(\mu)$  nie jest skończenie wymiarowa i nie jest izometryczna z  $L^\infty(\mu)$ . Niech  $z \in B^+(L^\varphi(\mu))$  i dla  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  definiujemy:*

$$A_n := \left\{ \omega \in \Omega : |x(\omega)| < \left(1 - \frac{1}{n}\right) c(\varphi) \right\}$$

*jeśli  $c(\varphi) < +\infty$  i  $\varphi(c(\varphi)) < +\infty$  oraz  $A_n = \Omega$  w pozostałych przypadkach. Jeśli dla pewnego  $n \geq 2$  zachodzi  $\|z\chi_{A_n}\|_\varphi = 1$ , to następujące warunki są równoważne:*

$$(i) \quad I_\varphi(z) < 1$$

(ii) Istnieje  $E \subset A_n$  miary dodatniej i funkcje  $x, y \in B^+(L^\varphi(\mu))$  takie, że  $z = \frac{1}{2}(x + y)$ ,  $\|z\chi_E\|_\varphi < 1$  oraz  $2\varphi(z(\omega)) < \varphi(x(\omega)) + \varphi(y(\omega))$  dla  $\omega \in E$ .

□

Zmodyfikujemy też Twierdzenie 3 ze str. 506 z [19]:

**Lemat 2.5** *Punkt  $z \in B^+(L^\varphi(\mu))$  jest punktem stabilności w  $B^+(L^\varphi(\mu))$  wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden z następujących warunków jest spełniony:*

- (i)  $L^\varphi(\mu)$  jest skończenie wymiarowa,
- (ii)  $L^\varphi(\mu)$  jest izometryczna z  $L^\infty(\mu)$ ,
- (iii)  $\|z\|_\varphi < 1$ ,
- (iv)  $I_\varphi(z) = 1$
- (v)  $c(\varphi) < +\infty$ ,  $\varphi(c(\varphi)) < +\infty$ ,  $\|z\chi_{A_n}\|_\varphi < 1$  dla  $n = 2, 3, \dots$ , gdzie

$$A_n := \left\{ \omega \in \Omega : |z(\omega)| < \left(1 - \frac{1}{n}\right) c(\varphi) \right\}.$$

*Dowód:*

( $\Leftarrow$ ) Niech  $z \in B^+(L^\varphi(\mu))$  i przynajmniej jeden z warunków (i) — (v) jest spełniony. Na mocy Twierdzenia 3 z [19] wynika, że  $z$  jest stabilny w  $B(L^\varphi(\mu))$ , a więc z naszego Lematu 2.3 wynika, że jest też stabilny w  $B^+(L^\varphi(\mu))$ .

( $\Rightarrow$ ) Dowód jest w zasadzie identyczny jak dowód implikacji ( $\Rightarrow$ ) Twierdzenia 3 z [19]. Jedynie zamiast korzystać z Proposition 2 z cytowanej pracy, należy skorzystać z ostatniego Lematu 2.1, co pozwala założyć, że  $x, y \in B^+(L^\varphi(\mu))$ . Wtedy również w zdefiniowane w cytowanej pracy będzie należało do  $B^+(L^\varphi(\mu))$ , a także  $u, v \in B^+(L^\varphi(\mu))$ . Należy tylko poprawić literówkę na stronie 509 wiersz 7 od góry — w trzecim składniku powinno być  $I_\varphi([w + u - w]\chi_{T \setminus E})$  (dwie litery  $w$ ). □

**Wniosek 2.2** *W przestrzeni Orlicza  $L^\varphi(\mu)$  dla  $z \in B^+(L^\varphi(\mu))$  następujące warunki są równoważne:*

- (i)  $z$  jest stabilny w  $B(L^\varphi(\mu))$
- (ii)  $z$  jest stabilny w  $B^+(L^\varphi(\mu))$ . □

Kolejny wniosek połączymy z treścią Twierdzenia 5 z pracy [19]:

**Wniosek 2.3** *Następujące warunki są równoważne:*

- (a)  $B(L^\varphi(\mu))$  jest stabilna,
- (b)  $B^+(L^\varphi(\mu))$  jest stabilna,
- (c) Zachodzi jeden z sześciu warunków:
  - (i)  $\dim L^\varphi(\mu) < +\infty$ ,
  - (ii)  $L^\varphi(\mu) \cong L^\infty(\mu)$ ,
  - (iii)  $\varphi \in \Delta_r(\mu)$  dla pewnego  $r > 1$ ,
  - (iv)  $\varphi \in \Delta_r^0(\mu)$  dla pewnego  $r > 1$  oraz  $c(\varphi) < +\infty$  i  $\varphi(c(\varphi)) < +\infty$ .
  - (v)  $\varphi \in \Delta_r^0(\mu)$  dla pewnego  $r > 1$  na atomowej części  $\Omega$ ,  $c(\varphi) < +\infty$ ,  $\varphi(c(\varphi)) < +\infty$  i miara bezatomowej części  $\Omega$  jest skończona.
  - (vi)  $c(\varphi) < +\infty$ ,  $\varphi(c(\varphi)) < +\infty$  oraz  $\mu(\Omega) < +\infty$ .

*Dowód:*

Równoważność  $(a) \Leftrightarrow (c)$  jest treścią Twierdzenia 5 z pracy [19]. W prawie identyczny sposób — sprawdzając szczegóły dowodu Lematu 4 oraz Twierdzenia 5 z [19] można wykazać  $(b) \Leftrightarrow (c)$ , można jednak postąpić nieco prościej:

$(a) \Rightarrow (b)$  Implikacja ta wynika z Wniosku 2.1.

$(b) \Rightarrow (a)$  Niech  $B^+(L^\varphi(\mu))$  będzie stabilne. Niech  $z \in B(L^\varphi(\mu))$ . Zatem  $|z| \in B^+(L^\varphi(\mu))$  oraz na mocy założenia jest on stabilny w  $B^+(L^\varphi(\mu))$ , a więc na mocy Wniosku 2.1 jest on też stabilny w  $B(L^\varphi(\mu))$ . Na mocy Lematu 2.1 wynika, że  $z$  też jest stabilny w  $B(L^\varphi(\mu))$ . Ponieważ  $z$  było dowolne, więc  $B(L^\varphi(\mu))$  jest stabilna. □



A. Suarez Granero w [7] udowodnił, że  $B(E^\varphi(\mu))$  jest stabilna bez względu na założenia.

Stąd i na mocy Wniosku 2.1 otrzymamy:

**Wniosek 2.4**  $B^+(E^\varphi(\mu))$  jest stabilna.

□

## Rozdział 3

# Zbiory lokalnie niestożkowe — własności ogólne

W tym rozdziale  $X$  będzie lokalnie wypukłą liniowo-topologiczną przestrzenią Hausdorffa, a  $Q$  będzie jej domkniętym, niepustym i wypukłym podzbiorem.

**Definicja 3.1** Parę uporządkowaną  $\langle x, y \rangle \in Q \times Q$  nazywamy lokalnie niestożkową (*LNC*) w  $Q$  jeśli istnieje otwarte otoczenie  $U$  punktu  $x$  takie, że  $(U \cap Q) + \frac{1}{2}(y - x) \subset Q$ .

**Definicja 3.2** Zbiór  $Q$  nazywamy *LNC* jeśli każda para  $\langle x, y \rangle \in Q \times Q$  jest *LNC* w  $Q$ .

**Definicja 3.3** Parę uporządkowaną  $\langle x, y \rangle$  nazywamy lokalnie cylindryczną w  $Q$  (*LC*) jeśli  $x = y$  lub dla każdego  $z \in (x, y)$  istnieje otwarte otoczenie  $U$  punktu  $z$  takie, że  $U \cap Q$  jest sumą otwartych odcinków równoległych do  $[x, y]$ .

**Definicja 3.4** Zbiór  $Q$  nazywamy *LC* jeśli każda para  $\langle x, y \rangle \in Q \times Q$  jest *LC* w  $Q$ .

Pojęcie *LNC* jest badane w pracy [16]. W tym rozdziale udowodnimy uogólnienie Twierdzenia 2.2 z [16], które było udowodnione dla podzbiorów przestrzeni Hilberta. W naszej pracy przedstawiamy dowód w pełnej ogólności.

Definicja 3.2 została przedstawiona w [16]. Pojęcie  $LC$  występuje również w tej pracy, chociaż nie zostało nazwane. Nazwa „lokalnie cylindryczne” została przez nas przyjęta jedynie na użytek niniejszego rozdziału. Definicje 3.1 i 3.3 wprowadziliśmy ze względów technicznych.

Poniższe stwierdzenie jest użytecznym przeformułowaniem definicji 3.2. Zostało ono zaczerpnięte z pracy [16], z tym, że my podajemy je w wersji lokalnej:

**Stwierdzenie 3.1** *Para uporządkowana  $\langle x, y \rangle$  jest  $LNC$  w  $Q$ , wtedy i tylko wtedy, gdy  $x, y \in Q$  i dla każdego netu  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$  zawartego w  $Q$ , jeśli  $\lim_{\alpha \in \Gamma} x_\alpha = x$ , to  $x_\alpha + \frac{1}{2}(y - x) \in Q$  dla prawie wszystkich  $\alpha \in \Gamma$ .*  $\square$

W kolejnym stwierdzeniu wymieniamy najważniejsze własności pojęcia  $LNC$ , wykazane w [16]:

**Stwierdzenie 3.2** *a) Jeśli  $\dim X \leq 2$ , to każdy zbiór wypukły  $Q$  jest  $LNC$ .*

*b) Jeśli zbiory  $Q_1, Q_2 \subset X$  są  $LNC$ , to zbiór  $Q_1 \cap Q_2$  jest również  $LNC$ .*

*c) Jeśli zbiory  $Q_1 \subset X_1, Q_2 \subset X_2$  są  $LNC$ , to zbiór  $Q_1 \times Q_2 \subset X_1 \times X_2$  jest również  $LNC$ .*

*d) Zbiory  $LNC$  są stabilne.*

*e) Jeśli odcinek  $[x, y]$  nie leży na brzegu  $Q$ , to para  $\langle x, y \rangle$  jest  $LNC$  w  $Q$ . W szczególności zbiory ściśle wypukłe są  $LNC$ .*

*f) Kula jednostkowa w  $c_0$  jest  $LNC$ , ale kula jednostkowa w  $l^\infty$  nie jest  $LNC$ .*  $\square$

Udowodnimy teraz kluczowy lemat:

**Lemat 3.1** *Niech  $x, y \in Q$ ,  $x \neq y$  będą ustalone, i niech  $z := \frac{x+y}{2}$ . Rozważmy  $x' \in (x, z)$ , i  $y' := 2z - x'$ . Jeśli para  $\langle x', y' \rangle$  jest  $LNC$  w  $Q$ , to para  $\langle x, y \rangle$  jest również  $LNC$  w  $Q$ .*

*Dowód:*

Niech  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$  będzie netem zawartym w  $Q$  takim, że  $\lim_{\alpha \in \Gamma} x_\alpha = x$ . Chcemy dowieść, że  $x_\alpha + \frac{1}{2}(y - x) \in Q$  zachodzi dla prawie wszystkich  $\alpha \in \Gamma$ . Bez zmniejszenia ogólności

możemy założyć, że  $x_\alpha \neq x$  dla każdego  $\alpha \in \Gamma$ . Niech  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  będzie takie, że  $x' = x + \varepsilon(y - x)$ ,  $y' = y - \varepsilon(y - x)$ . Dla  $\alpha \in \Gamma$  połóżmy:

$$\delta'_\alpha := \sup\{\delta \geq 0 : \delta x_\alpha + (1 - \delta)x + \varepsilon(y - x) \in Q\},$$

oraz:

$$\delta_\alpha := \min\{\delta'_\alpha, 2\}.$$

Zauważmy, że:

$$(1 - 2\varepsilon)x_\alpha + 2\varepsilon x + \varepsilon(y - x) = (1 - 2\varepsilon)x_\alpha + 2\varepsilon z \in Q,$$

a więc  $\delta \geq 1 - 2\varepsilon > 0$ .

Ponieważ  $0 \leq \delta_\alpha \leq 2$ , więc  $\lim_{\alpha \in \Gamma} \delta_\alpha(x_\alpha - x) = 0$ . Dla  $\alpha \in \Gamma$  połóżmy:

$$x'_\alpha := \delta_\alpha x_\alpha + (1 - \delta_\alpha)x + \varepsilon(y - x).$$

Ponieważ  $Q$  jest domknięty, zatem z definicji  $\delta_\alpha$  wynika, że  $x'_\alpha \in Q$  dla  $\alpha \in \Gamma$ .

Ponadto:

$$\lim_{\alpha \in \Gamma} x'_\alpha = x + \varepsilon(y - x) = x'.$$

Ponieważ para  $\langle x', y' \rangle$  jest *LNC*, więc otrzymujemy:

$$x'_\alpha + \frac{1}{2}(y' - x') = x'_\alpha + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)(y - x) \in Q$$

dla prawie wszystkich  $\alpha \in \Gamma$ . Na mocy wypukłości  $Q$  zachodzi:

$$(1 - 2\varepsilon)x_\alpha + 2\varepsilon \left( x'_\alpha + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)(y - x) \right) \in Q$$

dla prawie wszystkich  $\alpha \in \Gamma$ . Zauważmy, że:

$$\begin{aligned} & (1 - 2\varepsilon)x_\alpha + 2\varepsilon \left( x'_\alpha + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)(y - x) \right) = \\ &= (1 - 2\varepsilon)x_\alpha + 2\varepsilon \left( x + \delta_\alpha(x_\alpha - x) + \frac{1}{2}(y - x) \right) = \\ &= (2\varepsilon\delta_\alpha + 1 - 2\varepsilon)x_\alpha + (2\varepsilon - 2\varepsilon\delta_\alpha)x + \varepsilon(y - x). \end{aligned}$$

Dla  $\delta := 2\varepsilon\delta_\alpha + 1 - 2\varepsilon$ , otrzymujemy  $\delta \geq 1 - 2\varepsilon > 0$  oraz:

$$\delta x_\alpha + (1 - \delta)x + \varepsilon(y - x) \in Q.$$

Dlatego  $\delta'_\alpha \geq \delta$ . Jeśli  $\delta_\alpha = \delta'_\alpha$ , to:  $\delta_\alpha \geq 2\varepsilon\delta_\alpha + 1 - 2\varepsilon$ ; zatem  $\delta_\alpha \geq 1$ . Jeśli  $\delta_\alpha \neq \delta'_\alpha$ , to  $\delta_\alpha = 2$  a więc również  $\delta_\alpha \geq 1$ .

Powyższe rozważania dowodzą, że:

$$x_\alpha + \varepsilon(y - x) \in [x + \varepsilon(y - x), \delta_\alpha x_\alpha + (1 - \delta_\alpha)x + \varepsilon(y - x)] \subset Q,$$

dla prawie wszystkich  $\alpha \in \Gamma$ . Połóżmy:

$$x''_\alpha := x_\alpha + \varepsilon(y - x).$$

Zachodzi  $x''_\alpha \in Q$  dla prawie wszystkich  $\alpha \in \Gamma$  i  $\lim_{\alpha \in \Gamma} x''_\alpha = x'$ . Ponieważ para  $\langle x', y' \rangle$  jest *LNC*, więc dla prawie wszystkich  $\alpha \in \Gamma$  zachodzi  $x''_\alpha + \frac{1}{2}(y' - x') \in Q$ . Ale:

$$x''_\alpha + \frac{1}{2}(y' - x') = x_\alpha + \varepsilon(y - x) + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)(y - x) = x_\alpha + \frac{1}{2}(y - x).$$

Dlatego prawie wszystkie  $\alpha \in \Gamma$  spełniają  $x_\alpha + \frac{1}{2}(y - x) \in Q$ ; więc  $\langle x, y \rangle$  jest *LNC*, co kończy dowód lematu.  $\square$

Wykażemy teraz główne twierdzenie rozdziału:

**Twierdzenie 3.1** *Własności LNC i LC są równoważne.*

*Dowód:*

( $\Rightarrow$ ) Ta implikacja została udowodniona w [16], jako Twierdzenie 2.1. ( $\Leftarrow$ ) W pracy [16] implikacja ta została udowodniona jedynie dla przestrzeni Hilberta jako Twierdzenie 2.2. Przedstawiony niżej dowód jest inny i w pełni ogólny.

Niech  $x, y \in Q$ ,  $x \neq y$ . Wystarczy pokazać, że jeśli para  $\langle x, y \rangle$  jest *LC* w  $Q$ , to jest *LNC* w  $Q$ . Zatem niech  $\langle x, y \rangle$  be *LC*,  $z := \frac{x+y}{2}$ . Pokażemy teraz, że istnieje takie  $x' \in (x, z)$ , że dla  $y' := 2z - x'$  para  $\langle x', y' \rangle$  is *LNC* w  $Q$ . Na mocy Lematu 3.1 będzie to koniec dowodu.

Niech  $U$  będzie wypukłym otoczeniem punktu  $z$  takim, że  $U \cap Q$  jest sumą otwartych odcinków równoległych do  $[x, y]$ . Niech  $x', y' \in U \cap [x, y]$ ,  $x' \in (x, z)$ ,  $y' := 2z - x'$ . Niech  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$  będzie takim netem, że  $\lim_{\alpha \in \Gamma} x_\alpha = x'$ ,  $x_\alpha \in U \cap Q$  dla  $\alpha \in \Gamma$ . Połóżmy:

$$\varepsilon_\alpha := \sup\{\varepsilon : x_\alpha + \varepsilon(y' - x') \in U \cap Q\}$$

dla  $\alpha \in \Gamma$ .

Udowodnimy teraz, że  $x_\alpha + \frac{1}{2}(y' - x') \in Q$  dla prawie wszystkich  $\alpha \in \Gamma$ . Załóżmy *a contrario*, że tak nie jest. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że  $x_\alpha + \frac{1}{2}(y' - x') \notin Q$  dla każdego  $\alpha \in \Gamma$ . Ale wtedy  $0 \leq \varepsilon_\alpha \leq \frac{1}{2}$  dla każdego  $\alpha \in \Gamma$ . Zastępując net  $(x_\alpha)_\alpha \in \Gamma$  przez pewien jego podnet możemy założyć, że  $\lim_{\alpha \in \Gamma} x_\alpha = \varepsilon \geq 0$ , przy czym  $0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ . Zauważmy, że:

$$W_\alpha := x_\alpha + \varepsilon_\alpha(y' - x') \in \text{cl}(U) \cap Q = (\text{bd}(U) \cap Q) \cup (U \cap Q).$$

Jeśli  $W_\alpha$  należy do  $U \cap Q$ , to albo dla pewnego  $\varepsilon > \varepsilon_\alpha$  zachodzi  $x_\alpha + \varepsilon(y' - x') \in U \cap Q$  co przeczy definicji  $\varepsilon_\alpha$ , albo  $x_\alpha + \varepsilon_\alpha(y' - x')$  nie należy do żadnego otwartego odcinka zawartego w  $U \cap Q$  równoległego do  $[x, y]$ , co jest sprzeczne z założeniem. Dlatego  $x_\alpha + \varepsilon_\alpha(y' - x') \in \text{bd}(U) \cap Q$  dla  $\alpha \in \Gamma$ . Zatem:

$$\lim_{\alpha \in \Gamma} (x_\alpha + \varepsilon_\alpha(y' - x')) = x' + \varepsilon(y' - x') \in \text{bd}(U) \cap Q.$$

Dlatego  $x' + \varepsilon(y' - x') \in \text{bd}(U) \cap [x', y']$ . Ale  $[x', y'] \subset U$ ,  $U \cap \text{bd} U = \emptyset$ , więc  $\text{bd}(U) \cap [x', y'] = \emptyset$ .

Sprzeczność kończy dowód. □

Na zakończenie odnotujmy proste:

**Stwierdzenie 3.3** *Stożek dodatni w skończenie wymiarowej przestrzeni liniowo-topologicznej jest LNC.*

*Dowód:*

Stożek taki jest iloczynem kartezjańskim półprostych dodatnich w skończonej liczbie, a każda taka półprosta jest oczywiście LNC. Teza wynika zatem ze Stwierdzenia 3.2. □

## Rozdział 4

# Zbiory lokalnie niestożkowe w przestrzeniach Orlicza

W rozdziale tym podamy pełną charakteryzację przestrzeni  $L^\varphi(\mu)$  oraz  $E^\varphi(\mu)$ , dla których kula jednostkowa jest  $LNC$ . Najpierw udowodnimy pięć lematów. Pierwszy z nich ma techniczny charakter:

**Lemat 4.1** *Niech  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$  będzie dowolną funkcją Younga. Niech  $\mathcal{N} := \mathbb{N}$  lub  $\mathcal{N} := \{1, 2, \dots, N\}$ . Niech  $(x_i)_{i \in \mathcal{N}}$ ,  $(y_i)_{i \in \mathcal{N}}$ ,  $(\varepsilon_i)_{i \in \mathcal{N}}$ ,  $(c_i)_{i \in \mathcal{N}}$  będą ciągami liczb rzeczywistych spełniającymi następujące warunki:*

1.  $\inf\{c_i : i \in \mathcal{N}\} > 0$ ,
2. Dla każdego  $0 \leq \lambda \leq 1$  zachodzi  $\sum_{i \in \mathcal{N}} \varphi(\lambda x_i + (1 - \lambda)y_i)c_i = 1$ ,
3. Zbiór  $J := \{i \in \mathbb{N} : x_i \neq y_i \wedge (|x_i| > \frac{a(\varphi)}{2} \vee |y_i| > \frac{a(\varphi)}{2})\}$  jest skończony oraz dla  $i \in J$  zachodzą warunki:
  - (a) jeśli  $x_i \neq 0$ , to  $|\varepsilon_i| \leq |x_i|$  oraz jeśli  $y_i \neq 0$ , to  $|\varepsilon_i| \leq |y_i|$
  - (b)  $|\varepsilon_i| < \frac{|y_i - x_i|}{2}$
  - (c)  $|\varepsilon_i| < \min\{|\frac{x_i + y_i}{2}|, a(\varphi) - |\frac{x_i + y_i}{2}|\}$ , o ile prawa strona jest dodatnia.
  - (d)  $|\varepsilon_i| < \frac{a(\varphi)}{2}$ , o ile  $a(\varphi) > 0$ .

Niech

$$F(t) := \sum_{i \in \mathcal{N}} \varphi \left( x_i + t \frac{y_i - x_i}{2} + \varepsilon_i \right) c_i$$

Wtedy  $F$  jest funkcją nierosnącą na przedziale  $[0, 1]$ .

*Dowód:*

Zauważmy, że dla  $\lambda = 0$  i  $\lambda = 1$  otrzymamy na mocy założenia 2:  $\sum_{i \in \mathcal{N}} \varphi(x_i) c_i = \sum_{i \in \mathcal{N}} \varphi(y_i) c_i = 1$ . Ponadto dla  $0 < \lambda < 1$ :

$$1 = \sum_{i \in \mathcal{N}} \varphi(\lambda x_i + (1 - \lambda)y_i) c_i \leq \lambda \sum_{i \in \mathcal{N}} \varphi(x_i) c_i + (1 - \lambda) \sum_{i \in \mathcal{N}} \varphi(y_i) c_i = 1,$$

co oznacza, że dla  $x_i \neq y_i$  funkcja  $\varphi$  jest afiniczna na  $[x_i, y_i]$ . Zatem liczby  $x_i, y_i$  mogą mieć przeciwne znaki jedynie w przypadku  $\varphi(x_i) = \varphi(y_i) = 0$ , czyli gdy  $|x_i|, |y_i| \leq a(\varphi)$ . Nie jest możliwa sytuacja  $|x_i| < a(\varphi)$  i równocześnie  $|y_i| > a(\varphi)$ , ani też sytuacja symetryczna. Jeśli  $x_i, y_i \leq -a(\varphi)$  to zmienimy jednocześnie znaki trzech liczb:  $x_i, y_i, \varepsilon_i$ . Wtedy wszystkie założenia nadal będą spełnione, a funkcja  $F$  się nie zmieni. Zatem można założyć, że dla wszystkich  $i \in \mathcal{N}$  zachodzi alternatywa:

$$x_i, y_i \geq a(\varphi) \geq 0 \quad \text{lub} \quad x_i, y_i \in [-a(\varphi), a(\varphi)].$$

Niech  $k_i$  będzie współczynnikiem kierunkowym funkcji  $\varphi$  na przedziale  $[x_i, y_i]$  dla  $i \in J$ . Wtedy:

$$\varphi \left( \frac{x_i + y_i}{2} + \varepsilon_i \right) = \varphi \left( \frac{x_i + y_i}{2} \right) + k_i \varepsilon_i \quad \text{dla } i \in J.$$

Niech  $k_i(t)$  dla  $i \in J, 0 \leq t \leq 1$  będzie takie, że:

$$\varphi \left( x_i + t \frac{y_i - x_i}{2} + \varepsilon_i \right) = \varphi \left( x_i + t \frac{y_i - x_i}{2} \right) + k_i(t) \varepsilon_i.$$

Zauważmy, że jeśli  $|x_i|, |y_i| \leq \frac{a(\varphi)}{2}$ , to  $k_i(t) = 0$  i obie strony powyższej równości są równe zero. Jeśli  $\varepsilon_i = 0$ , to przyjmijmy  $k_i(t) \equiv 0$ . Jeśli lewa strona powyższej równości jest równa  $+\infty$ , co jest możliwe tylko w przypadku  $\varepsilon_i > 0$ , to przyjmujemy  $k_i(t) \equiv +\infty$ . W pozostałych przypadkach zachodzi:

$$k_i(t) = \frac{\varphi \left( x_i + t \frac{y_i - x_i}{2} + \varepsilon_i \right) - \varphi \left( x_i + t \frac{y_i - x_i}{2} \right)}{\varepsilon_i}.$$



Rozważmy dwa przypadki:

A)  $x_i < y_i$ .

Jeśli  $\varepsilon_i > 0$ , to:  $x_i \leq x_i + t \frac{y_i - x_i}{2} + \varepsilon_i \leq \frac{x_i + y_i}{2} + \varepsilon_i \leq \frac{x_i + y_i}{2} + \frac{y_i - x_i}{2} = y_i$ , czyli  $k_i(t) \equiv k_i$ .

Jeśli  $\varepsilon_i < 0$ , to:

$$k_i(t) = \frac{\varphi\left(x_i + t \frac{y_i - x_i}{2}\right) - \varphi\left(x_i + t \frac{y_i - x_i}{2} - (-\varepsilon_i)\right)}{-\varepsilon_i}.$$

Na mocy Lematu 1.2

funkcja  $k_i(t)$  niemaleje wraz z  $t$ .

B)  $y_i < x_i$

Jeśli  $\varepsilon_i < 0$ , to:  $y_i = \frac{x_i + y_i}{2} - \frac{x_i - y_i}{2} \leq \frac{x_i + y_i}{2} + \varepsilon_i \leq x_i + t \frac{y_i - x_i}{2} + \varepsilon_i < x_i + t \frac{y_i - x_i}{2} \leq x_i$ , czyli  $k_i(t) \equiv k_i$ .

Jeśli  $\varepsilon_i > 0$ , to:

$$k_i(t) = \frac{\varphi\left(x_i - t \frac{x_i - y_i}{2} + \varepsilon_i\right) - \varphi\left(x_i - t \frac{x_i - y_i}{2}\right)}{\varepsilon_i}.$$

Na mocy Lematu 1.2 funkcja  $k_i(t)$  nierosnie wraz z  $t$ .

We wszystkich przypadkach funkcje:

$$g_i(t) := k_i(t)\varepsilon_i c_i$$

są nierosnące. Niech:

$$I := \{i : x_i = y_i\}, \quad K := \{i : x_i \neq y_i \wedge |x_i|, |y_i| \leq \frac{a(\varphi)}{2}\}.$$

Oczywiście  $\mathcal{N} = I \dot{\cup} J \dot{\cup} K$ . Niech  $\lambda := \lambda(t) = 1 - \frac{t}{2}$ . Zauważmy, że:

$$\sum_{i \in K} \varphi\left(x_i + t \frac{y_i - x_i}{2} + \varepsilon_i\right) c_i = \sum_{i \in K} \varphi\left(x_i + t \frac{y_i - x_i}{2}\right) c_i = 0,$$

gdyż argumenty funkcji  $\varphi$  zawierają się w  $[-a(\varphi), a(\varphi)]$ . Zatem:

$$F(t) = \sum_{i \in I} \varphi(x_i + \varepsilon_i) c_i + \sum_{i \in J} \varphi\left(x_i + t \frac{y_i - x_i}{2} + \varepsilon_i\right) c_i =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i \in I} \varphi(x_i + \varepsilon_i) c_i + \sum_{i \in J} \varphi\left(x_i + t \frac{y_i - x_i}{2}\right) c_i + \sum_{i \in J} k_i(t) \varepsilon_i c_i = \\
&= \sum_{i \in I} \varphi(x_i + \varepsilon_i) c_i + \sum_{i \in N} \varphi(\lambda x_i + (1 - \lambda) y_i) c_i + \\
&\quad - \sum_{i \in I} \varphi(\lambda x_i + (1 - \lambda) y_i) c_i - \sum_{i \in K} \varphi\left(x_i + t \frac{y_i - x_i}{2}\right) c_i + \\
&\quad + \sum_{i \in J} g_i(t) = \sum_{i \in I} (\varphi(x_i + \varepsilon_i) - \varphi(x_i)) c_i + 1 + \sum_{i \in J} g_i(t),
\end{aligned}$$

więc  $F(t)$  jest nierosnąca na  $[0, 1]$ . □

**Lemat 4.2** *Jeśli funkcja Younga  $\varphi$  nie jest ściśle wypukła w dowolnym otoczeniu 0,  $a(\varphi) = 0$  oraz  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem liczb rzeczywistych spełniającym  $\inf\{c_n : n \in \mathbb{N}\} > 0$ , to istnieją dwa ciągi liczb rzeczywistych  $(x_n), (y_n)$  takie, że  $y_k < x_k$  dla nieskończenie wielu  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_n x_n = \lim_n y_n = 0$ ,  $\varphi \upharpoonright [x_n, y_n]$  jest afiniczna dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  oraz  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(x_n) c_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(y_n) c_n = 1$ .*

*Jeśli założenie  $\inf\{c_n : n \in \mathbb{N}\} > 0$  zastąpimy założeniem  $c(\varphi) = +\infty$ , to w tezie możemy dodatkowo zażądać:*

$$(\forall \lambda > 0) \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(\lambda x_n) c_n < +\infty \quad \text{oraz} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(\lambda y_n) c_n < +\infty \right)$$

*Dowód:*

Najpierw udowodnimy lemat przy dodatkowym założeniu.

Niech  $U$  będzie sumą odcinków otwartych zawartych w  $(0, +\infty)$  takich, że na każdym z nich funkcja  $\varphi$  jest afiniczna. Z założenia  $U \neq \emptyset$  oraz  $\inf U = 0$ . Zdefiniujemy teraz dwa ciągi  $(x_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}}$  takie, że dla naturalnego  $n \geq 2$  zachodzi:

$x_n, y_n \in U$ ,  $\varphi \upharpoonright [x_n, y_n]$  jest afiniczna oraz  $\varphi(nx_n) < \frac{1}{c_n 2^n}$ ,  $x_n < \frac{1}{n}$  i  $\varphi(ny_n) < \frac{1}{c_n 2^n}$ ,  $y_n < \frac{1}{n}$  oraz takie, że:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \varphi(x_n) c_n = \sum_{n=2}^{\infty} \varphi(y_n) c_n.$$

Konstrukcja będzie indukcyjna. Załóżmy, że skonstruowaliśmy już ciągi  $(x_i)_{2 \leq i \leq 2k-1}$ ,  $(y_i)_{2 \leq i \leq 2k-1}$  dla pewnego  $k \in \mathbb{N}$  spełniające odpowiednie założenia,  $y_{2i} < x_{2i}$  dla  $i < k$  oraz:

$$\sum_{n=2}^{2k-1} \varphi(x_n) c_n = \sum_{n=2}^{2k-1} \varphi(y_n) c_n.$$

Oczywiście dla  $k = 1$  dany ciąg jest pusty. Dla  $i \in \{2k, 2k+1\}$  wybieramy  $x_i \in U$  spełniające  $\varphi(ix_i) < \frac{1}{c_n 2^n}$ ,  $x_i < \frac{1}{i}$  a następnie wybieramy  $y_{2k} < x_{2k}$  na tyle bliskie  $x_{2k}$ , że spełnia odpowiednie założenia oraz, że  $y_{2k+1}$  zdefiniowane wzorem:

$$y_{2k+1} := \varphi^{-1} \left( (\varphi(x_{2k}) - \varphi(y_{2k})) \frac{c_{2k}}{c_{2k+1}} + \varphi(x_{2k+1}) \right)$$

również spełnia odpowiednie założenia. Jest to możliwe, gdyż  $\varphi$  jest ciągła i rosnąca na  $[0, +\infty)$  oraz  $U$  jest otwarte. Z konstrukcji wynika, że

$$\varphi(x_{2k})c_{2k} + \varphi(x_{2k+1})c_{2k+1} = \varphi(y_{2k})c_{2k} + \varphi(y_{2k+1})c_{2k+1},$$

Zatem  $\sum_{n=2}^{n=2k+1} \varphi(x_n)c_n = \sum_{n=2}^{n=2k+1} \varphi(y_n)c_n$  i krok indukcyjny został wykonany. Z konstrukcji wynika, że:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \varphi(x_n)c_n = \sum_{n=2}^{\infty} \varphi(y_n)c_n \leq \sum_{n=2}^{\infty} \varphi(ny_n)c_n \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} < 1$$

Ponieważ  $c(\varphi) = +\infty$  więc istnieje  $x_1$  taki, że  $\varphi(x_1)c_1 = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \varphi(x_i)c_i$ . Niech  $y_1 := x_1$ . Zatem:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(x_n)c_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(y_n)c_n = 1$$

Teraz niech będzie  $\lambda > 0$ . Ustalmy  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  takie, że  $\lambda < n$ . Wtedy:

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi(\lambda x_i)c_i \leq \sum_{i=1}^{n-1} \varphi(\lambda x_i)c_i + \sum_{i=n}^{\infty} \varphi(ix_i)c_i \leq \sum_{i=1}^{n-1} \varphi(\lambda x_i)c_i + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^i} < +\infty$$

co kończy dowód.

Pozostało wykazać lemat bez dodatkowego założenia. Metodą z poprzednio udowodnionego przypadku konstruujemy ciągi  $(x_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$  zawarte w  $U$  takie, że:

$$0 < 1 - c := \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi(x_{2k-1})c_{2k-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi(y_{2k-1})c_{2k-1} < 1$$

oraz  $y_{2k-1} < x_{2k-1}$  dla nieskończenie wielu  $k \in \mathbb{N}$ . Aby zakończyć dowód wystarczy skonstruować ciąg  $(x_{2k})$  zbieżny do zera taki, że  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi(x_{2k})c_{2k} = c$  i przyjąć  $y_{2k} := x_{2k}$ . Ciąg ten konstruujemy indukcyjnie w następujący sposób:

Niech  $x_2 \in U$  będzie dowolną liczbą spełniającą  $\varphi(x_2)c_2 < c$  oraz:

$$x_{2(k+1)} = \begin{cases} x_{2k}, & \text{jeśli } \sum_{i=1}^{k+1} \varphi(x_{2i})c_{2i} < c \\ \text{dowolny } x \in U \text{ taki, że} \\ \sum_{i=1}^k \varphi(x_{2i})c_{2i} + \varphi(x)c_{2(k+1)} < c, & \text{jeśli } \sum_{i=1}^{k+1} \varphi(x_{2i})c_{2i} \geq c \end{cases}$$

Zauważmy, że:

$$0 < \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi(x_{2i}) \leq \frac{1}{\inf\{c_i : i \in \mathbb{N}\}} \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi(x_{2i})c_{2i} < +\infty,$$

czyli  $\lim_n x_{2n} = 0$ , zatem istnieje nieskończenie wiele  $k \in \mathbb{N}$  takich, że  $x_{2(k+1)} < x_{2k}$  i zachodzi dla nich:

$$c \geq \sum_{i=1}^k \varphi(x_{2i})c_{2i} > c - \varphi(x_{2k})c_{2k}$$

Po przejściu do granicy otrzymamy  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi(x_{2k})c_{2k} = c$ , co kończy dowód lematu.  $\square$

W kolejnych lematkach zakładamy, że przestrzeń miarowa  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  jest  $\sigma$ -skończona.

**Lemat 4.3** *Jeśli  $0 < c(\varphi) < +\infty$ ,  $\varphi(c(\varphi)) < +\infty$  oraz jeśli istnieje nieskończony ciąg  $(A_n)$  zbiorów parami rozłącznych o miarach dodatnich skończonych takich, że:*

$$\varphi(c(\varphi)) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq 1,$$

*to  $B(L^\varphi(\mu))$  nie jest LNC. W szczególności  $B(L^\infty(\mu))$  nie jest LNC, o ile  $\dim L^\infty(\mu) = \infty$ .*

*Dowód:*

Niech  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $n_0 > \frac{1}{c(\varphi)}$ . Niech:

$$x := \sum_{n=n_0}^{\infty} \left( c(\varphi) - \frac{1}{n} \right) \chi_{A_n} \quad \text{oraz} \quad y := \sum_{n=n_0}^{\infty} c(\varphi) \chi_{A_n}$$

Z założenia  $I_\varphi(y) = \int_\Omega \varphi(y) d\mu = \sum_{n=n_0}^{\infty} \varphi(c(\varphi))\mu(A_n) \leq 1$  i tym bardziej  $I_\varphi(x) \leq 1$ .

Ponadto dla  $\lambda > 1$  oraz  $m > \max\{n_0, \frac{\lambda}{(\lambda-1)c(\varphi)}\}$  zachodzi:

$$I_\varphi(\lambda x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \varphi\left(\lambda\left(c(\varphi) - \frac{1}{n}\right)\right) \mu(A_n) \geq \varphi\left(\left(\lambda - \frac{\lambda}{mc(\varphi)}\right)c(\varphi)\right) \mu(A_m) = +\infty$$

i tym bardziej  $I_\varphi(\lambda y) = +\infty$ . Zatem  $\|x\|_\varphi = \|y\|_\varphi = 1$ . Niech

$x_n := x + \frac{1}{n}\chi_{A_n}$  dla  $n \geq n_0$ . Wtedy  $I_\varphi(x_n) \leq I_\varphi(y) \leq 1$ , czyli  $\|x_n\|_\varphi \leq 1$ . Ponadto dla  $\lambda > 0$  zachodzi  $\lim_n I_\varphi(\lambda(x_n - x)) = \lim_n \varphi(\frac{\lambda}{n})\mu(A_n) = 0$ , zatem  $\lim_n \|x_n - x\|_\varphi = 0$ . Ale:

$$\begin{aligned} I_\varphi\left(x_n + \frac{1}{2}(y - x)\right) &= I_\varphi\left(x_n - x + \frac{x + y}{2}\right) = \\ &= \int_{\Omega} \varphi\left(\frac{1}{n}\chi_{A_n} + \sum_{k=n_0}^{\infty} \left(c(\varphi) - \frac{1}{2k}\right)\chi_{A_n}\right) d\mu \geq \\ &\geq \int_{\Omega} \varphi\left(\frac{1}{n}\chi_{A_n} + \left(c(\varphi) - \frac{1}{2n}\right)\chi_{A_n}\right) d\mu = \\ &= \int_{A_n} \varphi\left(c(\varphi) + \frac{1}{2n}\right) d\mu = \varphi\left(c(\varphi) + \frac{1}{2n}\right)\mu(A_n) = +\infty. \end{aligned}$$

Zatem  $x_n + \frac{1}{2}(y - x) \notin B(L^\varphi(\mu))$ , co oznacza, że  $B(L^\varphi(\mu))$  nie jest LNC.  $\square$

Zauważmy, że założenia powyższego lematu są spełnione, jeśli  $c(\varphi) < +\infty$ ,  $\varphi(c(\varphi)) < +\infty$  oraz  $\mu$  ma dodatnią część bezatomową lub  $\inf\{\mu(e_n) : n \in \mathbb{N}\} = 0$

W poniższym lemacie zakładamy, że  $\mu$  ma nieskończenie wiele atomów  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$  i przyjmijmy oznaczenie:

$$c_n := \mu(e_n)$$

**Lemat 4.4** Niech  $(x_n), (y_n)$  będą ciągami nieujemnych liczb rzeczywistych takimi, że dla  $k \in \mathbb{N}$  zachodzi  $x_k = y_k$  lub  $\varphi$  jest afiniczna i rosnąca na  $[x_k, y_k]$  oraz niech

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi(x_i)c_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi(y_i)c_i = 1. \text{ Niech}$$

$$x := \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i \chi_{e_i}, y := \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \chi_{e_i}$$

oraz  $u_k := x - 2x_k \chi_{e_k}$

dla  $k \in \mathbb{N}$ . Wtedy  $I_\varphi(u_k) = 1$  oraz dla  $n \in \mathbb{N}$  spełniających  $y_n < x_n$  zachodzi  $I_\varphi(u_n + \frac{1}{2}(y - x)) > 1$ .

*Dowód:*

Zauważmy, że:

$$I_\varphi(u_n) = \sum_{i \in N \setminus \{n\}} \varphi(x_i)c_i + \varphi(-x_n)c_n = \sum_{i \in N} \varphi(x_i)c_i = 1,$$

co dowodzi pierwszej części. Oznaczmy  $\delta_i := \frac{y_i - x_i}{2}$ . Niech  $n \in N$  będzie takie, że  $y_n < x_n$ , czyli  $\varphi(x_n + \delta_n) < \varphi(x_n - \delta_n)$ , a więc:

$$\begin{aligned} I_\varphi\left(u_n + \frac{1}{2}(y - x)\right) &= I_\varphi\left(x - 2x_n\chi_{\epsilon_n} + \frac{1}{2}(y - x)\right) = \\ &= \sum_{i \in N \setminus \{n\}} \varphi(x_i + \delta_i)c_i + \varphi(-x_n + \delta_n)c_n = \\ &= \sum_{i \in N} \varphi(x_i + \delta_i)c_i - \varphi(x_n + \delta_n)c_n + \varphi(x_n - \delta_n)c_n > \\ &> \sum_{i \in N} \varphi(x_i + \delta_i)c_i = \sum_{i \in N} \varphi\left(\frac{x_i + y_i}{2}\right)c_i = \\ &= \sum_{i \in N} \left(\frac{1}{2}\varphi(x_i)c_i + \frac{1}{2}\varphi(y_i)c_i\right) = 1, \end{aligned}$$

co kończy dowód lematu. □

Miara, o której mowa w kolejnym lemacie  $\mu$  nie musi zawierać atomów.

**Lemat 4.5** *Załóżmy, że dany jest ciąg parami rozłącznych zbiorów miary dodatniej skończonej  $(A_n)_{n \in N}$  taki, że  $\lim_n \mu(A_n) = 0$  oraz liczby rzeczywiste  $0 < a < b$  takie, że  $\varphi$  jest funkcją afiniczną i rosnącą na  $[a, b]$ . Niech  $A := \bigcup_{n \in N} A_n$  i załóżmy  $\mu(A) < 1/\varphi(\frac{a+b}{2})$  oraz niech  $B \subset \Omega \setminus A$  będzie zbiorem miary dodatniej skończonej. niech  $d > 0$  będzie taką liczbą, że  $\varphi(d)\mu(B) = 1 - \mu(A)\varphi(\frac{a+b}{2})$ . Niech:*

$$0 < \delta < \min \left\{ \frac{b-a}{2}, \frac{\mu(A \setminus A_1)}{\mu(A_1)} \cdot \frac{b-a}{2} \right\} \quad \text{oraz} \quad \eta := \frac{\delta\mu(A_1)}{\mu(A \setminus A_1)}$$

$$\text{Niech} \quad x := \frac{a+b}{2}\chi_A + d\chi_B, \quad y := \left(\frac{a+b}{2} - \eta\right)\chi_{A \setminus A_1} + \left(\frac{a+b}{2} + \delta\right)\chi_{A_1} + d\chi_B,$$

$$x_n := x(1 - 2\chi_{A_n}) \quad \text{dla} \quad n \in N.$$

$$\text{Wtedy:} \quad I_\varphi(x) = I_\varphi(y) = I_\varphi(x_n) = 1 \quad \text{oraz} \quad I_\varphi\left(x_n + \frac{y-x}{2}\right) > 1 \quad \text{dla} \quad n \geq 2.$$

*Dowód:*

Zauważmy, że  $0 < \delta, \eta < \frac{b-a}{2}$ . Wynika z tego, że  $x(A) \cup y(A) \subset [a, b]$ . Niech  $k > 0$  będzie współczynnikiem kierunkowym funkcji  $\varphi$  na  $[a, b]$ . Obliczmy:

$$I_\varphi(x) = \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)\mu(A) + \varphi(d)\mu(B) = 1,$$

oraz:

$$\begin{aligned} I_\varphi(y) &= \varphi\left(\frac{a+b}{2} - \eta\right)\mu(A \setminus A_1) + \varphi\left(\frac{a+b}{2} + \delta\right)\mu(A_1) + \varphi(d)\mu(B) = \\ &= \left(\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) - k\eta\right)\mu(A \setminus A_1) + \left(\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) + k\delta\right)\mu(A_1) + \varphi(d)\mu(B) = \\ &= \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)(\mu(A \setminus A_1) + \mu(A_1)) + k(\delta\mu(A_1) - \eta\mu(A \setminus A_1)) + \varphi(d)\mu(B) = \\ &= \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)\mu(A) + 0 + \varphi(d)\mu(B) = 1, \end{aligned}$$

wreszcie:

$$I_\varphi(x_n) = \int_{\Omega \setminus A} \varphi(x) d\mu + \int_A \varphi(-x) d\mu = \int_{\Omega} \varphi(x) d\mu = 1.$$

Ponadto dla  $n \geq 2$ :

$$\begin{aligned} I_\varphi\left(x_n + \frac{y-x}{2}\right) &= \int_{\Omega} \varphi\left(x_n - x + \frac{x+y}{2}\right) d\mu = \int_{\Omega} \varphi\left(-(a+b)\chi_{A_n} + \frac{x+y}{2}\right) d\mu = \\ &= \int_{A_n} \varphi\left(-(a+b) + \frac{x+y}{2}\right) d\mu + \int_{A \setminus A_n} \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) d\mu + \int_{\Omega \setminus A} \varphi(x) d\mu = \\ &= \int_{A_n} \varphi\left(a+b - \frac{x+y}{2}\right) d\mu + \int_A \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) d\mu - \int_{A_n} \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) d\mu + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus A} \varphi(x) d\mu + \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus A} \varphi(y) d\mu = \\ &= \int_{A_n} \varphi\left(a+b - \frac{x+y}{2}\right) d\mu - \int_{A_n} \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) d\mu + \int_A \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2} d\mu + \\ &\quad + \int_{\Omega \setminus A} \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2} d\mu = \int_{A_n} \left(\varphi\left(a+b - \frac{x+y}{2}\right) - \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) d\mu + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi(x) d\mu + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi(y) d\mu = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{A_n} \left( \varphi \left( a + b - \frac{a+b-\eta}{2} \right) - \varphi \left( \frac{a+b-\eta}{2} \right) \right) d\mu + 1 = \\
&= 1 + \left( \varphi \left( \frac{a+b}{2} + \frac{\eta}{2} \right) - \varphi \left( \frac{a+b}{2} - \frac{\eta}{2} \right) \right) \mu(A_n) > 1,
\end{aligned}$$

co kończy dowód lematu. □

Teraz sformułujemy i udowodnimy dwa główne twierdzenia podające pełną charakteryzację własności *LNC* kul jednostkowych w przestrzeniach Orlicza z normą Luxemburg w  $L^\varphi(\mu)$  i w  $E^\varphi(\mu)$  odpowiednio przy generalnym założeniu, że  $\varphi$  jest funkcją Younga oraz miara  $\mu$  jest  $\sigma$ -skończona. W przypadkach w których miara  $\mu$  jest atomowa ustalmy podział  $\Omega$  na rozłączne atomy  $\{e_n : n \in \mathcal{N}\}$ , gdzie  $\mathcal{N}$  oznacza  $\mathbb{N}$  gdy atomów jest nieskończenie wiele (czyli  $\dim L^\varphi(\mu) = \infty$ ) oraz jest równe ilości atomów, gdy jest ich skończenie wiele (czyli  $\dim L^\varphi(\mu) < \infty$ ).

**Twierdzenie 4.1** *Kula  $B(L^\varphi(\mu))$  jest LNC wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z warunków:*

- i)  $\dim L^\varphi(\mu) < \infty$
- ii)  $\mu$  jest atomowa,  $\inf\{\mu(e_n) : n \in \mathbb{N}\} > 0$ ,  $\varphi \in \Delta_r^\circ(\mu)$  dla pewnego  $r > 1$  oraz  $\varphi$  jest ściśle wypukła na przedziale  $[0, b]$  dla pewnego  $b > 0$ .
- iii)  $c(\varphi) = +\infty$ ,  $\varphi \in \Delta_2(\mu)$  oraz  $\varphi$  jest ściśle wypukła na  $\mathbb{R}$ .

*Dowód*

( $\Rightarrow$ ) Załóżmy, że  $B(L^\varphi(\mu))$  jest *LNC* oraz  $L^\varphi(\mu)$  jest nieskończenie wymiarowa. Należy udowodnić, że zachodzi ii) lub iii). Rozważmy dwa przypadki:

A)  $\mu$  jest atomowa oraz  $\inf\{\mu(e_n) : n \in \mathbb{N}\} > 0$  (z założenia zbiór atomów jest nieskończony).

Ponieważ  $B(L^\varphi(\mu))$  jest *LNC*, więc zgodnie ze Stwierdzeniem 3.2 jest stabilna. Na mocy Twierdzenia Wisły (p. [19], Twierdzenie 5) zachodzi jeden z sześciu warunków Wniosku 2.3 c), przy czym i) jest wykluczony z założenia, ii) jest wykluczony



na mocy Lematu 4.3 , *vi*) jest wykluczony na mocy założenia A). Zatem na mocy punktów *iii*)—*v*) Wniosku 2.3 *c*) zachodzi  $\varphi \in \Delta_r^0(\mu)$  dla pewnego  $r > 1$  jeśli  $c(\varphi) < +\infty$  i  $\varphi(c(\varphi)) < +\infty$ , lub  $\varphi \in \Delta_r(\mu)$  bez tych założeń. Z Lematu 1.7 punkt 12 w obu przypadkach  $\varphi \in \Delta_r^0(\mu)$  dla pewnego  $r > 1$ . Z Lematu 1.7 punkt 5 wynika, że  $a(\varphi) = 0$ .

Założmy teraz, że *ii*) naszego twierdzenia nie jest spełnione. Zatem są spełnione założenia Lematu 4.2. Niech ciągi  $(x_n)$  oraz  $(y_n)$  spełniają jego tezę (oczywiście w słabszej wersji). Niech  $x, y$  oraz  $u_n$  dla  $n \in \mathbb{N}$  będą takie, jak w Lemacie 4.4. Zatem spełnione są jego założenia. Z jego tezy wynika, że do wykazania że para  $\langle x, y \rangle$  nie jest *LNC* w  $B(L^\varphi(\mu))$  wystarczy udowodnić, że  $\lim_n \|u_n - x\| = 0$ .

Niech  $\lambda > 0$ . Zatem:

$$I_\varphi(\lambda(x - u_n)) = I_\varphi(2\lambda x_n \chi_{e_n}) = \varphi(2\lambda x_n) c_n.$$

Wykażemy, że wyrażenie to dąży do zera; (jest to oczywiste jedynie w wypadku  $\sup\{c_n : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$ ). Wystarczy wykazać to dla  $\lambda \in \{\frac{r^k}{2} : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ , gdyż jest to zbiór nieograniczony i jeśli zbieżność jest prawdziwa dla  $\lambda = \frac{r^k}{2}$ , to jest też prawdziwa dla  $\lambda < \frac{r^k}{2}$ . Dowód będzie indukcyjny. Dla  $k = 0$  mamy  $\lim_n I_\varphi(x - u_n) = \lim_n \varphi(x_n) c_n = 0$  na mocy warunku koniecznego zbieżności szeregów. Niech więc dla pewnego  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  zachodzi  $\lim_n I_\varphi(\frac{r^k}{2}(x - u_n)) = 0$ , czyli  $\lim_n \varphi(r^k x_n) c_n = 0$ . Niech  $n_0 \in \mathbb{N}$  będzie tak duże, że dla  $n \geq n_0$  zachodzi  $r^k x_n < a_0$  oraz  $\varphi(r^k x_n) c_n \leq b$ , gdzie  $a_0$  i  $b$  są stałymi z definicji 1.3. Podstawiając  $t := r^k x_n$  warunek definicji 1.3 przyjmuje postać:

$$\varphi(r^{k+1}) c_n \leq c \varphi(r^k x_n) c_n + d_n \quad \text{dla} \quad n \geq n_0,$$

gdzie  $c > 0$ ,  $d_n \geq 0$  są stałymi z definicji 1.3,  $\sum_{k \in \mathbb{N}} d_k < +\infty$ .

Z założenia indukcyjnego prawa strona dąży do zera, gdy  $n$  dąży do  $+\infty$ , a więc lewa też. Kończy to dowód indukcyjny i zarazem dowód faktu, że  $\lim_n \|u_n - x\|_\varphi = 0$ . Zatem para  $\langle x, y \rangle$  nie jest *LNC* w  $B(L^\varphi(\mu))$ , wbrew założeniu. Kończy to dowód przypadku A).

B) Pozostała do rozważenia sytuacja, gdy miara  $\mu$  nie jest atomowa lub  $\inf\{\mu(e_n) : n \in \mathbb{N}\} = 0$ . Innymi słowy możemy założyć, że istnieje ciąg parami rozłącznych zbiorów miary dodatniej skończonej  $(A_n)$  taki, że  $\lim_n \mu(A_n) = 0$ . Wykażemy, że zachodzi warunek *iii*) naszego twierdzenia.

Ponieważ  $B(L^\varphi(\mu))$  jest *LNC* a zatem stabilna, więc spełniony jest któryś z warunków *i*)—*vi*) Wniosku 2.3 *c*). Warunki *i*) oraz *ii*) są wykluczone tak jak w przypadku A). Wykluczmy teraz przypadek  $c(\varphi) < +\infty$  i  $\varphi(c(\varphi)) < +\infty$ , a więc warunki *iv*)—*vi*). Jeśli  $c(\varphi) < +\infty$  oraz  $\varphi(c(\varphi)) < +\infty$ , to istniałby taki rosnący ciąg liczb naturalnych  $(n_k)$ , że:

$$\varphi(c(\varphi)) \cdot \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_{n_k}) \leq 1,$$

a więc na mocy Lematu 4.3 kula  $B(L^\varphi(\mu))$  nie byłaby *LNC*. Zatem spełniony jest warunek *iii*) Wniosku 2.3, czyli  $\varphi \in \Delta_r(\mu)$  dla pewnego  $r > 1$ .

Wykażemy teraz, że  $c(\varphi) = +\infty$ . Jeśli miara  $\mu$  ma część bezatomową dodatnią  $\Omega_1$ , to  $\varphi \in \Delta_r(\mu \upharpoonright \Omega_1)$ , czyli z Lematu 1.7 punkt 3 wynika  $c(\varphi) = +\infty$ .

Jeśli  $\mu$  jest atomowa, to ponieważ  $\inf\{\mu(e_n) : n \in \mathbb{N}\} = 0$ , więc istnieje  $n \in \mathbb{N}$  takie, że:

$$\mu(e_n) \leq b / \varphi\left(\frac{c(\varphi)}{r'}\right),$$

gdzie  $1 < r' < r$  jest dowolne, natomiast  $b$  jest stałą z Definicji 1.2. Zatem  $\varphi(\frac{c(\varphi)}{r'})\mu(e_n) \leq b$ , czyli na mocy definicji 1.2 zachodzi:

$$+\infty = \varphi\left(r \frac{c(\varphi)}{r'}\right) \leq c\varphi\left(\frac{c(\varphi)}{r'}\right)\mu(e_n) + d_n < +\infty, \quad \text{co daje sprzeczność.}$$

Zatem  $c(\varphi) = +\infty$ . Z Lematu 1.7 punkt 2 wynika, że  $\varphi \in \Delta_r(\mu)$  dla każdego  $r > 1$ , w szczególności  $\varphi \in \Delta_2(\mu)$ .

Wykażemy teraz, że  $a(\varphi) = 0$ .

Założmy, że  $a(\varphi) > 0$ . Jeśli  $\mu$  zawiera dodatnią część bezatomową, to  $0 < \varphi(2a(\varphi)) \leq c\varphi(a(\varphi)) = 0$ , co daje sprzeczność. Zatem  $\mu$  jest atomowa. Jeśli  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(e_n) = +\infty$ , to  $a(\varphi) = 0$  na mocy Lematu 1.7 punkt 5. Zatem  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(e_n) < +\infty$ . Niech  $x_1$  będzie taką dodatnią liczbą rzeczywistą, że  $\varphi(x_1)\mu(e_n) = 1$ . Połóżmy:

$$x := x_1 \chi_{e_1}, \quad y := x_1 \chi_{e_1} + a(\varphi) \cdot \sum_{i=2}^{+\infty} \chi_{e_i}.$$

Niech ponadto:

$$u_n := x + a(\varphi)\chi_{e_n} \quad \text{dla} \quad n = 2, 3, \dots$$

Wtedy:

$$I_\varphi(x) = I_\varphi(y) = \varphi(x_1)\mu(e_1) = 1, \quad I_\varphi(u_n) = 1.$$

Zatem  $x, y, u_n \in B(L^\varphi(\mu))$ . Niech  $\lambda > 0$ . Wtedy:

$$I_\varphi(\lambda(u_n - x)) = I_\varphi(\lambda a(\varphi)\chi_{e_n}) = \varphi(\lambda a(\varphi))\mu(e_n).$$

Z warunku koniecznego zbieżności szeregów wynika, że  $\lim_n \mu(e_n) = 0$ , a więc  $\lim_n I_\varphi(\lambda(u_n - x)) = 0$ . Wobec dowolności  $\lambda > 0$  oznacza to, że  $\lim_n \|u_n - x\| = 0$ . Ponadto:

$$\begin{aligned} I_\varphi\left(u_n + \frac{1}{2}(y - x)\right) &= I_\varphi\left(u_n - x + \frac{1}{2}(x + y)\right) = I_\varphi\left(a(\varphi)\chi_{e_n} + x_1\chi_{e_1} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a(\varphi)}{2}\chi_{e_i}\right) \\ &= I_\varphi\left(x_1\chi_{e_1} + \frac{3}{2}a(\varphi)\chi_{e_n} + \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus \{1, n\}} \frac{a(\varphi)}{2}\chi_{e_i}\right) = \\ &= \varphi(x_1)\mu(e_1) + \varphi\left(\frac{3}{2}a(\varphi)\right)\mu(e_n) = 1 + \varphi\left(\frac{3}{2}a(\varphi)\right)\mu(e_n) > 1, \end{aligned}$$

czyli  $u_n + \frac{1}{2}(y - x) \notin B(L^\varphi(\mu))$ . Przeczy to założeniu, że  $B(L^\varphi(\mu))$  jest *LNC*. Założenie  $a(\varphi) > 0$  doprowadziło do sprzeczności, a zatem  $a(\varphi) = 0$ .

Do wykazania punktu *iii*) naszego twierdzenia pozostało udowodnienie, że  $\varphi$  jest ściśle wypukła na  $\mathbb{R}$ . Załóżmy, że nie jest to prawdą. Zatem możemy przyjąć, że są spełnione założenia Lematu 4.5. Niech  $x, y$  oraz  $x_n$  dla  $n \in \mathbb{N}$  będą takie, jak w treści tego lematu. Z jego tezy wynika, że  $x, y, x_n \in B(L^\varphi(\mu))$  oraz  $x_n + \frac{y-x}{2} \notin B(L^\varphi(\mu))$  dla  $n \geq 2$ . Ponadto dla  $\lambda > 0$  zachodzi:

$$I_\varphi(\lambda(x - x_n)) = \int_{A_n} \varphi(2\lambda x) d\mu = \int_{A_n} \varphi(\lambda(a + b)) d\mu = \varphi(\lambda(a + b))\mu(A_n).$$

Ponieważ  $c(\varphi) = +\infty$ , więc  $\varphi(\lambda(a + b)) < +\infty$ ,  $\lim_n \mu(A_n) = 0$ , czyli  $\lim_n I_\varphi(\lambda(x - x_n)) = 0$ , co wobec dowolności  $\lambda > 0$  oznacza, że  $\lim_n \|x - x_n\| = 0$ . Wymienione własności dowodzą, że para  $\langle x, y \rangle$  nie jest *LNC* w  $B(L^\varphi(\mu))$ , co jest sprzeczne z założeniem, że  $B(L^\varphi(\mu))$  jest zbiorem *LNC*. Zatem w rozpatrywanym przypadku spełniony jest warunek *iii*) naszego twierdzenia. Kończy to dowód implikacji ( $\Rightarrow$ ).

( $\Leftarrow$ ) Dowód w naturalny sposób rozбивa się na trzy części, w zależności od tego, który z warunków naszego twierdzenia jest spełniony.

a) Załóżmy, że spełniony jest warunek i), czyli  $L^\varphi(\mu)$  jest skończenie wymiarowa. Można założyć, że  $\mu$  jest atomowa i ma skończoną ilość atomów  $\{e_i : 1 \leq i \leq N\}$ , gdzie  $N := \dim L^\varphi(\mu)$ . Oznaczmy  $c_i = \mu(e_i)$  dla  $i = 1, 2, \dots, N$ . Niech  $x, y \in B(L^\varphi(\mu))$ ,  $u_n \in B(L^\varphi(\mu))$  dla  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_n \|u_n - x\|_\varphi = 0$ .

Należy wykazać, że  $u_n + \frac{1}{2}(y - x) \in B(L^\varphi(\mu))$  dla dostatecznie dużych  $n \in \mathbb{N}$ . Na mocy Stwierdzenia 3.2 e) wystarczy to zrobić przy dodatkowym założeniu  $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\|_\varphi = 1$  dla każdego  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Można przyjąć, że:

$$x = \sum_{i=1}^N x_i \chi_{e_i}, \quad y = \sum_{i=1}^N y_i \chi_{e_i}, \quad u_n = \sum_{i=1}^N u_i^n \chi_{e_i}$$

dla  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gdzie  $x_i, y_i, u_i^n$  są liczbami rzeczywistymi. Rozpatrzmy dwa przypadki:

1. Istnieje  $\lambda_0 \in [0, 1]$  takie, że  $I_\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) < 1$ . Z Lematu 1.5 wynika, że dla każdego  $\lambda \in (0, 1)$  zachodzi  $I_\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) < 1$ , czyli  $\sum_{i=1}^N \varphi(\lambda x_i + (1 - \lambda)y_i)c_i < 1$ . W szczególności  $\sum_{i=1}^N \varphi(\frac{x_i + y_i}{2})c_i < 1$ . Ponieważ  $\|\frac{x+y}{2}\|_\varphi = 1$ , więc dla  $\alpha > 1$  zachodzi  $I_\varphi(\alpha \frac{x+y}{2}) = +\infty$ , czyli  $\sum_{i=1}^N \varphi(\alpha \frac{x_i + y_i}{2})c_i = +\infty$ . Jest to możliwe jedynie w przypadku, gdy istnieje  $1 \leq k \leq N$  takie, że  $|\frac{x_k + y_k}{2}| = c(\varphi) < +\infty$ . Gdyby  $x_k \neq y_k$ , to wyrażenie  $|\lambda x_k + (1 - \lambda)y_k|$  dla  $\lambda \in [0, 1]$  osiągałoby kres górny jedynie na którymś końcu przedziału, a więc byłoby  $|x_k| > c(\varphi)$  lub  $|y_k| > c(\varphi)$ , ale wtedy  $I_\varphi(x) = +\infty$  lub  $I_\varphi(y) = +\infty$  wbrew założeniu  $x, y \in B(L^\varphi(\mu))$ . Zatem  $x_k = y_k = \pm c(\varphi)$  dla pewnego ustalonego  $1 \leq k \leq N$ . Z wyboru ciągu  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wynika, że dla  $\alpha > 0$  zachodzi  $\lim_n I_\varphi(\alpha(x - u_n)) = 0$ , czyli  $\lim_n \sum_{i=1}^N \varphi(\alpha(x_i - u_i^n))c_i = 0$ , skąd wynika, że dla każdego  $1 \leq i \leq N$  zachodzi  $\lim_n u_i^n = x_i$ . Rzeczywiście, gdyby nie, to istniałoby naturalne  $1 \leq i \leq N$ , rosnący ciąg liczb naturalnych  $n_k$  oraz  $\varepsilon > 0$  takie, że  $|u_i^{n_k} - x_i| > \varepsilon$  i przyjmując  $a := \max\{a(\varphi), 1\}$  oraz  $\alpha := \frac{2a}{\varepsilon}$  otrzymalibyśmy  $\sum_{j=1}^N \varphi(\alpha(x_j - u_j^{n_k}))c_j \geq$

$\varphi(2a)c_i > 0$  dla  $k \in \mathbb{N}$ , czyli sprzeczność. Połóżmy:

$$I := \{i : x_i = y_i = \pm c(\varphi)\}, \quad J := \{1, 2, \dots, N\} \setminus I.$$

Dla dostatecznie dużych  $n$  i dla każdego  $i \in J$  zachodzi:

$$\left| \varphi\left(u_i^n - x_i + \frac{x_i + y_i}{2}\right) - \varphi\left(\frac{x_i + y_i}{2}\right) \right| c_i < \frac{1}{N} \left(1 - I_\varphi\left(\frac{x + y}{2}\right)\right),$$

gdyż  $|\frac{x_i + y_i}{2}| < c(\varphi)$  oraz  $\varphi$  jest ciągła na  $(-c(\varphi), c(\varphi))$ . Zatem:

$$\begin{aligned} I_\varphi\left(u_n + \frac{1}{2}(y - x)\right) &= \sum_{i \in I} \varphi(u_i^n) c_i + \sum_{i \in J} \varphi\left(u_i^n - x_i + \frac{x_i + y_i}{2}\right) c_i \leq \\ &\leq \sum_{i \in I} \varphi\left(\frac{x_i + y_i}{2}\right) c_i + \sum_{i \in J} \left(\varphi\left(u_i^n - x_i + \frac{x_i + y_i}{2}\right) - \varphi\left(\frac{x_i + y_i}{2}\right)\right) c_i + \\ &\quad + \sum_{i \in J} \varphi\left(\frac{x_i + y_i}{2}\right) c_i \leq \\ &\leq I_\varphi\left(\frac{x + y}{2}\right) + \sum_{i \in J} \left|\varphi\left(u_i^n - x_i + \frac{x_i + y_i}{2}\right) - \varphi\left(\frac{x_i + y_i}{2}\right)\right| c_i \leq \\ &\leq I_\varphi\left(\frac{x + y}{2}\right) + N \cdot \frac{1}{N} \left(1 - I_\varphi\left(\frac{x + y}{2}\right)\right) = 1, \end{aligned}$$

czyli dla dostatecznie dużych  $n$  zachodzi  $u_n + \frac{1}{2}(y - x) \in B(L^\varphi(\mu))$ .

Zatem para  $\langle x, y \rangle$  jest  $LNC$  w  $B(L^\varphi(\mu))$ .

2. Dla każdego  $0 \leq \lambda \leq 1$  zachodzi  $I_\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) = 1$ .

Niech  $n_0$  będzie tak duże, że dla  $n \geq n_0$  oraz  $\varepsilon_i := u_i^n - x_i$  spełnione są założenia (a)–(d) z punktu 3 Lematu 4.1. Wtedy spełnione są wszystkie założenia tego lematu, a więc i jego teza. Zatem dla ustalonego  $n \geq n_0$  zachodzi:

$$\begin{aligned} I_\varphi\left(u_n + \frac{1}{2}(y - x)\right) &= \sum_{i=1}^N \varphi\left(\varepsilon_i + \frac{x_i + y_i}{2}\right) c_i = F(1) \leq F(0) = \sum_{i=1}^N \varphi(x_i + \varepsilon_i) c_i = \\ &= \sum_{i=1}^N \varphi(u_i^n) c_i = I_\varphi(u_n) \leq 1, \end{aligned}$$

czyli  $u_n + \frac{1}{2}(y - x) \in B(L^\varphi(\mu))$  dla  $n \geq n_0$ . Zatem para  $\langle x, y \rangle$  jest  $LNC$  w  $B(L^\varphi(\mu))$ .

Ponieważ  $x, y \in B(L^\varphi(\mu))$  były dowolne, więc oba przypadki razem dają:  $B(L^\varphi(\mu))$  jest  $LNC$ . Kończy to dowód części a).

b) Załóżmy, że jest spełniony warunek ii) naszego twierdzenia.

Ustalmy  $x, y \in B(L^\varphi(\mu))$ ,  $x \neq y$ ,  $u_n \in B(L^\varphi(\mu))$  dla  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_n \|u_n - x\|_\varphi = 0$ . Podobnie jak w części a) można założyć, że  $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\|_\varphi = 1$  dla każdego  $\lambda \in [0, 1]$  inależy wykazać, że  $u_n + \frac{1}{2}(y - x) \in B(L^\varphi(\mu))$  dla dostatecznie dużych  $n \in \mathbb{N}$ . Przyjmijmy oznaczenia analogiczne jak w części a), a więc  $x = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i \chi_{e_i}$ ,  $y = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \chi_{e_i}$ ,  $u_n = \sum_{i \in \mathbb{N}} u_i^n \chi_{e_i}$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . Ponieważ z założenia  $\inf\{c_i : i \in \mathbb{N}\} > 0$  i w szczególności  $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(e_i) = +\infty$ , więc na mocy Lematu 1.7 punkt 5 zachodzi  $a(\varphi) = 0$ . Analogicznie jak w części a) rozważymy dwa przypadki:

1. Istnieje  $\lambda_0 \in [0, 1]$  takie, że  $I_\varphi(\lambda_0 x + (1 - \lambda_0)y) < 1$ .

Analogicznie jak w a) wynika z tego, że dla każdego  $\lambda \in (0, 1)$  zachodzi  $I_\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) < 1$ . W szczególności  $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{x_i + y_i}{2}\right) c_i < 1$ . Jeszcze prościej niż w a) (gdyż  $a(\varphi) = 0$ ) otrzymujemy  $\lim_n u_i^n = x_i$  dla  $i \in \mathbb{N}$ .

Ponieważ zachodzi nierówność:

$$0 \leq \varphi(x_i) \leq \frac{1}{\inf\{c_j : j \in \mathbb{N}\}} \cdot \varphi\left(\frac{x_i + y_i}{2}\right) c_i,$$

więc na mocy warunku koniecznego zbieżności szeregów zachodzi  $\lim_i \varphi\left(\frac{x_i}{2}\right) = 0$ , a więc  $\lim_i x_i = 0$  i analogicznie  $\lim_i y_i = 0$  oraz  $\lim_i u_i^n = 0$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . Połóżmy:

$$J := \{k \in \mathbb{N} : |x_k| = c(\varphi) \vee |y_k| = c(\varphi)\}.$$

Z powyższego wynika, że  $J$  jest skończony. Zdefiniujemy dwie dopełniające się podprzestrzenie przestrzeni  $L^\varphi(\mu)$ :

$$X_1 := \text{lin}\{\chi_{e_k} : k \notin J\} \quad X_2 := \text{lin}\{\chi_{e_k} : k \in J\}$$

Położmy:

$$x' := \text{Pr}_{X_1} x, \quad x'' := \text{Pr}_{X_2} x, \quad y' := \text{Pr}_{X_1} y, \quad y'' := \text{Pr}_{X_2} y$$

oraz:

$$u'_n := \text{Pr}_{X_1} u_n, \quad u''_n := \text{Pr}_{X_2} u_n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Oczywiście  $x = x' + x''$ ,  $y = y' + y''$ ,  $u_n = u'_n + u''_n$ , wszystkie nowo zdefiniowane rzuty należą do  $B(L^\varphi(\mu))$  oraz  $\|x'\|_\infty < c(\varphi)$ ,  $\|y'\|_\infty < c(\varphi)$  a więc i  $\|\frac{x' + y'}{2}\|_\infty < c(\varphi)$ . Z

Lematu 1.7 punkt 15 wynika, że  $\| \frac{x'+y'}{2} \|_\varphi < 1$ , bo  $I_\varphi(\frac{x'+y'}{2}) < 1$ . Ponadto dla  $\lambda > 0$ :

$$I_\varphi(\lambda(x' - u'_n)) = \sum_{k \notin J} \varphi(\lambda(x_k - u_k^n)) c_k \leq I_\varphi(\lambda(x - u_n))$$

Prawa strona powyższego wyrażenia dąży do zera, a więc lewa również, co wobec dowolności  $\lambda > 0$  oznacza, że  $\lim_n \|x' - u'_n\|_\varphi = 0$ . Ponieważ:

$$\left\| u'_n + \frac{1}{2}(y' - x') \right\|_\varphi = \left\| u'_n - x' + \frac{x' + y'}{2} \right\|_\varphi \leq \|u'_n - x'\|_\varphi + \left\| \frac{x' + y'}{2} \right\|_\varphi,$$

czyli:

$$\exists \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \quad \left\| u'_n + \frac{1}{2}(y' - x') \right\|_\varphi < 1 - \varepsilon$$

i tym bardziej  $I_\varphi(u'_n + \frac{1}{2}(y' - x')) < 1 - \varepsilon$ .

Niech  $n_1 \geq n_0$  będzie takie, że dla każdego  $n \geq n_1$  zachodzi:

$$I_\varphi\left(u''_n + \frac{1}{2}(y'' - x'')\right) = \sum_{k \in J} \varphi\left(u_k^n + \frac{1}{2}(y_k - x_k)\right) c_k < \varepsilon.$$

Jest to możliwe, gdyż  $\lim_k u_k^k = x_n$  dla  $k \in J$  oraz  $J$  jest skończony. Zatem dla  $n \geq n_1$  zachodzi:

$$\begin{aligned} I_\varphi\left(u_n + \frac{1}{2}(y - x)\right) &= \sum_{k \notin J} I_\varphi\left(u_k^n + \frac{1}{2}(y_k - x_k)\right) + \sum_{k \in J} I_\varphi\left(u_k^n + \frac{1}{2}(y_k - x_k)\right) = \\ &= I_\varphi\left(u'_n + \frac{1}{2}(y' - x')\right) + I_\varphi\left(u''_n + \frac{1}{2}(y'' - x'')\right) < 1 - \varepsilon + \varepsilon = 1, \end{aligned}$$

czyli  $u_n + \frac{1}{2}(y - x) \in B(L^\varphi(\mu))$ , zatem para  $\langle x, y \rangle$  jest LNC w  $B(L^\varphi(\mu))$ , co kończy dowód w tym przypadku.

2. Dla każdego  $0 \leq \lambda \leq 1$  zachodzi  $I_\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) = 1$ . Oczywiście istnieje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takie, że dla  $i > n_0$  zachodzi  $x_i, y_i \in [-b, b]$ . Oznaczmy:

$$I := \{i \in \mathbb{N} : x_i = y_i\}, \quad J := \{i \in \mathbb{N} : x_i \neq y_i\}.$$

Ponieważ:

$$1 = \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi(\lambda x_i + (1 - \lambda)y_i) c_i \leq \lambda \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi(x_i) c_i + (1 - \lambda) \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi(y_i) c_i = 1,$$

więc  $\varphi$  jest afiniczna na każdym przedziale  $[x_i, y_i]$  dla  $i \in J$ . Ponieważ  $\varphi$  jest ściśle wypukła na  $[-b, b]$ , więc jeśli  $i > n_0$ , to  $i \notin J$ . Zatem  $J$  jest zbiorem skończonym zawartym w  $\{1, 2, \dots, n_0\}$ . W szczególności dla  $i > n_0$  zachodzi  $x_i = y_i$ . Zatem jeśli  $n$  jest dostatecznie duże oraz  $\varepsilon_i = u_i^n - x_i$ , to są spełnione założenia Lematu 4.1 w wersji  $N = +\infty$ . Zatem na jego mocy:

$$I_\varphi\left(u_n + \frac{1}{2}(y - x)\right) = F(1) \leq F(0) = I_\varphi(u_n) \leq 1,$$

czyli para  $\langle x, y \rangle$  jest  $LNC$  w  $B(L^\varphi(\mu))$ .

Ponieważ  $x, y \in B(L^\varphi(\mu))$  były dowolne, więc obydwa przypadki dają tezę:  $B(L^\varphi(\mu))$  jest  $LNC$ .

c) Załóżmy, że zachodzi *iii)* naszego twierdzenia. Z Lematu 1.7 punkt 10 wynika, że przestrzeń  $L^\varphi(\mu)$  spełnia warunek:

$$\|x\|_\varphi = 1 \Leftrightarrow I_\varphi(x) = 1 \quad \text{dla każdego } x \in L^\varphi(\mu).$$

Z Lematu 1.6 wynika, że  $B(L^\varphi(\mu))$  jest ściśle wypukła, a więc na mocy Stwierdzenia 3.2 punkt e) kula  $B(L^\varphi(\mu))$  jest  $LNC$ .

Kończy to dowód twierdzenia. □

Zauważmy, że wniosek z naszego twierdzenia:

$B(L^\varphi(\mu))$  jest  $LNC$  jeśli  $\dim L^\varphi(\mu) < \infty$

w świetle Stwierdzenia 3.2 jest wzmocnieniem wyniku R. Grzaślewicza z [10].

Odnosimy dwa wnioski z naszego twierdzenia:

**Wniosek 4.1** *Jeśli  $\mu$  jest miarą bezatomową, to następujące warunki są równoważne:*

i)  $B(L^\varphi(\mu))$  jest  $LNC$ .

ii)  $\varphi$  jest ściśle wypukła,  $c(\varphi) = +\infty$  oraz  $\varphi$  spełnia  $\Delta_2$  globalnie gdy  $\mu(\Omega) = +\infty$ ,  
lub dla dostatecznie dużych  $t$  gdy  $\mu(\Omega) < +\infty$ .

iii)  $B(L^\varphi(\mu))$  jest ściśle wypukła.



*Dowód:*

$i) \Rightarrow ii)$  Skoro  $\mu$  jest bezaatomowa, więc warunki  $i)$  oraz  $ii)$  z Twierdzenia 4.1 nie mogą być spełnione. Zatem zachodzi warunek  $iii)$  tego twierdzenia i wystarczy zauważyć, że dla miar bezaatomowych warunek  $\Delta_2(\mu)$  jest równoważny klasycznemu warunkowi  $\Delta_2$  w wersji zależnej od  $\mu(\Omega)$ .

$ii) \Rightarrow iii)$  Wynika to z ostatniego punktu  $c)$  dowodu Twierdzenia 4.1.

$iii) \Rightarrow i)$  Wynika ze Stwierdzenia 3.2. □

**Wniosek 4.2** *Jeśli  $\mu$  jest atomowa z nieskończoną ilością atomów oraz  $0 < \inf\{\mu(e_n) : n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{\mu(e_n) : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$ , to następujące warunki są równoważne:*

$i)$   $B(L^\varphi(\mu))$  jest  $LNC$ .

$ii)$   $\varphi$  spełnia  $\delta_2$  i jest ściśle wypukła na  $[0, b]$  dla pewnego  $b > 0$ .

*Dowód:*

$i) \Rightarrow ii)$  Ponieważ warunki  $i)$  oraz  $iii)$  Twierdzenia 4.1 nie są spełnione, więc spełniony jest warunek  $ii)$ . Z Lematu 1.7 punkt 6 wynika, że  $\varphi$  spełnia  $\delta_2$ .

$ii) \Rightarrow i)$  Wynika również z Lematu 1.7 punkt 6 oraz Twierdzenia 4.1. □

Z ostatniego wniosku wynika, że  $B(l^\varphi)$  jest  $LNC$  wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek  $ii)$  Wniosku 4.2. Jeśli  $1 \leq p \leq +\infty$ , to  $B(l^p)$  jest  $LNC$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $1 < p < +\infty$ . Zatem  $B(l^1)$  oraz  $B(l^\infty)$  są stabilne, ale nie  $LNC$ .

**Przykład 4.1** *Kula  $B(l^\varphi)$  spełniająca  $LNC$  nie musi być ściśle wypukła.*

Na przykład dla:

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^2, & \text{dla } |t| \leq \frac{1}{2} \\ |t| - \frac{1}{4}, & \text{dla } |t| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$B(l^\varphi)$  jest  $LNC$  na mocy Wniosku 4.2, ale dla  $x = (1, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots)$ ,  $y = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0, \dots)$  oraz dla  $\lambda \in [0, 1]$  zachodzi:

$$I_\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) = I_\varphi\left(\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\lambda, \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\lambda, 0, 0, \dots\right)\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\lambda = 1,$$

czyli dla każdego  $z \in [x, y]$  zachodzi  $\|z\|_\varphi = 1$ , więc  $B(l^\varphi)$  nie jest ściśle wypukła.  $\square$

Podamy teraz pełną charakteryzację własności  $LNC$  dla kul  $B(E^\varphi(\mu))$ . Ponieważ dla  $c(\varphi) < +\infty$  zachodzi  $E^\varphi(\mu) = \{0\}$ , więc naturalnym jest założenie  $c(\varphi) = +\infty$ .

**Twierdzenie 4.2** *Jeżeli  $c(\varphi) = +\infty$ , to  $B(E^\varphi(\mu))$  jest  $LNC$  wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z trzech warunków:*

- i)  $\mu$  jest atomowa ze skończoną ilością atomów (inaczej  $\dim E^\varphi(\mu) < \infty$ ).*
- ii)  $\mu$  jest atomowa z nieskończoną ilością atomów,  $\inf\{\mu(e_n) : n \in \mathbb{N}\} > 0$  oraz zachodzi alternatywa: albo  $a(\varphi) > 0$ , albo  $\varphi$  jest ściśle wypukła na  $[0, b]$  dla pewnego  $b > 0$ .*
- iii)  $\mu$  ma dodatnią część bezatomową lub  $\inf\{\mu(e_n) : n \in \mathbb{N}\} = 0$ , oraz  $\varphi$  jest ściśle wypukła na  $\mathbb{R}$ .*

*Dowód:*

( $\Rightarrow$ ) Załóżmy, że  $B(L^\varphi(\mu))$  jest  $LNC$ . Załóżmy, że  $\dim E^\varphi(\mu) = \infty$ . Rozpatrzmy dwa przypadki:

1.  $\mu$  jest atomowa z nieskończoną ilością atomów, taka, że  $\inf\{\mu(e_n) : n \in \mathbb{N}\} > 0$ .

Wykażemy, że wtedy zachodzi ii) Jeśli  $a(\varphi) > 0$ , to teza ii) jest spełniona. Niech więc  $a(\varphi) = 0$ . Załóżmy, że  $\varphi$  nie jest ściśle wypukła na żadnym przedziale postaci  $[0, b]$ ,  $b > 0$ . Zatem są spełnione założenia Lematu 4.2 w drugiej wersji. Niech  $x, y$  będą takie jak w treści Lematu 4.4. Z Lematu 4.2 oraz z definicji przestrzeni  $E^\varphi(\mu)$  wynika, że  $x, y, u_n \in B(E^\varphi(\mu))$  dla  $n \in \mathbb{N}$  oraz spełnione są założenia Lematu 4.4, a więc też jego teza. Ponadto dla  $n \geq 2$  zachodzi:

$$I_\varphi(x - u_n) = \varphi(2x_n)c_n \leq \varphi(nx_n)c_n < \frac{1}{2^n},$$

czyli  $\lim_n I_\varphi(x - u_n) = 0$ , a więc  $\lim_n \|u_n - x\| = 0$  w przestrzeni  $E^\varphi(\mu)$ . Zatem para  $\langle x, y \rangle$  nie jest  $LNC$  w  $B(E^\varphi(\mu))$ .

2.  $\mu$  ma dodatnią część bezatomową lub  $\inf\{\mu(e_n) : n \in \mathbb{N}\} = 0$ .

Wykażemy najpierw, że  $a(\varphi) = 0$ . Z założenia istnieje nieskończony ciąg zbiorów parami rozłącznych o miarach dodatnich  $(A_n)$  taki, że  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < +\infty$ . Załóżmy, że  $a := a(\varphi) > 0$ . Połóżmy:

$$x := d\chi_{A_1} + a\chi_{\bigcup_{i=2}^{\infty} A_n}, \quad y := d\chi_{A_1} - a\chi_{\bigcup_{i=2}^{\infty} A_n},$$

gdzie  $d$  jest tak dobraną liczbą dodatnią, że  $\varphi(d)\mu(A_1) = 1$ .

Niech  $u_n := x - 2a\chi_{A_n}$ . Wtedy dla  $\lambda > 0$  zachodzi:

$$I_{\varphi}(\lambda x) = \varphi(\lambda d)\mu(A_1) + \varphi(\lambda a)\mu\left(\bigcup_{i=2}^{\infty} A_n\right) < +\infty,$$

czyli  $x \in E^{\varphi}(\mu)$  i podobnie  $y, u_n \in E^{\varphi}(\mu)$ . Ponadto:

$$\lim_n I_{\varphi}(x - u_n) = \lim_n \varphi(2a)\mu(A_n) = 0, \quad \text{czyli} \quad \lim_n \|u_n - x\| = 0$$

Także:

$$I_{\varphi}(x) = \varphi(d)\mu(A_1) + \varphi(a)\mu\left(\bigcup_{i=2}^{\infty} A_n\right) = 1,$$

analogicznie  $I_{\varphi}(y) = 1$  oraz  $I_{\varphi}(u_n) = 1$  dla  $n \in \mathbb{N}$ , czyli  $x, y, u_n \in B(E^{\varphi}(\mu))$ . Ale:

$$u_n + \frac{1}{2}(y - x) = u_n - x + \frac{x + y}{2} = -2a\chi_{A_n} + d\chi_{A_1},$$

oraz

$$I_{\varphi}\left(u_n + \frac{1}{2}(y - x)\right) = \varphi(2a)\mu(A_n) + \varphi(d)\mu(A_1) = 1 + \varphi(2a)\mu(A_n) > 1.$$

Zatem  $u_n + \frac{1}{2}(y - x) \notin B(E^{\varphi}(\mu))$ , co oznacza, że  $B(E^{\varphi}(\mu))$  nie jest *LNC* wbrew założeniu. Wykazaliśmy więc, że  $a(\varphi) = 0$ .

Wykażemy teraz, że funkcja  $\varphi$  jest ściśle wypukła na  $\mathbb{R}$ .

Założmy, że nie. Zatem są spełnione założenia Lematu 4.5. Zauważmy, że zdefiniowane w jego treści  $x, y, x_n$  dla  $n \in \mathbb{N}$  należą do  $E^{\varphi}(\mu)$ , gdyż są to kombinacje liniowe funkcji charakterystycznych zbiorów skończonej miary, które oczywiście należą do  $E^{\varphi}(\mu)$ . Z tezy cytowanego lematu wynika, że para  $\langle x, y \rangle$  nie jest *LNC* w

$B(E^\varphi(\mu))$ . Uzyskana sprzeczność dowodzi, że zachodzi punkt *iii*) naszego twierdzenia i kończy dowód implikacji ( $\Rightarrow$ ).

( $\Leftarrow$ ) Dowód składa się z trzech części w zależności od tego, który z warunków *i*), *ii*), *iii*) jest spełniony.

*a*) Załóżmy, że jest spełniony warunek *i*). Ale wtedy oczywiście (p. np. Lemat 1.7 punkty 8, 2, 16)  $E^\varphi(\mu) = L^\varphi(\mu)$  jest skończonego wymiaru i teza wynika z Twierdzenia 4.1.

*b*) Załóżmy, że jest spełniony warunek *ii*). Niech  $x, y \in B(E^\varphi(\mu))$ ,  $u_n \in B(E^\varphi(\mu))$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . Niech  $\lim_n \|u_n - x\|_\varphi = 1$  dla każdego  $0 \leq \lambda \leq 1$  i należy wykazać, że  $u_n + \frac{1}{2}(y - x) \in B(E^\varphi(\mu))$  dla dostatecznie dużych  $n \in \mathbb{N}$ . Możemy przyjąć:

$$x = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i \chi_{e_i}, \quad y = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \chi_{e_i}, \quad u_n = \sum_{i \in \mathbb{N}} u_i^n \chi_{e_i}$$

dla  $n \in \mathbb{N}$ , przy czym  $x_i, y_i, u_i^n$  są liczbami rzeczywistymi. Ponieważ  $x, y \in E^\varphi(\mu)$ , więc dla każdego  $0 \leq \lambda \leq 1$  zachodzi  $I_\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) = 1$ . Wykażemy, że zachodzi  $\lim_n x_n = \lim_n y_n = 0$ . Gdyby na przykład nieprawdą byłoby  $\lim_n x_n = 0$ , to istniałoby  $\varepsilon > 0$  oraz podciąg  $(x_{n_k})$  taki, że dla każdego  $k \in \mathbb{N}$  zachodziłoby  $|x_{n_k}| > \varepsilon$ . Niech  $\lambda > 0$  będzie takie, że  $\varphi(\varepsilon\lambda) = 1$ . Wtedy:

$$\begin{aligned} I_\varphi(\lambda x) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(\lambda x_n) c_n \geq \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi(\lambda x_{n_k}) c_{n_k} \geq \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi(\lambda \varepsilon) c_{n_k} \geq \\ &\geq \sum_{k \in \mathbb{N}} \inf\{c_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty, \end{aligned}$$

co przeczy zależności  $x \in E^\varphi(\mu)$ . Zatem  $\lim_n x_n = \lim_n y_n = 0$ , a więc istnieje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takie, że dla  $i > n_0$  zachodzi albo  $x_i, y_i \in [-\frac{a(\varphi)}{2}, \frac{a(\varphi)}{2}]$  jeśli  $a(\varphi) > 0$ , albo  $x_i, y_i \in [-b, b]$  gdy  $a(\varphi) = 0$  i  $\varphi$  jest ściśle wypukła na  $[0, b]$ . Oznaczmy:

$$I := \{i \in \mathbb{N} : x_i = y_i\}, \quad J := \left\{ i \in \mathbb{N} : x_i \neq y_i \wedge \left( |x_i| > \frac{a(\varphi)}{2} \vee |y_i| > \frac{a(\varphi)}{2} \right) \right\}.$$

Tak jak w dowodzie Twierdzenia 4.1 zauważamy, że funkcja  $\varphi$  jest afiniczna na każdym przedziale  $[x_i, y_i]$  dla  $i \in I$ . Ponadto dla  $i > n_0$  zachodzi  $i \notin J$ , gdyż wtedy  $i \notin I$  jeśli

$a(\varphi) = 0$  na mocy ścisłej wypukłości  $\varphi$  na  $[-b, b]$ , albo  $|x_i|, |y_i| \leq \frac{a(\varphi)}{2}$  jeśli  $a(\varphi) > 0$ .  
Zatem  $J$  jest skończone i dla  $\varepsilon_i := u_i^n - x_i$  gdzie  $n$  jest ustaloną dostatecznie dużą liczbą naturalną spełnione są założenia Lematu 4.1, a więc i jego teza, czyli:

$$I_\varphi \left( u_n + \frac{1}{2}(y - x) \right) = F(1) \leq F(0) = I_\varphi(u_n) \leq 1$$

dla dostatecznie dużych  $n \in \mathbb{N}$ , a zatem  $B(E^\varphi(\mu))$  jest  $LNC$ .

c) Załóżmy, że spełniony jest warunek iii) naszego twierdzenia. Zauważmy, że  $E^\varphi(\mu)$  spełnia założenia Lematu 1.6, a więc  $B(E^\varphi(\mu))$  jest ściśle wypukła, a więc  $LNC$ , co kończy dowód twierdzenia.  $\square$

Zbadamy teraz sytuację kiedy dodatnia część kuli  $B^+(L^\varphi(\mu))$  oraz  $B^+(E^\varphi(\mu))$  jest  $LNC$ . W tym wypadku odpowiedź jest znacznie prostsza:

**Twierdzenie 4.3** *Następujące warunki są równoważne:*

i)  $B^+(L^\varphi(\mu))$  jest  $LNC$ .

ii)  $\dim L^\varphi(\mu) < \infty$

*Analogiczne warunki są równoważne, gdy  $L^\varphi(\mu)$  zastąpimy przez  $E^\varphi(\mu)$ .*

*Dowód:*

( $\Rightarrow$ ) Załóżmy, że  $\dim L^\varphi(\mu) = \infty$  (odpowiednio:  $\dim E^\varphi(\mu) = \infty$ ). Niech  $x := \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \chi_{A_n}$ , gdzie  $x_n > 0$  są tak dobrane, że  $\varphi(nx_n)\mu(A_n) < \frac{1}{2^n}$ . Zatem:

$$I_\varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(x_n)\mu(A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(nx_n)\mu(A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1.$$

W przypadku, gdy  $\dim E^\varphi(\mu) = \infty$ , a więc też  $c(\varphi) = +\infty$ , dla  $\lambda > 0$  przy ustalonym  $n > \max\{\lambda, 1\}$  zachodzi nierówność:

$$I_\varphi(\lambda x) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(\lambda x_k)\mu(A_k) + \sum_{k=n}^{\infty} \varphi(nx_n)\mu(A_k) < +\infty,$$

a więc  $x \in E^\varphi(\mu)$ . Niech  $y \equiv 0$ . Połóżmy też  $u_n := x - \chi_{A_n} \cdot x_n$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . Jeśli  $x \in E^\varphi(\mu)$  to oczywiście  $u_n \in E^\varphi(\mu)$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . Ponadto  $I_\varphi(u_n) = \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \{n\}} \varphi(x_k)\mu(A_k) \leq$

1. Zatem  $x, y, u_n \in B^+(L^\varphi(\mu))$  (odpowiednio  $B^+(E^\varphi(\mu))$ ). Ponadto dla  $\lambda > 0$  zachodzi:

$$I_\varphi(\lambda(x - u_n)) = I_\varphi(\lambda x_n \chi_{A_n}) = \varphi(\lambda x_n)\mu(A_n) \leq \varphi(n x_n)\mu(A_n) \leq \frac{1}{2^n}$$

dla  $n > \lambda$ . Zatem  $\lim_n \|u_n - x\|_\varphi = 0$ . Ale dla  $\omega \in A_n$  zachodzi:

$$\left(u_n + \frac{1}{2}(y - x)\right)(\omega) = \left(\frac{1}{2}x - x_n \chi_{B_n}\right)(\omega) = -\frac{1}{2}x_n < 0,$$

czyli  $u_n + \frac{1}{2}(y - x) \notin B^+(L^\varphi(\mu))$  (odpowiednio  $B^+(E^\varphi(\mu))$ ). Zatem  $B^+(L^\varphi(\mu))$  (odpowiednio  $B^+(E^\varphi(\mu))$ ) nie jest  $LNC$ .

( $\Leftarrow$ ) Niech  $\dim L^\varphi(\mu) < \infty$  (odpowiednio  $\dim E^\varphi(\mu) < \infty$ ). Wtedy na mocy Stwierdzenia 2.1  $L^\varphi(\mu)^+$  jest  $LNC$ , a na mocy Twierdzenia 4.1 lub 4.2 kula jednostkowa  $B$  w  $L^\varphi(\mu)$  lub w  $E^\varphi(\mu)$  jest  $LNC$ , a więc  $B^+ = B \cap X^+$  jest  $LNC$  na mocy Stwierdzenia 3.2, co kończy dowód.  $\square$

Z dowodu powyższego twierdzenia wynika również:

**Wniosek 4.3** *Jeśli  $X^+$  jest stożkiem dodatnim w  $L^\varphi(\mu)$  (lub w  $E^\varphi(\mu)$ ), to  $X^+$  jest  $LNC$  wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń jest skończonego wymiaru.*  $\square$

# Bibliografia

- [1] C. A. Akemann, G. C. Shell and N. Weaver. Locally Nonconical Convexity. *J. Convex Anal.* **8**, (2001) 87–107.
- [2] J. Cel. Tietze–type theorem for locally nonconical convex sets. *Bull. Soc. Roy. Sci Liège* **69**, (2000) 13–15.
- [3] Chen Shutao. Geometry of Orlicz Spaces. *Dissertationes Mathematicae CCC-LVI*, Warszawa 1996.
- [4] A. Clausning and S. Papadopoulou. Stable convex sets and extremal operators. *Math. Ann.* **231**, (1978) 193–203.
- [5] N. Dunford and J. T. Schwartz. *Linear Operators I, General Theory*. Pure Appl. Math. vol. 7, Interscience, New York 1958.
- [6] A. S. Granero. A full characterization of stable unit balls in Orlicz spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* **116**, (1992) 675–681.
- [7] A. S. Granero. Stable unit balls in Orlicz spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* **109**, (1990) 97–104.
- [8] A. S. Granero and M. Wisła. Closednes of the set of extreme points in Orlicz spaces. *Math. Nachr.* **157**, (1992) 319–394.
- [9] R. Grzaślewicz. Extreme continous function property. *Acta Math. Hungar.* **74**, (1997) 93–99.

- [10] R. Grzaślewicz. Finite dimensional Orlicz spaces. *Bull. Polish Acad. Sci. Math.* **33**, (1985), no. 5–6, 277–283.
- [11] M. A. Krasnosel'skii and Ya. B. Rutickii. *Convex Functions and Orlicz Spaces*. Noordhoff, Groningen, 1961.
- [12] J. Musielak. *Orlicz Spaces and Modular Spaces*. Lecture Notes in Math. **1034**, Springer Verlag, 1983.
- [13] S. Papadopolou. On the geometry of stable compact convex sets. *Math. Ann.* **229**, (1977) 193–200.
- [14] M. M. Rao and Z. D. Ren. *Theory of Orlicz Spaces*. Marcel Dekker Inc. New York 1991.
- [15] H. H. Schaefer. *Banach Lattices and Positive Operators*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1974.
- [16] G. C. Shell. On the geometry of locally nonconical convex sets. *Geom. Dedicata* **75**, (1999) 187–198.
- [17] M. Wisła. Continuity of the identity embedding of Musielak–Orlicz sequence spaces. *Proc. of the 14th Winter School on Abstract Analysis* Srni, 1986, Supp. ai Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo **14** (1987) 427–437.
- [18] M. Wisła. Extreme points and stable unit balls in Orlicz sequence spaces. *Arch. Math. Univ. (Basel)* **56**, (1991) 482–490.
- [19] M. Wisła. Stable points of unit ball in Orlicz spaces. *Comment. Math. Univ. Carolin.* **32**, (1991) 501–515.

