

Andrzej A. Kucharski

Analiza zagadnień promieniowania i rozpraszania fal elektromagnetycznych za pomocą równań całkowych



Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej

Andrzej A. Kucharski

**Analiza zagadnień
promieniowania i rozpraszania
fal elektromagnetycznych
za pomocą równań całkowych**



Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej
Wrocław 2012

Recenzenci

Andrzej KARWOWSKI

Włodzimierz ZIENIUTYCZ

Opracowanie redakcyjne i korekta

Alina KACZAK

Projekt okładki

Andrzej A. KUCHARSKI

Wszelkie prawa zastrzeżone. Żadna część niniejszej książki, zarówno w całości, jak i we fragmentach, nie może być reprodukowana w sposób elektroniczny, fotograficzny i inny bez zgody wydawcy i właściciela praw autorskich.

© Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2012

OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ

Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

<http://www.oficyna.pwr.wroc.pl>;

e-mail: oficwyd@pwr.wroc.pl

zamawianie.książek@pwr.wroc.pl

ISBN 978-83-7493-728-3

Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 1084/2012.

Moim Rodzicom

Spis treści

Wykaz ważniejszych oznaczeń	9
Wykaz skrótów	11
1. Wprowadzenie	13
1.1. Metody numeryczne w elektromagnetyzmie	14
1.2. Zakres pracy	15
Literatura	17
2. Zagadnienia wstępne	19
2.1. Równania Maxwella i potencjały mieszane	19
2.2. Pole dalekie	22
2.3. Skuteczna powierzchnia odbijająca	22
2.4. Warunki brzegowe	24
2.5. Metoda obrazów i zasady równoważności	27
2.6. Pole rozproszone oraz twierdzenie o indukcji	33
Literatura	35
3. Metoda momentów	37
3.1. Równania całkowite i całkowo-różniczkowe	37
3.2. Funkcje bazowe i wagowe, macierz impedancyjna	39
3.3. Częstotliwości i rodzaje rezonansowe	42
Literatura	43
4. Analiza struktur zbudowanych z cienkich przewodów	45
4.1. Równanie Pocklingtona	45
4.2. Funkcje bazowe	48
4.3. Elementy macierzy impedancyjnej i wektora pobudzenia	50
4.4. Dokładność przybliżenia cienkoprzewodowego	53
4.5. Rodzaje rezonansowe cienkiego przewodu prostoliniowego	59
Literatura	62
5. Obiekty doskonale przewodzące opisane za pomocą powierzchni	65
5.1. Równanie całkowite pola elektrycznego	66
5.1.1. Daszkowe funkcje bazowe	67
5.1.2. Macierz impedancyjna i wektor pobudzenia	69
5.2. Równanie całkowite pola elektromagnetycznego	71
5.3. Powierzchnie otwarte	74
5.4. Obiekty o symetrii obrotowej	77

5.5. Przykłady obliczeniowe	84
5.5.1. Doskonale przewodząca płyta oświetlona falą płaską	84
5.5.2. Doskonale przewodząca sfera oświetlona falą płaską – problem wewnętrznych rezonansów	86
Literatura	91
6. Jednorodny obiekt dielektryczny	93
6.1. Sformułowanie PMCHWT	93
6.2. Macierz impedancyjna i wektor pobudzenia	98
6.3. Sformułowanie z podwójnym prądem elektrycznym	100
6.4. Przykład obliczeniowy	102
Literatura	107
7. Obiekty złożone	109
7.1. Sformułowanie PMCHWT–EFIE	109
7.2. Obiekty otoczone jednorodnym dielektrykiem	113
7.2.1. Bryła dielektryczna otoczona zewnętrznym dielektrykiem	113
7.2.2. Idealny przewodnik otoczony warstwą dielektryczną	116
7.3. Bryły składające się z dwóch połączonych obszarów	118
Literatura	130
8. Silnie niejednorodny dielektryk	131
8.1. Objętościowe równanie całkowe	133
8.2. Uogólnienie funkcji RWG na zagadnienia opisane objętościową gęstością prądu	135
8.3. Elementy macierzy impedancyjnej i wektora pobudzenia	137
8.4. Beźródłowe funkcje bazowe dla brył obrotowych	141
8.5. Przykłady obliczeniowe	148
8.5.1. Dwuwarstwowa kula dielektryczna	148
8.5.2. Wydrążona kula dielektryczna	150
Literatura	151
9. Apertura w nieskończonej metalowej płaszczyźnie	153
9.1. Równania całkowe i metoda momentów	153
9.2. Transmisja przez otwór w nieskończonej metalowej płaszczyźnie	158
9.3. Anteny szczelinowe	160
Literatura	168
10. Algorytmy mieszane	169
10.1. Częściowo niejednorodny bryły dielektryczne	169
10.2. Antena dielektryczna zasilana szczelinowo	174
Literatura	178
11. Metoda AWE i techniki dekompozycji przestrzennej	179
11.1. Metoda AWE	179
11.2. Makromodele całkowe	188
11.3. Charakterystyczne funkcje bazowe	197
11.4. Szerokopasmowe charakterystyczne funkcje bazowe	205
Literatura	211
12. Uwagi końcowe	215
Literatura	217

Dodatek 1. Całkowanie funkcji osobliwych	219
Literatura	226
Dodatek 2. Rozkład fali płaskiej na rodzaje azymutalne	227
Literatura	230

Wykaz ważniejszych oznaczeń

A	– magnetyczny potencjał wektorowy
B	– wektor indukcji magnetycznej
D	– wektor indukcji elektrycznej
D_n	– element wektora opisującego aproksymację rozkładu indukcji elektrycznej
E	– wektor natężenia pola elektrycznego
E_m	– element wektora pobudzenia dla objętościowego równania całkowego
f	– częstotliwość
f_n, f_m	– wektorowe funkcje bazowe i wagowe w algorytmach wykorzystujących powierzchniowe i objętościowe równania całkowe
F	– elektryczny potencjał wektorowy
G	– skalarna funkcja Greena
H	– wektor natężenia pola magnetycznego
i_n	– funkcja bazowa
I_n	– element wektora opisującego aproksymację rozkładu prądu elektrycznego
I_m	– element wektora pobudzenia w zagadnieniach modelowania apertur
j	– jednostka urojona
J	– wektor gęstości prądu elektrycznego
$k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$	– liczba falowa
m	– gęstość ładunku magnetycznego
M	– wektor gęstości prądu magnetycznego
M_n	– element wektora opisującego aproksymację rozkładu prądu magnetycznego
$\hat{n}$	– wektor jednostkowy normalny do powierzchni
r, r'	– wektory opisujące położenie punktów obserwacji i źródłowych
q	– gęstość ładunku elektrycznego
$R = r - r' $	– odległość pomiędzy punktem obserwacji i punktem źródłowym
S	– powierzchnia opisująca obiekt
S_{mn}	– element macierzy impedancyjnej dla objętościowego równania całkowego
V	– objętość bryły
V_m	– element wektora pobudzenia
w_m	– funkcja wagowa (testująca)
Y_{mn}	– element macierzy admitancyjnej
Z_{mn}	– element macierzy impedancyjnej
Λ_n	– funkcja trójkątna
Π_n	– funkcja prostokątna
∇	– operator <i>nabla</i>
ϵ	– przenikalność elektryczna ośrodka

λ	– długość fali elektromagnetycznej
μ	– przenikalność magnetyczna ośrodka
Φ	– elektryczny potencjał skalarny
Ψ	– magnetyczny potencjał skalarny
ω	– pulsacja
$n = \sqrt{\mu/\varepsilon}$	– impedancja falowa ośrodka
κ	– współczynnik kontrastu
σ	– skuteczna powierzchnia odbijająca
τ	– skuteczna powierzchnia transmisyjna

Wykaz skrótów

ABC	– absorpcyjny warunek brzegowy (ang. <i>Absorbing Boundary Condition</i>)
AEFIE	– uzupełnione równanie całkowe pola elektrycznego (ang. <i>Augmented EFIE</i>)
AMFIE	– uzupełnione równanie całkowe pola magnetycznego (ang. <i>Augmented MFIE</i>)
AWE	– metoda przebiegów asymptotycznych (ang. <i>Asymptotic Waveform Evaluation</i>)
BEM	– metoda elementów brzegowych (ang. <i>Boundary Element Method</i>)
BoR	– bryła o symetrii obrotowej (ang. <i>Body of Revolution</i>)
CBF	– charakterystyczna funkcja bazowa (ang. <i>Characteristic Basis Function</i>)
CFH	– technika skakania po częstotliwościach (ang. <i>Complex Frequency Hopping</i>)
CFIE	– równanie całkowe połączonych pól (ang. <i>Combined Field Integral Equation</i>)
DRA	– dielektryczna antena rezonatorowa (ang. <i>Dielectric Resonator Antenna</i>)
EFIE	– równanie całkowe pola elektrycznego (ang. <i>Electric Field Integral Equation</i>)
EP-DDM	– metoda dekompozycji przestrzennej oparta na zasadach równoważności (ang. <i>Equivalence Principle – Domain Decomposition Method</i>)
FDTD	– metoda różnic skończonych w dziedzinie czasu (ang. <i>Finite Difference Time Domain</i>)
FEM	– metoda elementów skończonych (ang. <i>Finite Element Method</i>)
FIT	– metoda całkowań skończonych (ang. <i>Finite Integration Technique</i>)
FMM	– szybka metoda multipolowa (ang. <i>Fast Multipole Method</i>)
GMP	– uogólniona metoda multipolowa (ang. <i>Generalized Multipole Method</i>)
JJ	– sformułowanie z dwoma prądami elektrycznymi
JM	– sformułowanie z prądem elektrycznym i magnetycznym
MFIE	– równanie całkowe pola magnetycznego (ang. <i>Magnetic Field Integral Equation</i>)
MM	– metoda dopasowania rodzajów (ang. <i>Mode Matching</i>)
MoM	– metoda momentów (ang. <i>Method of Moments</i>)
PEC	– idealny przewodnik elektryczny (ang. <i>Perfect Electric Conductor</i>)
PMCHWT	– sformułowanie Poggio–Miller–Chang–Harrington–Wu–Tsai
PO	– optyka fizyczna (ang. <i>Physical Optics</i>)
RCS	– skuteczna powierzchnia odbijająca (ang. <i>Radar Cross Section</i>)
RWG	– funkcje Rao–Wilton–Glisson
SIE	– powierzchniowe równanie całkowe (ang. <i>Surface Integral Equation</i>)
TCS	– skuteczna powierzchnia transmisyjna (ang. <i>Transmission Cross Section</i>)
TLM	– metoda macierzy linii transmisyjnych (ang. <i>Transmission Line Matrix</i>)
VIE	– objętościowe równanie całkowe (ang. <i>Volume Integral Equation</i>)
WCBF	– szerokopasmowa charakterystyczna funkcja bazowa (ang. <i>Wideband Characteristic Basis Function</i>)

1. Wprowadzenie

Z zagadnieniami promieniowania fal elektromagnetycznych mamy do czynienia w technice antenowej. Antena, czyli urządzenie służące zamianie formy energii elektrycznej sygnału z prowadzonej na promieniowaną bądź odwrotnie – promieniowanej na prowadzoną, stanowi zasadniczy element toru radiokomunikacyjnego. Umiejętność analizy parametrów anteny lub układu antenowego jest zatem niezwykle istotna w projektowaniu systemów radiokomunikacyjnych. W wielu przypadkach promieniowanie może mieć charakter niezamierzony – analiza takich niepożądanych emisji jest poddziedziną tzw. kompatybilności elektromagnetycznej.

Problem rozpraszania fal elektromagnetycznych dotyczy zmiany pola elektromagnetycznego pod wpływem umieszczenia w nim obiektu, a w wielu przypadkach także wyznaczenia pola wnikaącego do jego wnętrza i wyindukowanego w obiekcie prądu. Typowymi przykładami są tu technika radarowa oraz zagadnienia z szeroko pojętej, wspominanej wcześniej kompatybilności elektromagnetycznej, tym razem dotyczące np. wpływu zewnętrznego pola elektromagnetycznego na pracę urządzeń elektronicznych czy też na żywe organizmy.

W analizie zagadnień promieniowania i rozpraszania fal elektromagnetycznych punktem wyjścia do dalszych rozważań są równania Maxwella, które rozwiązuje się dla zadanej konfiguracji elementów badanego obiektu/anteny oraz dla zadanego otoczenia. W ujęciu matematycznym oznacza to, że analizując np. antenę, rozwiązuje się pewien układ równań różniczkowych dla zadanych warunków początkowych i brzegowych (pobudzenie, geometryczna konfiguracja anteny i jej otoczenia, materiały użyte w konstrukcji lub występujące w otaczającym antenę środowisku). Znalezienie rozwiązania w postaci zamkniętych formuł jest możliwe jedynie dla stosunkowo wąskiej klasy bardzo prostych geometrycznie przykładów. W typowych zagadnieniach, spotykanych w codziennej praktyce inżynierskiej, jest konieczne skorzystanie z rozwiązań przybliżonych, które uzyskuje się, wykorzystując odpowiednie algorytmy numeryczne.

Warto podkreślić, że rozwiązania analityczne – jeśli tylko są możliwe do uzyskania – dają wiedzę znacznie bardziej dogłębną niż rozwiązania numeryczne. Takie rozwiązania opisują bowiem zwykle całą klasę pokrewnych problemów, podczas gdy rozwiązanie numeryczne daje informację wyłącznie o konkretnym analizowanym przykładzie.

Typowy prezentowany w niniejszej pracy algorytm analizy składa się z dwóch zasadniczych etapów. W pierwszej kolejności są opracowywane w sposób analityczny równania dotyczące rozważanej klasy zagadnień, a następnie te równania są rozwiązywane numerycznie. Można tu dokonać pewnego uogólnienia: im „wcześniej” zakończy się opracowywanie analitycznej porcji algorytmu, tym szersze będą jego potencjalne zastosowania, ale też tym większa będzie wymagana moc obliczeniowa komputera. Z kolei rozwijanie części analitycznej skutkuje zwykle algorytmem dużo bardziej efektywnym, ale dotyczącym węższej klasy zagadnień.

Opis metod obliczeniowych zawarty w niniejszej pracy może być przydatny w opracowywaniu przez Czytelników własnych algorytmów, może też posłużyć do poznania teoretycznych podstaw działania licznych, dostępnych komercyjnie, programów komputerowych z dziedziny elektromagnetyzmu obliczeniowego.

1.1. Metody numeryczne w elektromagnetyzmie

Za prekursora metod numerycznych w elektromagnetyzmie przyjęło się uważać J.H. Richmonda [1.1], którego prace z połowy lat sześćdziesiątych dwudziestego wieku rozpoczęły erę stosowania komputerów do rozwiązywania zagadnień tej dziedziny nauki. Od tego czasu rozwój coraz doskonalszych metod i algorytmów zaowocował powstaniem olbrzymiej liczby prac badawczych i stworzeniem wielu kodów komputerowych przydatnych w różnych konkretnych zastosowaniach.

Twórcy wczesnych programów, dysponujący sprzętem o niewielkiej mocy obliczeniowej, poświęcali więcej energii analitycznemu etapowi przygotowawczemu, stosując metody numeryczne w ostatniej fazie poszukiwania rozwiązania problemu. Spośród technik stosowanych w opisie zagadnień promieniowania i rozpraszania fal elektromagnetycznych znaczące miejsce należy się tak zwanej *metodzie momentów* (MoM – ang. *Method of Moments*) wprowadzonej przez R.F. Harringtona [1.2]. Ta metoda rozwiązywania równań całkowych i całkowo-różniczkowych została z sukcesem zastosowana zarówno w dziedzinie czasu, jak i częstotliwości do analizy zagadnień dotyczących idealnych przewodników (przewodów, cienkich powierzchni, brył metalowych), przewodników stratnych, a także jednorodnych, obszarami jednorodnych i niejednorodnych dielektryków. Metoda momentów jest zwykle używana w połączeniu z techniką równań całkowych, których „globalny” charakter umożliwia naturalne uwzględnienie tzw. warunków wypromieniowania – to jest analizowanie problemów, w których dziedzina przestrzenna jest nieograniczona. Pojęcie „metoda momentów” w sensie uogólnionym jest stosowane do określenia szerokiej klasy algorytmów, które ze względów historycznych są znane pod innymi nazwami. Można tu wymienić zarówno metodę elementów brzegowych (BEM – ang. *Boundary Element Method*), technikę dopasowania rodzajów (MM – ang. *Mode Matching*), uogólnioną

metodę multipolową (GMP – ang. *Generalized Multipole Method*), metodę dopasowania reakcji Rumseya, jak i techniki iteracyjne [1.3, 1.4].

Inną grupę technik modelowania, zwaną metodami wariacyjnymi, zaadaptowano do zagadnień elektromagnetyzmu z nauk mechanicznych. Wśród tych metod na szczególną uwagę zasługuje metoda elementów skończonych (FEM – ang. *Finite Element Method*) [1.5, 1.6]. W metodzie FEM procedura polega na znalezieniu i minimalizowaniu, z zastosowaniem odpowiednich aproksymacji, pewnego funkcjonału opisującego np. energię zmagazynowaną w polu elektromagnetycznym^{*)}. Ważną cechą metody jest to, że wynikowe układy równań liniowych są opisane macierzami rzadkimi, co m.in. pozwala zastosować bardzo efektywne algorytmy ich rozwiązywania.

Wzrost mocy obliczeniowej współczesnych komputerów spowodował rozwój metod, w których etap „analityczny” zasadniczej części algorytmu zredukowany jest do minimum. W tych metodach punktem wyjściowym do obliczeń numerycznych są wprost równania Maxwella. Do tej klasy metod należą metoda różnic skończonych w dziedzinie czasu (FDTD – ang. *Finite Difference Time Domain*) [1.7, 1.8], metoda całkowań skończonych (FIT – ang. *Finite Integration Technique*) [1.9] czy też metoda macierzy linii transmisyjnych (TLM – ang. *Transmission Line Matrix*) [1.10].

Ważną cechą wszystkich technik, gdzie aproksymacji podlega bezpośrednio pole elektryczne i/lub magnetyczne we fragmentach przestrzeni, a nie obszary źródłowe, jest lokalny charakter stosowanych operatorów. To sprawia, że metody te są szczególnie przydatne do analizy struktur silnie niejednorodnych z dobrze zdefiniowanymi warunkami brzegowymi, takich jak obwody mikrofalowe, czy urządzenia testowe stosowane w badaniach kompatybilności elektromagnetycznej. W przypadku struktur otwartych konieczne jest uzupełnienie modelu o dodatkowe lokalne warunki absorpcji (ABC – ang. *Absorbing Boundary Condition*) [1.6, 1.11, 1.12], gwarantujące, że fale osiagające umowną granicę obszaru analizy zostają „wypromieniowane” poza ten obszar.

Szczegółowy opis wymienionych w tym rozdziale metod obliczeniowych można znaleźć w wielu pozycjach literatury [1.13, 1.14, 1.15]. Interesującym komentarzem, wskazującym na powiązania pomiędzy różnymi algorytmami, jest przeglądowy artykuł Chena i Neya opublikowany na łamach *IEEE Antennas and Propagation Magazine* [1.16].

1.2. Zakres pracy

W niniejszej pracy skoncentrowano się na omówieniu metod i zagadnień przydatnych szczególnie w technice antenowej, którą rozumie się jako pewien podzbiór ogólnych zagadnień metod numerycznych w analizie zjawisk elektromagnetycznych. Takie

^{*)} Inną metodą wyprowadzenia równań FEM jest zastosowanie metody momentów do odpowiednio sformułowanych równań różniczkowych.

założenie pozwala ograniczyć obszar zainteresowania do metody równań całkowych, rozwiązywanych za pomocą metody momentów, przy czym obliczenia są prowadzone w dziedzinie częstotliwości. Opisywane zagadnienia dotyczą obiektów trójwymiarowych, choć istnieje obszerna literatura, odnosząca się np. do zagadnień rozpraszania fal elektromagnetycznych, gdzie obliczenia prowadzi się w dwóch wymiarach, zakładając niezmienność geometrii obiektu wzdłuż wybranej osi kartezjańskiego układu współrzędnych. W niektórych przypadkach analizowane – trójwymiarowe – obiekty charakteryzują się tzw. symetrią obrotową. Uwzględnienie istnienia takiej symetrii w konstruowanym algorytmie prowadzi do zastąpienia rozwiązywania ogólnego problemu szeregiem pomocniczych problemów dwuwymiarowych, z których każdy jest opisany znacznie mniejszą, niż w przypadku algorytmu ogólnego, liczbą niewiadomych współczynników. Choć, jak podkreślono, bryły obrotowe to obiekty trójwymiarowe, w oznaczeniach zawartych na rysunkach w dalszej części pracy przyjęto, że skrótem 3D (ang. *three dimensional*) będziemy oznaczać algorytmy ogólnego przeznaczenia, natomiast algorytmy dla brył obrotowych będą oznaczone skrótem BoR (ang. *Body of Revolution*).

Tabela 1.1. Typy problemów w przykładach obliczeniowych zawartych w pracy

Obiekt promieniujący/zaburzający pole elektromagnetyczne	Typ geometrii	Rozdział
Przewód prostoliniowy	Cienkie przewody	4.4, 4.5, 11.3, 11.4
Bryła/powierzchnia idealnie przewodząca	3D, BoR	5.5, 11.4
Dielektryk jednorodny	3D, BoR	6.4
Dielektryk fragmentami jednorodny	BoR, 3D	7.2.1, 7.3
Dielektryk jednorodny + idealny przewodnik	BoR, 3D	7.2.2, 7.3
Dielektryk niejednorodny	BoR	8.5
Dielektryk częściowo niejednorodny	BoR	10.1, 11.1,
Szczelina w nieskończonym ekranie	3D, BoR	9.2, 9.3
Szczelina w nieskończonym ekranie + jednorodny dielektryk	3D	10.2, 11.1, 11.2
Szczelina w nieskończonym ekranie + jednorodny dielektryk + metalowa wnęka	3D	11.2

Podstawowe pojęcia niezbędne w dalszej części książki wprowadzono w rozdziale drugim. Krótko opisano najważniejsze aspekty metody momentów w rozdziale trzecim. Rozdział czwarty dotyczy ważnego działu techniki antenowej, jakim są struktury zbudowane z tak zwanych cienkich przewodów. Algorytmy przydatne w analizie struktur metalowych podano w rozdziale piątym, natomiast w rozdziale szóstym algorytmy dotyczące jednorodnych obiektów dielektrycznych. W rozdziale siódmym opisano analizę obiektów złożonych, w ósmym – silnie niejednorodnych obiektów die-

lektrycznych. Zagadnienia transmisji fal elektromagnetycznych przez otwory w metalowych powierzchniach przedstawiono w rozdziale dziewiątym. W rozdziale dziesiątym zawarto przykłady budowy algorytmów mieszanych, łączących – w postaci odpowiedniego zestawu równań – elementy sformułowań przedstawionych we wcześniejszych rozdziałach. W rozdziale jedenastym pokazano wybrane metody umożliwiające efektywną analizę zagadnień opisanych dużą liczbą niewiadomych współczynników. W rozdziale dwunastym wskazano zagadnienia, których omówienie wykracza poza zakres niniejszej pracy. Aby przybliżyć Czytelnikowi zakres poruszanych zagadnień, w tabeli 1.1 przedstawiono zestawianie problemów analizowanych w zamieszczonych w pracy przykładach obliczeniowych.

Należy zwrócić uwagę na wybraną przez autora konwencję prezentacji poszczególnych metod numerycznych. Konwencja ta polega na wyprowadzeniu dla każdego z opisywanych problemów odpowiedniego równania całkowego, a następnie na wskazaniu, w jaki sposób to równanie może być rozwiązane numerycznie. W kontekście używanej w książce *metody momentów* oznacza to przede wszystkim zdefiniowanie tzw. *funkcji bazowych* i *wagowych*^{*)}. Następnie podano ogólne formuły całkowite, umożliwiające obliczenie elementów *macierzy impedancyjnej* oraz *wektora pobudzenia*. Choć wzory te w sposób jednoznaczny definiują algorytm obliczeniowy, ich implementacja w postaci programu komputerowego wymaga jeszcze odpowiedniej numerycznej aproksymacji występujących w tych formułach operatorów, a także określenia sposobów postępowania, gdy funkcje podcałkowe są osobiwe. Typowe stosowane w takich przypadkach metody pokazano w rozdziałach 4 i 5.1, dotyczących najbardziej chyba popularnych analiz struktur metalowych oraz w rozdziale 8, gdzie wykorzystuje się objętościowe funkcje bazowe. W pozostałych przypadkach autor ograniczył się do podania ogólnych wskazówek.

Krótkiego komentarza wymaga dobór źródeł literatury. Biorąc pod uwagę, że literatura dotycząca zagadnień poruszanych w pracy jest niezwykle obszerna i obejmuje zarówno artykuły w czasopismach naukowych, doniesienia konferencyjne, jak i liczne pozycje książkowe odnośniki zawarte w pracy mają często charakter przykładowy, stanowiący – zdaniem autora – punkt wyjścia do dalszych studiów literaturowych.

We wszystkich zamieszczonych w książce przykładach obliczeniowych wykorzystano własne programy komputerowe autora, będące implementacją opisywanych algorytmów.

Literatura

- [1.1] Richmond J.H., *Digital computer solutions of the rigorous equations for scattering problems*, Proc. IEEE, Vol. 53, No. 8, 1965, 796–804.
- [1.2] Harrington R.F., *Field Computation by Moment Methods*, New York, Macmillan 1968.

^{*)} Pojęcia wyróżnione w tym akapicie kursywą wyjaśniono w rozdziale 3.

- [1.3] Rumsey V.H., *Reaction concept in electromagnetic theory*, The Physical Review, Vol. 94, 1954, 1483–1491.
- [1.4] Wang J.J.H., *Generalized Moment Methods in Electromagnetics*, John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore 1991.
- [1.5] Silvester P., *Finite element solution of homogeneous waveguides*, Alta Frequenza, Vol. 38, 1969, 313–317.
- [1.6] Jin J., *The Finite Element Method in Electromagnetics*, 2nd Edition, Wiley, New York 2002.
- [1.7] Yee K.S., *Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 14, No. 3, 1966, 302–307.
- [1.8] Taflove A., *Computational Electrodynamics: The Finite Difference Time Domain Method*, Artech House, Boston, MA, 1995.
- [1.9] Weiland T., *A discretization method for the solution of Maxwell's equations for six-component fields*, Electronics and Communications AEU, Vol. 31, No. 3, 1977, 116–120.
- [1.10] Christopoulos C., *The Transmission-Line Modeling Method: TLM*, Wiley-IEEE Press, 1996.
- [1.11] Senior T.B.A., Volakis J.L., *Approximate boundary conditions in electromagnetic*, The Institution of Electrical Engineers, 1995.
- [1.12] Bérenger J.P., *Perfectly matched layer (PML) for computational electromagnetic*, Morgan & Claypool Publishers, 2007.
- [1.13] Peterson A.F., Ray S.L., Mittra R., *Computational Methods for Electromagnetics*, Wiley-IEEE Press, 1997.
- [1.14] Davidson D.B., *Computational Electromagnetics for RF and Microwave Engineering*, Cambridge University Press, 2005.
- [1.15] Sadiku M.N.O., *Numerical Techniques in Electromagnetics*, Second Edition, CRC Press, 2000.
- [1.16] Chen Z., Ney M.M., *The method of weighted residuals: a general approach to deriving time- and frequency-domain numerical methods*, IEEE Antennas and Propagation Magazine, Vol. 51, No. 1, 2009, 51–70.

2. Zagadnienia wstępne

2.1. Równania Maxwella i potencjały mieszane

W dalszych rozważaniach założono, że wszystkie analizowane wielkości (prąd, ładunki, natężenia pól itp.) są wielkościami zmiennymi w czasie w sposób harmoniczny, scharakteryzowany przez pulsację ω . Przyjmuje się też konwencję, że zależność od czasu wielkości zespolonych jest opisana funkcją $e^{j\omega t}$, $j = \sqrt{-1}$. Wielkości wektorowe są oznaczane literami pogrubionymi. Zawarte informacje mają charakter podstawowy i są zawarte w wielu książkach opisujących zagadnienia promieniowania fal elektromagnetycznych. Szczególnie godna polecenia jest, zdaniem autora, blisko czterdziestoletnia pozycja autorstwa R.F. Harringtona, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields* [2.1]. Bardzo zwięzły wykład omawianych zagadnień można znaleźć w rozdziale 1.5.5 obszernej pracy *Scattering*, napisanym przez D.R. Wiltona [2.2]. Stosowana tu notacja bazuje właśnie na używanej w tej ostatniej pozycji.

Dla pól harmonicznnych prawa Faradaya i Ampère'a można zapisać w postaci różniczkowej jako:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}, \quad (2.2)$$

gdzie $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ – odpowiednio natężenie pola elektrycznego i magnetycznego, $\mathbf{J}$ – objętościowa gęstość prądu elektrycznego, natomiast $\mu = \mu_r\mu_0$ i $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$ – odpowiednio przenikalność magnetyczna i elektryczna ośrodka.

Założono, że obie te wielkości są wielkościami skalarnymi, co implikuje, że zajmować się będziemy ośrodkami izotropowymi, choć niekoniecznie jednorodnymi. Przenikalność magnetyczna próżni wynosi $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, a przenikalność elektryczna próżni $\varepsilon_0 = 8,85419 \times 10^{-12}$ F/m. Pozostałe dwa równania Maxwella (prawa Gaussa) opisują zależności:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.4)$$

W podanych wzorach q oznacza objętościową gęstość ładunku elektrycznego, związaną z gęstością prądu $\mathbf{J}$, równaniem ciągłości:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega q. \quad (2.5)$$

Wielkości $\mathbf{D}$ oraz $\mathbf{B}$ oznaczają odpowiednio indukcję elektryczną i magnetyczną, które w ośrodkach liniowych są związane z natężeniem pola elektrycznego i magnetycznego zależnościami $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ oraz $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$.

Analizując równania Maxwella (2.1)–(2.4), można zauważyć, że są one „niesymetryczne”. Występują w nich mianowicie źródła elektryczne (prąd i ładunki), natomiast brak jest źródeł magnetycznych, co wynika z braku „ładunków magnetycznych”. Okazuje się jednak, że w pewnych przypadkach, dla wygody obliczeń, jest pożądane wprowadzenie do rozważań także prądu i ładunków magnetycznych. Oczywiście takie źródła są „niefizyczne” – reprezentują zwykle pewne wielkości zastępcze, o czym jest mowa w rozdziałach dotyczących analizy obiektów dielektrycznych oraz otworów w obiektach metalowych (apertur). Uzupełniono zatem równania Maxwella o źródła magnetyczne, co prowadzi do zapisu:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H} - \mathbf{M}, \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{J}, \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q, \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = m, \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega q, \quad (2.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = -j\omega m. \quad (2.11)$$

W podanych równaniach $\mathbf{M}$ oznacza gęstość prądu magnetycznego, natomiast m – gęstość ładunku magnetycznego. Wielkości te są oczywiście powiązane równaniem ciągłości, co wyraża wzór (2.11).

Jednym z typowych zadań napotykanym w analizie zagadnień promieniowania i rozpraszania fal elektromagnetycznych jest wyznaczanie natężenia pola elektrycznego i magnetycznego w dowolnym punkcie przestrzeni dla zadanego rozkładu źródeł. W wielu przypadkach, w celu znalezienia rozwiązania, wygodnie jest posłużyć się wielkościami pomocniczymi, tzw. *potencjałami*. W szczególności możemy wyrazić poprzez potencjały natężenia pól jako:

$$\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} - \nabla \Phi - \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{F}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{H} = -j\omega \mathbf{F} - \nabla \Psi + \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.13)$$

Wielkości wektorowe $\mathbf{A}$ i $\mathbf{F}$ oznaczają tzw. magnetyczny i elektryczny potencjał wektorowy, natomiast Φ i Ψ odpowiednio elektryczny i magnetyczny potencjał skalarny. Ponieważ w podanym sformułowaniu występują dwa typy potencjałów (wektorowe i skalarny), metodę wykorzystującą formuły typu (2.12)–(2.13) w literaturze określa się czasem metodą potencjałów mieszanych (ang. *mixed potentials*).

W przypadku gdy analizowany obiekt jest umieszczony w nieskończenie rozległym, jednorodnym i izotropowym ośrodku, można podać stosunkowo proste związki pomiędzy rozkładem źródeł a potencjałem:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_D \mathbf{J}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dD', \quad (2.14)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_D \mathbf{M}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dD', \quad (2.15)$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_D q(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dD', \quad (2.16)$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_D m(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dD'. \quad (2.17)$$

We wzorach (2.14)–(2.17) dziedziną całkowania D jest obszar zawierający źródła pola. W zależności od rozkładu źródeł całki mogą być całkami liniowymi, powierzchniowymi lub też objętościowymi. Wektory $\mathbf{r}$ i $\mathbf{r}'$ opisują odpowiednio położenie punktów obserwacji i punktów źródłowych. Skalarna funkcja G (tzw. funkcja Greena) definiuje elementarny związek między źródłem punktowym a potencjałem w punkcie obserwacji i wyraża się wzorem:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jkR}}{R}. \quad (2.18)$$

We wzorze (2.18) $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ oznacza odległość pomiędzy punktem źródłowym wskazywanym przez wektor $\mathbf{r}'$ a punktem obserwacji wskazywanym przez wektor $\mathbf{r}$, $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ oznacza tzw. liczbę falową charakteryzującą ośrodek.

W przypadku bardziej złożonych ośrodków wzory określające potencjał, a w konsekwencji natężenie pola, przyjmują bardziej skomplikowaną postać. Przykładem takiej sytuacji mogą być tzw. ośrodki uwarstwione [2.3].

Jeśli w danym zagadnieniu nie występuje (zastępczy) prąd i ładunki magnetyczne, to pole elektryczne i magnetyczne można wyrazić za pomocą jednej pary potencjałów mieszanych:

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\Phi, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.20)$$

2.2. Pole dalekie

W wielu praktycznych przypadkach, np. w określaniu charakterystyk promieniowania anten, interesujące jest określenie pola w tzw. strefie dalekiej. Dla $r \rightarrow \infty$, ($r = |\mathbf{r}|$), w zależnościach (2.14)–(2.15), można przyjąć, że zmiany amplitudy elementarnych składowych potencjałów pochodzących od poszczególnych fragmentów dziedziny całkowania D są pomijalne, co prowadzi do aproksymacji:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cong \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_D \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{jk\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} dD', \quad (2.21)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cong \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_D \mathbf{M}(\mathbf{r}') e^{jk\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} dD', \quad (2.22)$$

gdzie $\hat{\mathbf{r}}$ – wektor jednostkowy wskazujący rozważany kierunek propagacji.

We wzorach (2.21)–(2.22) natężenie pola maleje w strefie dalekiej odwrotnie proporcjonalnie do odległości. Można też wykazać, że wtedy składowe radialne wektora pola, wynikające z potencjałów skalarnych, kompensują się z odpowiednimi składowymi wynikającymi z potencjałów wektorowych. W rezultacie do określenia natężenia pola elektrycznego i magnetycznego wystarcza znajomość prostopadłych do kierunku propagacji składowych potencjałów wektorowych. Jednocześnie:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (2.23)$$

gdzie $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ – impedancja falowa ośrodka.

Zależność (2.23) oznacza, że w strefie dalekiej wektory natężenia pola elektrycznego i magnetycznego są do siebie prostopadłe, a jednocześnie prostopadłe do kierunku rozprzestrzeniania się fali elektromagnetycznej.

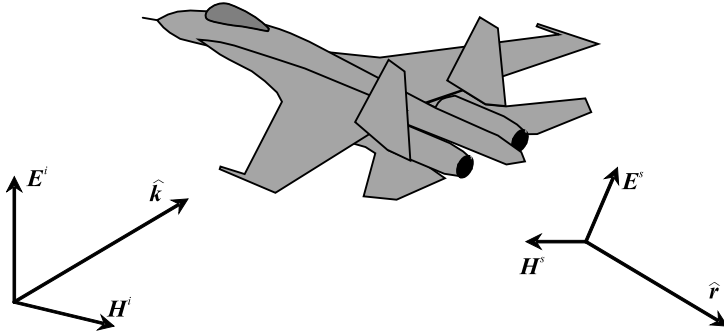
Ostatecznie można zapisać, że w strefie dalekiej:

$$\mathbf{E} = j\omega\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}) + j\omega\eta\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{F}, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{H} = j\omega\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{F}) - \frac{j\omega}{\eta} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}. \quad (2.25)$$

2.3. Skuteczna powierzchnia odbijająca

Na rysunku 2.1 przedstawiono obiekt (samolot) oświetlany przez płaską falę elektromagnetyczną charakteryzowaną przez wzajemnie prostopadłe wektory $\mathbf{E}^i$, $\mathbf{H}^i$



Rys. 2.1. Rozpraszanie płaskiej fali elektromagnetycznej przez dowolny obiekt

(indeks górny i zwykle stosowany do określenia wielkości związanych z falą padającą pochodzi od angielskiego *incident*), spełniające warunek

$$\mathbf{H}^i = \frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}^i, \quad (2.26)$$

gdzie kierunek padania fali jest opisany wektorem jednostkowym $\hat{\mathbf{k}}$.

Zależność (2.26) nieprzypadkowo przypomina wzór (2.23) – padająca fala płaska może być interpretowana jako pole elektromagnetyczne pochodzące od odległych źródeł.

W wyniku rozpraszania fal elektromagnetycznych przez obiekt we wszystkich kierunkach rozchodzą się fale wtórne (rozproszone). Weźmy pod uwagę tę, która rozchodzi się w wybranym kierunku określonym wektorem jednostkowym $\hat{\mathbf{r}}$. Założono, że fale rozproszone w strefie dalekiej pola są scharakteryzowane przez wzajemnie prostopadłe wektory $\mathbf{E}^s$, $\mathbf{H}^s$ (indeks górny s pochodzi od angielskiego *scattered*).

Ponieważ pola elektryczne i magnetyczne fali odbitej są w strefie dalekiej również powiązane zależnością (2.23), do scharakteryzowania zjawiska rozpraszania wystarczy użycie pola elektrycznego. Za miarę rozproszenia przyjmuje się wielkość:

$$\sigma(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{k}}) = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{|\mathbf{E}^s|^2}{|\mathbf{E}^i|^2} \quad (2.27)$$

zwaną *skuteczną powierzchnią odbijającą* lub *przekrojem radarowym* (ang. RCS – *Radar Cross Section*). Skuteczna powierzchnia odbijająca jest podawana w metrach kwadratowych. W literaturze anglojęzycznej, gdzie operuje się pojęciem przekroju radarowego, tak zdefiniowaną wielkość nazywa się przekrojem radarowym *bistatycznym*.

Skuteczna powierzchnia odbijająca mierzona w kierunku skąd pada fala pobudzająca, czyli $\sigma(-\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}})$, w literaturze anglojęzycznej nazywa się przekrojem radarowym *monostatycznym*.

W niektórych przypadkach wygodnie jest uwzględnić w definicji polaryzację fali padającej i odbitej. Takie podejście prowadzi do definicji [2.4]:

$$\sigma_{pq}(\hat{r}, \hat{k}) = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{|\mathbf{E}_p^s|^2}{|\mathbf{E}_q^i|^2}, \quad (2.28)$$

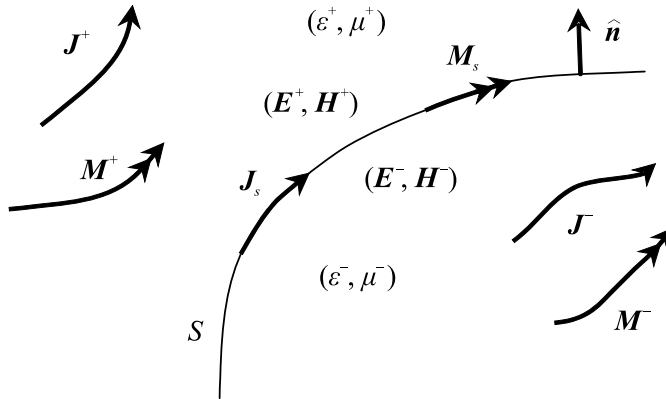
gdzie indeksy p i q oznaczają odpowiednio polaryzację fali odbitej i padającej.

W sferycznym układzie współrzędnych można na przykład zdefiniować wielkości $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\phi\theta}$, $\sigma_{\theta\phi}$, $\sigma_{\phi\phi}$.

2.4. Warunki brzegowe

W punktach przestrzeni, gdzie pola elektryczne i magnetyczne są nieciągłe, równania Maxwella zapisane w postaci różniczkowej muszą być uzupełnione o warunki brzegowe^{*)}. W ramach niniejszej pracy omówiono zagadnienia, gdzie nieciągłość występuje na powierzchniach rozdzielających obszary o różnym charakterze, np. doskonały przewodnik od dielektryka, dwa jednorodne obszary dielektryczne o różnych parametrach, niejednorodny obiekt dielektryczny od otaczającego go ośrodka.

Na rysunku 2.2 przedstawiono powierzchnię S oddzielającą dwa obszary o różnych parametrach. Założono, że ewentualne przewodnictwo w tych obszarach jest uwzględnione w postaci zespolonej przenikalności elektrycznej [2.1]. W obu obszarach dopuszczono występowanie objętościowych rozkładów prądu elektrycznego i magnetycznego, oznaczonych na rysunku symbolami $\mathbf{J}^\pm$ i $\mathbf{M}^\pm$.



Rys. 2.2. Powierzchnia rozdzielająca dwa obszary oraz prądy powierzchniowe

^{*)} Warunki brzegowe wyprowadza się z całkowitej postaci równań Maxwella.

Na powierzchni S mogą występować prądy powierzchniowe: elektryczny i magnetyczny, których gęstości oznaczono odpowiednio jako $\mathbf{J}_S$ i $\mathbf{M}_S$, oraz elektryczne i magnetyczne ładunki powierzchniowe o gęstościach q_S i m_S . Warunki brzegowe definiujące związek pomiędzy polami tuż przy powierzchni z obu stron S są następujące [2.5]:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-) = \mathbf{J}_S, \quad (2.29)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) = -\mathbf{M}_S, \quad (2.30)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}^+ - \mathbf{D}^-) = q_S, \quad (2.31)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^-) = m_S, \quad (2.32)$$

gdzie $\hat{\mathbf{n}}$ oznacza wektor jednostkowy, normalny do powierzchni S , skierowany od ośrodka oznaczonego indeksem „-” do ośrodka oznaczonego indeksem „+”.

Prądy i ładunki występujące we wzorach (2.29)–(2.32) są powiązane równaniami ciągłości o postaci [2.5]:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{J}^+ - \mathbf{J}^-) + \nabla_S \cdot \mathbf{J}_S = -j\omega q_S, \quad (2.33)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{M}^+ - \mathbf{M}^-) + \nabla_S \cdot \mathbf{M}_S = -j\omega m_S, \quad (2.34)$$

gdzie operator ∇_S oddziałujący na prąd powierzchniowy oznacza dywergencję powierzchniową [2.6].

Ze wzorów (2.33), (2.34) wynika, że w przypadku braku źródeł objętościowych, wykazujących na powierzchni S nieciągłość składowej normalnej, prądy i ładunki powierzchniowe są powiązane przez powierzchniowe odpowiedniki (2.10), (2.11):

$$\nabla_S \cdot \mathbf{J}_S = -j\omega q_S, \quad (2.35)$$

$$\nabla_S \cdot \mathbf{M}_S = -j\omega m_S, \quad (2.36)$$

Związki (2.35), (2.36) są wykorzystywane np. w analizie obiektów przewodzących, jednorodnych dielektryków lub apertur (por. rozdziały 3, 6, 7, 9).

Nawet gdy nie występują prądy powierzchniowe, w opisujących zagadnienie równaniach mogą się pojawić ładunki powierzchniowe:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{J}^+ - \mathbf{J}^-) = -j\omega q_S, \quad (2.37)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{M}^+ - \mathbf{M}^-) = -j\omega m_S. \quad (2.38)$$

Z taką sytuacją można spotykać się np. podczas analizy silnie niejednorodnych obiektów dielektrycznych (rozd. 8), gdzie występują nieciągłości składowej normalnej zastępczego objętościowego prądu elektrycznego.

Często rozpatrywany jest przypadek, gdy powierzchnia S jest powierzchnią doskonałego przewodnika elektrycznego (PEC – ang. *Perfect Electric Conductor*). Założmy, że na rysunku 2.2 doskonale przewodzący jest obszar oznaczony indeksem „-”. Wewnątrz tego obszaru nie występują pola elektryczne i magnetyczne, natomiast na powierzchni S składowa styczna pola elektrycznego jest zerowa^{*)}:

$$\hat{n} \times \mathbf{E}^+ = 0. \quad (2.39)$$

Biorąc pod uwagę (2.30), oznacza to, że $\mathbf{M}_S = 0$, a w razie braku magnetycznego prądu objętościowego także $m_S = 0$. Na podstawie (2.29) mamy:

$$\hat{n} \times \mathbf{H}^+ = \mathbf{J}_S, \quad (2.40)$$

a na podstawie (2.30), (2.31)

$$\hat{n} \cdot \mathbf{D}^+ = q_S, \quad (2.41)$$

$$\hat{n} \cdot \mathbf{B}^+ = 0. \quad (2.42)$$

Należy przy tym pamiętać, że gęstość prądu powierzchniowego $\mathbf{J}_S$ i ładunku powierzchniowego ρ_S tylko po założeniu $\hat{n} \cdot \mathbf{J}^+ = 0$ są powiązane równaniem (2.35). Gdy $\hat{n} \cdot \mathbf{J}^+ \neq 0$ z (2.33), otrzymuje się:

$$\hat{n} \cdot \mathbf{J}^+ + \nabla_S \cdot \mathbf{J}_S = -j\omega q_S. \quad (2.43)$$

Warunek (2.43) występuje, wtedy gdy np. metodę z rozdziału 8 uogólni się na przypadek, gdy obiekt dielektryczny przylega bezpośrednio do powierzchni idealnego przewodnika [2.7].

Innym typowym przykładem jest sytuacja, gdy powierzchnia S oddziela od siebie dwa obszary jednorodnego dielektryka, a w równaniach (2.29)–(2.32) nie występują prądy i ładunki. Otrzymuje się wtedy:

$$\hat{n} \times \mathbf{H}^+ = \hat{n} \times \mathbf{H}^-, \quad (2.44)$$

$$\hat{n} \times \mathbf{E}^+ = \hat{n} \times \mathbf{E}^-, \quad (2.45)$$

$$\hat{n} \cdot \mathbf{D}^+ = \hat{n} \cdot \mathbf{D}^-, \quad (2.46)$$

$$\hat{n} \cdot \mathbf{B}^+ = \hat{n} \cdot \mathbf{B}^-. \quad (2.47)$$

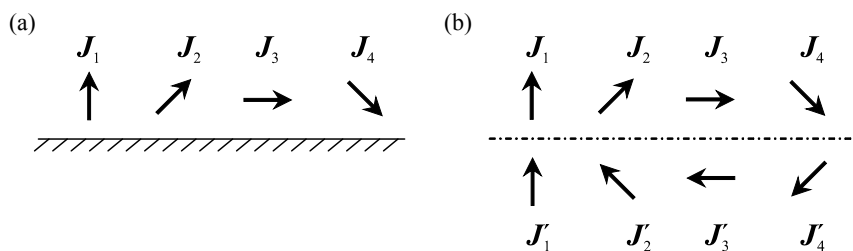
Szersze omówienie różnych warunków brzegowych można znaleźć np. w pracy Kolundžiji i Djordjevića [2.5].

^{*)} Ponieważ także $\hat{n} \times \mathbf{E}^- = 0$, w (2.39), można pominąć indeks „+”.

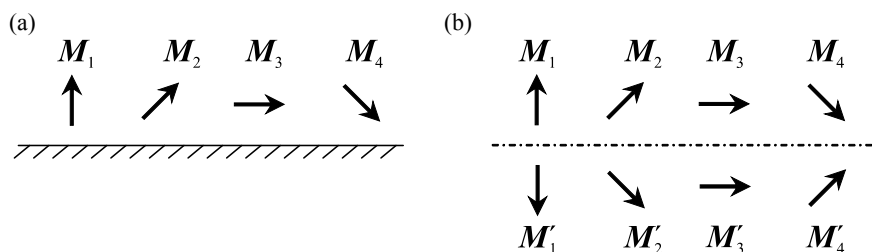
2.5. Metoda obrazów i zasady równoważności

W analizie wielu zagadnień elektromagnetyzmu obliczeniowego często jest wykorzystywany fakt, że różne konfiguracje źródeł i obiektów materialnych mogą wytwarzać w wybranych obszarach przestrzeni taki sam rozkład pola elektrycznego i magnetycznego. Pozwala to zastępować oryginalną konfigurację wygodniejszą, ze względów obliczeniowych, konfiguracją równoważną.

Często stosowaną metodą tego typu jest tzw. metoda obrazów, pozwalająca w prosty sposób uwzględnić w analizie obecność płaszczyzny wykonanej z doskonałego przewodnika elektrycznego. Na powierzchni takiego przewodnika znika składowa styczna pola elektrycznego. Jeśli rozpatruje się dowolny układ źródeł powyżej płaszczyzny (rys. 2.3a i 2.4a), można stwierdzić, że identyczny warunek brzegowy uzyska się w konfiguracjach zastępczych, w których usuwa się płaszczyznę przewodnika, natomiast w drugiej półprzestrzeni, symetrycznie umieści się *lustrzane odbicia* lub *obrazy* źródeł oryginalnych. Kierunek i zwrot wektorów prądu elektrycznego i magnetycznego dla różnych położeń względem oryginalnej płaszczyzny, gwarantujące zerowe styczne pole elektryczne w płaszczyźnie symetrii, pokazano na rysunkach 2.3b i 2.4b. Biorąc pod uwagę jednoznaczność rozwiązania równań Maxwella dla zadanych warunków brzegowych, można stwierdzić, że pola w górnej półprzestrzeni w zagadnieniach oryginalnych i zastępczych są identyczne. Konfigurację obiektów (źródeł)



Rys. 2.3. Ilustracja metody obrazów dla źródeł prądu elektrycznego w obecności idealnie przewodzącej płaszczyzny: (a) konfiguracja oryginalna; (b) konfiguracja równoważna



Rys. 2.4. Ilustracja metody obrazów dla źródeł prądu magnetycznego w obecności idealnie przewodzącej płaszczyzny: (a) konfiguracja oryginalna; (b) konfiguracja równoważna

w obecności przewodzącej płaszczyzny można zatem zastąpić równoważną konfiguracją bez tej płaszczyzny, natomiast z umieszczonymi symetrycznie obrazami. W środowisku zastępczym zarówno źródła pierwotne, jak i odbite promieniują w nieskończonej jednorodnej przestrzeni, dla której funkcja Greena jest opisana formułą (2.18).

Rozpatrzmy zamkniętą powierzchnię S rozdzielającą przestrzeń na dwa obszary, zewnętrzny i wewnętrzny, oznaczone odpowiednio jako V^+ i V^- . W obu obszarach mogą występować źródła oznaczone jako $\mathbf{J}^+$, $\mathbf{M}^+$ oraz $\mathbf{J}^-$, $\mathbf{M}^-$. Powierzchnia S może rozgraniczać ośrodki o różnych parametrach elektrycznych (jak to pokazano na rys. 2.5a), może też być powierzchnią wybraną całkowicie dowolnie na potrzeby analizy jakiegoś zagadnienia. Oznaczmy przez $(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)$ oraz $(\mathbf{E}^-, \mathbf{H}^-)$ pola występujące odpowiednio w obrębie V^+ i V^- .

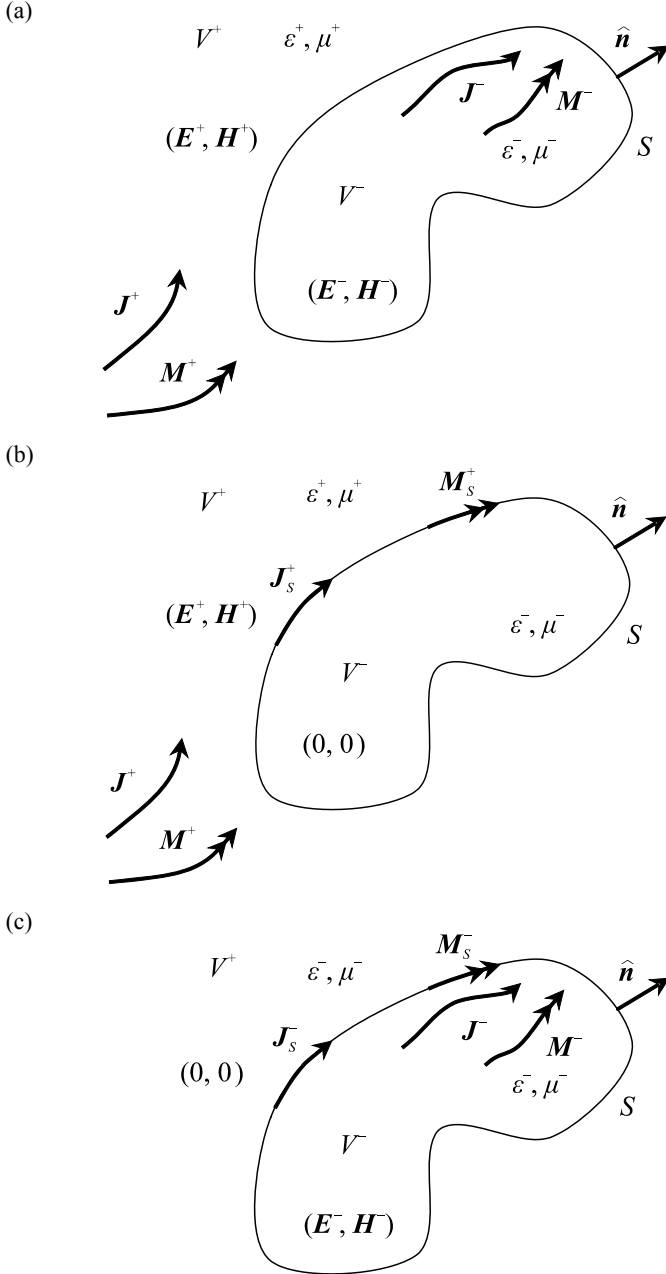
Na podstawie *powierzchniowej zasady równoważności* [1.1, 1.2, 1.8], stwierdza się, że do jednoznacznego określenia pola w obszarze zewnętrznym wystarczy znajomość składowych stycznych pola $(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)$ na powierzchni S oraz ewentualnych źródeł w obrębie V^+ . Można zatem np. założyć, że wewnątrz S , czyli w obrębie V^- , pola są zerowe (rys. 2.5b). Składowe styczne pola elektrycznego i magnetycznego na powierzchni S są teraz nieciągłe, spełnienie warunków brzegowych wymaga zatem wprowadzenia zastępczych *prądów powierzchniowych*, elektrycznego i magnetycznego, zdefiniowanych:

$$\mathbf{J}_S^+ = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^+, \quad (2.48)$$

$$\mathbf{M}_S^+ = \mathbf{E}^+ \times \hat{\mathbf{n}}, \quad (2.49)$$

gdzie $\hat{\mathbf{n}}$ – wektor jednostkowy, normalny do powierzchni, skierowany na zewnątrz powierzchni S , a $\mathbf{E}^+$ oraz $\mathbf{H}^+$ są brane „tuż na zewnątrz S ”.

Ponieważ, jak założono, w stworzonym modelu pola wewnątrz S są zerowe, nie wchodzi one w interakcję ośrodkiem wypełniającym wnętrze powierzchni S – parametry tego ośrodka możemy zatem dowolnie zmieniać. W szczególności można zastąpić te parametry parametrami ośrodka znajdującego się na zewnątrz S . Pole elektryczne i magnetyczne w obszarze zewnętrznym można teraz potraktować jako wytwarzane przez oryginalne prądy $\mathbf{J}^+$, $\mathbf{M}^+$ oraz prądy (2.48) i (2.49), promieniujące w przestrzeni o parametrach ośrodka zewnętrznego. Te same prądy muszą wytwarzać zerowe pole wewnątrz powierzchni S . Podany schemat postępowania stosuje się zwykle w sytuacji, w której dla skonstruowanego ośrodka, tzn. przestrzeni o parametrach ośrodka zewnętrznego, są znane funkcje Greena. Pozwala to stosunkowo łatwo obliczyć pole zewnętrzne dla znanego rozkładu zastępczych źródeł powierzchniowych. Zagadnienie równoważne pokazane na rysunku 2.5b, gdzie pole na zewnątrz S jest takie samo jak w zagadnieniu oryginalnym, nazywa się *zagadnieniem równoważnym dla obszaru zewnętrznego* lub krócej *zagadnieniem równoważnym zewnętrznym*.



Rys. 2.5. Powierzchnia S rozgraniczająca obszary: (a) konfiguracja oryginalna; (b) konfiguracja równoważna dla obszaru zewnętrznego; (c) konfiguracja równoważna dla obszaru wewnętrznego

W podobny sposób można skonstruować *zagadnienie równoważne wewnętrzne*, (rys. 2.5c), w którym pozostawia się oryginalne pola (i źródła) oraz ośrodek w obrębie S , natomiast postuluje się zerowe pole na zewnątrz. W uzyskanym modelu należy wtedy wprowadzić prądy powierzchniowe:

$$\mathbf{J}_S^- = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^-, \quad (2.50)$$

$$\mathbf{M}_S^- = -\mathbf{E}^- \times \hat{\mathbf{n}}, \quad (2.51)$$

gdzie $\mathbf{E}^-$ oraz $\mathbf{H}^-$ – pola brane „tuż wewnątrz S ”.

Ponieważ w zagadnieniu równoważnym z rysunku 2.5c w obszarze zewnętrznym pola są zerowe, można znowu dowolnie zmieniać parametry środowiska zewnętrznego – np. „rozszerzyć” na obszar zewnętrzny środowisko z wnętrza S .

Konfiguracje równoważne pokazane na rysunkach 2.5b i 2.5c, w których odpowiednio dobrany rozkład prądów powierzchniowych wytwarza właściwe pole w jednym z regionów, a zerowe w drugim regionie, nie są jedynymi z możliwych. Stosując zasadę superpozycji, można bowiem np. do źródeł pokazanych na rysunku 2.5b dodać dowolny inny rozkład prądów, który wytwarza zerowe pole na zewnątrz. Uzyskuje się wtedy nieskończenie wiele możliwych zagadnień zastępczych, w których pola na zewnątrz są tożsame z polami w problemie oryginalnym, a wewnątrz S przyjmują pewne postulowane (spełniające równania Maxwella) wartości. Dualne rozumowanie można zastosować do zagadnienia wewnętrznego. Przykłady zastosowań takiego rozumowania zostaną podane w rozdziale 6, dotyczącym analizy rozpraszania fal elektromagnetycznych przez jednorodne obiekty dielektryczne.

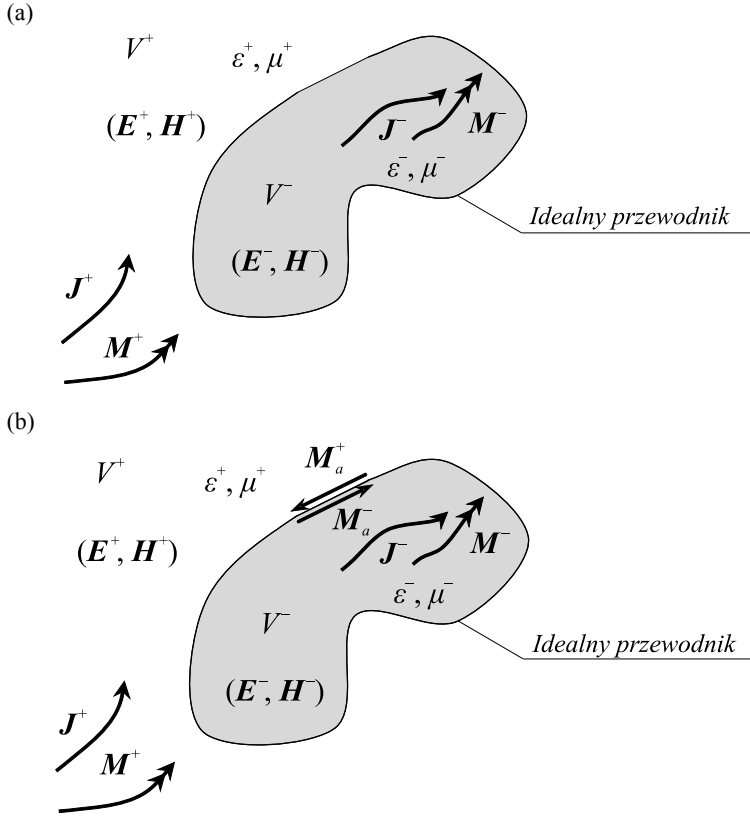
Osobno rozważany jest przypadek, w którym powierzchnia S jest powierzchnią idealnego przewodnika. Wtedy składowa styczna pola elektrycznego „tuż na zewnątrz S ” znika, a pole w równoważnym zagadnieniu zewnętrznym jest wytwarzane wyłącznie przez powierzchniowy prąd elektryczny. Przypadek ten omówiono szczegółowo w rozdziałach 3–5.

Innym przykładem zastosowania powierzchniowej zasady równoważności jest analiza sytuacji, gdy w metalowym, doskonale przewodzącym obiekcie znajduje się otwór (apertura). Można wtedy „zewrzeć” otwór (czyli wypełnić jego powierzchnię przewodnikiem), a po obu jego stronach wprowadzić magnetyczne prądy zastępcze (rys. 2.6). Prądy zastępcze są zdefiniowane jako:

$$\mathbf{M}_a^+ = \mathbf{E}^+ \times \hat{\mathbf{n}}_a, \quad (2.52)$$

$$\mathbf{M}_a^- = -\mathbf{E}^- \times \hat{\mathbf{n}}_a, \quad (2.53)$$

gdzie $\hat{\mathbf{n}}_a$ – wektor jednostkowy, normalny do powierzchni apertury, skierowany na zewnątrz. Biorąc pod uwagę ciągłość składowej stycznej pola elektrycznego w otwo-



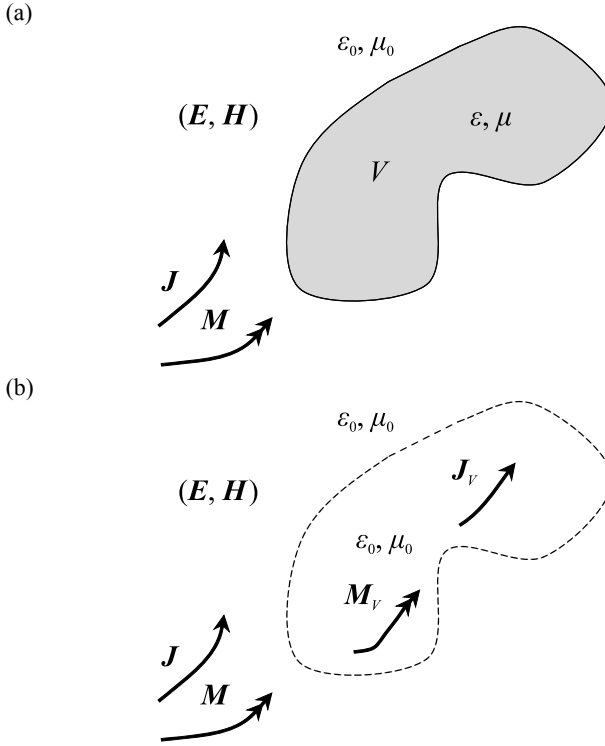
Rys. 2.6. Metalowy obiekt z aperturą (a) oraz konfiguracja równoważna z zastępczymi prądami magnetycznymi (b)

rze widzimy, że $\mathbf{M}_a^+ = -\mathbf{M}_a^-$, co pokazano na rysunku, zaznaczając przeciwne zwroty wektorów symbolizujących prądy magnetyczne w aperturze.

Zauważmy, że w sytuacji równoważnej nie promieniuje zastępczy prąd elektryczny, ponieważ prąd elektryczny umieszczony tuż przy powierzchni idealnego przewodnika nie wytwarza pola [2.1], natomiast zastępczy prąd magnetyczny promieniuje *w obecności* przewodzącego obiektu.

Powierzchniowa zasada równoważności jest przydatna wtedy, gdy w zagadnieniach zastępczych jest możliwe obliczanie pola wytwarzanego przez zadany rozkład źródeł, gdy dla środowiska, w którym promieniają źródła w odpowiedniej konfiguracji zastępczej, znane są funkcje Greena.

Rozważmy teraz przypadek, w którym założenie to nie jest spełnione – przypadek rozpraszania fal elektromagnetycznych przez obiekt niejednorodny, dla którego parametry materiałowe ϵ i μ są zależne od położenia w obrębie objętości V (rys. 2.7a).



Rys. 2.7. Niejednorodny obiekt w polu elektromagnetycznym (a) oraz konfiguracja równoważna z zastępczym objętościowym prądem magnetycznym i elektrycznym (b)

Choć oczywiście można wprowadzić powierzchniowe prądy zastępcze na powierzchni obiektu, dla równoważnego problemu wewnętrznego (por. rys. 2.5c) nie są znane funkcje Greena. Można w takim przypadku skorzystać z *objętościowej zasady równoważności* [2.1].

W dowolnym punkcie przestrzeni, włączając w to obszar niejednorodnej bryły, są spełnione równania (2.6), (2.7), które można przekształcić do postaci:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H} - j\omega(\mu - \mu_0) \mathbf{H} - \mathbf{M}, \quad (2.54)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_0 \mathbf{E} - j\omega(\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E} + \mathbf{J}, \quad (2.55)$$

gdzie ϵ_0, μ_0 – parametry ośrodka zewnętrznego.

Po wprowadzeniu oznaczenia:

$$\mathbf{M}_V = j\omega(\mu - \mu_0) \mathbf{H}, \quad (2.56)$$

$$\mathbf{J}_V = j\omega(\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E}, \quad (2.57)$$

otrzymuje się:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0\mathbf{H} - \mathbf{M}_V - \mathbf{M}, \quad (2.58)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{J}_V + \mathbf{J}. \quad (2.59)$$

Gęstość prądu magnetycznego i elektrycznego $\mathbf{M}_V$ i $\mathbf{J}_V$ jest różna od zera tylko w obszarach, gdzie μ i ε przyjmują wartości inne niż, odpowiednio, μ_0 oraz ε_0 , czyli w obrębie V . Równania (2.58) i (2.59) opisują zatem zagadnienie równoważne, gdzie oryginalne źródła wraz ze źródłami (2.56) i (2.57) promieniają w przestrzeni całkowicie wypełnionej ośrodkiem zewnętrznym (rys. 2.7b).

Zasady równoważności uzasadniają uzupełnienie równań Maxwella o prądy i ładunki magnetyczne. Warto też podkreślić, że analiza wielu złożonych problemów wymaga równoczesnego i wielokrotnego zastosowania różnych wariantów zasad równoważności oraz metody obrazów. Kilka przykładów podano w dalszej części pracy.

2.6. Pole rozproszone oraz twierdzenie o indukcji

W rozdziale 2.3 użyto terminu „fale rozproszone”. W dalszych rozdziałach używa się bardziej ogólnego pojęcia *pole rozproszone*. Rozpatrzmy problem pokazany na rysunku 2.8a. Widoczne na rysunku źródła, zaznaczone jako prąd $\mathbf{J}$ i $\mathbf{M}$, promieniają w obecności obiektu materialnego, wytwarzając w całej przestrzeni pole elektryczne $\mathbf{E}$ i magnetyczne $\mathbf{H}$. Zdefiniowano pola padające (ang. *incident*) $\mathbf{E}^i$ oraz $\mathbf{H}^i$ jako pola wytworzone przez ten sam układ źródeł, ale po usunięciu obiektu. Pole rozproszone (ang. *scattered*) definiujemy jako [2.1]:

$$\mathbf{E}^s = \mathbf{E} - \mathbf{E}^i, \quad (2.60)$$

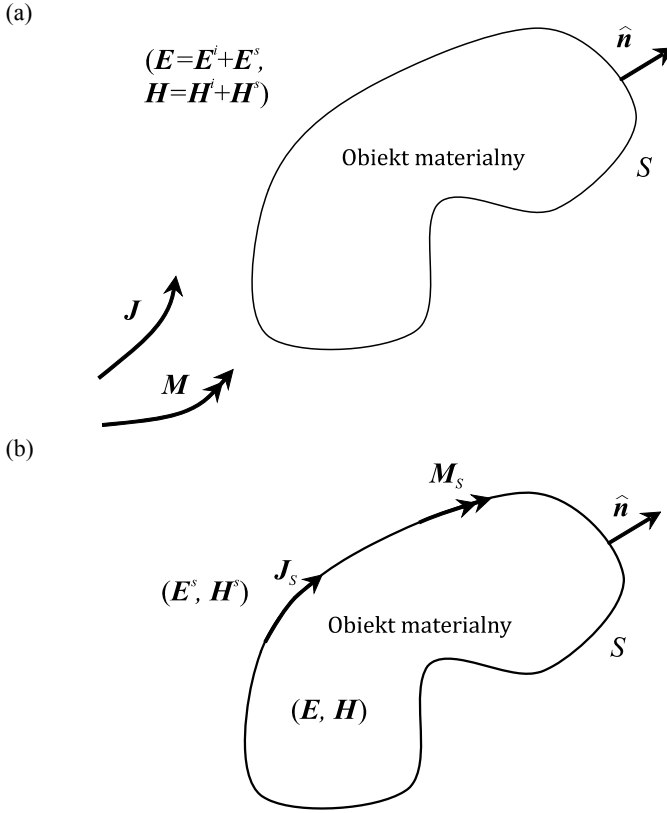
$$\mathbf{H}^s = \mathbf{H} - \mathbf{H}^i. \quad (2.61)$$

Pola opisane przez (2.60) i (2.61) można traktować jako pola wtórne wytworzone przez prąd przewodzenia i polaryzacji płynące w obiekcie [2.1]. Rozpatrzmy teraz konfigurację, pokazaną na rysunku 2.8b, w którym na zewnątrz powierzchni S ograniczającej umieścimy wyłącznie pole rozproszone $\mathbf{E}^s$ i $\mathbf{H}^s$, a wewnątrz, w obrębie obiektu, pole oryginalne $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$. Na podstawie warunków (2.29) i (2.30) można stwierdzić, że na powierzchni S muszą wtedy istnieć prądy powierzchniowe:

$$\mathbf{J}_S = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}^s - \mathbf{H}), \quad (2.62)$$

$$\mathbf{M}_S = -\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}^s - \mathbf{E}). \quad (2.63)$$

Uwzględnivszy definicje (2.60), (2.61) można przekształcić (2.62), (2.63) do postaci:



Rys. 2.8. Twierdzenie o indukcji: zagadnienie oryginalne (a) oraz zagadnienie, w którym pola rozproszone są wytwarzane przez źródła zastępcze (b)

$$J_s = -\hat{n} \times H^i, \quad (2.64)$$

$$M_s = \hat{n} \times E^i. \quad (2.65)$$

Prądy powierzchniowe (2.64), (2.65) wytwarzają pole rozproszone na zewnątrz powierzchni S oraz oryginalne pole w obrębie S. Jest to tzw. *twierdzenie o indukcji* [2.1]. W zagadnieniach analizy rozpraszania fal elektromagnetycznych pole padające jest znane, są znane zatem także prądy zastępcze (2.64), (2.65). Te prądy promieniują jednak w *obecności* obiektu, a nie w jednorodnej przestrzeni – nie mają tu zatem zastosowania formuły (2.12)–(2.17), w których jest użyta funkcja Greena (2.18). Nie można więc w prosty sposób wykorzystać prądów (2.64), (2.65) do obliczenia pola rozproszonego.

Gdy obiekt materialny jest zbudowany z idealnego przewodnika elektrycznego, twierdzenie o indukcji ulega uproszczeniu. Do określenia pola rozproszonego wystar-

czy wtedy prąd magnetyczny (2.65), ponieważ – przypomnijmy – prąd elektryczny (2.64) umieszczony na powierzchni idealnego przewodnika nie wytwarza pola elektromagnetycznego [2.1].

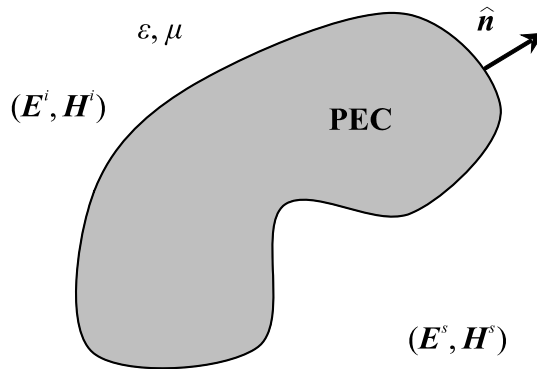
Literatura

- [2.1] Harrington R.F., *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill Book Company, 1961.
- [2.2] Wilton D.R., *Computational methods*, [w:] P. Sabatier, E.R. Pike (red.), *Scattering*, Academic Press, 1.5.5, 2002, 316–365.
- [2.3] Michalski K.A., Mosig J.R., *Multilayered media Green's functions in integral equation formulations*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 45, No. 3, 1997, 508–519.
- [2.4] Mautz J.R., Harrington R.F., *Radiation and scattering from bodies of revolution*, Appl. Sci. Res., Vol. 20, 1969, 405–435.
- [2.5] Kolundžija B.M., Djordjević A.R., *Electromagnetic modeling of composite metallic and dielectric structures*, Artech House, 2002.
- [2.6] Van Bladel J., *Electromagnetic Fields*, Second Edition, IEEE Press, 2007.
- [2.7] Sarkar T.K., Arvas R., *Scattering cross section of composite conducting and lossy dielectric bodies*, Proceedings of the IEEE, Vol. 77, No. 5, 1989, 788–795.
- [2.8] Poggio A.J., Miller E.K., *Integral equation solutions of three-dimensional scattering problems*, [w:] R. Mittra (red.), *Computer Techniques for Electromagnetics*, Oxford, England, Pergamon, 4, 1973.
- [2.9] Wang J.J.H., *Generalized moment methods in Electromagnetics*, John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1991.

3. Metoda momentów

3.1. Równania całkowe i całkowo-różniczkowe

Formuły przedstawione w poprzednim rozdziale pozwalają na wyznaczenie natężenia pola elektrycznego i magnetycznego w dowolnym punkcie jednorodnej przestrzeni dla zadanego rozkładu źródeł, tj. prądu elektrycznego i/lub magnetycznego. W praktyce sytuacje, dla których znamy lub postulujemy *a priori* rozkład prądu, należą do rzadkości. Najczęściej zagadnienie stawiane jest w sposób podobny do pokazanego na rysunku 3.1.



Rys. 3.1. Rozpraszanie fal elektromagnetycznych przez metalowy obiekt

Obiekt (w tym przypadku metalowa, doskonale przewodząca bryła; przypomnijmy, że skrót PEC oznacza *Perfect Electric Conductor*) jest umieszczony w jednorodnym nieograniczonym ośrodku scharakteryzowanym przez parametry ϵ i μ . Na obiekt oddziałuje znane, pobudzające, pole elektromagnetyczne, którego składowa elektryczna oznaczona jest symbolem E^i . Pole pobudzające, zdefiniowane jako pole istniejące w razie *braku* obiektu rozpraszającego, może wypełniać całą przestrzeń (np. fala płaska), może też np. przybierać określoną wartość w pewnym zadanym obszarze, a być zerowe poza nim (taki rodzaj pobudzenia jest np. wykorzystany w analizie dipola pół-

falowego w rozdziale czwartym). Zgodnie z zasadą równoważności, doskonale przewodzący obiekt można zastąpić rozkładem powierzchniowego prądu elektrycznego $\mathbf{J}$, zdefiniowanego przez (2.48) – dla uproszczenia notacji opuszcza się tu indeks S . Prąd ten wytwarza w przestrzeni pole wtórne $\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s$. Gdyby znany był rozkład prądu $\mathbf{J}$ na powierzchni S , zagadnienie można by uznać za rozwiązane, gdyż, jak już wspomniano, dla zadanego rozkładu prądu obliczenie pola wytwarzanego przez ten rozkład nie jest zadaniem skomplikowanym. Problem polega na tym, że w podanym przykładzie rozkład prądu jest nieznany. Należy zatem sformułować *równanie*, które pozwoliłoby wyznaczyć ten nieznany rozkład prądu.

Jeżeli powierzchnia S jest idealnie przewodzącą, w każdym jej punkcie składowa styczna wypadkowego pola elektrycznego znika – por. warunek brzegowy (2.39). Wypadkowe pole elektryczne jest sumą dwóch składników: pola padającego i pola wtórnego. Wspomniany warunek brzegowy przyjmuje więc postać:

$$(\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^s(\mathbf{r}))_{\tan} = 0, \quad \mathbf{r} \in S, \quad (3.1)$$

gdzie symbol $\tan$ oznacza składową styczną do powierzchni S w punkcie $\mathbf{r}$. Po podstawieniu za $\mathbf{E}^s$ wzoru (2.19), a następnie zastosowaniu (2.14) i (2.16) oraz warunku ciągłości (2.10) otrzymuje się równanie [3.1]:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) - j\omega\mathbf{A}(\mathbf{r}) - \nabla\Phi(\mathbf{r}))_{\tan} \\ &= \left(\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) - j\omega\frac{\mu}{4\pi} \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right. \\ & \quad \left. + \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\nabla'_S \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{j\omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right)_{\tan} = 0, \quad \mathbf{r} \in S, \end{aligned} \quad (3.2)$$

gdzie operator ∇'_S oznacza powierzchniową dywergencję, a umieszczony przy nim symbol $(\cdot)_{\tan}$ wskazuje, że różniczkowanie odbywa się względem współrzędnych źródła wskazywanych przez wektor $\mathbf{r}'$.

Równania skonstruowane na podobnych zasadach, jak równanie (3.2), określa się zwykle mianem równań całkowych, choć ze względu na występujące tu operatory różniczkowania (gradient, dywergencja) właściwsza byłaby nazwa „równania całkowo-różniczkowe”. Na podstawie równania (3.2) można poczynić pewne spostrzeżenia:

- (1) dane o geometrii analizowanej struktury są zawarte w informacji o powierzchni całkowania S oraz w operacji wyodrębniania składowej pola elektrycznego stycznej do tej powierzchni (składową styczną można opisać z wykorzystaniem wektora jednostkowego $\hat{\mathbf{n}}$ normalnego do powierzchni S),
- (2) dzięki obecności operatorów całkowania, prowadzone obliczenia dotyczą wyłącznie punktów należących do powierzchni S ,
- (3) jedyną wielkością nieznaną jest rozkład (powierzchniowej) gęstości prądu $\mathbf{J}$,

- (4) ponieważ zarówno punkt źródłowy, opisany wektorem $\mathbf{r}'$, jak i punkt obserwacji (punkt, w którym obliczane jest pole), opisany wektorem $\mathbf{r}$, należą do powierzchni S , podczas obliczania całek może wystąpić sytuacja, gdy $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$; ze wzoru (2.18) wynika, że nastąpi wtedy dzielenie przez zero, a zatem funkcje podcałkowe we wzorze (3.2) mają charakter osobliwy.

Jeżeli możliwe byłoby rozwiązanie równania (3.2) ze względu na nieznaną rozkład gęstości prądu $\mathbf{J}$, można by uznać problem za rozwiązany – czyli określić pola w dowolnym punkcie przestrzeni. Jakkolwiek na ogół nie można podać analitycznego rozwiązania w formie zamkniętej, możliwe jest numeryczne uzyskanie rozwiązania przybliżonego, według algorytmu streszczonego w kolejnym podrozdziale.

3.2. Funkcje bazowe i wagowe, macierz impedancyjna

Znalezienie ścisłego rozwiązania równania (3.2) oznacza określenie wektora gęstości prądu $\mathbf{J}$ dla dowolnego punktu na powierzchni S . Jak wspomniano wcześniej, w większości praktycznych przypadków jest to niemożliwe i trzeba zadowolić się rozwiązaniem przybliżonym [3.1, 3.2]. Dokonajmy zatem aproksymacji poszukiwanej wielkości w postaci kombinacji liniowej:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cong \sum_{n=1}^N I_n \mathbf{i}_n(\mathbf{r}'). \quad (3.3)$$

Występujące w aproksymacji (3.3) funkcje $\mathbf{i}_n(\mathbf{r})$ są to zdefiniowane *a priori* tzw. *funkcje bazowe*. Funkcje te definiuje się tak, aby były liniowo niezależne oraz aby za pomocą skończonego ich zbioru było możliwe dobre przybliżenie poszukiwanego rozkładu prądu. Współczynniki I_n definiują wagi przypisane poszczególnym funkcjom bazowym. Przez zastosowanie przybliżenia (3.3) zagadnienie poszukiwania gęstości prądu w nieskończenie wielu punktach dziedziny równania całkowego sprowadza się do poszukiwania skończonej liczby N współczynników rozwinięcia. Zwiększenie liczby N prowadzi do wzrostu dokładności aproksymacji (3.3). Funkcje bazowe można zdefiniować w całej dziedzinie $\mathbf{r} \in S$, można też podzielić S na mniejsze elementy i zdefiniować tzw. *segmentowe* funkcje bazowe, niezerowe wyłącznie w pewnej poddziedzinie S . Drugie rozwiązanie jest zwykle preferowane, ze względu na elastyczność w opisie rozkładu źródeł na obiektach o skomplikowanych kształtach. W wielu praktycznych przypadkach funkcje bazowe wygodnie jest definiować, przyjmując za segmenty proste geometryczne kształty, np. odcinki dla tzw. cienkich przewodów, trójkąty dla powierzchni. Oznacza to, że często aproksymacja dotyczy nie tylko rozkładu źródeł, ale też geometrii analizowanego obiektu – krzywoliniowy przewód zastępuje się ciągiem prostoliniowych segmentów, zakrzywioną powierzchnię – zestawem płaskich „łatek”. Ponieważ takie postępowanie jest oczywiście źródłem dodatkowych niedo-

kładności w obliczeniach, istnieją prace wykorzystujące bardziej wyrafinowane modele geometryczne.

Dla uproszczenia dalszego zapisu przepiszymy teraz równanie (3.2) w postaci:

$$\mathcal{L}(\mathbf{J}(\mathbf{r}')) = \mathcal{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S, \quad (3.4)$$

gdzie liniowy operator $\mathcal{L}$ jest zdefiniowany jako:

$$\mathcal{L}(\mathbf{*}) = \left(j\omega \frac{\mu}{4\pi} \int_S (\mathbf{*}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' - \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\nabla' \cdot (\mathbf{*})}{j\omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right)_{\tan}, \quad (3.5)$$

a prawa strona (3.4) reprezentuje składową styczną do S pola padającego:

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = (\mathbf{E}^i(\mathbf{r}))_{\tan}. \quad (3.6)$$

Po podstawieniu do wzoru (3.4) aproksymacji (3.3) oraz wykorzystaniu faktu, że operator $\mathcal{L}$ jest operatorem liniowym, otrzymuje się równanie:

$$\mathcal{L}\left(\sum_{n=1}^N I_n \mathbf{i}_n(\mathbf{r}')\right) = \sum_{n=1}^N I_n \mathcal{L}(\mathbf{i}_n(\mathbf{r}')) \cong \mathcal{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S, \quad (3.7)$$

Równanie (3.7) ma niezwykle istotną cechę. Liniowy operator $\mathcal{L}$, wyrażający się dość skomplikowaną formułą (3.5), oddziałuje tu na *znane* funkcje bazowe $\mathbf{i}_n(\mathbf{r}')$ (w równaniu 3.2) tenże operator działał na *nieznany* rozkład gęstości prądu $\mathbf{J}$). Numeryczne obliczenie wielkości $\mathcal{L}(\mathbf{i}_n(\mathbf{r}'))$ dla zadanego punktu obserwacji nie nastręcza na ogół trudności – szczegółowo omówiono to zagadnienie w kolejnych rozdziałach.

W wyniku zastosowanej aproksymacji, zamiast wyjściowego równania całkowego zawierającego nieznana funkcję, mamy teraz równanie ze skończoną liczbą niewiadomych współczynników I_n . Równanie (3.2) ma być spełnione dla każdego punktu obserwacji leżącego na powierzchni S . Podobnie zapis (3.7) oznacza przybliżone spełnienie oryginalnego równania w nieskończonej liczbie punktów $\mathbf{r} \in S$, co generuje nieskończenie wiele przybliżonych równań liniowych. Tak duża liczba równań jest oczywiście niepotrzebna. Standardowe techniki poszukiwania N niewiadomych wymagają znajomości N niezależnych równań liniowych. Poszukiwany układ równań liniowych można uzyskać z równania (3.7) przez zastosowanie do obu stron operacji *testowania*:

$$\langle \mathbf{u}; \mathbf{w}_m \rangle = \int_S \mathbf{u}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{w}_m(\mathbf{r}) dS, \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (3.8)$$

We wzorze (3.8) wielkość $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ oznacza jedną ze stron równania (3.7), a $\mathbf{w}_m(\mathbf{r})$ jest tzw. *funkcją wagową (testującą)* wybraną z odpowiedniego zbioru N funkcji, zdefiniowanych na powierzchni S . W niektórych przypadkach wygodnie jest użyć alternatywnej operacji [3.3, 3.4]:

$$\langle \mathbf{u}; \mathbf{w}_m \rangle = \int_S \mathbf{u}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{w}_m^*(\mathbf{r}) dS, \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (3.9)$$

gdzie symbol * oznacza wartość sprzężoną.

Po zastosowaniu (3.8) lub (3.9) do obu stron (3.7) otrzymuje się:

$$\sum_{n=1}^N I_n \langle \mathcal{L}(\mathbf{i}_n(\mathbf{r}')) ; \mathbf{w}_m(\mathbf{r}) \rangle = \langle \mathcal{E}(\mathbf{r}) ; \mathbf{w}_m(\mathbf{r}) \rangle, \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (3.10)$$

We wzorze (3.7) użyto symbolu $\cong$ (w przybliżeniu równe), podczas gdy w (3.10) jest znak równości. Wynika to z faktu, że zastosowanie do obu stron (3.7) operacji (3.8) lub (3.9) prowadzi samo w sobie do wymuszenia spełnienia oryginalnego równania w sensie przybliżonym, uśrednionym w sposób ważony z użyciem funkcji wagowych $\mathbf{w}_m(\mathbf{r})$. W istocie więc, zamiast równania (3.4), które ma być spełnione ściśle dla wszystkich punktów S , stosuje się jego tzw. *słabą formę* (ang. *weak form*).

Zapis (3.10) oznacza w istocie N równań liniowych z N nieznanymi współczynnikami. Na ogół wygodnie jest zapisać (3.10) w postaci równania macierzowego:

$$[Z_{mn}][I_n] = [V_m] \quad (3.11)$$

gdzie $[I_n]$ – macierz kolumnowa nieznanych współczynników rozwinięcia (3.3), natomiast elementy tzw. *macierzy impedancyjnej* $[Z_{mn}]$ oraz *wektora pobudzenia* $[V_m]$ są dane przez:

$$Z_{mn} = \langle \mathcal{L}(\mathbf{i}_n(\mathbf{r}')) ; \mathbf{w}_m(\mathbf{r}) \rangle, \quad m, n = 1, 2, \dots, N, \quad (3.12)$$

$$V_m = \langle \mathcal{E}(\mathbf{r}) ; \mathbf{w}_m(\mathbf{r}) \rangle, \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (3.13)$$

Układ równań (3.11) rozwiązuje się typowymi metodami algebry liniowej.

Kilka słów komentarza wymaga sprawa wyboru zbioru funkcji wagowych. Od poprawnego wyboru zależy numeryczne uwarunkowanie układu (3.11) oraz dokładność uzyskanej aproksymacji poszukiwanej wielkości. Typowym wyborem jest zastosowanie zbioru funkcji typu *delta Diraca* [3.2] albo zbioru funkcji wagowych takich samych jak funkcje bazowe użyte w rozwinięciu (3.3). Pierwszy z przykładów oznacza *de facto*, że postuluje się, aby równanie (3.7) było spełnione w N odpowiednio wybranych punktach na powierzchni bryły. Metoda momentów z zastosowaniem drugiego wyboru, powszechnie uważanego za prowadzący do dobrze uwarunkowanych układów równań liniowych, znana jest pod nazwą *metody Galerkina* [3.3–3.5]. W wyborze (wektorowych) funkcji wagowych należy też zwrócić uwagę, aby operacja (3.8) lub (3.9) nie usuwała z równania wyjściowego istotnej (dominującej) informacji, tj. aby w naszym przykładzie $\mathcal{L}(\mathbf{i}_n(\mathbf{r}'))$ i $\mathbf{w}_n(\mathbf{r})$ opisujące oddziaływanie własne fragmentu struktury nie były prostopadłe. W omawianym przypadku (równanie opisujące styczne pole elektryczne wytwarzane przez prąd elektryczny) schemat Galerkina speł-

nia ten warunek. W przypadku równania dla pola magnetycznego (por. punkt 5.2) dominującą składową styczną pola magnetycznego jest prostopadła (na powierzchni S) do wytwarzającego ją rozkładu prądu powierzchniowego, należy zatem testowaniu poddać tę składową. W zapisie powierzchniowych równań całkowych uwypukla się ten fakt, oznaczając składową styczną pola w równaniu (3.1) indeksem $\tan$, natomiast we wspomnianym równaniu dla pola magnetycznego (5.21) – używając wektorowego mnożenia przez wektor jednostkowy normalny do powierzchni.

Omawiane równanie należy traktować za przykładowe, służące ilustracji samej procedury rozwiązywania równań podobnego rodzaju. W kolejnych rozdziałach omówiono równania znajdujące zastosowanie w analizie różnych zagadnień rozpraszania i promieniowania, w konkretnych sytuacjach. Skoncentrujemy się tu na wprowadzonych w rozdziale drugim równaniach z potencjałami mieszanymi. Wybór ten determinuje do pewnego stopnia także wspomniane tu zbiory funkcji bazowych i wagowych – w szczególności funkcje te powinny być różniczkowalne. Zaproponowane algorytmy należy zatem traktować jako wybrane z wielu możliwych, których bogaty przekrój można znaleźć w światowej literaturze.

3.3. Częstotliwości i rodzaje rezonansowe

W bezstratnych wnękach, wykonanych z doskonałego przewodnika elektrycznego, jest możliwa hipotetyczna sytuacja, w której niezerowy rozkład pól elektromagnetycznych może w zadanej konfiguracji istnieć w razie braku źródeł pobudzających [3.6]. W przypadku analizy z wykorzystaniem metody momentów oznacza to istnienie niezerowego rozwiązania równania (3.11) przy zerowej prawej stronie, czyli:

$$[Z_{mn}][I_n] = [0]. \quad (3.14)$$

co może zajść tylko wtedy, gdy wyznacznik macierzy impedancyjnej $\det([Z_{mn}])$ będzie równy zero. Taka sytuacja może wystąpić dla pewnych dyskretnych wartości częstotliwości, zwanych *częstotliwościami rezonansowymi*. Ponieważ rzeczywiste struktury promieniujące lub rozpraszające fale elektromagnetyczne są zawsze stratne^{*)}, oscylacje związane ze zjawiskiem rezonansu mają charakter gasnący – oznacza to, że pierwiastków równania [3.7, 3.8]:

$$\det([Z_{mn}]) = 0. \quad (3.15)$$

należy poszukiwać w płaszczyźnie zespolonej. Dokonuje się tego, zastępując w wyjściowych równaniach typu (3.2) parametr $j\omega$ zespolonym parametrem s . Każdy pier-

^{*)} Nawet jeżeli rozpatrzmy obiekty wykonane z materiałów bezstratnych, w układach otwartych energia jest tracona na skutek promieniowania fal elektromagnetycznych [3.7].

wiastek (3.14) odpowiada tzw. *rodzajowi rezonansowemu* pola. Część rzeczywista tego pierwiastka niesie informację o szybkości wygasania drgań, natomiast część urojona – o ich pulsacji [3.7].

Jeżeli znany jest z dostateczną dokładnością pierwiastek równania (3.14), można wyznaczyć odpowiadający mu rozkład źródeł. Przyjmuje się arbitralną wartość dla jednego z elementów wektora $[I_n]$ i rozwiązuje (dla znanej teraz wartości s) stworzony na podstawie (3.14) układ $N - 1$ równań liniowych ze względu na pozostałe elementy $[I_n]$. Ponieważ uzyskany w ten sposób rozkład źródeł ma charakter względny (zależy od wyboru wartości jednego ze współczynników), zwykle dla celów ilustracyjnych stosuje się odpowiednie unormowanie całego rozkładu. Zwróćmy uwagę, że element rozwiązania, którego wartość przyjmuje się w celu wyznaczenia rezonansowego rozkładu źródeł nie może odpowiadać lokalizacji, w której ten rozkład przyjmuje wartość zerową.

Znajomość częstotliwości rezonansowych danej struktury pozwala np. projektować anteny wykorzystujące dany rodzaj rezonansowy, a także analizować odpowiedź tej struktury na pole pobudzające o charakterze impulsowym [3.8].

Literatura

- [3.1] Wilton D.R., *Computational methods*, [w:] P. Sabatier, E.R. Pike (red.), *Scattering*, r. 1.5.5, Academic Press, 2002, 316–365.
- [3.2] Harrington R.F., *Field Computation by Moment Methods*, Macmillan New York, 1968.
- [3.3] Wang J.J.H., *Generalized Moment Methods in Electromagnetics*, John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore 1991.
- [3.4] Davidson D.B., *Computational Electromagnetics for RF and Microwave Engineering*, Cambridge University Press, 2005.
- [3.5] Dudley D.G., *Mathematical Foundations for Electromagnetic Theory*, Wiley-IEEE Press, 1994.
- [3.6] Harrington R.F., *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill Book Company, 1961.
- [3.7] Glisson A.W., *Integral equation techniques*, [w:] D. Kajfez, P. Guillon (red.), *Dielectric resonators*, 6, Vector Fields, 1990, 259–326.
- [3.8] Van Bladel J., *Electromagnetic Fields*, Second Edition IEEE Press, 2007.

4. Analiza struktur zbudowanych z cienkich przewodów

Prezentację konkretnych algorytmów obliczeniowych rozpoczniemy od zagadnienia rozpraszania pola elektromagnetycznego przez struktury zbudowane z cienkich przewodów.

Przez określenie „cienki” rozumie się przewód, którego średnica jest dużo mniejsza od jego długości, a jednocześnie dużo mniejsza od długości fali elektromagnetycznej [4.1]. Zwykle w analizie przyjmuje się, że straty cieplne w metalu, z którego jest wykonany przewód, związane ze skończoną przewodnością, są pomijalne. Obiekt może być więc traktowany jak wykonany z idealnego przewodnika.

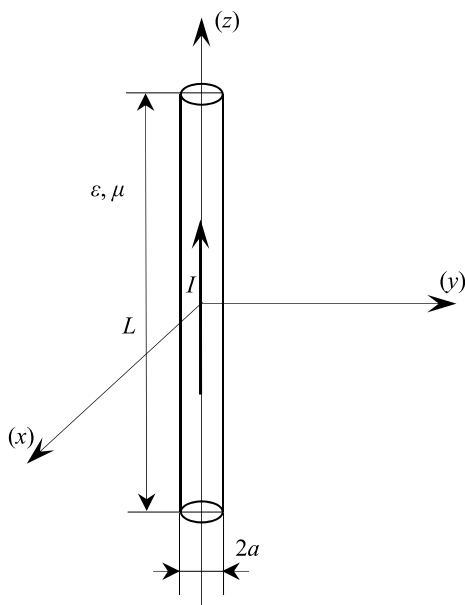
4.1. Równanie Pocklingtona

W miejsce bliżej niezdefiniowanego metalowego obiektu z rysunku 3.1 wstawiamy prostoliniowy przewód cylindryczny o długości L i promieniu a . Dla wygody, bez ograniczania ogólności analizy, założmy, że jest on umieszczony wzdłuż osi z układu współrzędnych, tak że współrzędne końców przyjmują wartości $-L/2$ oraz $L/2$. Wstępne założenie, że przewód jest „cienki” pozwala przyjąć następujące uproszczenia [4.1, 4.2]:

- (1) prąd elektryczny płynący po poboczniczy przewodu ma tylko składową skierowaną wzdłuż osi przewodu;
- (2) wartość gęstości prądu elektrycznego zależy wyłącznie od zmiennej z ;
- (3) przy zapisie warunków brzegowych będących podstawą sformułowania równania całkowego istotna jest tylko składowa natężenia pola skierowana równoległe do osi przewodu – bez straty ogólności zakłada się, że punktowi obserwacji jest przypisana współrzędna kątowa $\phi = 0$.

Uwzględniając te założenia w równaniu (3.2) oraz zapisując odległość pomiędzy punktem źródłowym a punktem obserwacji jako:

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(z - z')^2 + 4a^2 \sin^2 \frac{\phi}{2}}, \quad (4.1)$$



Rys. 4.1. Cienki prostoliniowy przewód cylindryczny poddany działaniu pobudzającego pola elektromagnetycznego

otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 & E_z^i(z) - j\omega A_z(z) - \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} \\
 & = E_z^i(z) - j\omega \frac{\mu}{4\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} J_z(z') G(z, z', \phi') a d\phi' dz' \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{j\omega} \frac{dJ_z(z')}{dz'} G(z, z', \phi') a d\phi' dz' \right) = 0, \quad z \in \left\langle \frac{-L}{2}, \frac{L}{2} \right\rangle
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

gdzie:

$$G(z, z', \phi') = \frac{e^{-jk\sqrt{(z-z')^2 + 4a^2 \sin^2 \frac{\phi'}{2}}}}{\sqrt{(z-z')^2 + 4a^2 \sin^2 \frac{\phi'}{2}}}. \tag{4.3}$$

Wprowadźmy oznaczenie:

$$K(z, z') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(z, z', \phi') d\phi'. \tag{4.4}$$

Po uwzględnieniu (4.4) w równaniu (4.2) i zastępując gęstość powierzchniową prądu elektrycznego prądem całkowitym $I(z') = 2\pi a J_z(z')$, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} E_z^i(z) - j\omega A_z(z) - \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} \\ = E_z^i(z) - j\omega \frac{\mu}{4\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} I(z') K(z, z') dz' \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{j\omega} \frac{dI(z')}{dz'} K(z, z') dz' \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Po założeniu, że do rozwiązania zagadnienia rozpraszania wystarczające jest potraktowanie prądu całkowitego, tak jakby był on skoncentrowany na osi przewodu (punkt obserwacji znajduje się dalej na poboczniczy walca), można przyjąć, że [4.3–4.5]:

$$K(z, z') \cong \frac{e^{-jk\sqrt{(z-z')^2 + a^2}}}{\sqrt{(z-z')^2 + a^2}}. \quad (4.6)$$

Aproksymacja (4.6) stanowi istotę używanego w analizie elektromagnetycznej tzw. *przybliżenia cienkoprzewodowego*, a funkcję po prawej stronie (4.6) nazywa się *jądrem uproszczonym* równania całkowego, w odróżnieniu od *jądra dokładnego* opisanego wyrażeniem (4.3). Określenie *dokładny* ma tu charakter względny – podane formuły są dokładne tak długo, jak długo są słuszne założenia przedstawione na początku tego podrozdziału.

Drugą całkę równania (4.5) można dalej przekształcić, stosując całkowanie przez części, z jednoczesnym wprowadzeniem zewnętrznego operatora różniczkowania pod znak całki:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dI(z')}{dz'} K(z, z') dz' \right) &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dI(z')}{dz'} \frac{\partial K(z, z')}{\partial z} dz' \\ &= \left[I(z') \frac{\partial K(z, z')}{\partial z} \right]_{z'=-\frac{L}{2}}^{z'=\frac{L}{2}} - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} I(z') \frac{\partial^2 K(z, z')}{\partial z' \partial z} dz'. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Na końcach nieobciążonego impedancyjnie przewodu prąd przyjmuje wartość zero, pierwszy zatem składnik prawej strony równania (4.7) znika. Biorąc pod uwagę, że funkcja K spełnia zależności:

$$\frac{\partial K(z, z')}{\partial z} = -\frac{\partial K(z, z')}{\partial z'} \quad (4.8)$$

oraz

$$\frac{\partial^2 K(z, z')}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 K(z, z')}{\partial z'^2}, \quad (4.9)$$

otrzymuje się ostatecznie alternatywną wersję równania (4.5)

$$\frac{1}{j\omega 4\pi\epsilon} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) K(z, z') \right] I(z') dz' = -E_z^i(z) \quad (4.10)$$

znaną jako równanie Pocklingtona.

Pomimo stosunkowo prostego zapisu (4.10), w dalszych rozważaniach pozostaniemy przy wersji dwupotencjałowej równania Pocklingtona (4.5).

Znane są uogólnienia równania Pocklingtona przewodu z wtrąconymi obciążeniami impedancyjnymi, dla przewodu krzywoliniowego, czy wreszcie pary przewodów dowolnie względem siebie ułożonych.

4.2. Funkcje bazowe

Wielkością, którą należy aproksymować jest niez znany rozkład prądu $I(z)$. Postuluje się zatem przybliżenie:

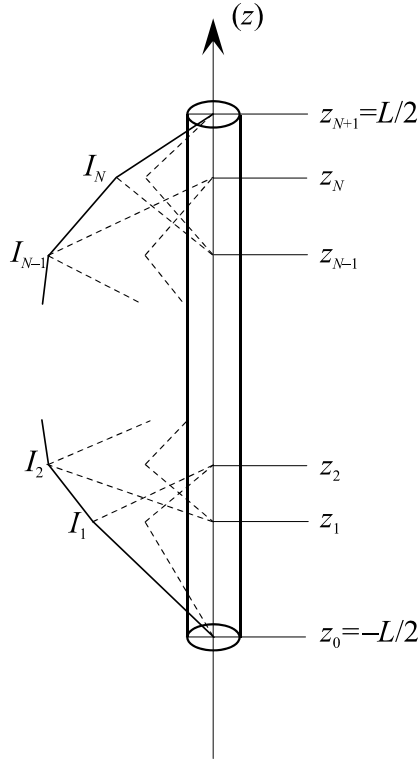
$$I(z') \cong \sum_{n=1}^N I_n i_n(z'). \quad (4.11)$$

Podstawową kwestią wymagającą rozważenia jest wybór funkcji bazowych $i_n(z)$. Czynnikiem, który nakłada tu pewne ograniczenie, jest wybór równania wyjściowego w postaci (4.5), gdzie na funkcję opisującą rozkład prądu oddziałuje operator różniczkowania. Funkcje użyte w aproksymacji muszą być więc przynajmniej odcinkami różniczkowalne. Ograniczmy rozważania do segmentowych funkcji bazowych. Takie podejście wymaga podziału przewodu na kilka krótszych odcinków (segmentów). Powszechnie przyjmowaną regułą segmentacji jest zapewnienie długości segmentów na poziomie jednej dziesiątej długości fali. Założono, że elementarnych segmentów jest $N+1$ (por. rys. 4.2). Segmenty mogą być różnej długości – są one definiowane jednoznacznie przez współrzędne początku i końca, liczone wzdłuż osi przewodu (w naszym przypadku wzdłuż osi z).

Funkcje bazowe rozpina się na *parach* sąsiadujących ze sobą segmentów. Są to tzw. funkcje trójkątne (odcinkami liniowe, a zatem różniczkowalne), które można zapisać jako:

$$i_n(z') = \begin{cases} \frac{z' - z_{n-1}}{z_n - z_{n-1}} = \frac{\rho_n^+}{h_n^+}, & z' \in (z_{n-1}, z_n) \\ \frac{z_{n+1} - z'}{z_{n+1} - z_n} = \frac{\rho_n^-}{h_n^-}, & z' \in (z_n, z_{n+1}) \\ 0, & z' \notin (z_{n-1}, z_{n+1}) \end{cases}, \quad (4.12)$$

gdzie ρ_n^+ oznacza lokalną współrzędną, liczoną od punktu z_{n-1} do punktu źródłowego z' , dla punktów należących do odcinka (z_{n-1}, z_n) , ρ_n^- oznacza lokalną współrzędną od punktu z' do z_{n+1} dla punktów należących do odcinka (z_n, z_{n+1}) , $h_n^+ = z_n - z_{n-1}$, $h_n^- = z_{n+1} - z_n$. W celu graficznego uwypuklenia trójkątnego charakteru funkcji (4.12) oznacza się ją często jako Λ_n^w , gdzie indeks W oznacza (cienki) przewód (ang. *wire*).



Rys. 4.2. Podział przewodu na elementarne segmenty, trójkątne funkcje bazowe (---), przeskalowane funkcje bazowe (.....) oraz wypadkowa aproksymacja (——) rozkładu prądu

Funkcje bazowe są skojarzone indeksem z punktem oddzielającym dwa sąsiadujące segmenty. Każdy elementarny odcinek, z wyjątkiem odcinków skrajnych, należy do dwóch nakładających się funkcji bazowych. Nie definiujemy funkcji bazowych na końcach przewodu – dzięki definicji (4.12) w aproksymacji (4.11) jest „wbudowany” warunek zerowania się prądu na końcach przewodu. Amplituda każdej funkcji bazowej wynosi 1.

Na rysunku 4.2 pokazano jak poszczególne funkcje bazowe przemnożone przez współczynniki aproksymacji I_n aproksymują poszukiwany rozkład prądu, tworząc ciągłą wypadkową funkcję, odcinkami liniową.

4.3. Elementy macierzy impedancyjnej i wektora pobudzenia

W procedurze przekształcania równania (4.5) w układ równań liniowych typu (3.11) niezbędne jest przyjęcie zbioru funkcji wagowych. W przedstawionym schemacie analizy zastosowano podejście Galerkina, tzn. przyjęto, że funkcje wagowe są takie same jak funkcje bazowe. Operator $\mathcal{L}$ oddziałujący na funkcję bazową i_n można zapisać jako:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(i_n(z')) &= j\omega A_z^n(z) + \frac{\partial \Phi^n(z)}{\partial z} \\ &= j\omega \frac{\mu}{4\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} i_n(z') K(z, z') dz' - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{j\omega} \frac{di_n(z')}{dz'} K(z, z') dz' \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

gdzie wielkości A_z^n oraz Φ^n oznaczają odpowiednio potencjał wektorowy i skalarny wytwarzany w punkcie obserwacji z przez rozkład prądu opisany funkcją bazową i_n :

$$A_z^n(z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} i_n(z') K(z, z') dz', \quad (4.14)$$

$$\Phi^n(z) = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{j\omega} \frac{di_n(z')}{dz'} K(z, z') dz'. \quad (4.15)$$

Elementy macierzy impedancyjnej wyrażają się wzorem:

$$Z_{mn} = \langle \mathcal{L}(i_n(z')), i_m(z) \rangle, \quad m, n = 1, 2, \dots, N. \quad (4.16)$$

Występuje tu konieczność obliczania całek podwójnych, gdyż po podstawieniu (4.13) do (4.16) otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 Z_{mn} &= j\omega \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} A_z^n(z) i_m(z) dz + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\partial \Phi^n(z)}{\partial z} i_m(z) dz \\
 &= j\omega \frac{\mu}{4\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} i_n(z') K(z, z') i_m(z) dz' dz \\
 &\quad - \frac{1}{j\omega 4\pi \varepsilon} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{di_n(z')}{dz'} K(z, z') dz' \right) \right\} i_m(z) dz.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Druga całka we wzorze (4.17) jest związana z potencjałem skalarnym. Po zastosowaniu definicji (4.12) otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\partial \Phi^n(z)}{\partial z} i_m(z) dz \\
 &= \int_{z_{m-1}}^{z_m} \frac{\partial \Phi^n(z)}{\partial z} \frac{z - z_{m-1}}{h_m^+} dz + \int_{z_m}^{z_{m+1}} \frac{\partial \Phi^n(z)}{\partial z} \frac{z_{m+1} - z}{h_m^-} dz,
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

a po zastosowaniu całkowania przez części:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\partial \Phi^n(z)}{\partial z} i_m(z) dz &= - \int_{z_{m-1}}^{z_m} \frac{\Phi^n(z)}{h_m^+} dz + \int_{z_m}^{z_{m+1}} \frac{\Phi^n(z)}{h_m^-} dz \\
 &= - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \Phi^n(z) \frac{\partial i_m(z)}{\partial z} dz,
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

ponieważ funkcja wagowa i_m jest równa zero w punktach z_{m-1} i z_{m+1} , a także zarówno i_m , jak i Φ^n są ciągłe w punkcie z_m .

Zastosowanie różniczkowalnych funkcji wagowych (tu: schematu Galerkina) pozwala na dokonanie całkowania przez części, dzięki czemu uniknięto obliczania pochodnej potencjału skalarnego. Jeśli przyjmie się, że funkcja potencjału skalarnego jest na tyle wolnozmienna, że można ją aproksymować wartością w środku segmentu, to otrzymuje się:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\partial \Phi^n(z)}{\partial z} i_m(z) dz \cong -\Phi^n(z_{m-1/2}) \int_{z_{m-1}}^{z_m} \frac{1}{h_m^+} dz + \Phi^n(z_{m+1/2}) \int_{z_m}^{z_{m+1}} \frac{1}{h_m^-} dz \quad (4.20)$$

$$= -\Phi^n(z_{m-1/2}) + \Phi^n(z_{m+1/2}),$$

gdzie

$$z_{m-1/2} = \frac{z_{m-1} + z_m}{2}, \quad z_{m+1/2} = \frac{z_m + z_{m+1}}{2}. \quad (4.21)$$

Dokonując podobnego założenia o wolnozmienności potencjału wektorowego, można aproksymować pierwszą z całek (4.17):

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} A_z^n(z) i_m(z) dz \cong A_z^n(z_{m-1/2}) \frac{h_m^+}{2} + A_z^n(z_{m+1/2}) \frac{h_m^-}{2}. \quad (4.22)$$

Ostatecznie otrzymuje się:

$$Z_{mn} = j\omega \left[A_z^n(z_{m-1/2}) \frac{h_m^+}{2} + A_z^n(z_{m+1/2}) \frac{h_m^-}{2} \right] - \Phi^n(z_{m-1/2}) + \Phi^n(z_{m+1/2}). \quad (4.23)$$

W podobny sposób jak całkę (4.22) można obliczyć elementy wektora pobudzenia:

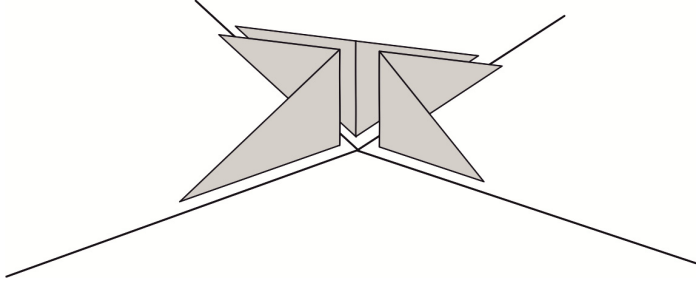
$$V_m = \langle E_z^i(z), i_m(z) \rangle, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (4.24)$$

czyli

$$V_m = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} E_z^i(z) i_m(z) dz \cong E_z^i(z_{m-1/2}) \frac{h_m^+}{2} + E_z^i(z_{m+1/2}) \frac{h_m^-}{2}. \quad (4.25)$$

W prowadzonych tu rozważaniach założono, że pojedynczy przewód prostoliniowy jest ułożony w przestrzeni wzdłuż osi z . W rzeczywistości przewód może być ułożony dowolnie, może też składać się z połączonych końcami fragmentów nieukładających się wzdłuż linii prostej. Jedyną zmianą w równaniach jest wtedy to, że zamiast zmiennej z występuje współrzędna liczona wzdłuż osi przewodu, natomiast w przypadku wielkości wektorowych zamiast składowych wzdłuż osi z brane są składowe równoległe w danym punkcie do osi przewodu. W miejscach „załamania” zdefiniowane są funkcje bazowe rozpięte na segmentach należących do różnych fragmentów przewodu. W definicji funkcji bazowych i wagowych (4.12) oznacza to zastąpienie $\rho_n^\pm$ wektorami, a w procedurze testowania równania – wykorzystanie iloczynu skalarnego.

Komentarza wymaga modelowanie struktur wieloprzewodowych. W przypadku przewodów, które nie stykają się ze sobą, modelowanie nie różni się niczym od opisanej procedury. Każdy z przewodów poddawany jest segmentacji w sposób taki sam jak w przypadku przewodu pojedynczego. Identyfikacja też rozpinane są na tych segmen-



Rys. 4.3. Modelowanie połączenia czterech przewodów

tach funkcje bazowe. Połączenie końcami dwóch przewodów prowadzi do sytuacji praktycznie równoważnej wspomnianemu przedtem jednemu przewodowi o załamanym względem siebie segmentach. Jediną różnicą jest możliwość połączenia ze sobą przewodów o różnych średnicach, co wymaga uwzględnienia odpowiedniego promienia w obliczaniu funkcji K . Gdy końcami są połączone więcej niż dwa przewody (rys. 4.3), wtedy definiuje się dla złącza funkcje bazowe o liczbie o jeden mniejszej od liczby dołączonych przewodów [4.6] – przykładowo na rysunku 4.3 mamy połączone końce czterech przewodów, natomiast dla punktu połączenia zdefiniowano trzy trójkątne funkcje bazowe. Prąd przepływający pomiędzy segmentami, dla których nie zdefiniowano funkcji wspólnej funkcji bazowej, wynika ze spełnienia I prawa Kirchhoffa.

4.4. Dokładność przybliżenia cienkoprzewodowego

Przez wprowadzenie aproksymacji (4.6) upraszcza się w sposób znaczący obliczenia elementów macierzy impedancyjnej. Unika się w ten sposób całkowania funkcji osobliwych, gdyż mianownik wyrażenia (4.6) jest zawsze „ostro” większy od zera. Powstaje jednak pytanie o granice słuszności tego typu przybliżenia.

Rozważmy zatem rozwiązanie z zastosowaniem oryginalnej postaci (4.4) funkcji $K(z, z')$. Takie sformułowanie zakłada, że prąd płynie po powierzchni przewodu, a jego wartość nie zależy od współrzędnej kątowej ϕ' . Wzory (4.14) i (4.15), służące do obliczania potencjału wektorowego i skalarnego, mają teraz postać:

$$A_z^n(z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} i_n(z') \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(z, z', \phi') d\phi' \right) dz', \quad (4.26)$$

$$\Phi^n(z) = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{j\omega} \frac{di_n(z')}{dz'} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(z, z', \phi') d\phi' \right) dz'. \quad (4.27)$$

Gdy funkcje podcałkowe są regularne, całki we wzorach (4.26) i (4.27) można obliczyć, stosując typowe metody całkowania numerycznego. Specjalnego potraktowania wymaga natomiast przypadek, gdy punkt obserwacji należy do źródłowego^{*)} segmentu przewodu. Gdy jednocześnie $(z - z') = 0$ oraz $\phi' = 0$, we wzorze (4.3) nastąpi dzielenie przez zero, zatem funkcje podcałkowe w (4.26) i (4.27) są osobiliwe.

Punkt obserwacji leży w środku segmentu źródłowego o długości Δz położonego w środku układu współrzędnych. Zastosowanie trójkątnych funkcji bazowych do aproksymacji rozkładu prądu wzdłuż osi z oznacza, że w celu uzyskania elementów macierzy impedancyjnej należy obliczać całki funkcji Greena dla liniowego (4.26) oraz stałego (4.27) rozkładu źródeł. Interesują nas zatem całki:

$$C_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\Delta z}{2}}^{\frac{\Delta z}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} z' \frac{e^{-jkR(z', \phi')}}{R(z', \phi')} d\phi' dz' \quad (4.28)$$

oraz

$$C_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\Delta z}{2}}^{\frac{\Delta z}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-jkR(z', \phi')}}{R(z', \phi')} d\phi' dz', \quad (4.29)$$

gdzie

$$R(z', \phi') = \sqrt{z'^2 + 4a^2 \sin^2 \frac{\phi'}{2}}. \quad (4.30)$$

Przeanalizujemy najpierw całkę C_1 . Ponieważ granice całkowania są symetryczne, a R jest parzystą funkcją zarówno z' , jak i ϕ' , można od razu zauważyć, że funkcja podcałkowa jest nieparzystą funkcją z' , a zatem całka C_1 jest tożsamościowo równa zero. Dla dowolnego liniowego rozkładu prądu w analizowanym segmencie, opisanego współczynnikami α oraz β , jest więc:

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\Delta z}{2}}^{\frac{\Delta z}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} (\alpha z' + \beta) \frac{e^{-jkR(z', \phi')}}{R(z', \phi')} d\phi' dz' = \alpha C_1 + \beta C_2 = \beta C_2. \quad (4.31)$$

Zarówno do obliczenia zawierających osobiwości całek (4.26), jak i (4.27) potrzebne jest obliczenie całki C_2 . Wzór (4.29) możemy przekształcić do postaci:

^{*)} Pojęcie *segment źródłowy* przewodu oznacza segment należący do dziedziny funkcji bazowej.

$$C_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\Delta z}{2}}^{\frac{\Delta z}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{R(z', \phi')} d\phi' dz' + \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\Delta z}{2}}^{\frac{\Delta z}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-jkR(z', \phi')} - 1}{R(z', \phi')} d\phi' dz' = C_{21} + C_{22}. \quad (4.32)$$

Jądro drugiej całki w (4.32) nie zawiera osobliwości, C_{22} zatem oblicza się metodami numerycznymi. Całkę C_{21} można natomiast przekształcić, wykorzystując parzystość funkcji podcałkowej względem ϕ' i z' :

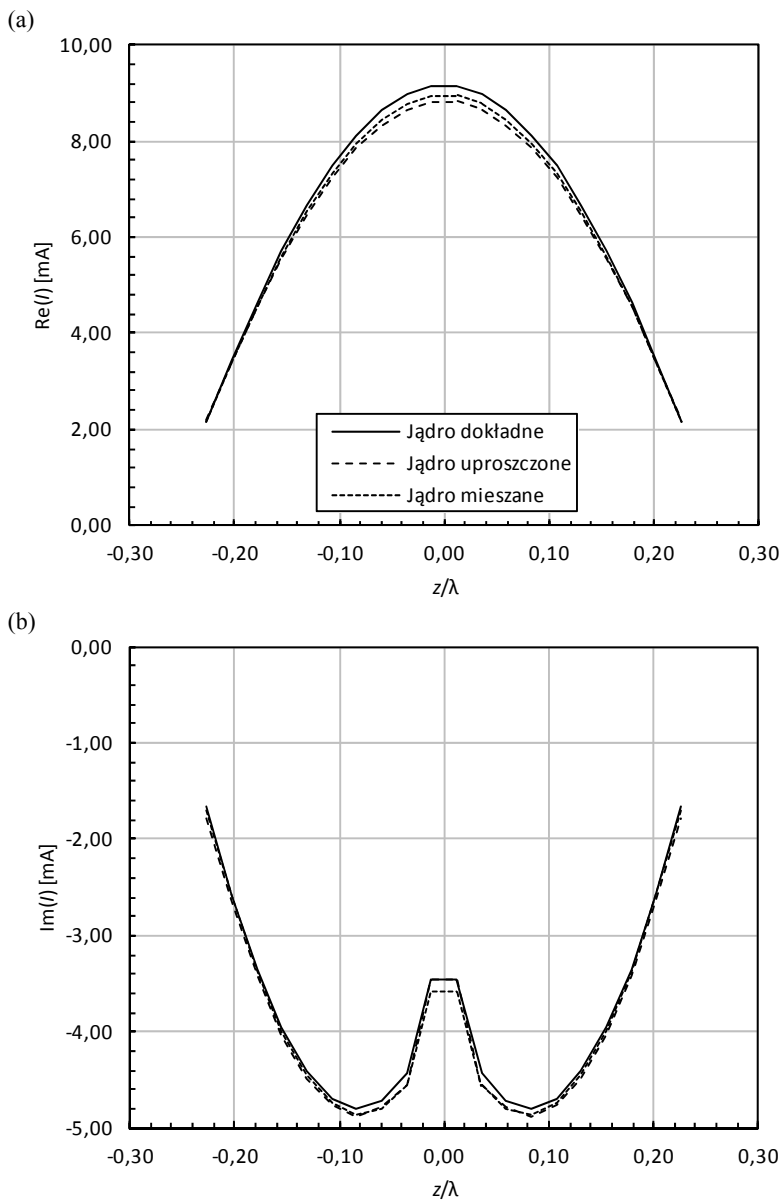
$$\begin{aligned} C_{21} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\Delta z}{2}}^{\frac{\Delta z}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{R(z', \phi')} d\phi' dz' = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\Delta z}{2}} \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{z'^2 + 4a^2 \sin^2 \frac{\phi'}{2}}} dz' d\phi' \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln \left(\frac{\Delta z}{2} + \sqrt{\frac{\Delta z^2}{4} + 4a^2 \sin^2 \frac{\phi'}{2}} \right) d\phi' - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln \left(2a \sin \frac{\phi'}{2} \right) d\phi'. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Pierwszą z otrzymanych całek można obliczyć numerycznie, natomiast drugą całkę, zawierającą całkowalną osobliwość, oblicza się analitycznie:

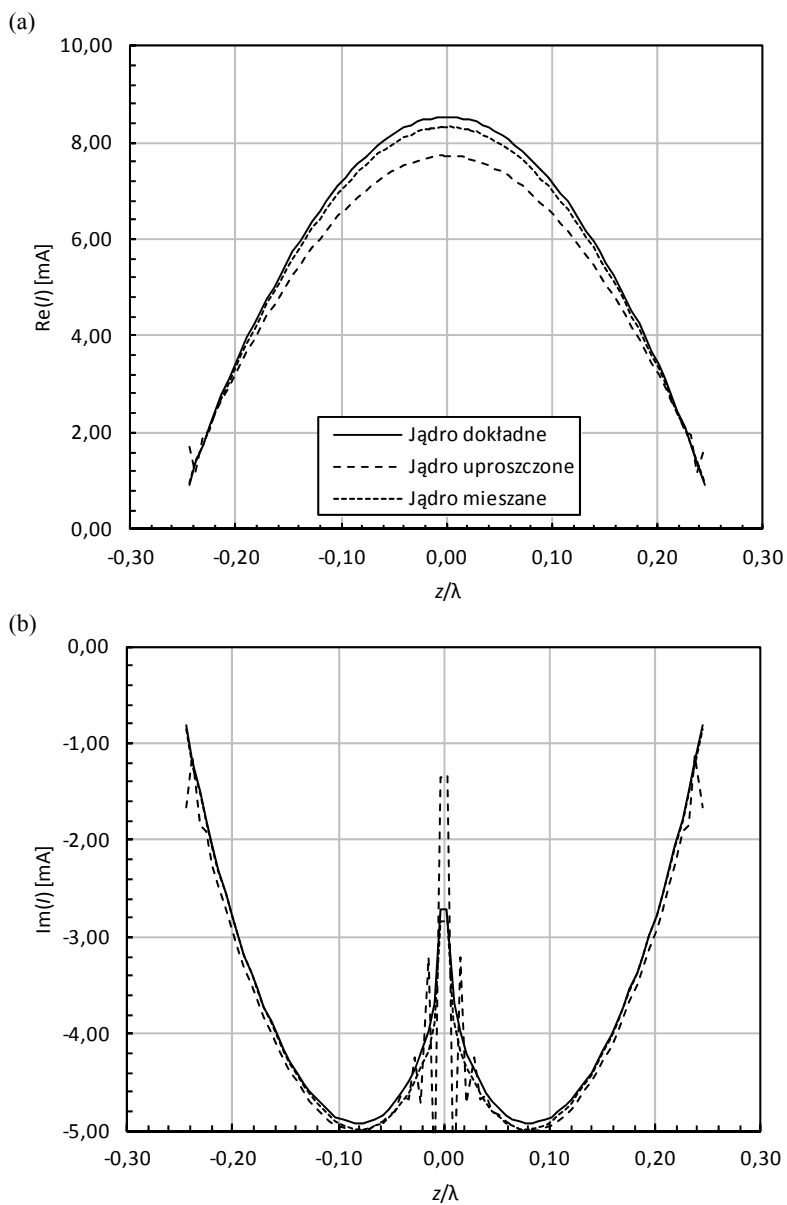
$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln \left(2a \sin \frac{\phi'}{2} \right) d\phi' = 2 \ln(a). \quad (4.34)$$

Jak widać, w obliczaniu C_{21} wykonano najpierw całkowanie wzdłuż przewodu, a następnie względem współrzędnej azymutalnej [4.7]. Kolejność całkowania można odwrócić, wykonując najpierw całkowanie względem współrzędnej azymutalnej, a potem całkując wynikową funkcję względem długości przewodu. Takie postępowanie uwypukla właściwości funkcji $K(z, z')$ traktowanej jako funkcja Greena służąca do obliczania potencjałów od *pierścienia* źródłowego, będącego przekrojem poprzecznym pobocznicy przewodu dla zadanej wartości z' , prowadzi jednak do obliczania całek eliptycznych [4.8].

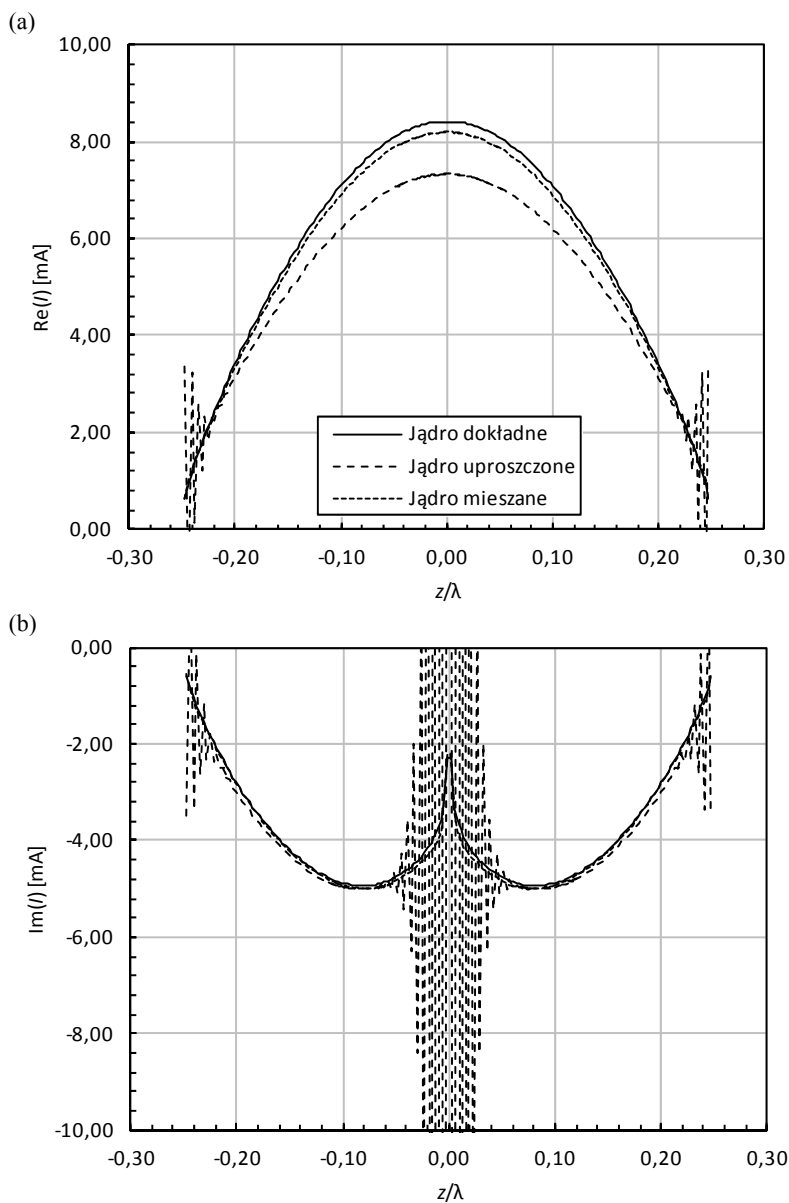
Aby zilustrować różnice pomiędzy algorytmami wykorzystującymi jądro dokładne i uproszczone, a jednocześnie, aby pokazać przykładowe wykorzystanie metody momentów, przeanalizowano teraz półfalowy dipol o promieniu równym jednej setnej długości fali, zasilany centralnie źródłem napięciowym o napięciu $V = 1$ V. Dipol został podzielony na segmenty o jednakowej długości Δz . Przyjęty model zasilania zakłada istnienie na pobocznicy środkowego segmentu dyskretyzowanego przewodu (nieparzysta liczba segmentów) składowej wzdłużnej pola elektrycznego [4.2, 4.9] o natężeniu $V/\Delta z$. Ponieważ na każdym segmencie, z wyjątkiem segmentów skrajnych, są zdefiniowane dwie nakładające się funkcje wagowe, w wektorze stanowiącym prawą stronę równania macierzowego (3.11) pojawią się dwa niezerowe elementy.



Rys. 4.4. Rozkład prądu w dipolu półfalowym obliczony za pomocą 20 funkcji bazowych:
(a) część rzeczywista; (b) część urojona



Rys. 4.5. Rozkład prądu w dipolu półfalowym obliczony za pomocą 80 funkcji bazowych:
(a) część rzeczywista; (b) część urojona



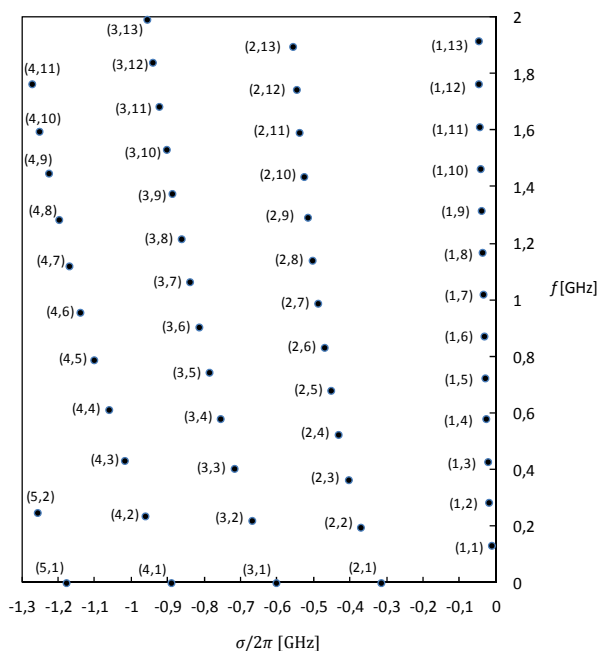
Rys. 4.6. Rozkład prądu w dipolu półfalowym obliczony za pomocą 160 funkcji bazowych:
(a) część rzeczywista; (b) część urojona

Na rysunkach 4.4–4.6 pokazano obliczony rozkład prądu w przewodzie dla liczby trójkątnych funkcji bazowych N wynoszącej odpowiednio 20, 80 i 160. Obliczenia wykonano z wykorzystaniem trzech algorytmów – algorytmu z dokładnym jądrem (4.4), algorytmu z uproszczonym jądrem (4.6) oraz algorytmu „mieszanego”, w którym do określenia oddziaływań pomiędzy różnymi segmentami użyto jądra (4.6), a do określenia oddziaływania w obrębie pojedynczego segmentu – dokładnego jądra (4.4).

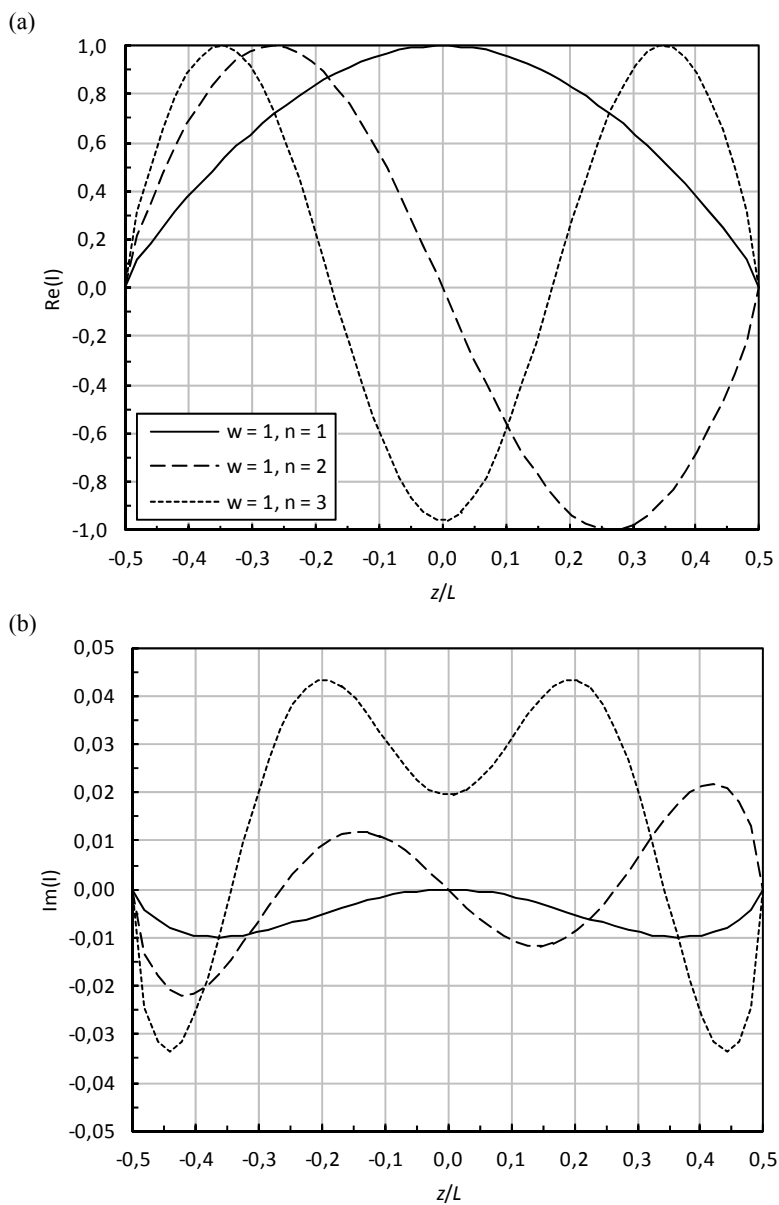
Uzyskane wyniki wskazują [4.10], że obliczenia z wykorzystaniem jądra uproszczonego prowadzą do niestabilnych wyników dla dużych N , czyli dla małych wartości stosunku $\Delta z/a$. Zastosowanie jądra „mieszanego” daje bardzo dobre wyniki, z jednoczesną znaczną redukcją liczby obliczeń – w obliczaniu oddziaływań pomiędzy różnymi segmentami nie jest wtedy potrzebne numeryczne obliczanie całek względem ϕ' , obecnych w dokładnym jądrze (4.4).

4.5. Rodzaje rezonansowe cienkiego przewodu prostoliniowego

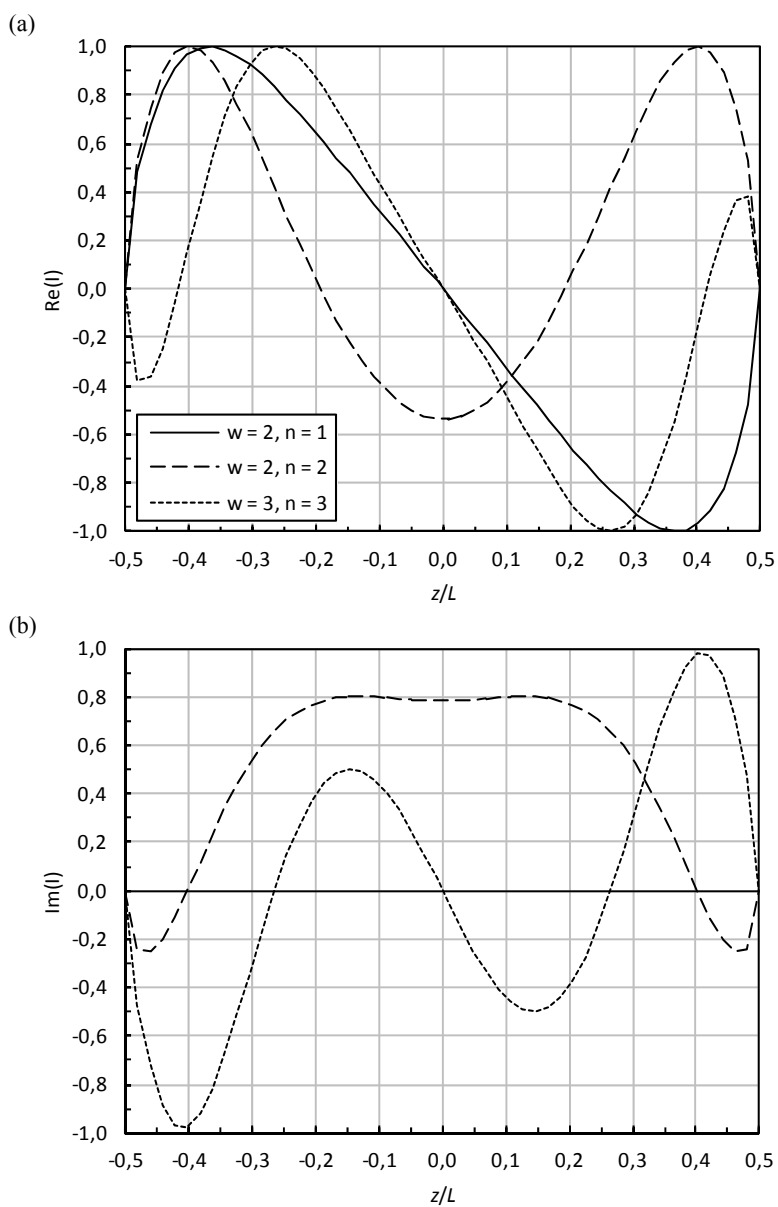
W punkcie 3.3 wspomniano, że analizując wyznacznik macierzy momentów w dziedzinie uogólnionej (zespolonej) częstotliwości, można wyznaczyć częstotli-



Rys. 4.7. Położenie rezonansów własnych dipola na płaszczyźnie zespolonej częstotliwości ($\sigma/2\pi + jf$)



Rys. 4.8. Rezonansowe rozkłady prądu w cienkim przewodzie dla trzech pierwszych rezonansów pierwszej warstwy: (a) część rzeczywista; (b) część urojona



Rys. 4.9. Rezonansowe rozkłady prądu w cienkim przewodzie dla trzech pierwszych rezonansów drugiej warstwy: (a) część rzeczywista; (b) część urojona

ści drgań własnych struktury oraz odpowiadające im współczynniki opisujące szybkość wygasania drgań rezonansowych.

W celu zilustrowania tego zagadnienia wykorzystano przedstawiony w poprzednich punktach algorytm przeznaczony do analizy cienkich przewodów prostoliniowych. W algorytmie parametr $j\omega$ został zastąpiony zespolonym parametrem s :

$$s = \sigma + j\omega. \quad (4.35)$$

Obliczenia wykonano dla pręta o długości $L = 1$ m oraz smukłości $\Omega = 2 \ln(L/a)$ równej 10,0 (a oznacza promień pręta). Miejsca na płaszczyźnie $s/2\pi = \sigma/2\pi + jf$, dla których jest spełnione równanie (3.14), pokazano na rysunku 4.7. Wykres ilustruje znany fakt, że w płaszczyźnie zespolonej częstotliwości rezonansowe układają się w warstwy [4.11, 4.12]. Przyjęta na rysunku konwencja numeracji rezonansów zakłada, że pierwszy indeks oznacza numer warstwy w , a drugi numer rezonansu w warstwie n , licząc od najmniejszych częstotliwości.

Na kolejnych rysunkach (rys. 4.8 i 4.9) pokazano unormowane rezonansowe rozkłady prądu (część rzeczywista i urojona) obliczane dla kilku wybranych rezonansów z dwóch pierwszych „warstw”. Normalizacji dokonano, dzieląc wartości prądu wzdłuż przewodu przez wartość o największym module.

Z wykresów widać, że rozkłady prądu mają, wraz ze wzrostem indeksu n , na przemian charakter funkcji parzystych i nieparzystych. Rezonansowe rozkłady prądu dla pierwszej warstwy charakteryzują się niewielką amplitudą części urojonej prądu, taka sytuacja nie występuje dla rezonansów drugiej warstwy.

Literatura

- [4.1] Karwowski A., *Analiza struktur promieniujących złożonych z cienkich przewodów*, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1984.
- [4.2] Harrington R.F., *Field Computation by Moment Methods*, Macmillan, New York 1968.
- [4.3] Mei K.K., *On the integral equations of thin wire antennas*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 13, No. 3, 1965, 374–378.
- [4.4] Butler C.M., Wilton D.R., *Analysis of various numerical techniques applied to thin-wire scatterers*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 23, No. 4, 1975, 534–540.
- [4.5] Tesche F.M., *The effect of the thin-wire approximation and the source gap model on the high-frequency integral equation solution of radiating antennas*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 20, No. 2, 1972, 210–211.
- [4.6] Wilton D.R., *Computational methods*, [w:] P. Sabatier, E.R. Pike (red.), *Scattering*, r. 1.5.5, Academic Press, 2002, 316–365.
- [4.7] Mohan A., Welle D.S., *Accurate modeling of the cylindrical wire kernel*, Microwave and Optical Technology Letters, Vol. 48, No. 4, 2006, 740–744.
- [4.8] Quesada Pereira F.D., Gómez Tornero J.L., Cañete Rebenaque D., Pascual García J., Álvarez Melcón A., *Analysis of thick-wire antennas using a novel and simple kernel treatment*, Microwave and Optical Technology Letters, Vol. 46, No. 4, 2005, 410–417.

- [4.9] Lo Y.H., He S., Jiang L., Chew W.C., *Finite-width gap excitation and impedance models*, 2011 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation (APSURSI), 2011, 1297–1300.
- [4.10] Burke G.J., *Accuracy of reduced and extended thin-wire kernels*, The 25th International Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics (ACES 2009) Monterey, CA, United States, March 8, 2009 through March 12, 2009.
- [4.11] Tesche F.M., *On the analysis of scattering and antenna problems using the singularity expansion technique*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 21, No. 1, 1973, 53–62.
- [4.12] Van Bladel J., *Electromagnetic Fields*, Second Edition, IEEE Press, 2007.

5. Obiekty doskonale przewodzące opisane za pomocą powierzchni

W poprzednim rozdziale analizę ograniczono do zagadnień, w których rozkład prądu jest funkcją jednej zmiennej – położenia wzdłuż osi cienkiego przewodu. Zakładano też, że sama konfiguracja wymusza kierunek przepływu prądu (prąd płynie wzdłuż osi cienkiego przewodu). W bieżącym rozdziale zajęto się dalej analizą obiektów zbudowanych z idealnego przewodnika, dla których nie można przyjąć takich założeń upraszczających – tzn. brył lub powierzchni przewodzących. W dalszych rozważaniach *bryłą* nazywa się obiekt opisany powierzchnią zamkniętą (np. sfera), w odróżnieniu od powierzchni otwartych (np. fragment powierzchni o kształcie prostokąta). Założono, że obiekt opisany powierzchnią S jest umieszczony w jednorodnym, nieskończonym ośrodku o parametrach ϵ oraz μ . Przyjęto również, że w tym ośrodku, w sytuacji gdy nie ma w nim analizowanego obiektu, są obecne pola pobudzające $\mathbf{E}^i$ oraz $\mathbf{H}^i$, spełniające równania Maxwella.

W analizie brył przewodzących można wykorzystać równania całkowe dla pola elektrycznego lub magnetycznego, natomiast w przypadku powierzchni otwartych – równania dla pola elektrycznego [5.1, 5.2]. Ponieważ równania całkowe są konstruowane według odpowiednich warunków brzegowych, numeryczne rozwiązywanie tych równań wymaga obliczania pola na powierzchni S . W omawianych dalej równaniach zakłada się, że powierzchnia S jest gładka. Nie znaczy to jednak, że analizowany obiekt nie może zawierać „ostrych” krawędzi (eliminowałoby to z analizy, np. wspomniane powierzchnie otwarte), a tylko stwierdzenie faktu, że w procedurze numerycznego rozwiązywania równań nie będzie się umieszczać tzw. punktów obserwacji na tych krawędziach. W kontekście zastosowania metody momentów oznacza to, że kwadratury stosowane do numerycznego obliczania całek (3.8) lub (3.9) nie mogą zawierać punktów leżących na krawędziach, a ewentualny osobliwy charakter poszukiwanej wielkości zostanie uwzględniony w rozwiązaniu jedynie w przybliżony sposób.

5.1. Równanie całkowe pola elektrycznego

Przypomnijmy teraz równanie całkowe wprowadzone w punkcie 3.1, wynikające z konieczności spełnienia na powierzchni przewodnika warunku brzegowego dla pola elektrycznego:

$$\begin{aligned} (j\omega \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \Phi(\mathbf{r}))_{\tan} &= \left(j\omega \frac{\mu}{4\pi} \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right. \\ &\quad \left. - \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\nabla'_S \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{j\omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right)_{\tan} \\ &= (\mathbf{E}^i(\mathbf{r}))_{\tan}, \quad \mathbf{r} \in S, \end{aligned} \quad (5.1)$$

Równanie (5.1) nazywa się równaniem całkowym pola elektrycznego (EFIE – ang. *Electric Field Integral Equation*).

Zgodnie z zasadami rozwiązywania równań, opisanymi w punkcie 3.2, przyjmuje się, że powierzchniową gęstość prądu występującą w równaniu aproksymujemy za pomocą pewnego zbioru funkcji bazowych $\mathbf{f}_n$:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cong \sum_{n=1}^N I_n \mathbf{f}_n(\mathbf{r}'). \quad (5.2)$$

Po podstawieniu (5.2) do równania (5.1) oraz wykonaniu testowania wynikowego równania z wykorzystaniem tego samego zbioru funkcji (metoda Galerkina), otrzymujemy układ równań liniowych:

$$[Z_{mn}][I_n] = [V_m], \quad (5.3)$$

w którym:

$$\begin{aligned} Z_{mn} &= j\omega \int_S \mathbf{A}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS + \int_S \nabla \Phi_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS \\ &= j\omega \frac{\mu}{4\pi} \int_S \int_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS' dS \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{j\omega 4\pi\epsilon} \int_S \left\{ \nabla \left(\int_S \nabla'_S \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS \right) \right\} \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS, \\ V_m &= \int_S \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS, \end{aligned} \quad (5.5)$$

gdzie $\mathbf{A}_n$ i Φ_n – potencjały, wektorowy i skalarny, wytwarzane przez rozkład prądu opisany funkcją bazową $\mathbf{f}_n$:

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS', \quad (5.6)$$

$$\Phi_n(r) = -\frac{1}{j\omega 4\pi\epsilon} \int_S \nabla'_S \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS'. \quad (5.7)$$

Ponieważ funkcje bazowe opisują prąd płynący na powierzchni S , ich wykorzystanie w charakterze funkcji testujących powoduje automatyczne wybranie w równaniach składowych pola stycznych do S .

5.1.1. Daszkowe funkcje bazowe

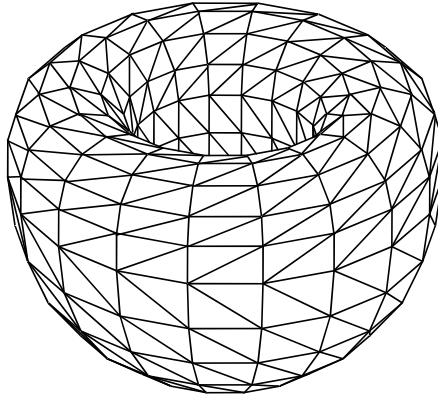
We wzorze (5.4) występują dwa operatory różniczkowania *nabla*, które trzeba uwzględnić w procedurze algebraizacyjnej. Sytuacja jest zatem podobna do opisanej wzorem (4.17) dla przypadku analizy cienkiego przewodu. Wewnętrzny operator dywergencji oddziałuje bezpośrednio na funkcję bazową, co sugeruje wybór zbioru funkcji bazowych z klasy funkcji różniczkowalnych. Do takich funkcji należą powszechnie stosowane w modelowaniu tzw. daszkowe funkcje RWG [5.3] – nazwa pochodzi od inicjałów pomysłodawców (Rao–Wilton–Glisson). Konstrukcja funkcji RWG zakłada, że powierzchnię S aproksymujemy z użyciem odpowiednio małych w stosunku do długości fali elementów trójkątnych (rys. 5.1). Ten sposób aproksymacji powierzchni wydaje się najbardziej elastyczny w modelowaniu powierzchni o dowolnym kształcie, choć oczywiście prowadzi do aproksymacji krzywizn płaskimi łatkami. Można przyjąć, że jeżeli szczegóły geometryczne obiektu nie wymuszają bardziej subtelnej dyskretyzacji, boki trójkątów powinny mieć wymiary rzędu jednej dziesiątej długości fali. Funkcję bazową „rozpinamy” na dwóch sąsiadujących ze sobą trójkątach w sposób pokazany na rysunku 5.2.

Funkcję RWG definiujemy jako:

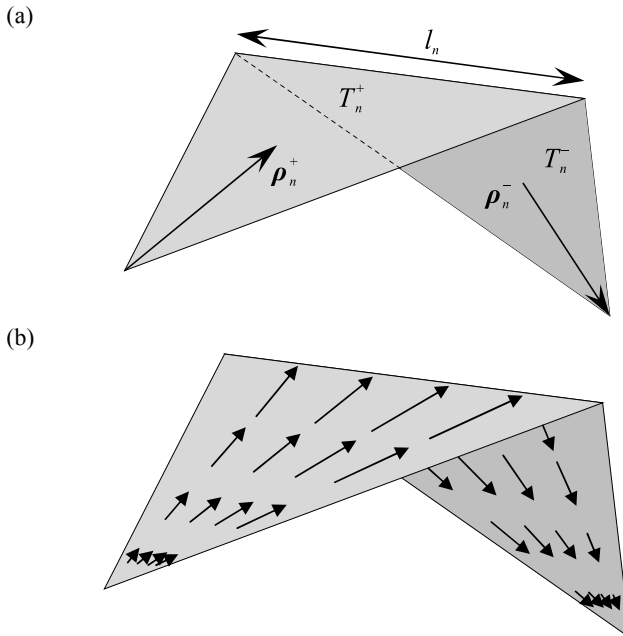
$$\mathbf{f}_n(\mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{l_n \boldsymbol{\rho}_n^+}{2A_n^+} = \frac{\boldsymbol{\rho}_n^+}{h_n^+}, & \mathbf{r}' \in T_n^+ \\ \frac{l_n \boldsymbol{\rho}_n^-}{2A_n^-} = \frac{\boldsymbol{\rho}_n^-}{h_n^-}, & \mathbf{r}' \in T_n^- \\ 0, & \mathbf{r}' \notin T_n^+ \cup T_n^- \end{cases}, \quad (5.8)$$

gdzie A_n^+ , A_n^- – odpowiednio pola powierzchni trójkątów T_n^+ , T_n^- ; h_n^+ , h_n^- – wysokości tych trójkątów, liczone od swobodnych wierzchołków do wspólnej krawędzi, wektor $\boldsymbol{\rho}_n^+$ jest wektorem od swobodnego wierzchołka trójkąta T_n^+ do punktu $\mathbf{r}'$, gdy $\mathbf{r}' \in T_n^+$, a wektor $\boldsymbol{\rho}_n^-$ jest wektorem od punktu $\mathbf{r}'$ do swobodnego wierzchołka trójkąta T_n^- , gdy $\mathbf{r}' \in T_n^-$.

Definicja (5.8) opisuje elementarny rozkład prądu narastający (od zera) od swobodnego wierzchołka T_n^+ do wspólnej krawędzi l_n , a następnie malejący do swobod-



Rys. 5.1. Segmentacja przykładowej powierzchni z zastosowaniem elementów trójkątnych



Rys. 5.2. Definicja funkcji bazowej RWG:

- (a) parametry geometryczne związane z krawędzią n ;
 (b) rozkład prądu powierzchniowego

nego wierzchołka T_n^- . Narastaniu amplitudy w trójkącie T_n^+ towarzyszy rozpyływanie się prądu ze swobodnego wierzchołka, a zmniejszaniu amplitudy w trójkącie T_n^- – „scho-dzenie” się linii prądu w swobodnym wierzchołku, co ilustruje rysunek 5.2b. Podobnie

jak w przypadku cienkich przewodów, w celu graficznego uwypuklenia trójkątnego, „daszkowego” charakteru funkcji (5.8) oznacza się ją często jako Λ_n^B , gdzie indeks B oznacza bryłę (ang. *body*).

Dodatkowo z definicji wynikają właściwości:

- (1) funkcja f_n (czyli prąd przepływający pomiędzy trójkątami) jest styczna do krawędzi trójkątów tworzących parę, z wyjątkiem krawędzi wspólnej l_n ,
- (2) na krawędzi wspólnej składowa f_n prostopadła do krawędzi przyjmuje wartość 1 i jest ciągła (choć w ogólnym przypadku prąd przepływający przez krawędź zmienia kierunek zgodnie z profilem załamania powierzchni),
- (3) powierzchniowa dywergencja f_n wymagana w obliczaniu elementów macierzy impedancyjnej (5.4) wyraża się wzorem:

$$\nabla'_S \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{l_n}{A_n^+} = \frac{2}{h_n^+}, & \mathbf{r}' \in T_n^+ \\ -\frac{l_n}{A_n^-} = -\frac{2}{h_n^-}, & \mathbf{r}' \in T_n^- \\ 0, & \mathbf{r}' \notin T_n^+ \cup T_n^- \end{cases} \quad (5.9)$$

Z właściwości (1) i (2) wynika, że na krawędziach trójkątów nie „powstają” niefizyczne ładunki liniowe, natomiast właściwość (3) oznacza, że gęstość powierzchniowa ładunku elektrycznego związanego z prądem, opisanym przez (5.8) równaniem ciągłości, jest stała w obrębie trójkątów, natomiast całkowity ładunek związany z funkcją bazową f_n jest zerowy.

Podstawienie (5.8) i (5.9) do (5.6) i (5.7) pozwala obliczyć potencjały wektorowy i skalarny, wytwarzane przez funkcję bazową RWG.

5.1.2. Macierz impedancyjna i wektor pobudzenia

Gdy stosuje się funkcje bazowe (5.8), można analitycznie wyznaczyć wewnętrzną pochodną w drugim składniku wyrażenia (5.4). Podczas obliczania pochodnej zewnętrznej (gradientu potencjału skalarnego) można posłużyć się (por. p. 4.3) całkowaniem przez części:

$$\begin{aligned} \int_S \nabla \Phi_n \cdot \mathbf{f}_m dS &= \int_{T_m^+} \nabla \Phi_n \cdot \mathbf{f}_m dS + \int_{T_m^-} \nabla \Phi_n \cdot \mathbf{f}_m dS \\ &= \int_{\partial T_m^+} \Phi_n \mathbf{f}_m \cdot \hat{\mathbf{n}} dL + \int_{\partial T_m^-} \Phi_n \mathbf{f}_m \cdot \hat{\mathbf{n}} dL \\ &\quad - \int_{T_m^+} \Phi_n \nabla_S \cdot \mathbf{f}_m dS - \int_{T_m^-} \Phi_n \nabla_S \cdot \mathbf{f}_m dS, \end{aligned} \quad (5.10)$$

gdzie $\partial T_m^\pm$ – suma krawędzi (brzeg) trójkąta $T_m^\pm$, $\hat{\mathbf{n}}$ – wektor jednostkowy normalny do tej krawędzi, leżący w płaszczyźnie trójkąta, skierowany na zewnątrz. Całki liniowe w (5.10) wynikają z zastosowania twierdzenia Gaussa:

$$\int_{T_m^\pm} \nabla_S \cdot (\Phi_n \mathbf{f}_m) dS = \int_{\partial T_m^\pm} \Phi_n \mathbf{f}_m \cdot \hat{\mathbf{n}} dL. \quad (5.11)$$

Zauważmy, że $\mathbf{f}_m \cdot \hat{\mathbf{n}}$ obliczane na ∂T_m^+ przyjmuje wartość 1 dla punktów leżących na krawędzi l_m , a zero na pozostałych dwóch krawędziach (por. właściwości (1) i (2) funkcji RWG). Z kolei na ∂T_m^- wartość $\mathbf{f}_m \cdot \hat{\mathbf{n}}$ wynosi -1 dla punktów leżących na l_m ($\hat{\mathbf{n}}$ jest skierowany na zewnątrz T_m^- , a $\mathbf{f}_m$ do wewnątrz), a zero na pozostałych dwóch krawędziach. Jeżeli potencjał Φ_n jest ciągłą funkcją położenia punktu obserwacji:

$$\int_{\partial T_m^+} \Phi_n \mathbf{f}_m \cdot \hat{\mathbf{n}} dL + \int_{\partial T_m^-} \Phi_n \mathbf{f}_m \cdot \hat{\mathbf{n}} dL = 0 \quad (5.12)$$

oraz w konsekwencji:

$$\int_S \nabla \Phi_n \cdot \mathbf{f}_m dS = - \int_{T_m^+} \Phi_n \nabla_S \cdot \mathbf{f}_m dS - \int_{T_m^-} \Phi_n \nabla_S \cdot \mathbf{f}_m dS. \quad (5.13)$$

Przy odpowiednio subtelnej dyskretyzacji potencjały wektorowy i skalarny są na tyle wolnozmiennymi funkcjami punktu obserwacji, że w obrębie trójkąta można przyjąć:

$$\int_{T_m^\pm} A_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS \cong A_n(\mathbf{r}_m^{c\pm}) \int_{T_m^\pm} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS, \quad (5.14)$$

$$\int_{T_m^\pm} \Phi_n(\mathbf{r}) \nabla_S \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS \cong \Phi_n(\mathbf{r}_m^{c\pm}) \int_{T_m^\pm} \nabla_S \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS, \quad (5.15)$$

gdzie $\mathbf{r}_m^{c\pm}$ – środek geometryczny trójkąta $T_m^\pm$,

zatem:

$$\begin{aligned} & \int_{T_m^+} A_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS + \int_{T_m^-} A_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS \\ & \cong A_n(\mathbf{r}_m^{c+}) \cdot \int_{T_m^+} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS + A_n(\mathbf{r}_m^{c-}) \cdot \int_{T_m^-} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Całki po prawej stronie (5.16) oblicza się analitycznie, otrzymując [5.3]:

$$\begin{aligned} & \int_{T_m^+} A_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS + \int_{T_m^-} A_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS \\ & \cong l_m \left[A_n(\mathbf{r}_m^{c+}) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{c+}}{2} + A_n(\mathbf{r}_m^{c-}) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{c-}}{2} \right], \end{aligned} \quad (5.17)$$

gdzie $\boldsymbol{\rho}_m^{c\pm}$ – wektor $\boldsymbol{\rho}_m^\pm$ (por. rys. 5.2) dla punktu położonego w geometrycznym środku $T_m^\pm$ (czyli wskazywanego przez $\mathbf{r}_m^{c\pm}$).

Podobnie, obliczając całki po prawej stronie (5.15), mamy:

$$-\int_{T_m^+} \Phi_n \nabla_S \cdot \mathbf{f}_m dS - \int_{T_m^-} \Phi_n \nabla_S \cdot \mathbf{f}_m dS \cong l_m \left[-\Phi_n(\mathbf{r}_m^{c+}) + \Phi_n(\mathbf{r}_m^{c-}) \right], \quad (5.18)$$

Ostatecznie, po podstawieniu (5.17), (5.18) do (5.4), możemy obliczyć elementy macierzy impedancyjnej:

$$Z_{mn} \cong j\omega l_m \left[\mathbf{A}_n(\mathbf{r}_m^{c+}) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{c+}}{2} + \mathbf{A}_n(\mathbf{r}_m^{c-}) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{c-}}{2} \right] + l_m \left[\Phi_n(\mathbf{r}_m^{c-}) - \Phi_n(\mathbf{r}_m^{c+}) \right]. \quad (5.19)$$

W formule (5.19), w obliczaniu potencjału wektorowego i skalarnego dla geometrycznych środków trójkątów, może zająć sytuacja, gdy punkt obserwacji będzie znajdował się w obszarze (trójkącie) źródłowym. W funkcji Greena (2.18) wystąpi wtedy dzielenie przez zero i funkcje podcałkowe w (5.6) i (5.7) będą miały charakter osobliwy. Osobliwość ta ma charakter słaby, co oznacza, że nawet w tym przypadku całki w (5.6) i (5.7) są zbieżne, choć procedura ich obliczania wymaga wtedy szczególnej uwagi [5.2].

Podobnie jak całkę we wzorze (5.4), związaną z potencjałem wektorowym, można obliczyć całkę (5.5) definiującą elementy wektora pobudzenia. Zakładając, że pole padające w obrębie trójkąta stanowiącego część funkcji testującej można aproksymować wartością w geometrycznym środku tego trójkąta, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} V_m &= \int_S \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS = \int_{T_m^+} \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS + \int_{T_m^-} \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS \\ &\cong l_m \left[\mathbf{E}^i(\mathbf{r}_m^{c+}) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{c+}}{2} + \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_m^{c-}) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{c-}}{2} \right]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

5.2. Równanie całkowe pola elektromagnetycznego

Podjęciem alternatywnym w stosunku do zaprezentowanego w punkcie poprzednim jest sformułowanie zagadnienia na podstawie warunków brzegowych dla pola magnetycznego. Założmy, że mamy do czynienia z metalowym obiektem opisanym przez gładką, zamkniętą powierzchnię S . Można teraz sformułować warunek brzegowy, według którego stwierdza się, że składowa styczna wypadkowego natężenia pola magnetycznego, obliczana tuż pod powierzchnią S , musi być zerowa, ponieważ we wnętrzu idealnego przewodnika pola elektryczne i magnetyczne znikają. Można zapisać [5.2]:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}^i(\mathbf{r}) + \mathbf{H}^S(\mathbf{r})) = 0, \quad \mathbf{r} \in \lim_{\mathbf{r} \uparrow S} S, \quad (5.21)$$

gdzie symbol $\mathbf{r} \uparrow S$ oznacza, że powierzchnia S osiągnięta jest przez punkt obserwacji „od wewnątrz”.

Wyrażając wtórne pole magnetyczne poprzez potencjał wektorowy (2.20):

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^s(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \times \frac{1}{4\pi} \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_S \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS',\end{aligned}\quad (5.22)$$

otrzymuje się:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \left(\mathbf{H}^i(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \int_S \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS' \right) = 0, \quad \mathbf{r} \in \lim_{r \uparrow S} S. \quad (5.23)$$

Równanie (5.23) jest prostsze w zapisie od równania (5.1), jednakże operator różniczkowania funkcji Greena w (5.23) prowadzi do zwiększenia rzędu osobliwości funkcji podcałkowej:

$$\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1+jkR}{R^2} e^{-jkR} \hat{\mathbf{R}}, \quad (5.24)$$

gdzie $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $R = |\mathbf{R}|$, $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/R$.

Wynikająca z (5.24) osobliwość rzędu $1/R^2$ powoduje, że całka w (5.23) nie jest zbieżna w zwykłym sensie. Można natomiast dokonać *ekstrakcji* osobliwości za pomocą odpowiednio przeprowadzonej procedury przechodzenia do granicy, wyodrębniając część osobliwą [5.1, 5.2, 5.4], co prowadzi do zapisu:

$$\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r})}{2} - \hat{\mathbf{n}} \times \left(\frac{1}{4\pi} PV \int_S \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS' \right) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S, \quad (5.25)$$

gdzie symbol PV oznacza, że całka jest obliczana w sensie wartości głównej (ang. *principal value*) Cauchy'ego, tj. z pominięciem (w granicy) punktu osobliwego. Równanie (5.25) nazywa się równaniem całkowym pola magnetycznego (MFIE – ang. *Magnetic Field Integral Equation*). Zaniedbanie w równaniu (5.25) wzajemnych interakcji prądu i pola na powierzchni S , czyli pominięcie całki, prowadzi do przybliżenia nazywanego optyką fizyczną (PO – ang. *physical optics*) [5.5].

Równanie całkowite pola magnetycznego można również uzyskać, wychodząc od warunku brzegowego (2.40) sformułowanego „tuż na zewnątrz” powierzchni S :

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}^i(\mathbf{r}) + \mathbf{H}^s(\mathbf{r})) = \mathbf{J}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \lim_{r \downarrow S} S. \quad (5.26)$$

Stosując procedurę wyodrębniania osobliwości, z uwzględnieniem, że tym razem punkt obserwacji osiąga S od zewnątrz, co wskazuje oznaczenie $\mathbf{r} \downarrow S$, uzyskuje się ponownie równanie (5.25).

Stosując do równania (5.25) metodę momentów w sposób podobny jak dla równania (5.1), to jest aproksymując powierzchniowy rozkład prądu poprzez (5.2) i wykonu-

jąc testowanie z użyciem jako funkcji testujących funkcji użytych w aproksymacji (5.2), otrzymuje się układ równań liniowych analogiczny do (5.3), w którym:

$$\begin{aligned} Z_{mn} &= \int_S \left[\frac{\mathbf{f}_n(\mathbf{r})}{2} - \hat{\mathbf{n}} \times \left(\frac{1}{4\pi} PV \int_S \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' \right) \right] \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS \\ &= \int_S \frac{\mathbf{f}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r})}{2} dS - \int_S \left(\frac{1}{4\pi} PV \int_S \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' \right) \cdot (\mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{n}}) dS, \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$V_m = \int_S (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS. \quad (5.28)$$

Jeśli powierzchnia S jest aproksymowana za pomocą płaskich fragmentów (trójkątów), w obliczaniu (5.27) nie występuje konieczność obliczania całki dla trójkąta zawierającego punkt osiobliwy. Dla wszystkich punktów tego trójkąta, z wyjątkiem punktu osiobliwego (a ten został z obliczeń wyłączony, ponieważ całkę oblicza się w sensie wartości głównej), wektory ∇G oraz $\mathbf{f}_n$ obecne w wyrażeniu podcałkowym leżą w płaszczyźnie elementu powierzchni. Ich iloczyn wektorowy jest zatem *normalny* do powierzchni, a zatem druga całka w (5.27) ma wartość zero.

W przypadku zastosowania w aproksymacji prądu funkcji RWG pierwszą całkę we wzorze (5.27) można obliczyć numerycznie, stosując definicję (5.8); ta całka jest niezerowa wtedy, gdy $m = n$ lub gdy dziedziny funkcji $\mathbf{f}_n$ i $\mathbf{f}_m$ zachodzą na siebie (jeden z trójkątów, na których są zdefiniowane, jest wspólny).

Drugą całkę we wzorze (5.27) uzyskuje się w ten sposób, że całkę zewnętrzną oblicza się, zakładając, jak w punkcie 5.1, że funkcje podcałkowe w obrębie trójkątów aproksymuje się ich wartościami w środku danego trójkąta, natomiast całkę wewnętrzną oblicza się, stosując typowe algorytmy całkowania numerycznego. Jak wspomniano, gdy punkt obserwacji leży w obrębie trójkąta, na którym jest rozpięta funkcja źródłowa, odpowiadająca mu całka zewnętrzna jest równa zero, mamy więc:

$$\begin{aligned} & \int_S \left(\frac{1}{4\pi} PV \int_S \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' \right) \cdot (\mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{n}}) dS \\ & \equiv \left(\frac{1}{4\pi} PV \int_S \nabla G(\mathbf{r}_m^{c+}, \mathbf{r}') \times \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' \right) \cdot \int_{T_m^+} (\mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{n}}) dS \\ & \quad + \left(\frac{1}{4\pi} PV \int_S \nabla G(\mathbf{r}_m^{c-}, \mathbf{r}') \times \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' \right) \cdot \int_{T_m^-} (\mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{n}}) dS \quad (5.29) \\ & = \frac{l_m}{4\pi} \left[\left(PV \int_S \nabla G(\mathbf{r}_m^{c+}, \mathbf{r}') \times \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' \right) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{c+} \times \hat{\mathbf{n}}_m^+}{2} \right. \\ & \quad \left. + \left(PV \int_S \nabla G(\mathbf{r}_m^{c-}, \mathbf{r}') \times \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' \right) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{c-} \times \hat{\mathbf{n}}_m^-}{2} \right]. \end{aligned}$$

Całkę (5.28) oblicza się podobnie jak całkę (5.5) w punkcie 5.1:

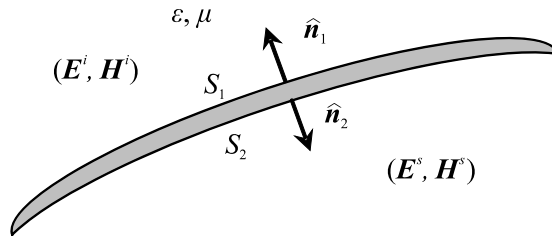
$$\begin{aligned}
 V_m &= \int_S (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS \\
 &= \int_{T_m^+} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS + \int_{T_m^-} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS \\
 &\cong l_m \left[(\hat{\mathbf{n}}_m^+ \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}_m^{c+})) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{c+}}{2} + (\hat{\mathbf{n}}_m^- \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}_m^{c-})) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{c-}}{2} \right].
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

We wzorach (5.29) i (5.30) $\hat{\mathbf{n}}_m^\pm$ oznacza jednostkowy wektor normalny do powierzchni trójkąta $T_m^\pm$, skierowany na zewnątrz S .

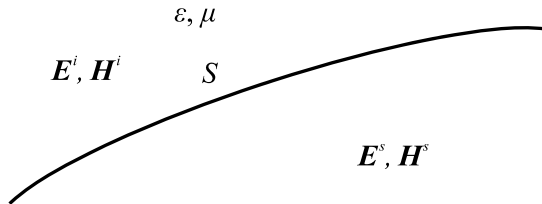
5.3. Powierzchnie otwarte

Równania całkowe pola elektrycznego i magnetycznego przedstawione w poprzednich punktach wyprowadzono po założeniu, że powierzchnia S jest powierzchnią zamkniętą, tzn. otacza bryłę o niezerowej objętości. Jak zauważono we wprowadzeniu do rozdziału 5, w wielu praktycznych zagadnieniach występują obiekty, dla których lepszą aproksymacją wydają się powierzchnie otwarte. Rozważmy stosowność opisanych równań całkowych w analizie tego typu problemów.

Na rysunku 5.3 pokazano punkt wyjścia dla dalszej analizy – bryłę o niewielkiej objętości V , ograniczoną powierzchnią składającą się z dwóch położonych blisko siebie fragmentów S_1 i S_2 , dla których zdefiniowano wektory normalne, wskazujące na



Rys. 5.3. Metalowa bryła o zanikającej objętości



Rys. 5.4. Metalowa bryła zastąpiona wypadkowym rozkładem prądu zdefiniowanym na otwartej powierzchni S

zewnątrz, $\hat{n}_1$ i $\hat{n}_2$. Interesuje nas przypadek, gdy $S_2 \rightarrow S_1$, czyli $V \rightarrow 0$. Wtedy powierzchnie S_1 i S_2 stają się jedną (otwartą) powierzchnią S , a $\hat{n}_2 = -\hat{n}_1 = -\hat{n}$.

Równanie całkowe pola elektrycznego można zapisać jako:

$$(\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^s(\mathbf{r}))_{\tan} = 0, \quad \mathbf{r} \in S_1 \cup S_2. \quad (5.31)$$

Pole rozproszone $\mathbf{E}^s$ jest dane przez:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = & -j\omega \frac{\mu}{4\pi} \int_{S_1} \mathbf{J}_1(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' + \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{S_1} \frac{\nabla'_S \cdot \mathbf{J}_1(\mathbf{r}')}{j\omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \\ & -j\omega \frac{\mu}{4\pi} \int_{S_2} \mathbf{J}_2(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' + \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{S_2} \frac{\nabla'_S \cdot \mathbf{J}_2(\mathbf{r}')}{j\omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS', \end{aligned} \quad (5.32)$$

gdzie przez $\mathbf{J}_1$ i $\mathbf{J}_2$ oznaczono prąd powierzchniowy płynący (w konfiguracji zastępczej) odpowiednio po powierzchniach S_1 i S_2 .

Jeżeli $S_2 \rightarrow S_2 = S$, to otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = & -j\omega \frac{\mu}{4\pi} \int_S (\mathbf{J}_1(\mathbf{r}') + \mathbf{J}_2(\mathbf{r}')) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \\ & + \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\nabla'_S \cdot (\mathbf{J}_1(\mathbf{r}') + \mathbf{J}_2(\mathbf{r}'))}{j\omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS', \end{aligned} \quad (5.33)$$

czyli pole $\mathbf{E}^s$ można potraktować jako wytwarzane przez sumaryczny prąd $\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$ płynący po obydwu stronach S [5.2]. Równanie (5.31) dla obydwu stron powierzchni jest identyczne, można więc potraktować analizowaną sytuację jak przedstawioną na rysunku 5.4, gdzie zamiast dwóch powierzchni S_1 i S_2 z rozkładem prądu $\mathbf{J}_1$ i $\mathbf{J}_2$ jest pojedyncza, otwarta powierzchnia S z wypadkowym prądem $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$.

Komentarza wymaga aproksymacja prądu wypadkowego w pobliżu krawędzi powierzchni S . W zagadnieniu z rysunku 5.3 jest możliwy przepływ prądu pomiędzy S_1 i S_2 , w przypadku zatem dyskretyzacji sumarycznej powierzchni za pomocą elementów trójkątnych oraz aproksymacji prądu powierzchniowego daszkowymi funkcjami RWG, dla krawędzi trójkątów leżących na konturze łączącym obydwa fragmenty powierzchni definiujemy stosowne funkcje bazowe. W przypadku granicznym z rysunku 5.4, takie funkcje bazowe znikają, ponieważ oba trójkąty stanowiące dziedzinę funkcji RWG stają się jednym trójkątem, po którego obu stronach, zgodnie z definicją (5.8), płynie prąd o przeciwnym znaku. Prąd wypadkowy, będący sumą prądów po obu stronach powierzchni, jest tu zatem zerowy. W interpretacji fizycznej oznacza to, że prąd prostopadły do krawędzi powierzchni S musi być zerowy, gdyż inaczej na tej krawędzi gromadziłby się ładunek elektryczny.

W przypadku aproksymacji wypadkowego rozkładu prądu płynącego po otwartej powierzchni S nie definiuje się zatem funkcji bazowych dla krawędzi trójkątów aprok-

symujących kontur S . Ten fakt powoduje, że dla powierzchni otwartych, w dalszym ciągu dla wszystkich krawędzi słuszne jest stwierdzenie (5.12) i można zastosować rozumowanie opisane wzorami (5.10)–(5.13), pozwalające uniknąć obliczania gradientu potencjału skalarnego.

Reasumując, dla otwartych, nieskończenie cienkich powierzchni zbudowanych z idealnego przewodnika można zastosować metodę analizy opisaną w punkcie 5.1, bazującą na równaniu całkowym pola elektrycznego. Obliczany zastępczy rozkład prądu ma wtedy charakter sumarycznego prądu płynącego po obu stronach analizowanej powierzchni.

Przeprowadźmy teraz podobne rozważania dla równania pola magnetycznego. Zapisując równanie (5.21) obiektu z rysunku 5.3, otrzymuje się:

$$\hat{n}_1 \times (\mathbf{H}^i(\mathbf{r}) + \mathbf{H}^s(\mathbf{r})) = 0, \quad \mathbf{r} \in \lim_{\mathbf{r} \uparrow S_1} S_1, \quad (5.34)$$

$$\hat{n}_2 \times (\mathbf{H}^i(\mathbf{r}) + \mathbf{H}^s(\mathbf{r})) = 0, \quad \mathbf{r} \in \lim_{\mathbf{r} \uparrow S_2} S_2, \quad (5.35)$$

gdzie wtórne pole magnetyczne jest dane jako:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^s(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{J}_1(\mathbf{r}') dS' \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{S_2} \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{J}_2(\mathbf{r}') dS'. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Wyodrębniając z całek w (5.36) części osobliwe, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{J}_1(\mathbf{r})}{2} - \hat{n}_1 \times \left(\frac{1}{4\pi} PV \int_{S_1} \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{J}_1(\mathbf{r}') dS' \right. \\ \left. + \frac{1}{4\pi} PV \int_{S_2} \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{J}_2(\mathbf{r}') dS' \right) = \hat{n}_1 \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_1, \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{J}_2(\mathbf{r})}{2} - \hat{n}_2 \times \left(\frac{1}{4\pi} PV \int_{S_1} \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{J}_1(\mathbf{r}') dS' \right. \\ \left. + \frac{1}{4\pi} PV \int_{S_2} \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{J}_2(\mathbf{r}') dS' \right) = \hat{n}_2 \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_2. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Przechodząc do granicy $S_2 \rightarrow S_1 = S$, $\hat{n}_2 = -\hat{n}_1 = -\hat{n}$, należy także wyodrębnić części osobliwe z pozostałych dwóch całek w (5.37), (5.38). Po wykonaniu tej operacji oba równania przybierają formę:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{J}_1(\mathbf{r}) - \mathbf{J}_2(\mathbf{r})}{2} - \hat{\mathbf{n}} \times \left(\frac{1}{4\pi} PV \int_S \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times (\mathbf{J}_1(\mathbf{r}') + \mathbf{J}_2(\mathbf{r}')) dS' \right) \\ = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Równanie (5.39) nie jest poprawne dla punktów leżących na krawędzi przewodnika, gdyż przy użytym wyodrębnianiu osobliwości zakłada się, że powierzchnia S jest gładka. Równanie to nie zawiera ponadto informacji wystarczającej do obliczenia ani sumy $\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$, ani osobno prądów $\mathbf{J}_1$ i $\mathbf{J}_2$ [5.2]. Równanie całkowe dla pola magnetycznego nie nadaje się zatem do analizy rozpraszania fal elektromagnetycznych przez otwarte, nieskończone cienkie powierzchnie zbudowane z idealnego przewodnika.

Z przedstawionych rozważań wynika, że równanie całkowe pola elektrycznego ma szerszy zakres stosowności, nadaje się bowiem do analizy zarówno powierzchni zamkniętych, jak i otwartych. Co więcej, można wykazać, że to równanie łatwo uogólnić na przypadek, gdy obiekt zawiera kilka fragmentów powierzchni mających wspólną krawędź. Metoda analizy jest wtedy taka sama jak streszczona w rozdziale 4 metoda analizy struktur wieloprzewodowych. Rolę trójkątnych funkcji bazowych przejmują teraz daszkowe funkcje RWG, a dla krawędzi wspólnej (złącza) definiuje się funkcje bazowe w liczbie o jeden mniejszej niż liczba połączonych fragmentów (por. rys. 4.3).

Za pomocą równań pola elektrycznego jest też możliwe modelowanie struktur zawierających zarówno fragmenty powierzchni, jak i cienkie przewody. Algorytm analizy tego typu zagadnień zakłada, że rozkład prądu w przewodach aproksymuje się, stosując opisane w rozdziale 4 przybliżenie cienkoprzewodowe i funkcje trójkątne, rozkład prądu w metalowych powierzchniach – za pomocą funkcji daszkowych. Podobnie podczas procedury testowania równań, dla warunku brzegowego na poboczniczy przewodu stosuje się funkcje trójkątne, a dla warunku brzegowego na metalowej powierzchni – funkcje RWG. Algorytm wymaga uzupełnienia w sytuacji, gdy cienki przewód oraz metalowa powierzchnia stykają się ze sobą. Konieczne jest wtedy zdefiniowanie specjalnych funkcji bazowych opisujących przepływ prądu przez takie połączenie. Stosowne funkcje zostały zdefiniowane przez Hwu, Wiltona i Rao [5.6]. Inny, prostszy w implementacji rodzaj funkcji bazowych zaproponowali Zheng i Michalski [5.7, 5.8].

5.4. Obiekty o symetrii obrotowej

W przypadku obiektów dużych elektrycznie aproksymacja powierzchni za pomocą elementów trójkątnych o rozmiarach rzędu jednej dziesiątej długości fali prowadzi do znacznej liczby funkcji bazowych opisujących poszukiwany powierzchniowy rozkład

prądu elektrycznego, a co za tym idzie, do konieczności rozwiązywania układów równań liniowych o bardzo dużej liczbie niewiadomych współczynników.

Liczbę niewiadomych można znacznie ograniczyć, jeżeli badana struktura odznacza się symetrią geometryczną. Przykładami są tu symetria odbiciowa, translacyjna (struktury periodyczne), dla których dyskretyzacji poddajemy fragment struktury, a obecność pozostałych części uwzględniamy przez odpowiednie modyfikacje funkcji Greena [5.2], czy też tytułowa symetria obrotowa [5.9, 5.10].

Obiekt charakteryzuje się symetrią obrotową, jeżeli po obrocie o dowolny niezerowy kąt wokół pewnej osi jego geometria nie ulega zmianie. W przypadku powierzchni S oznacza to, że obiekt można jednoznacznie opisać za pomocą osi obrotu oraz tzw. linii tworzącej L (por. rys. 5.5). Dla tego typu bryły (określanej w literaturze anglojęzycznej mianem *Body of Revolution*, w skrócie BoR) można zauważyć, że na powierzchni S zarówno gęstość prądu powierzchniowego oraz związany z nim ładunek powierzchniowy, jak i pola elektryczne i magnetyczne są okresowymi funkcjami azymutalnej współrzędnej ϕ . Sugeruje to, że w opisie wymienionych wielkości można się posłużyć rozkładem w trygonometryczny lub wykładniczy szereg Fouriera.

Rozważmy ponownie równanie całkowe pola elektrycznego. Elementy macierzy momentów dla dowolnych funkcji bazowych $\mathbf{u}_n$ i wagowych $\mathbf{w}_m$ dane są formułą (5.4), którą w przypadku zastosowania funkcji różniczkowalnych i zapewniających zerową składową normalną gęstości prądu na krawędziach powierzchni otwartych (por. dyskusja w p. 5.1.2) można zapisać w postaci:

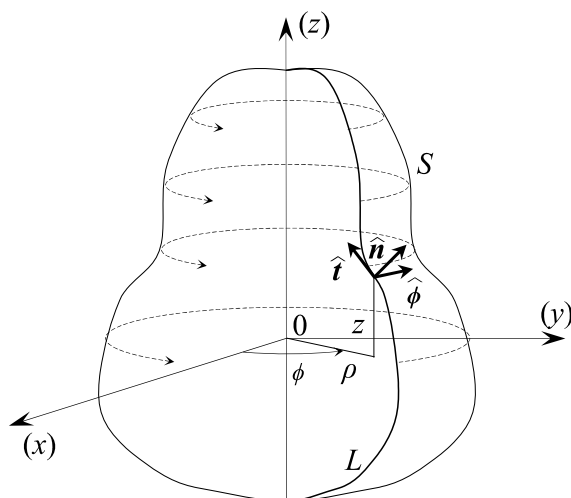
$$\begin{aligned} Z_{mn} &= j\omega \int_S \mathbf{A}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{w}_m(\mathbf{r}) dS - \int_S \Phi_n(\mathbf{r}) \nabla_S \cdot \mathbf{w}_m(\mathbf{r}) dS \\ &= \int_S \int_S \left(j\omega \frac{\mu}{4\pi} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{u}_n(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{w}_m(\mathbf{r}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{j\omega 4\pi\epsilon} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\nabla'_S \cdot \mathbf{u}_n(\mathbf{r}')) (\nabla_S \cdot \mathbf{w}_m(\mathbf{r})) \right) dS' dS. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Obliczenia najwygodniej można przeprowadzić w biegunowym układzie współrzędnych (ρ, z, ϕ) . Funkcja Greena jest wtedy obliczana jako:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\rho, z, \rho', z', \phi - \phi') = \frac{e^{-jk\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos(\phi - \phi') + (z - z')^2}}}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos(\phi - \phi') + (z - z')^2}}. \quad (5.41)$$

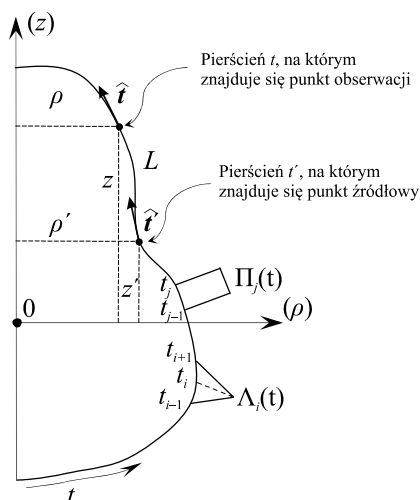
Istotne w aspekcie dalszych rozważań jest zwrócenie uwagi, że funkcja Greena zależy od różnicy $\phi - \phi'$ współrzędnych azymutalnych punktu obserwacji i źródłowego, a nie od indywidualnych wartości ϕ i ϕ' .

Funkcje bazowe i wagowe muszą mieć zdefiniowane dwie składowe: składową równoległą do tworzącej oraz składową prostopadłą do tworzącej, którą nazywa się



Rys. 5.5. Bryła obrotowa powstała w wyniku obrotu wokół osi (z) linii tworzącej L

składową azymutalną. Składową równoległą wygodnie jest opisać z wykorzystaniem leżącego w płaszczyźnie (ρ, z) wektora $\hat{t}$ (por. rys. 5.5) stycznego do tworzącej. Kierunek tego wektora zależy od położenia na L , rozróżnia się zatem wektor styczny dla punktu źródłowego $\hat{t}'$ oraz obserwacji $\hat{t}$, natomiast samo położenie tych punktów na L określa się za pomocą pomocniczego parametru, odpowiednio, t' lub t , mierzonego wzdłuż krzywizny (por. rys. 5.6). Zmienna t (t') wskazuje pierścień, na którym znajduje-



Rys. 5.6. Tworząca L , parametry związane z punktami źródłowym i obserwacji oraz zdefiniowane na tworzącej funkcje Λ i Π wykorzystywane w konstrukcji funkcji bazowych i wagowych

je się punkt obserwacji (źródłowy), natomiast lokalizacja samego punktu wymaga uzupełnienia o współrzędną azymutalną $\phi(\phi')$.

Aproksymujemy tworzącą L linią łamaną o węzłach $(t_0 = 0, t_1, \dots, t_N)$ oraz wprowadzamy funkcje pomocnicze (por. rys. 5.6):

$$\Lambda_i(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}, & t \in (t_{i-1}, t_i) \\ \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i}, & t \in (t_i, t_{i+1}), \quad i = 1, \dots, N-1, \\ 0, & t \notin (t_{i-1}, t_{i+1}) \end{cases} \quad (5.42)$$

oraz

$$\Pi_i(t) = \begin{cases} 1, & t \in (t_{i-1}, t_i) \\ 0, & t \notin (t_{i-1}, t_i) \end{cases}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.43)$$

Zdefiniujemy teraz dwa zbiory funkcji bazowych. Funkcje przeznaczone do opisu składowej prądu płynącej równoległe do tworzącej:

$$\mathbf{u}_n^{p,t}(t', \phi') = \frac{1}{\rho'} \Lambda_n(t') e^{jp\phi'} \hat{\mathbf{t}}' \quad (5.44)$$

oraz prostopadłe do tworzącej:

$$\mathbf{u}_n^{p,\phi}(t', \phi') = \Pi_n(t') e^{jp\phi'} \hat{\boldsymbol{\phi}}'. \quad (5.45)$$

Funkcje (5.44) i (5.45) mają charakter funkcji segmentowych wzdłuż tworzącej L , natomiast funkcji typu *entire domain* wzdłuż współrzędnej azymutalnej. Czynniki $1/\rho'$ obecne w definicji (5.44) zapewnia odpowiednią aproksymację prądu dla punktów leżących na osi (z). Wykorzystanie tego typu aproksymacji jest równoważne rozwinięciu powierzchniowej gęstości prądu w wykładniczy szereg Fouriera:

$$\mathbf{J}(t', \phi') \cong \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{N-1} I_n^{p,t} \frac{1}{\rho'} \Lambda_n(t') \hat{\mathbf{t}}' + \sum_{n=1}^N I_n^{p,\phi} \Pi_n(t') \hat{\boldsymbol{\phi}}' \right) e^{jp\phi'}. \quad (5.46)$$

Dla każdego rodzaju azymutalnego oznaczonego indeksem p aproksymacja (5.46) wymaga znalezienia $2N - 1$ nieznanymi współczynników.

Jako funkcje wagowe wykorzystamy funkcje sprzężone do (5.44), (5.45):

$$\mathbf{w}_m^{r,t}(t, \phi) = \frac{1}{\rho} \Lambda_m(t) e^{-jr\phi} \hat{\mathbf{t}} \quad (5.47)$$

$$\mathbf{w}_m^{r,\phi}(t, \phi) = \Pi_m(t) e^{-jr\phi} \hat{\phi}. \quad (5.48)$$

Jest to równoważne zastosowaniu schematu Galerkina wraz z testowaniem opisanym przez (3.8).

Konsekwencje zastosowania zdefiniowanych funkcji bazowych i wagowych pokazano na przykładzie funkcji (5.45) i (5.48). Poszukuje się zatem elementów macierzy momentów, które opisują azymutalne pole (funkcja (5.48)) wytwarzane przez azymutalny prąd (funkcja (5.45)). Elementy te oznaczono symbolem $Z_{mn}^{rp,\phi\phi}$, gdzie zamiast dwóch indeksów identyfikujących funkcję bazową i wagową w (5.40) zgodnie z definicjami są teraz cztery indeksy, ponieważ każda z funkcji bazowych i wagowych jest opisana dwoma indeksami identyfikującymi jej położenie na tworzącej L oraz rodzaj azymutalny.

Po podstawieniu do (5.45) i (5.48) do (5.40) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} Z_{mn}^{rp,\phi\phi} = & \int_L \int_{-\pi}^{\pi} \int_L \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ j\omega \frac{\mu}{4\pi} \Pi_n(t') \Pi_m(t) G e^{jp\phi'} e^{-jr\phi} \hat{\phi}' \cdot \hat{\phi} \right. \\ & \left. + \frac{1}{j\omega 4\pi\epsilon} G \left(\frac{1}{\rho'} \frac{\partial(\Pi_n(t') e^{jp\phi'})}{\partial\phi'} \right) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Pi_m(t) e^{jp\phi})}{\partial\phi} \right) \right\} \rho' d\phi' dL' \rho d\phi dL, \end{aligned} \quad (5.49)$$

gdzie wykorzystano fakt, że dywergencja powierzchniowa we współrzędnych (t, ϕ) jest dana wzorem:

$$\nabla_s \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho J^t)}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial J^\phi}{\partial \phi}. \quad (5.50)$$

Biorąc pod uwagę, że:

$$\hat{\phi}' \cdot \hat{\phi} = \cos(\phi - \phi'), \quad (5.51)$$

po wykonaniu różniczkowań oraz podstawieniu $\alpha = \phi - \phi'$, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} Z_{mn}^{rp,\phi\phi} = & \int_L \int_L \left\{ j\omega \frac{\mu}{4\pi} \Pi_n(t') \Pi_m(t) \int_{-\pi}^{\pi} G e^{-jr\alpha} \cos\alpha d\alpha \right. \\ & \left. + \frac{pr}{j\omega 4\pi\epsilon} \frac{1}{\rho'} \Pi_n(t') \frac{1}{\rho} \Pi_m(t) \int_{-\pi}^{\pi} G e^{-jr\alpha} d\alpha \right\} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(p-r)\phi'} d\phi' \right) \rho \rho' dL' dL. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Czynnik $\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(p-r)\phi'} d\phi'$ będzie występował dla wszystkich kombinacji funkcji bazowych (5.44), (5.45) i wagowych (5.47), (5.48), ponieważ jego obecność w (5.52) wynika wyłącznie z obecności funkcji eksponencjalnych w definicjach tych funkcji.

Jednocześnie:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(p-r)\phi'} d\phi' = \begin{cases} 2\pi, & p = r \\ 0, & p \neq r \end{cases} \quad (5.53)$$

wyłącznie zatem elementy macierzy momentów, dla których $p = r$ będą niezerowe.

Oznacza to brak oddziaływań pomiędzy prądem i polem należącymi do różnych rodzajów azymutalnych, a w konsekwencji prowadzi do wniosku, że wyjściowe równanie całkowe można rozwiązywać niezależnie dla poszczególnych rodzajów azymutalnych.

Końcowy układ równań liniowych dla każdego rodzaju azymutalnego ma postać:

$$\begin{bmatrix} [Z_{mn}^{p,tt}] & [Z_{mn}^{p,t\phi}] \\ [Z_{mn}^{p,\phi t}] & [Z_{mn}^{p,\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I_n^{p,t}] \\ [I_n^{p,\phi}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [V_m^{p,t}] \\ [V_m^{p,\phi}] \end{bmatrix}, \quad (5.54)$$

gdzie (ponieważ $p = r$) podwójne indeksy przy oznaczeniach podmacierzy zastąpiono pojedynczym indeksem p .

Elementy poszczególnych podmacierzy oblicza się podobnie jak we wzorze (5.53). Wygodnie jest wprowadzić oznaczenie:

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(\rho, z, \rho', z', \alpha) e^{-jp\alpha} d\alpha = G_p(\rho, z, \rho', z'). \quad (5.55)$$

Łatwo wykazać, że:

$$\int_{-\pi}^{\pi} G \cos \alpha e^{-jp\alpha} d\alpha = \frac{G_{p-1} + G_{p+1}}{2}, \quad (5.56)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} G \sin \alpha e^{-jp\alpha} d\alpha = \frac{G_{p-1} - G_{p+1}}{2j}. \quad (5.57)$$

Potrzebne iloczyny skalarne wektorów jednostkowych, wynikające z podstawienia definicji funkcji bazowych i wagowych do (5.40), oblicza się jako [5.10]:

$$\hat{\mathbf{t}}' \cdot \hat{\mathbf{t}} = \sin \nu \sin \nu' \cos(\phi - \phi') + \cos \nu \cos \nu', \quad (5.58)$$

$$\hat{\mathbf{t}}' \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin \nu' \sin(\phi - \phi'), \quad (5.59)$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}' \cdot \hat{\mathbf{t}} = \sin \nu \sin(\phi - \phi'), \quad (5.60)$$

gdzie $\nu'(\nu)$ oznacza kąt, jaki z osią (z) tworzy wektor $\hat{\mathbf{t}}'(\hat{\mathbf{t}})$.

Ostatecznie otrzymuje się:

$$Z_{mn}^{p,tt} = \int_L \int_L \left\{ \frac{j\omega\mu}{2} \Lambda_n(t') \Lambda_m(t) \left(\sin v \sin v' \frac{G_{p-1} + G_{p+1}}{2} + \cos v \cos v' G_p \right) + \frac{1}{2j\omega\varepsilon} \frac{\partial \Lambda_n(t')}{\partial t'} \frac{\partial \Lambda_m(t)}{\partial t} G_p \right\} dL' dL, \quad (5.61)$$

$$Z_{mn}^{p,t\phi} = \int_L \int_L \left\{ \frac{\omega\mu}{2} \Pi_n(t') \Lambda_m(t) \sin v \frac{G_{p-1} - G_{p+1}}{2} + \frac{p}{2\omega\varepsilon\rho'} \Pi_n(t') \frac{\partial \Lambda_m(t)}{\partial t} G_p \right\} \rho' dL' dL, \quad (5.62)$$

$$Z_{mn}^{p,\phi t} = \int_L \int_L \left\{ \frac{\omega\mu}{2} \Lambda_n(t') \Pi_m(t) \sin v' \frac{G_{p+1} - G_{p-1}}{2} - \frac{p}{2\omega\varepsilon\rho} \frac{\partial \Lambda_n(t')}{\partial t} \Pi_m(t) G_p \right\} \rho dL' dL, \quad (5.63)$$

$$Z_{mn}^{p,\phi\phi} = \int_L \int_L \left\{ \frac{j\omega\mu}{2} \Pi_n(t') \Pi_m(t) \frac{G_{p-1} + G_{p+1}}{2} + \frac{p^2}{2j\omega\varepsilon} \frac{1}{\rho'} \Pi_n(t') \frac{1}{\rho} \Pi_m(t) G_p \right\} \rho\rho' dL' dL. \quad (5.64)$$

Elementy wektora pobudzenia oblicza się ze wzoru (5.5), podstawiając definicje (5.47) i (5.48):

$$V_m^{p,t} = \int_L \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{E}^i(t, \phi) \cdot \hat{\mathbf{t}} e^{-jp\phi} d\phi \right) \Lambda_m(t) dL, \quad (5.65)$$

$$V_m^{p,\phi} = \int_L \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{E}^i(t, \phi) \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} e^{-jp\phi} d\phi \right) \Pi_m(t) \rho dL. \quad (5.66)$$

Łatwo zauważyć, że czynniki w nawiasach okrągłych w (5.65), (5.66) stanowią współczynniki rozkładu odpowiednich składowych pola padającego w wykładniczy szereg Fouriera.

Procedurę podobną do przedstawionej powyżej można zastosować do rozwiązywania równania całkowego pola magnetycznego [5.11].

Komentarza wymaga liczba rodzajów azymutalnych, jaką należy uwzględnić w aproksymacji (5.46) w celu uzyskania satysfakcjonującego rozwiązania. Ta liczba zależy od charakteru pola pobudzającego oraz wielkości elektrycznej badanego obiektu. Przykładowo fala płaska padająca wzdłuż osi symetrii bryły jest opisana wyłącznie dwoma współczynnikami Fouriera $p = \pm 1$, w analizie zatem takiego przypadku wystarczy ograniczenie obliczeń do dwóch rodzajów azymutalnych. W przypadku ogólnym przyjmuje się aproksymację rozkładu prądu:

$$\mathbf{J}(t', \phi') \cong \sum_{p=-P}^P \left(\sum_{n=1}^{N-1} I_n^{p,t} \frac{1}{\rho'} \Lambda_n(t') \hat{\mathbf{t}}' + \sum_{n=1}^N I_n^{p,\phi} \Pi_n(t') \hat{\boldsymbol{\phi}}' \right) e^{jp\phi'} \quad (5.67)$$

Wilton podaje [5.2], że należy przyjąć:

$$P \approx k \rho_{\max}, \quad (5.68)$$

gdzie k jest stałą propagacji, a $\rho_{\max}$ oznacza największą wartość ρ na poboczniczy bryły obrotowej.

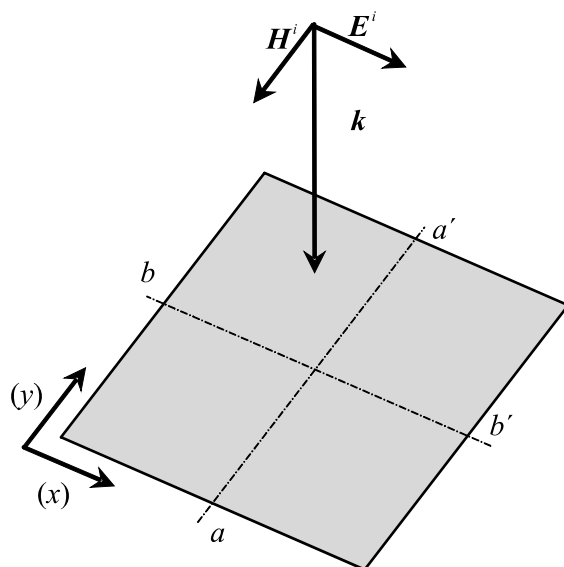
Alternatywnym sposobem uzyskania wzorów (5.61)–(5.66) jest sformułowanie osobnego równania całkowego dla danego rodzaju azymutalnego, a następnie rozwiązywanie go za pomocą odpowiedników użytych tu funkcji bazowych i wagowych, pozbawionych członu eksponencjalnego. Podejście takie ma tę zaletę, że w sposób naturalny uzasadnia zmianę znaku w członie eksponencjalnym funkcji wagowych (5.47), (5.48) w stosunku do funkcji bazowych (5.44), (5.45). Przedstawiony wariant wyprowadzenia lepiej, zdaniem autora, podkreśla, że rozwiązuje się w istocie te same co w przypadku trójwymiarowym równania całkowe, z zastosowaniem innego, specjalnie dostosowanego do geometrii, wariantu metody momentów.

5.5. Przykłady obliczeniowe

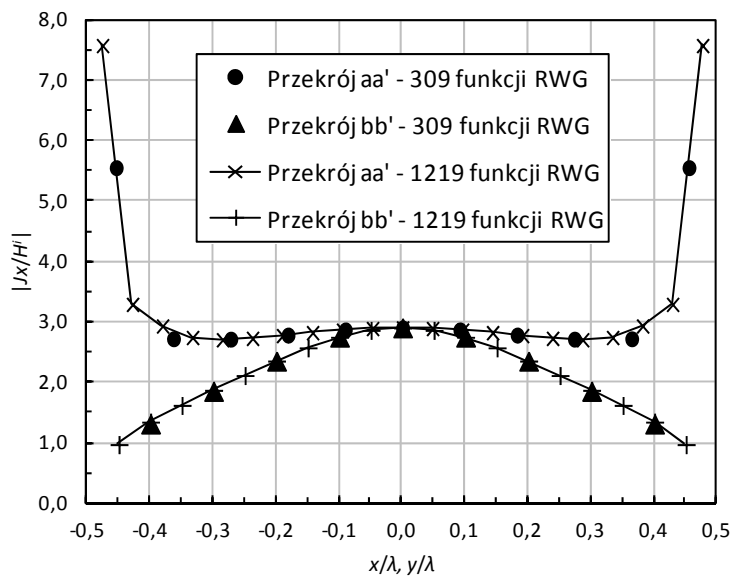
5.5.1. Doskonale przewodząca płyta oświetlona falą płaską

Pierwszy z prezentowanych przykładów dotyczy zagadnienia, w którym liniowo spolaryzowana fala płaska pada na kwadratową płytę wykonaną z idealnego przewodnika, z kierunku normalnego do powierzchni płyty, przy czym wektor pola elektrycznego jest spolaryzowany wzdłuż boku kwadratu (rys. 5.7).

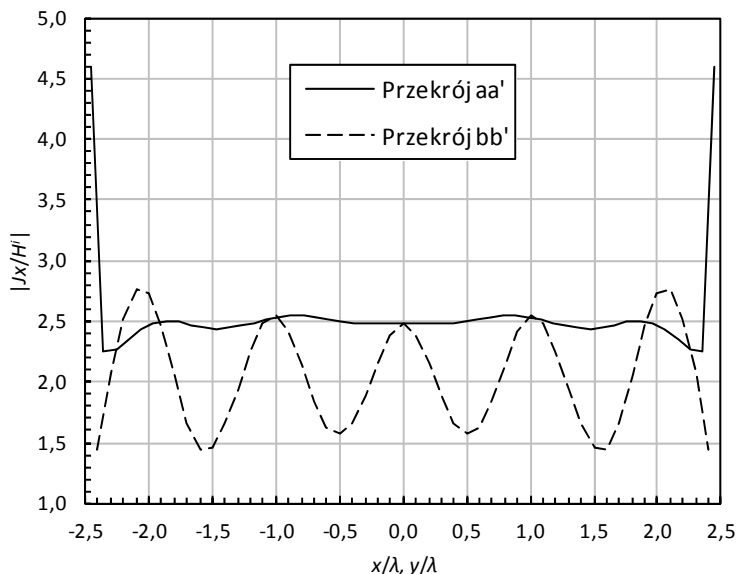
Ponieważ powierzchnia S jest powierzchnią otwartą, należy skorzystać z równania całkowego pola elektrycznego oraz funkcji RWG. W pierwszym cyklu obliczeniowym przeanalizowano rozkład prądu w płycie o wymiarach $\lambda \times \lambda$. Płytę podzielono na 110 prostokątów (10×11), a każdy prostokąt na dwa elementarne trójkąty (220 trójkątów).



Rys. 5.7. Fala płaska padająca prostopadłe na kwadratową płytę wykonaną z idealnego przewodnika



Rys. 5.8. Rozkłady dominującej składowej prądu w dwóch przekrojach kwadratowej płyty o wymiarach $\lambda \times \lambda$, obliczone z użyciem dwóch dyskretyzacji



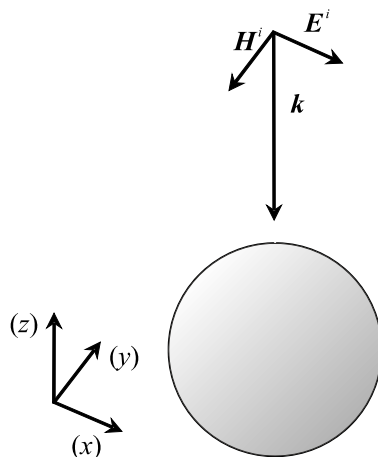
Rys. 5.9. Rozkłady dominującej składowej prądu w dwóch przekrojach kwadratowej płyty o wymiarach $5\lambda \times 5\lambda$

Z trójkątów zbudowano 309 daszkowych funkcji bazowych. Następnie wykonano obliczenia dla tej samej konfiguracji, tym razem z podziałem na 840 trójkątów, z których wygenerowano 1219 funkcji bazowych. Porównanie wyników pokazano na rysunku 5.8. Czytelnik może także porównać otrzymane wyniki z podanymi w pracy [5.3]. Następnie wykonano podobne obliczenia dla płyty o wymiarach $5\lambda \times 5\lambda$. Użyto 5100 trójkątów tworzących 7549 funkcji bazowych (rys. 5.9).

Zarówno na rysunku 5.8, jak i 5.9 widoczny jest osobliwy charakter prądu płynącego równolegle do krawędzi metalowej płyty.

5.5.2. Doskonale przewodząca sfera oświetlona falą płaską – problem wewnętrznych rezonansów

Kolejny przykład dotyczy metalowej sfery oświetlonej płaską falą elektromagnetyczną (rys. 5.10). Ponieważ mamy do czynienia z bryłą zamkniętą, w analizie można wykorzystać zarówno równanie całkowe pola elektrycznego (EFIE), jak i równanie całkowe pola magnetycznego (MFIE). Można też skorzystać z algorytmu w pełni trójwymiarowego, opisanego w podrozdziałach 5.1 i 5.2, oraz z algorytmu przeznaczonego dla brył obrotowych (podrozdział 5.4). W tym ostatnim przypadku szczególnie korzystne jest założenie, że fala pada wzdłuż osi z , gdyż, wymaga to uwzględnienia w rozwiązywaniu wyłącznie dwóch rodzajów azymutalnych.



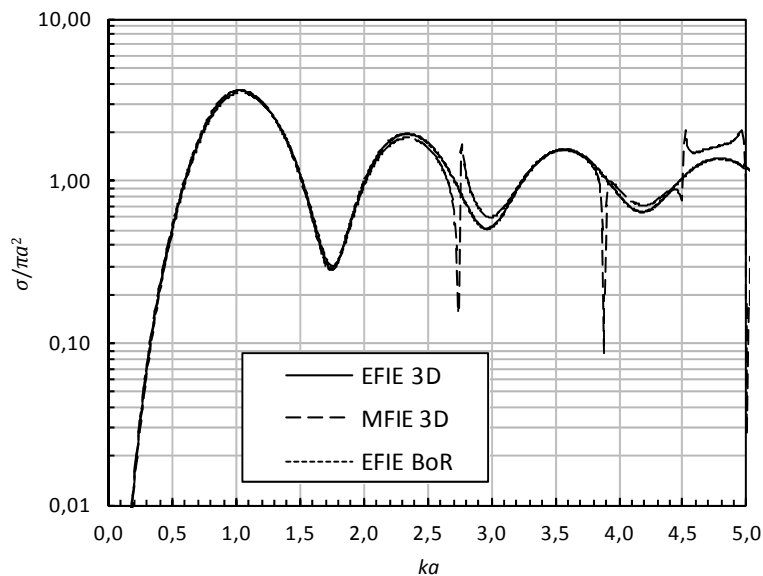
Rys. 5.10. Fala płaska padająca na sferę wykonaną z idealnego przewodnika

Wielkość „elektryczną” sfery określa iloczyn stałej propagacji k i promienia sfery a . W przykładzie założono, że maksymalna częstotliwość, dla jakiej będą prowadzone obliczenia, odpowiada wartości $ka = 5,0$. Spełnienie warunku, aby krawędzie elementów powstałych podczas dyskretyzacji powierzchni były mniejsze od jednej dziesiątej długości fali oznacza, że obwód sfery powinien być podzielony na 50 fragmentów. W przypadku modelu trójwymiarowego prowadzi to do podziału powierzchni sfery na 2400 elementarnych trójkątów, z których powstaje 3600 funkcji bazowych typu RWG. W modelu bryły obrotowej linia tworząca jest dzielona na 25 odcinków, a liczba trójkątnych i impulsowych funkcji bazowych wynosi odpowiednio 24 i 25, czyli w sumie 49.

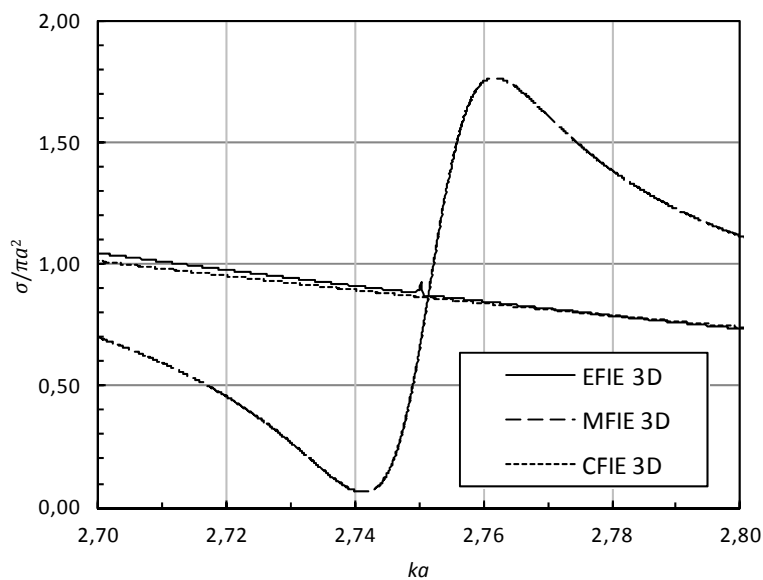
Przyjęto, że obliczanym parametrem jest unormowana skuteczna powierzchnia odbijająca mierzona w kierunku, skąd pada fala pobudzająca, czyli przekrój radarowy *monostatyczny*. Obliczenia wykonano z wykorzystaniem modelu trójwymiarowego (równania EFIE i MFIE) oraz modelu bryły obrotowej (równanie EFIE). Wyniki obliczeń pokazano na rysunku 5.11.

Z wykresu widać, że model bryły obrotowej daje identyczne wyniki z modelem trójwymiarowym (równanie EFIE). Biorąc pod uwagę, że stosunek liczby niewiadomych tych dwóch modeli wynosi $3600/49 \cong 73,5$, oraz uwzględniając, że czas numerycznego rozwiązywania układów równań liniowych jest proporcjonalny do trzeciej potęgi liczby niewiadomych, dzięki zastosowaniu modelu bryły obrotowej otrzymuje się przyspieszenie obliczeń o kilka rzędów.

Osobnego komentarza wymaga porównanie wyników uzyskanych za pomocą równania EFIE i MFIE – widać, że obliczenia z wykorzystaniem równania MFIE dla wyższych częstotliwości są bardziej niestabilne niż obliczenia w wykorzystaniem równania EFIE. Silna niestabilność pojawia się dla częstotliwości rezonansowych sfery oraz w pobliżu tych częstotliwości.



Rys. 5.11. Unormowana skuteczna powierzchnia odbicia metalowej sfery o promieniu a w funkcji ka ; obliczenia z użyciem równania EFIE, MFIE i modelu trójwymiarowego (3D) oraz równania EFIE i modelu bryły obrotowej (BoR)



Rys. 5.12. Porównanie wyników obliczeń skutecznej powierzchni odbicia metalowej sfery w pobliżu częstotliwości rezonansowej; obliczenia z użyciem równania EFIE, MFIE oraz CFIE i modelu trójwymiarowego (3D)

Wynika to z faktu [5.11], że dla częstotliwości rezonansowych, traktowane niezależnie warunki brzegowe dla pola elektrycznego i dla pola magnetycznego, stanowiące punkt wyjścia dla konstrukcji odpowiednich równań całkowych, nie zapewniają jednoznaczności rozwiązania.

Przyjrzyjmy się bliżej wynikom obliczeń w pobliżu pierwszej problematycznej częstotliwości, występującej w pobliżu $ka = 2,744$ [5.11]. Wyniki obliczeń zaprezentowane na rysunku 5.12 wskazują wspomnianą niestabilność równania MFIE, jednak rzeczywiście szczegółowa analiza wyników uzyskanych za pomocą równania EFIE pokazuje (por. powiększony fragment wykresu na rysunku 5.12), że także to równanie generuje niestabilne wyniki dla wspomnianych częstotliwości rezonansowych. Niestabilność jest jednak dużo słabsza niż dla równania MFIE. W celu wyjaśnienia tego efektu zajmijmy się najpierw równaniem EFIE.

Równanie całkowe (5.1), zapisane w postaci operatorowej, przybiera postać:

$$L_E(\mathbf{J}) = \mathbf{E}_{\tan}^i, \quad (5.69)$$

gdzie

$$L_E(\mathbf{J}) = \left(j\omega \frac{\mu}{4\pi} \int_S \mathbf{J} G dS' - \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\nabla'_S \cdot \mathbf{J}}{j\omega} G dS' \right)_{\tan}. \quad (5.70)$$

Po zastosowaniu metody momentów otrzymuje się na jego podstawie układ równań liniowych, który w postaci macierzowej można zapisać jako (3.11):

$$[Z_{mn}^E][I_n] = [V_m^E], \quad (5.71)$$

gdzie przez indeks E zaznaczono, że zarówno macierz momentów, jak i wektor pobudeń są wynikiem dyskretyzacji równania pola elektrycznego.

Dla bryły zamkniętej lewa strona równania (5.69) interesującego nas problemu zewnętrznego jest formalnie identyczna z lewą stroną równania problemu wewnętrznego, powstającego w analizie wnęki rezonansowej wykonanej z idealnego przewodnika:

$$L_E(\mathbf{J}) = 0. \quad (5.72)$$

Zero po prawej stronie (5.72) wynika z faktu, że wewnątrz bryły/wnęki nie istnieje pole pobudzające. Jednak dla częstotliwości rezonansowych wnęki mogą istnieć niezerowe rozwiązania równania (5.72), czyli prądy odpowiadające poszczególnym rodzajom rezonansowym. Taki rezonansowy rozkład prądu wytwarza rezonansowy rozkład pola wewnątrz bryły, natomiast zerowe pole na zewnątrz. Można zatem stwierdzić, że dla częstotliwości rezonansowej rozwiązanie równania (5.69) może być superpozycją dwóch rozwiązań – rozważanego rozwiązania dla problemu zewnętrznego oraz, traktowanego tu jako rozwiązanie „pasożytnicze”, rozwiązania problemu wnęki rezonansowej. Jak wspomniano, prąd „pasożytniczy” *nie wytwarza* pola na zewnątrz bryły, tak długo zatem jak interesuje nas pole wtórne, a nie rozkład prądu

w obiekcie, teoretycznie nie powinno to stanowić problemu. Niestety, podczas numerycznego rozwiązania (5.69) macierz momentów w (5.71) staje się źle uwarunkowana dla częstotliwości rezonansowych i w ich pobliżu – stąd pewna niestabilność widoczna na rysunku 5.12.

Rozpatrzmy teraz równanie typu MFIE. Zapisując (5.25) w postaci operatorowej, otrzymujemy:

$$L_H(\mathbf{J}) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i, \quad (5.73)$$

gdzie

$$L_H(\mathbf{J}) = \frac{\mathbf{J}}{2} - \hat{\mathbf{n}} \times \left(\frac{1}{4\pi} PV \int_S \nabla G \times \mathbf{J} dS' \right). \quad (5.74)$$

Stosując metodę momentów, przekształca się (5.73) w równanie macierzowe:

$$[Z_{mn}^H][I_n] = [V_m^H], \quad (5.75)$$

gdzie przez indeks H zaznaczono, że zarówno macierz impedancyjna, jak i wektor pobudzeń są wynikiem dyskretyzacji równania pola magnetycznego.

Równanie (5.73) nie ma jednoznacznego rozwiązania, jeżeli równanie

$$L_H(\mathbf{J}) = 0, \quad (5.76)$$

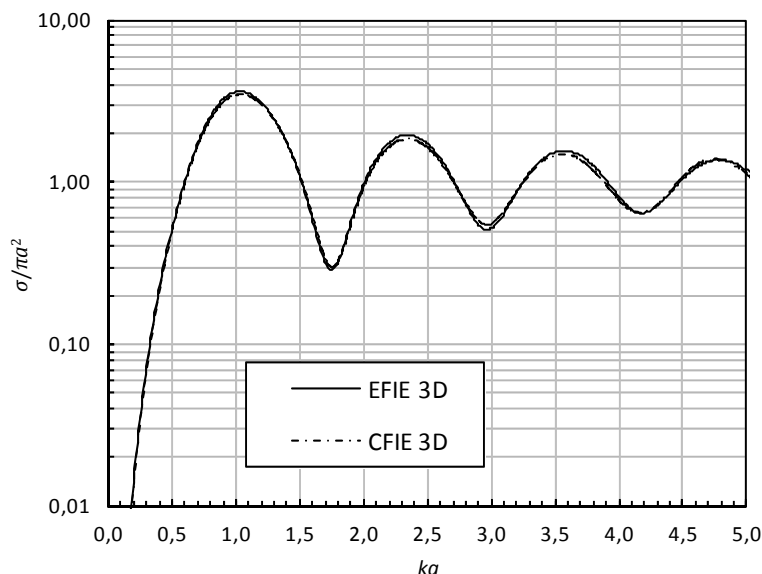
ma niezerowe rozwiązanie. Mautz i Harrington wykazali, że sytuacja taka występuje dla częstotliwości rezonansowych wnęki o powierzchni S wykonanej z idealnego przewodnika magnetycznego. Biorąc pod uwagę dualizm równań Maxwella, można zauważyć, że są to dokładnie takie same częstotliwości, dla których niejednoznaczne jest rozwiązanie równania (5.69) [5.11]. Dodatkowo można wykazać [5.11], że „pasowy” rozkład prądu, spełniający dla częstotliwości rezonansowej równanie (5.76), wytwarza niezerowe pole na zewnątrz S . Wyjaśnia to dużo bardziej niestabilne wyniki uzyskane z równania MFIE.

Znanych jest kilka sposobów zapobiegania niepożądanemu efektowi rezonansów wewnętrznych [5.4]. Należą do nich *metoda połączonych pól* [5.11] (ang. *combined field method*), *metoda połączonych źródeł* [5.12] (ang. *combined source method*), a także *metody uzupełnionych* (o dodatkowe warunki brzegowe) *równań całkowych* [5.13] (ang. *augmented EFIE* i *augmented MFIE* – odpowiednio AEFIE i AMFIE). Poniżej zilustrowano pierwszą z wymienionych metod, tzn. metodę połączonych pól.

Rozpatrzmy kombinację liniową równań (5.69) i (5.73) w postaci:

$$\frac{\alpha}{\eta} L_E(\mathbf{J}) + L_H(\mathbf{J}) = \frac{\alpha}{\eta} \mathbf{E}_{\text{tan}}^i + \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i, \quad (5.77)$$

gdzie $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$, a α – stały współczynnik.



Rys. 5.13. Unormowana skuteczna powierzchnia odbijająca metalowej sfery o promieniu a w funkcji ka ; obliczenia z użyciem równania EFIE oraz CFIE i modelu trójwymiarowego (3D)

Wspomniani już Mautz i Harrington wykazali, że jeżeli α przybiera wartości rzeczywiste i dodatnie, równanie (5.77), zwane równaniem całkowym połączonych pól (CFIE – ang. *Combined Field Integral Equation*) ma jednoznaczne rozwiązanie dla wszystkich częstotliwości. Równanie macierzowe odpowiadające równaniu CFIE ma postać:

$$\left[\frac{\alpha}{\eta} Z_{mn}^E + Z_{mn}^H \right] [I_n] = \left[\frac{\alpha}{\eta} V_m^E + V_m^H \right]. \quad (5.78)$$

Wyniki uzyskane z wykorzystaniem równania CFIE (zastosowano zalecaną przez Mautza i Harringtona wartość $\alpha = 0,2$), dla rozważanego wcześniej przykładu odbijania fali płaskiej przez metalową sferę, także pokazano na rysunku 5.12. Widać, że istotnie wyniki nie zawierają niestabilności w pobliżu częstotliwości rezonansowej. Dodatkowe porównanie wyników dla równań EFIE i CFIE w szerokim zakresie częstotliwości pokazano na rysunku 5.13.

Literatura

- [5.1] Poggio A.J., Miller E.K., *Integral equation solutions of three-dimensional scattering problems*, [w:] R. Mittra (red.), *Computer Techniques for Electromagnetics*, Oxford, England, Pergamon, 4, 1973.
- [5.2] Wilton D.R., *Computational methods*, [w:] P. Sabatier, E.R. Pike (red.), *Scattering*, r. 1.5.5, Academic Press, 2002, 316–365.

- [5.3] Rao S.M., Wilton D.R., Glisson A.W., *Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 30, No. 3, 1982, 409–418.
- [5.4] Wang J.J.H., *Generalized moment methods in electromagnetics*, John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore 1991.
- [5.5] Harrington R.F., *Time-harmonic electromagnetic fields*, McGraw-Hill Book Company, 1961.
- [5.6] Hwu S.U., Wilton D.R., Rao S.M., *Electromagnetic scattering and radiation by arbitrary conducting wire/surface configurations*, Proceedings IEEE Int. Symp. Antennas and Propagation, Vol. 26, 1988, 890–893.
- [5.7] Zheng D., Michalski K.A., *Analysis of arbitrarily shaped coax-fed microstrip antennas – a hybrid mixed-potential integral equation approach*, Microwave and Optical Techn. Letters, Vol. 3, No. 6, 1990, 200–203.
- [5.8] Zheng D., Michalski K.A., *Analysis of coaxially fed microstrip antennas of arbitrary shape with thick substrates*, J. Electromagn. Waves Applications, Vol. 5, No. 12, 1991, 1303–1327.
- [5.9] Andreasen M.G., *Scattering from bodies of revolution*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 13, No. 2, 1965, 303–310.
- [5.10] Mautz J.R., Harrington R.F., *Radiation and scattering from bodies of revolution*, Appl. Sci. Res., Vol. 20, 1969, 405–435.
- [5.11] Mautz J.R., Harrington R.F., *H-field, E-field and combined-field solutions for conducting bodies of revolution*, Arch. Elec. Übertragung, Vol. 32, 1978, 159–164.
- [5.12] Mautz J.R., Harrington R.F., *A combined-source solution for radiation and scattering from a perfectly conducting body*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 27, No. 4, 1979, 445–454.
- [5.13] Yaghjian A.D., *Augmented electric- and magnetic-field integral equations*, Radio Science, Vol. 16, 1981, 987–1001.

6. Jednorodne obiekty dielektryczne

6.1. Sformułowanie PMCHWT

Rozpatrzmy zagadnienie rozpraszania fal elektromagnetycznych przez obiekt jednorodny, scharakteryzowany parametrami ε_i , μ_i , umieszczony w jednorodnym ośrodku o parametrach ε_e , μ_e (rys. 6.1a). Obiekt jest poddany działaniu pola padającego $\mathbf{E}^i$, $\mathbf{H}^i$. Należy określić pola rozpraszane $\mathbf{E}^s$, $\mathbf{H}^s$ oraz pola $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ w obrębie obiektu. Do obliczeń wykorzystuje się omówioną w rozdziale 2 powierzchnię zasadę równoważności [6.1–6.4] (rys. 6.1b i 6.1c).

Zastępcze prądy powierzchniowe w zagadnieniu zewnętrznym są dane jako (2.48), (2.49):

$$\mathbf{J} = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s)^+, \quad (6.1)$$

$$\mathbf{M} = -\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s)^+. \quad (6.2)$$

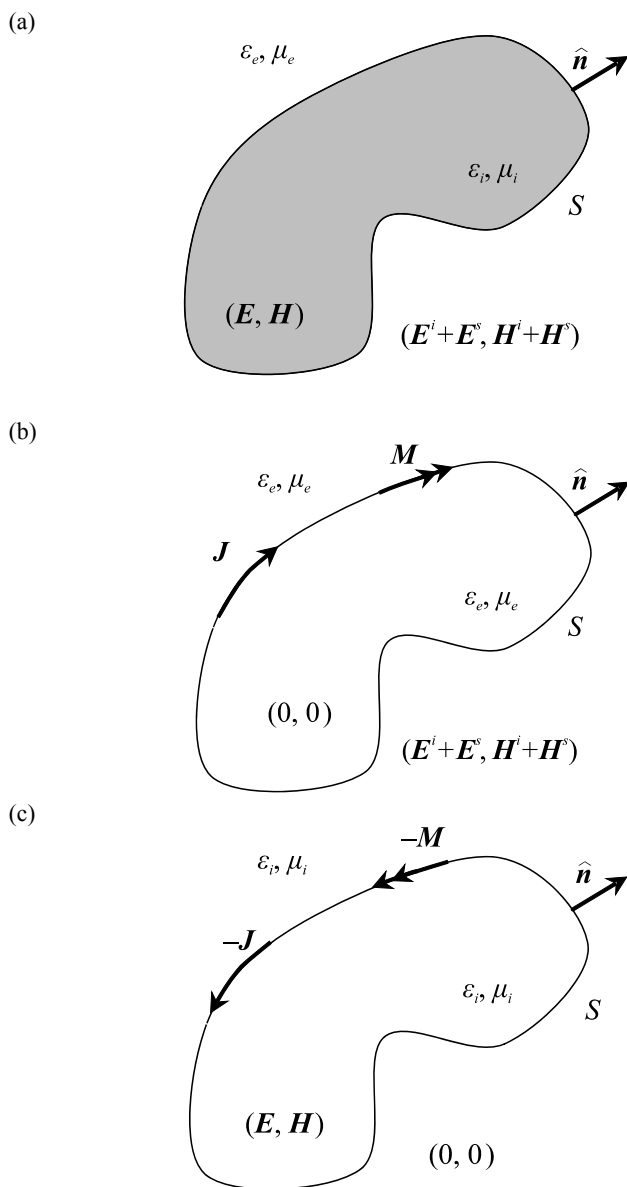
Ponieważ w konfiguracji oryginalnej składowe styczne do powierzchni S pola elektrycznego i magnetycznego są ciągłe:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^- = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s)^+, \quad (6.3)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^- = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s)^+, \quad (6.4)$$

na podstawie wzorów (2.50), (2.51) można stwierdzić, że w zagadnieniu zastępczym wewnętrznym promieniają prądy zastępcze o takiej samej jak (6.1), (6.2) wartości i kierunku, natomiast o przeciwnym zwrocie, co zaznaczono na rysunku 6.1c. Zwróćmy uwagę, że w problemie zastępczym zewnętrznym pola wtórne $\mathbf{E}^s$, $\mathbf{H}^s$ są wytwarzane przez prądy $\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$ promieniające w jednorodnym ośrodku o parametrach obszaru zewnętrznego^{*)}, natomiast w zagadnieniu zastępczym wewnętrznym pola $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ są wy-

^{*)} W konfiguracji pokazanej na rysunku 6.1b prądy $\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$ wytwarzają wewnątrz powierzchni S pola kompensujące pole padające.



Rys. 6.1. Jednorodny obiekt materialny zanurzony w polu elektromagnetycznym:
 (a) konfiguracja oryginalna; (b) konfiguracja równoważna zewnętrzna;
 (c) konfiguracja równoważna wewnętrzna

tworzone przez prąd $-\mathbf{J}$, $-\mathbf{M}$, promieniujące w jednorodnym ośrodku o parametrach obszaru wewnętrznego (obiekty).

Dla zagadnienia równoważnego zewnętrznego pola wewnątrz powierzchni S są zerowe, można zatem zapisać:

$$\left(\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s(\mathbf{J}, \mathbf{M})\right)_{\tan}^- = 0, \quad (6.5)$$

$$\left(\mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s(\mathbf{J}, \mathbf{M})\right)_{\tan}^- = 0. \quad (6.6)$$

gdzie indeks „-” oznacza, że pola są obliczane dla punktu obserwacji dążącego do S od wewnątrz.

Dla zagadnienia wewnętrznego zerowe są pola na zewnątrz powierzchni S , zatem:

$$\mathbf{E}_{\tan}^+(-\mathbf{J}, -\mathbf{M}) = 0, \quad (6.7)$$

$$\mathbf{H}_{\tan}^+(-\mathbf{J}, -\mathbf{M}) = 0. \quad (6.8)$$

gdzie indeks „+” oznacza, że pola są obliczane dla punktu obserwacji dążącego do S od zewnątrz.

Równania (6.5)–(6.8) tworzą układ czterech równań z dwiema niewiadomymi. W celu uzyskania dwóch równań z dwiema niewiadomymi stosuje się kombinację liniową podanych równań. Powszechnie stosowaną kombinacją, od inicjałów autorów, którzy wnieśli wkład w opracowanie metody (Poggio, Miller, Chang, Harrington, Wu, Tsai) [6.2, 6.5, 6.6], nazywaną sformułowaniem PMCHWT, jest układ równań wynikający z połączenia (6.5) z (6.7) oraz (6.6) z (6.8) [6.7]:

$$\left(\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s(\mathbf{J}, \mathbf{M})\right)_{\tan}^- = \mathbf{E}_{\tan}^+(-\mathbf{J}, -\mathbf{M}), \quad (6.9)$$

$$\left(\mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s(\mathbf{J}, \mathbf{M})\right)_{\tan}^- = \mathbf{H}_{\tan}^+(-\mathbf{J}, -\mathbf{M}). \quad (6.10)$$

Na podstawie wzorów (2.12)–(2.17) oraz równań ciągłości (2.10), (2.11) otrzymuje się:

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{J}) = -j\omega \frac{\mu_e}{4\pi} \int_S \mathbf{J} G^e dS' + \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon_e} \int_S \frac{\nabla'_S \cdot \mathbf{J}}{j\omega} G^e dS', \quad (6.11)$$

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{M}) = -\nabla \times \frac{1}{4\pi} \int_S \mathbf{M} G^e dS' = -\frac{1}{4\pi} \int_S \nabla G^e \times \mathbf{M} dS', \quad (6.12)$$

$$\mathbf{H}^s(\mathbf{J}) = \nabla \times \frac{1}{4\pi} \int_S \mathbf{J} G^e dS' = \frac{1}{4\pi} \int_S \nabla G^e \times \mathbf{J} dS', \quad (6.13)$$

$$\mathbf{H}^s(\mathbf{M}) = -j\omega \frac{\varepsilon_e}{4\pi} \int_S \mathbf{M} G^e dS' + \nabla \frac{1}{4\pi\mu_e} \int_S \frac{\nabla'_s \cdot \mathbf{M}}{j\omega} G^e dS', \quad (6.14)$$

gdzie funkcja Greena G^e jest obliczana ze wzoru (2.18) dla ośrodka zewnętrznego, scharakteryzowanego parametrami ε_e , μ_e oraz współczynnikiem propagacji $k = k^e = \omega\sqrt{\varepsilon_e\mu_e}$.

Podobnie jak w przypadku równania całkowego pola magnetycznego (5.23), całki w (6.12) i (6.13), powstałe w wyniku wprowadzenia operatora różniczkowania pod znak całki, wymagają zastosowania procedury przechodzenia do granicy, gdy punkt obserwacji zdąży do S . Otrzymuje się zatem:

$$\lim_{r \uparrow S} \mathbf{E}^s(\mathbf{M}) = \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r})}{2} \times \hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{4\pi} PV \int_S \nabla G^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{M}(\mathbf{r}) dS', \quad (6.15)$$

$$\lim_{r \uparrow S} \mathbf{H}^s(\mathbf{J}) = \hat{\mathbf{n}} \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r})}{2} + \frac{1}{4\pi} PV \int_S \nabla G^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) dS'. \quad (6.16)$$

Podobnie dla zagadnienia wewnętrznego:

$$\mathbf{E}(-\mathbf{J}) = j\omega \frac{\mu_i}{4\pi} \int_S \mathbf{J} G^i dS' - \nabla \frac{1}{4\pi\varepsilon_i} \int_S \frac{\nabla'_s \cdot \mathbf{J}}{j\omega} G^i dS', \quad (6.17)$$

$$\mathbf{E}(-\mathbf{M}) = \nabla \times \frac{1}{4\pi} \int_S \mathbf{M} G^i dS' = \frac{1}{4\pi} \int_S \nabla G^i \times \mathbf{M} dS', \quad (6.18)$$

$$\mathbf{H}(-\mathbf{J}) = -\nabla \times \frac{1}{4\pi} \int_S \mathbf{J} G^i dS' = -\frac{1}{4\pi} \int_S \nabla G^i \times \mathbf{J} dS', \quad (6.19)$$

$$\mathbf{H}(-\mathbf{M}) = j\omega \frac{\varepsilon_i}{4\pi} \int_S \mathbf{M} G^i dS' - \nabla \frac{1}{4\pi\mu_i} \int_S \frac{\nabla'_s \cdot \mathbf{M}}{j\omega} G^i dS', \quad (6.20)$$

gdzie funkcja Greena G^i jest obliczana ze wzoru (2.18) dla ośrodka wewnętrznego, scharakteryzowanego parametrami ε_i , μ_i oraz współczynnikiem propagacji $k = k^i = \omega\sqrt{\varepsilon_i\mu_i}$.

W tym przypadku interesująca jest graniczna wartość pola, gdy punkt obserwacji zdąży do S od zewnątrz. Ze wzorów (6.18) i (6.19) otrzymuje się wtedy:

$$\lim_{r \downarrow S} \mathbf{E}(-\mathbf{M}) = \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r})}{2} \times \hat{\mathbf{n}} + \frac{1}{4\pi} PV \int_S \nabla G^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{M}(\mathbf{r}) dS', \quad (6.21)$$

$$\lim_{r \downarrow S} \mathbf{H}(-\mathbf{J}) = \hat{\mathbf{n}} \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r})}{2} - \frac{1}{4\pi} PV \int_S \nabla G^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) dS'. \quad (6.22)$$

Po podstawieniu wzorów (6.11)–(6.22) do (6.9) i (6.10) otrzymuje się układ równań [6.8]:

$$\left(j\omega \frac{\mu_e}{4\pi} \int_S \mathbf{J} G^e dS' - \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon_e} \int_S \frac{\nabla'_S \cdot \mathbf{J}}{j\omega} G^e dS' + \frac{1}{4\pi} PV \int_S \nabla G^e \times \mathbf{M} dS' + j\omega \frac{\mu_i}{4\pi} \int_S \mathbf{J} G^i dS' - \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon_i} \int_S \frac{\nabla'_S \cdot \mathbf{J}}{j\omega} G^i dS' + \frac{1}{4\pi} PV \int_S \nabla G^e \times \mathbf{M} dS' \right)_{\tan} = \mathbf{E}_{\tan}^i, \quad (6.23)$$

$$\left(j\omega \frac{\epsilon_e}{4\pi} \int_S \mathbf{M} G^e dS' - \nabla \frac{1}{4\pi\mu_e} \int_S \frac{\nabla'_S \cdot \mathbf{M}}{j\omega} G^e dS' - \frac{1}{4\pi} PV \int_S \nabla G^e \times \mathbf{J} dS' + j\omega \frac{\epsilon_i}{4\pi} \int_S \mathbf{M} G^i dS' - \nabla \frac{1}{4\pi\mu_i} \int_S \frac{\nabla'_S \cdot \mathbf{M}}{j\omega} G^i dS' - \frac{1}{4\pi} PV \int_S \nabla G^e \times \mathbf{J} dS' \right)_{\tan} = \mathbf{H}_{\tan}^i. \quad (6.24)$$

W otrzymanych równaniach nie występują części osobliwe, które ulegają redukcji przy podstawianiu (6.15), (6.16) i (6.21), (6.22) do (6.9) i (6.10). We wzorach (6.23) i (6.24) nie użyto obecnych we wzorach (6.9), (6.10) oznaczeń $\pm$ wskazujących stronę powierzchni S , ponieważ wszystkie występujące tu składowe pola mają ciągłą (podczas przechodzenia przez S) składową styczną.

Rozwiązanie układu równań całkowych (6.23), (6.24) polega na znalezieniu aproksymacji rozkładu prądu zastępczego $\mathbf{J}$ i $\mathbf{M}$ na powierzchni S . Gdy te aproksymacje są znane, pole rozproszone na zewnątrz bryły można obliczyć z (6.11)–(6.14), a pola wytworzone w obrębie bryły – z (6.17)–(6.20).

Wynikowe równania sformułowania PMCHWT można uzyskać metodą alternatywną w stosunku do przedstawionej [6.3]. Zamiast (6.9) i (6.10), można bowiem zapisać:

$$\left(\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s(\mathbf{J}, \mathbf{M}) \right)_{\tan}^+ = \mathbf{E}_{\tan}^-(-\mathbf{J}, -\mathbf{M}), \quad (6.25)$$

$$\left(\mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s(\mathbf{J}, \mathbf{M}) \right)_{\tan}^+ = \mathbf{H}_{\tan}^-(-\mathbf{J}, -\mathbf{M}). \quad (6.26)$$

Podane równania opisują warunki brzegowe w zagadnieniu oryginalnym, z uwzględnieniem, że prądy zastępcze pojawiające się w konfiguracjach równoważnych odtwarzają właściwe, oryginalne pole w odpowiednich podobzarach. Dalsze postępowanie jest takie samo, jak poprzednio, z tym że przy wyodrębnianiu części osobliwych punkt obserwacji osiąga powierzchnię S od strony przeciwnej niż w (6.15), (6.16) i (6.21), (6.22), co prowadzi do zmian znaku wyodrębnionych części osobliwych. Niemniej jednak po podstawieniu uzyskanych formuł do (6.25), (6.26) te części się redukują, w efekcie uzyskujemy więc ponownie (6.23), (6.24).

6.2. Macierz impedancyjna i wektor pobudzenia

Zarówno zastępczy prąd elektryczny $\mathbf{J}$, jak i zastępczy prąd magnetyczny $\mathbf{M}$ można aproksymować, korzystając z tego samego zestawu funkcji bazowych (np. funkcji daszkowych RWG):

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cong \sum_{n=1}^N I_n \mathbf{f}_n(\mathbf{r}'), \quad (6.27)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cong \sum_{n=1}^N M_n \mathbf{f}_n(\mathbf{r}'). \quad (6.28)$$

Po podstawieniu (6.27) i (6.28) do (6.23), (6.24) oraz wykonaniu testowania *obu* równań z wykorzystaniem tego samego zbioru funkcji, można przekształcić układ (6.23), (6.24) w układ $2N$ równań liniowych, z $2N$ niewiadomymi współczynnikami I_n oraz M_n , o postaci:

$$\begin{bmatrix} [Z_{mn}^{EJ}] & [Z_{mn}^{EM}] \\ [Z_{mn}^{HJ}] & [Z_{mn}^{HM}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I_n] \\ [M_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [V_m^E] \\ [V_m^H] \end{bmatrix}, \quad (6.29)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} Z_{mn}^{EJ} = & j\omega \frac{\mu_e}{4\pi} \int_S \int_S G^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS' dS \\ & + j\omega \frac{\mu_i}{4\pi} \int_S \int_S G^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS' dS \\ & - \frac{1}{j\omega 4\pi \epsilon_e} \int_S \left\{ \nabla \left(\int_S \nabla'_S \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') G^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right) \right\} \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS \\ & - \frac{1}{j\omega 4\pi \epsilon_i} \int_S \left\{ \nabla \left(\int_S \nabla'_S \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') G^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right) \right\} \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS, \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} Z_{mn}^{EM} = & \int_S \left(\frac{1}{4\pi} PV \int_S \nabla G^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' \right) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS \\ & + \int_S \left(\frac{1}{4\pi} PV \int_S \nabla G^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' \right) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS, \end{aligned} \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned} Z_{mn}^{HJ} = & - \int_S \left(\frac{1}{4\pi} PV \int_S \nabla G^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' \right) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS \\ & - \int_S \left(\frac{1}{4\pi} PV \int_S \nabla G^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' \right) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS, \end{aligned} \quad (6.32)$$

$$\begin{aligned}
Z_{mn}^{HM} = & j\omega \frac{\epsilon_e}{4\pi} \int_S \int_S G^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS' dS \\
& + j\omega \frac{\epsilon_i}{4\pi} \int_S \int_S G^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS' dS \\
& - \frac{1}{j\omega 4\pi \mu_e} \int_S \left\{ \nabla \left(\int_S \nabla'_S \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') G^e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right) \right\} \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS \\
& - \frac{1}{j\omega 4\pi \mu_i} \int_S \left\{ \nabla \left(\int_S \nabla'_S \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') G^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right) \right\} \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS,
\end{aligned} \tag{6.33}$$

$$V_m^E = \int_S \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS, \tag{6.34}$$

$$V_m^H = \int_S \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS. \tag{6.35}$$

We wzorach (6.30) i (6.33) są obliczane takie same całki, pomnożone przez inne współczynniki. Podobnie (6.31) i (6.32) różnią się tylko znakiem.

W przypadku zastosowania w obliczeniach funkcji RWG w obliczaniu elementów macierzy impedancyjnej oraz wektora pobudzenia można zastosować postępowanie opisane w rozdziale 5, a zwłaszcza całkowanie przez części w przypadku składników (6.30) i (6.33) zawierających gradient. Stosując oznaczenia wprowadzone w rozdziale 5, otrzymujemy dla (6.30):

$$\begin{aligned}
Z_{mn}^{EJ} = & j\omega l_m \left[\left(A_n^e(\mathbf{r}_m^{c+}) + A_n^i(\mathbf{r}_m^{c+}) \right) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{c+}}{2} + \left(A_n^e(\mathbf{r}_m^{c-}) + A_n^i(\mathbf{r}_m^{c-}) \right) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{c-}}{2} \right] \\
& + l_m \left[\Phi_n^e(\mathbf{r}_m^{c-}) - \Phi_n^e(\mathbf{r}_m^{c+}) + \Phi_n^i(\mathbf{r}_m^{c-}) - \Phi_n^i(\mathbf{r}_m^{c+}) \right],
\end{aligned} \tag{6.36}$$

gdzie:

$$A_n^{e,i}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_{e,i}}{4\pi} \int_S G^{e,i}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS', \tag{6.37}$$

$$\Phi_n^{e,i}(\mathbf{r}) = \frac{1}{j\omega 4\pi \epsilon_{e,i}} \int_S \nabla'_S \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') G^{e,i}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS'. \tag{6.38}$$

Podobnie dla (6.33):

$$\begin{aligned}
Z_{mn}^{HM} = & j\omega l_m \left[\left(F_n^e(\mathbf{r}_m^{c+}) + F_n^i(\mathbf{r}_m^{c+}) \right) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{c+}}{2} + \left(F_n^e(\mathbf{r}_m^{c-}) + F_n^i(\mathbf{r}_m^{c-}) \right) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{c-}}{2} \right] \\
& + l_m \left[\Psi_n^e(\mathbf{r}_m^{c-}) - \Psi_n^e(\mathbf{r}_m^{c+}) + \Psi_n^i(\mathbf{r}_m^{c-}) - \Psi_n^i(\mathbf{r}_m^{c+}) \right],
\end{aligned} \tag{6.39}$$

gdzie:

$$\mathbf{F}_n^{e,i}(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon_{e,i}}{4\pi} \int_S G^{e,i}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS', \quad (6.40)$$

$$\Psi_n^{e,i}(\mathbf{r}) = \frac{1}{j\omega 4\pi \mu_{e,i}} \int_S \nabla'_S \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') G^{e,i}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS'. \quad (6.41)$$

Dla (6.31) i (6.32) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} Z_{mn}^{EM(HJ)} = \pm l_m \bigg[& \left(\frac{1}{4\pi} PV \int_S \nabla G^e(\mathbf{r}_m^{c+}, \mathbf{r}') \times \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' \right. \\ & + \frac{1}{4\pi} PV \int_S \nabla G^i(\mathbf{r}_m^{c+}, \mathbf{r}') \times \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' \bigg) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{c+}}{2} \\ & + \left(\frac{1}{4\pi} PV \int_S \nabla G^e(\mathbf{r}_m^{c-}, \mathbf{r}') \times \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\pi} PV \int_S \nabla G^i(\mathbf{r}_m^{c-}, \mathbf{r}') \times \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' \right) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{c-}}{2} \bigg], \end{aligned} \quad (6.42)$$

gdzie znak plus dotyczy Z_{mn}^{EM} , a minus Z_{mn}^{HJ} .

Podobnie oblicza się elementy wektora pobudzenia:

$$\mathbf{V}_m^E = l_m \left[\mathbf{E}^i(\mathbf{r}_m^{c+}) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{c+}}{2} + \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_m^{c-}) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{c-}}{2} \right], \quad (6.43)$$

$$\mathbf{V}_m^H = l_m \left[\mathbf{H}^i(\mathbf{r}_m^{c+}) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{c+}}{2} + \mathbf{H}^i(\mathbf{r}_m^{c-}) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{c-}}{2} \right]. \quad (6.44)$$

Podane formuły nadają się do analizy dowolnych jednorodnych brył dielektrycznych, których powierzchnia jest aproksymowana za pomocą trójkątnych łatek. Jeżeli bryła charakteryzuje się symetrią obrotową, można skonstruować stosowny algorytm zamiast funkcji RWG, podstawiając w (6.30)–(6.35) funkcje bazowe i testowe omówione w punkcie 5.4.

6.3. Sformułowanie z podwójnym prądem elektrycznym

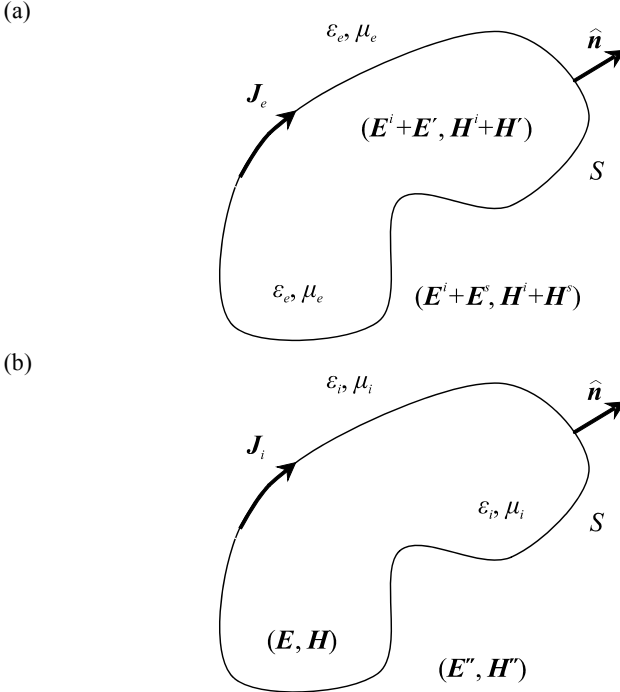
W rozdziale 2.5, poświęconym między innymi powierzchniowym zasadom równoważności, stwierdzono, że konfiguracje zastępcze, w których rozkład zastępczych prądów powierzchniowych wytwarza właściwe pola w jednym z regionów, a zerowe

w drugim regionie, nie są jedynymi z możliwych. W konfiguracji zastępczej można, stosując zasadę superpozycji, dodać do rozkładu źródeł zastępczych dowolny inny rozkład źródeł, wytwarzający zerowe pole w obszarze, dla którego zachowujemy pola oryginalne. W zagadnieniu zastępczym zewnętrznym z rysunku 6.1b można na powierzchni S umieścić (dodatkowo w stosunku do już istniejących prądów $\mathbf{J}$ i $\mathbf{M}$) rozkład źródeł wytwarzający zerowe pole w obszarze zewnętrznym, a niezerowe pole w dopełniającym obszarze wewnętrznym. Z kolei w zagadnieniu zastępczym wewnętrznym z rysunku 6.1c można postąpić dualnie, to jest już istniejący rozkład $-\mathbf{J}$ i $-\mathbf{M}$ uzupełnić o rozkład źródeł generujący zerowe pola wewnątrz S , a niezerowe pola na zewnątrz.

Wykorzystajmy tę możliwość, postulując aby niezerowe pole w obszarach dopełniających miało składową pola elektrycznego styczną do S taką samą jak składowa styczna tego pola w obszarze oryginalnym (rys. 6.2).

Oznacza to, że dla modelu z rysunku 6.2a:

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}^i + \mathbf{E}')^- = \hat{n} \times (\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s)^+, \quad (6.45)$$



Rys. 6.2. Konfiguracje zastępcze dla zagadnienia z rysunku 6.1a, w których nie występują prądy magnetyczne: (a) konfiguracja zastępcza zewnętrzna; (b) konfiguracja zastępcza wewnętrzna

natomiast dla modelu z rysunku 6.2b:

$$\hat{n} \times \mathbf{E}^{n+} = \hat{n} \times \mathbf{E}^{-}. \quad (6.46)$$

Ze wzorów (6.45) i (6.46) wynika, że w nowych konfiguracjach zastępczych nie będzie występował prąd magnetyczny. Obecność niezerowego pola magnetycznego w obszarach dopełniających powoduje z kolei, że elektryczny prąd zastępczy będzie inny niż w konfiguracjach zastępczych z rysunku 6.1, a zwłaszcza, że prąd promieniujący w problemie zastępczym zewnętrznym $\mathbf{J}_e$ nie jest pomnożonym przez -1 prądem promieniującym w problemie zastępczym wewnętrznym $\mathbf{J}_i$.

Układ równań pozwalający obliczyć rozkłady $\mathbf{J}_e$ oraz $\mathbf{J}_i$ tworzy się, zapisując warunki ciągłości składowych stycznych pola elektrycznego i magnetycznego, wynikające z sytuacji oryginalnej, oraz wykorzystując fakt, że w problemach zastępczych pola w obszarze równoważności są podobne jak w problemie oryginalnym:

$$\left(\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s(\mathbf{J}_e) \right)_{\tan}^+ = \mathbf{E}_{\tan}^{-}(\mathbf{J}_i), \quad (6.47)$$

$$\hat{n} \times \left(\mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s(\mathbf{J}_e) \right)^+ = \hat{n} \times \mathbf{H}^{-}(\mathbf{J}_i). \quad (6.48)$$

Układ równań (6.47), (6.48) stanowi układ dwóch równań z dwoma niewiadomymi $\mathbf{J}_e$ oraz $\mathbf{J}_i$ i można go rozwiązać stosując metodę podobną do opisanej w punkcie 6.2. Należy przy tym pamiętać, że w równaniu (6.46) nie redukują się części osobiłwe, jak w równaniu (6.24). Ze względu na to, że w omawianym sformułowaniu poszukuje się dwóch prądów elektrycznych [6.9, 6.10], będziemy nazywać je sformułowaniem JJ.

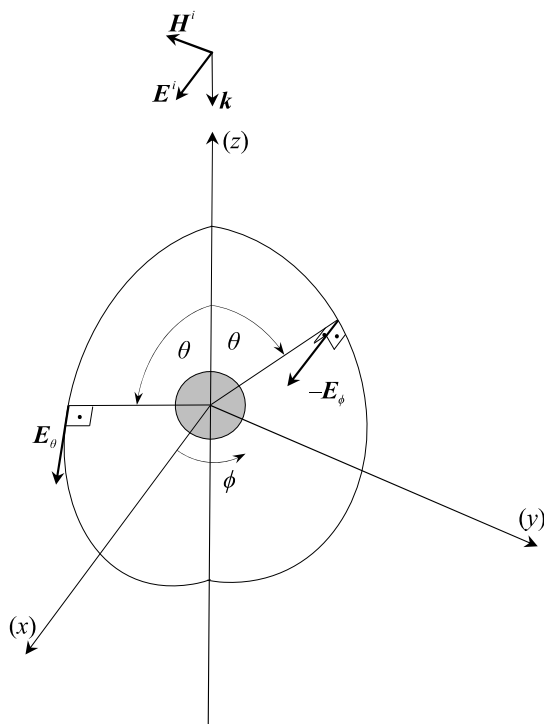
Wadą sformułowania JJ jest problem fałszywych rezonansów [6.9]. W zagadnieniu zastępczym zewnętrznym, dla częstotliwości rezonansowej hipotetycznej doskonale przewodzącej wnęki o powierzchni S , może istnieć pasożytniczy niezerowy rozkład prądu elektrycznego, wytwarzający zerowe pola na zewnątrz S (a zatem niezmienniający oryginalnego pola w tym obszarze), a jednocześnie wytwarzający niezerowe pole wewnątrz S , przy czym składowa elektryczna tego pola styczna do S od wewnątrz jest zerowa, nie zmienia więc warunku (6.45). Rozwiązanie układu (6.47), (6.48) staje się wtedy niejednoznaczne, podobnie jak w przypadku równania EFIE dla zamkniętych powierzchni przewodzących. Problematiczne częstotliwości to częstotliwości rezonansowe doskonale przewodzącej wnęki o powierzchni S , wypełnionej materiałem o parametrach ośrodka zewnętrznego [6.9].

6.4. Przykład obliczeniowy

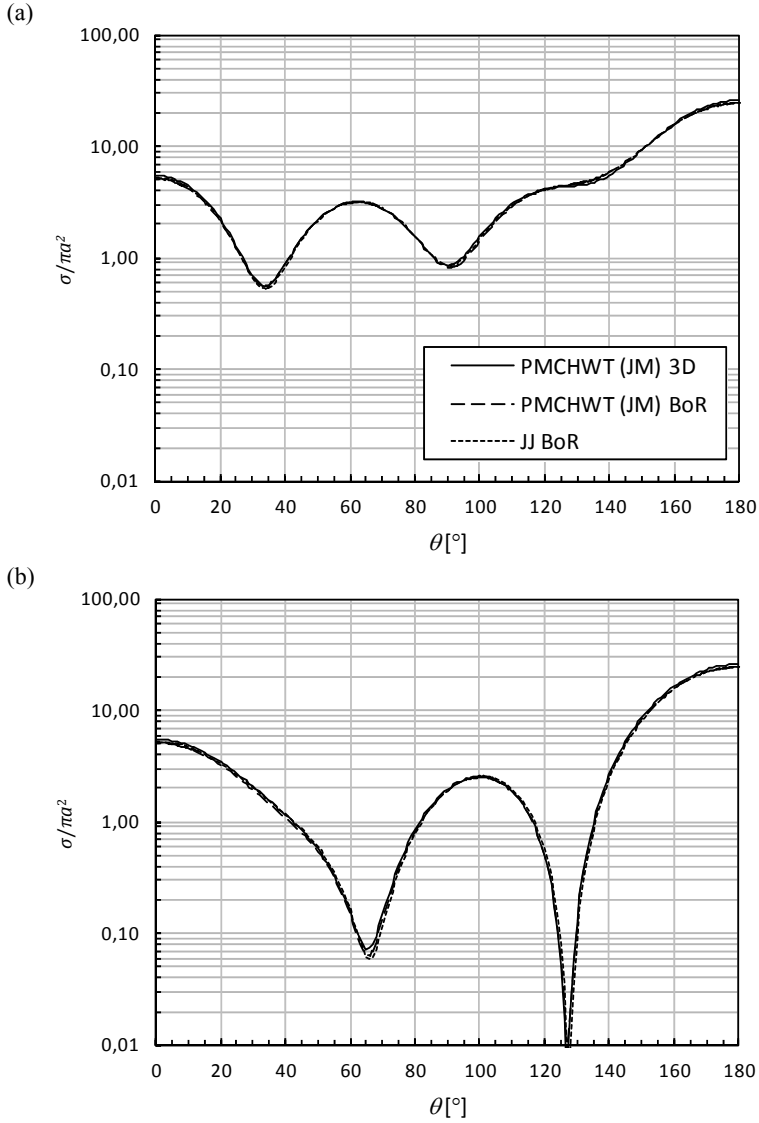
Rozpatrzmy zagadnienie podobne do pokazanego na rysunku 5.10, w którym kula oświetlona płaską falą elektromagnetyczną jest wykonana z jednorodnego dielektryka

o względnej przenikalności elektrycznej równej 4. Obliczymy skuteczną powierzchnię odbijającą w funkcji kierunku fali odbitej, dla dwóch płaszczyzn XZ , ($\phi = 0^\circ$) oraz YZ , ($\phi = 90^\circ$) pokazanych na rysunku 6.3. Fala pobudzająca pada z kierunku przeciwnego do osi (z), a wektor elektrycznej składowej pola padającego jest spolaryzowany w kierunku osi (x). Wielkością obliczaną są parametry (por. definicja (2.28)) $\sigma_{\theta\theta}$ w płaszczyźnie XZ oraz $\sigma_{\phi\theta}$ w płaszczyźnie YZ .

Obliczenia przeprowadzono, wykorzystując trzy algorytmy – algorytm trójwymiarowy PMCHWT z funkcjami daszkowymi RWG (PMCHWT 3D), algorytm PMCHWT dla brył o symetrii obrotowej (PMCHWT BoR) oraz algorytm dla brył o symetrii obrotowej z dwoma prądami elektrycznymi (JJ BoR). Wyniki obliczeń pokazano na rysunku 6.4. W przypadku algorytmu 3D powierzchnia kuli została podzielona na 1224 trójkąty (obwód kuli podzielono na 36 odcinków), co dało 1836 funkcji bazowych RWG oraz $2 \times 1836 = 3672$ niewiadomych w wynikowym układzie równań liniowych (podwojona liczba niewiadomych w stosunku do liczby funkcji bazowych wynika z tego, że zestaw funkcji bazowych został wykorzystany dwukrotnie – do modelowania gęstości powierzchniowej prądu elektrycznego i magnetycznego). W przypadku algorytmów dla brył obrotowych linia tworząca sfery (połowa obwodu) została



Rys. 6.3. Rozpraszanie fali elektromagnetycznej przez jednorodną kulę dielektryczną

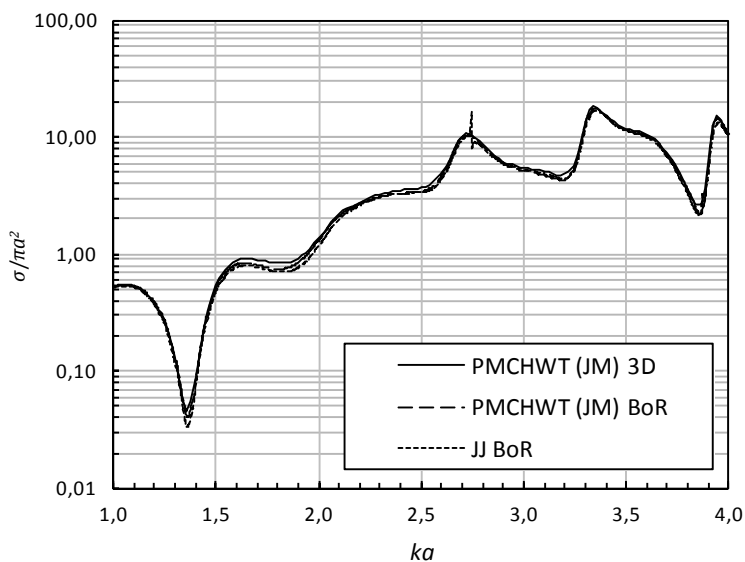


Rys. 6.4. Skuteczna powierzchnia odbijająca jednorodnej kuli dielektrycznej o promieniu a i przenikalności $\varepsilon_r = 4,0$, przy $ka = 3,0$, w funkcji kąta θ ; (a) $\sigma_{\theta\theta}$; (b) $\sigma_{\phi\theta}$

podzielona na 18 odcinków, co dało układy równań o 70 niewiadomych współczynnikach. Warto zwrócić uwagę na celowość stosowania, tam gdzie jest to możliwe, modeli wykorzystujących symetrię obrotową – jak widać z powyższych danych, porównywalną dokładność obliczeń uzyskano, rozwiązując układ równań o ponadpięćdziesięciokrotnie mniejszej liczbie niewiadomych.

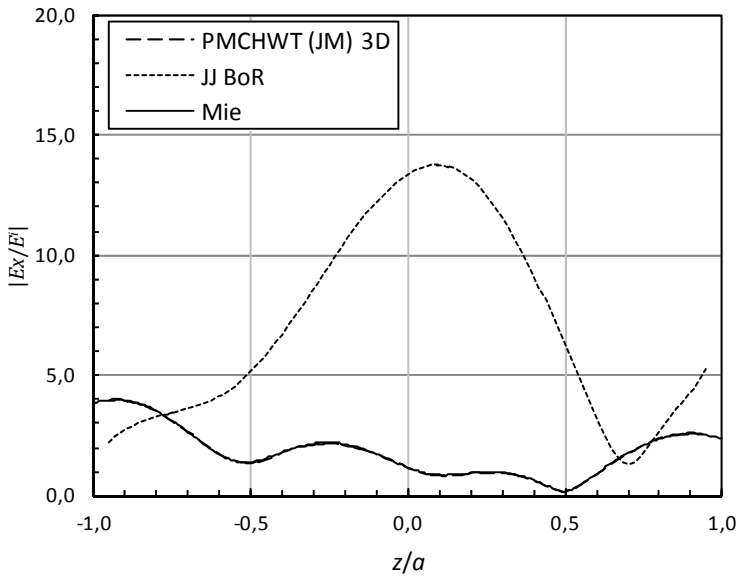
W kolejnym przykładzie obliczono skuteczną powierzchnię odbijającą w kierunku, skąd pada fala pobudzająca, czyli przekrój radarowy monostatyczny, w funkcji unormowanego współczynnika propagacji. Porównano obliczenia dla algorytmów PMCHWT 3D i JJ BoR. Wyniki pokazano na rysunku 6.5. W celu zwiększenia dokładności dla większych częstotliwości zastosowano dwa razy gęstszy podział obwodu kuli niż w poprzednim przykładzie. Oznacza to, że w modelu trójwymiarowym rozwiązywano układ równań liniowych o 15120 niewiadomych, a w przypadku algorytmów dla brył obrotowych – o 142 niewiadomych.

Zwróćmy uwagę na niestabilne zachowanie algorytmu JJ w okolicy $ka = 2,744$ (rezonans kulistej doskonale przewodzącej wnęki wypełnionej ośrodkiem zewnętrznym, czyli powietrzem). Rezonansowa wartość ka obliczona numerycznie wyniosła 2,746 – dla odpowiadającej tej wartości częstotliwości obliczono następnie pole elektryczne w funkcji położenia na osi (z) wewnątrz dielektryka. Wyniki pokazano na rysunku 6.6. Jak widać, wyniki uzyskane algorytmem PMCHWT JM oraz algorytmem JJ różnią się diametralnie – w celu wykazania, że błędne wyniki daje algorytm JJ na wykresie umieszczono również wyniki uzyskane za pomocą rozwiązania analitycznego (szeregi Mie)^{*)}.

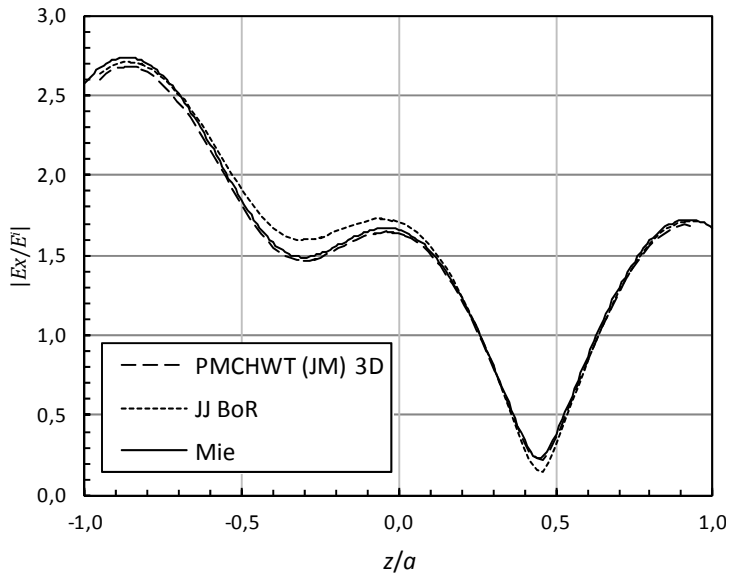


Rys. 6.5. Skuteczna wsteczna powierzchnia odbijająca jednorodnej kuli dielektrycznej o promieniu a i przenikalności $\varepsilon_r = 4,0$, w funkcji ka

^{*)} Do obliczeń wykorzystano autorski program analizy kul dwuwarstwowych napisany na podstawie artykułu: A.I. Aden, M. Kerker, *Scattering of electromagnetic waves from two concentric spheres*, Journal of Applied Physics, Vol. 22, No. 10, 1951, 1242–1246. Program ten można wykorzystać do analizy kuli jednorodnej, przyjmując takie same parametry obu warstw.



Rys. 6.6. Pole wzdłuż osi (z) jednorodnej kuli dielektrycznej o promieniu a i przenikalności $\varepsilon_r = 4,0$, dla $ka = 2,746$



Rys. 6.7. Pole wzdłuż osi (z) jednorodnej kuli dielektrycznej o promieniu a i przenikalności $\varepsilon_r = 4,0$, dla $ka = 2,0$

Obliczenia powtórzono dla $ka = 2,0$, czyli z dala od częstotliwości rezonansowej. Jak widać na wykresie pokazanym na rysunku 6.7, tym razem oba algorytmy dają poprawne wyniki.

Zaprezentowane tu wyniki wskazują, że o ile sformułowanie PMCHWT daje poprawne rezultaty w każdej sytuacji, o tyle – zgodnie z przewidywaniami teoretycznymi – sformułowanie oparte na wykorzystaniu dwóch prądów elektrycznych zawodzi dla niektórych częstotliwości.

Przedstawione sformułowania zostały wybrane z wielu rozważanych w literaturze, jako dobrze ilustrujące problematykę związaną z analizą interakcji pola elektromagnetycznego z jednorodnymi obiektami dielektrycznymi. Przegląd innych możliwości można znaleźć w artykule R.F. Harringtona [6.9]. Na uwagę zasługują też prace poświęcone poprawie dokładności tego typu modeli dla dielektryków o niewielkim kontraście (o przenikalności nieznacznie różniącej się od przenikalności otaczającego ośrodka) [6.11–6.13] oraz zagadnienia związane z modelowaniem dielektryków o dużej stratności [6.13].

Zwróćmy też uwagę, że sformułowanie PMCHWT może być łatwo użyte do znalezienia częstotliwości rezonansowych obiektów dielektrycznych, stowarzyszonych z nimi współczynników dobroci własnej oraz rezonansowych rozkładów pola elektromagnetycznego [6.14, 6.15] – metoda opiera się na zasadzie streszczonej w punkcie 3.3 i jest podobna do zastosowanej w punkcie 4.5 dla rezonansów własnych anteny prętowej.

Literatura

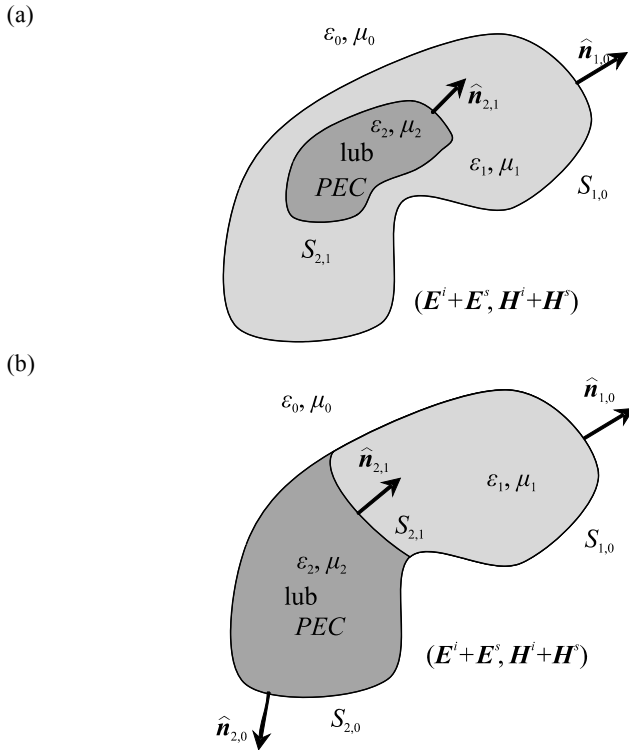
- [6.1] Harrington R.F., *Time-harmonic electromagnetic fields*, McGraw-Hill Book Company, 1961.
- [6.2] Poggio A.J., Miller E.K., *Integral equation solutions of three-dimensional scattering problems*, [w:] R. Mittra (red.), *Computer Techniques for Electromagnetics*, Oxford, England, Pergamon, 4, 1973.
- [6.3] Wilton D.R., *Computational methods*, [w:] P. Sabatier, E.R. Pike (red.), *Scattering*, r. 1.5.5, Academic Press, 2002, 316–365.
- [6.4] Wang J.J.H., *Generalized Moment Methods in Electromagnetics*, John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore 1991.
- [6.5] Chang Y., Harrington R.F., *A surface formulation for characteristic modes of material bodies*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 25, No. 6, 1977, 789–795.
- [6.6] Wu T.-K., Tsai L.L., *Scattering from arbitrarily-shaped lossy dielectric bodies of revolution*, Radio Science, Vol. 12, No. 5, 1977, 709–718.
- [6.7] Mautz J.R., Harrington R.F., *Electromagnetic scattering from a homogeneous material body of revolution*, Arch. Elek. Übertragung., Vol. 33, 1979, 71–80.
- [6.8] Umashankar K., Taflov A., Rao S.M., *Electromagnetic scattering by arbitrary shaped three-dimensional homogeneous lossy dielectric objects*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 34, No. 6, 1986, 758–766.

- [6.9] Harrington R.F., *Boundary integral formulations for homogeneous material bodies*, Journal of Electromagnetic Waves and Applications, Vol. 3, No. 1, 1989, 1–15.
- [6.10] Singer H., Bruns H.-D., Burger G., *State of the art in the method of moments*, Proc. of International Symposium on Electromagnetic Compatibility, Santa Clara 1996, 122–127.
- [6.11] Goggans P.M., Glisson A., *A surface integral equation formulation for low contrast scatterers based on radiation currents*, ACES Journal, Vol. 10, No. 1, 1995, 15–18.
- [6.12] Ergül Ö., Gürel L., *Novel electromagnetic surface integral equations for highly accurate computations of dielectric bodies with arbitrarily low contrasts*, Journal of Computational Physics, 227, 2008, 9898–9912.
- [6.13] Kolundžija B.M., Djordjević A.R., *Electromagnetic modeling of composite metallic and dielectric structures*, Artech House, 2002.
- [6.14] Glisson A.W., Kajfez D., James J., *Evaluation of modes in dielectric resonators using surface integral equation formulation*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. 31, No. 12, 1983, 1023–1029.
- [6.15] Kajfez D., Glisson A.W., James J., *Computed modal field distributions for isolated dielectric resonators*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. 32, No. 12, 1984, 1609–1616.

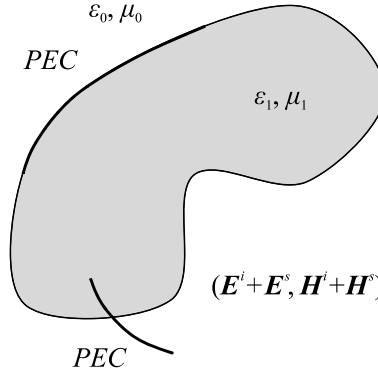
7. Obiekty złożone

7.1. Sformułowanie PMCHWT–EFIE

Rozpatrzmy teraz problem, w którym analizowana bryła składa się z dwóch jednorodnych obszarów. Dwie możliwe sytuacje tego rodzaju pokazano na rysunku 7.1. W pierwszym przypadku (rys. 7.1a) mamy do czynienia z zagadnieniem, w którym jeden z obszarów, wykonany z materiału jednorodnego lub z idealnego przewodnika



Rys. 7.1. Obiekty złożone: obiekt z dielektrykiem otaczającym fragment wewnętrzny (a); obiekt złożony z dwóch przylegających obszarów (b)



Rys. 7.2. Obiekt dielektryczny z fragmentami nieskończenie cienkich powierzchni przewodzących

elektrycznego (PEC), nie ma wspólnej granicy z otaczającym obiekt ośrodkiem, czyli jest całkowicie zanurzony w drugim obszarze wykonanym z materiału o innych od obszaru wewnętrznego parametrach. W drugim przypadku (rys. 7.1b) rozważa się sytuację, w której obydwa podobszary bryły graniczą z otaczającym ją ośrodkiem – w tym przypadku założono, że albo obydwa obszary są wykonane z jednorodnych materiałów o różniących się parametrach, albo też jeden z fragmentów jest doskonałym przewodnikiem.

Szczególnymi przypadkami tej ostatniej sytuacji są konfiguracje, w których część powierzchni bryły jednorodnej jest pokryta niekończenie cienką powłoką wykonaną z idealnego przewodnika lub w których nieskończenie cienki przewodnik przecina powierzchnię bryły (rys. 7.2).

Zastosowano tu konwencję nazewniczą różniącą się nieco od stosowanej w poprzednich rozdziałach, gdzie obiekt był opisany pojedynczą powierzchnią rozgraniczającą dwa obszary, zewnętrzny i wewnętrzny. Tu zdefiniowano trzy obszary, których parametry oznaczono cyframi 0, 1 i 2, przy czym zero rezerwuje się dla ośrodka otaczającego obiekt, a obszar drugi może być zastąpiony idealnym przewodnikiem (por. rys. 7.1). Powierzchnię ograniczającą obszar jednorodny oznacza się pojedynczym indeksem, tzn. S_1 jest powierzchnią wokół obszaru o parametrach ϵ_1, μ_1 , S_2 – obszar o parametrach ϵ_2, μ_2 , a S_0 – wokół całego obiektu. Jeżeli dwa obszary mają wspólną granicę, ten fragment powierzchni oznacza się dwoma indeksami, np. $S_{1,0}$ oznacza fragment powierzchni rozgraniczający obszary pierwszy i zewnętrzny. Podobną konwencję stosuje się do opisu wektorów jednostkowych normalnych do powierzchni – wektory $\hat{n}_0, \hat{n}_1, \hat{n}_2$ to wektory normalne do, odpowiednio, S_0, S_1 i S_2 . Założono przy tym, że wektory normalne są skierowane do wnętrza obszaru, którego indeks jest im przypisany (wektor $\hat{n}_0$ zatem jest skierowany na zewnątrz bryły). Wektory normalne

z podwójnym indeksem są związane z powierzchniami granicznymi, przy czym zwrot takiego wektora jest od obszaru oznaczonego pierwszym indeksem do obszaru oznaczonego indeksem drugim, np. $\hat{n}_{2,1}$ to wektor normalny do powierzchni $S_{2,1}$ skierowany od obszaru 2 do 1. Oczywiście $S_{i,j} = S_{j,i}$ oraz $\hat{n}_{i,j} = -\hat{n}_{j,i}$.

Na rysunku 7.1a:

$$S_0 = S_{1,0}, \quad S_1 = S_{1,0} \cup S_{2,1}, \quad S_2 = S_{2,1}, \quad (7.1)$$

a na rysunku 7.1b:

$$S_0 = S_{1,0} \cup S_{2,0}, \quad S_1 = S_{1,0} \cup S_{2,1}, \quad S_2 = S_{2,0} \cup S_{2,1}. \quad (7.2)$$

Nawet jeżeli któryś z obszarów ma zerową objętość (jest nieskończenie cienkim przewodnikiem), to rozróżnia się, zgodnie z podaną konwencją, obydwie jego strony, przypisując im osobne indeksy (por. rys. 7.2), jeżeli te strony graniczą z różnymi obszarami.

Zastosowanie powierzchniowej zasady równoważności dla każdego z obszarów materialnych oznacza, że na granicy tego obszaru umieszcza się zastępcze prądy powierzchniowe wytwarzające oryginalne pola w tym obszarze, a zerowe pola w pozostałych regionach. Prądy zastępcze dla obszaru i definiuje się jako:

$$\mathbf{J}_i = \hat{n}_i \times \mathbf{H}_i, \quad (7.3)$$

$$\mathbf{M}_i = -\hat{n}_i \times \mathbf{E}_i, \quad (7.4)$$

gdzie $\mathbf{H}_i$ oraz $\mathbf{E}_i$ oznaczają pola (całkowite) „tuż przy powierzchni” S_i , od strony obszaru i . Oczywiście jeżeli fragment lub całość S_i graniczy z idealnym przewodnikiem, składowa styczna pola elektrycznego na tym fragmencie jest zerowa, nie występuje tam zatem prąd magnetyczny. Z kolei na granicy dwóch materialnych obszarów jednorodnych i oraz j składowe styczne obydwu pól muszą być ciągłe:

$$\mathbf{J}_i = \hat{n}_{i,j} \times \mathbf{H}_i = -\hat{n}_{j,i} \times \mathbf{H}_j = -\mathbf{J}_j, \quad \text{na } S_{i,j}, \quad (7.5)$$

$$\mathbf{M}_i = -\hat{n}_{i,j} \times \mathbf{E}_i = \hat{n}_{j,i} \times \mathbf{E}_j = -\mathbf{M}_j, \quad \text{na } S_{i,j}. \quad (7.6)$$

Ponieważ w obszarze dopełniającym dla obszaru i prądy zastępcze wytwarzają zerowe pola, oryginalne ośrodki w obszarze dopełniającym można zastąpić ośrodkiem ε_i , μ_i , sprawiając, że do obliczania pól $\mathbf{E}_i$ i $\mathbf{H}_i$ od $\mathbf{J}_i$ i $\mathbf{M}_i$ można wykorzystać formuły dwupotencjałowe. Zastosowanie sformułowania PMCHWT dla każdej powierzchni granicznej rozdzielającej obszary materialne, w sposób taki sam jak w rozdziale 6, prowadzi do układu równań:

$$\begin{aligned}
& \left(j\omega \frac{\mu_i}{4\pi} \int_{S_i} \mathbf{J}_i G^i dS' - \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon_i} \int_{S_i} \frac{\nabla'_S \cdot \mathbf{J}_i}{j\omega} G^i dS' + \frac{1}{4\pi} PV \int_{S_i} \nabla G^i \times \mathbf{M}_i dS' \right. \\
& \quad - j\omega \frac{\mu_j}{4\pi} \int_{S_j} \mathbf{J}_j G^j dS' + \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon_j} \int_{S_j} \frac{\nabla'_S \cdot \mathbf{J}_j}{j\omega} G^j dS' \\
& \quad \left. - \frac{1}{4\pi} PV \int_{S_j} \nabla G^j \times \mathbf{M}_j dS' \right)_{\tan} = \delta \mathbf{E}_{\tan}^i, \quad \text{na } S_{i,j},
\end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned}
& \left(j\omega \frac{\epsilon_i}{4\pi} \int_{S_i} \mathbf{M}_i G^i dS' - \nabla \frac{1}{4\pi\mu_i} \int_{S_i} \frac{\nabla'_S \cdot \mathbf{M}_i}{j\omega} G^i dS' - \frac{1}{4\pi} PV \int_{S_i} \nabla G^i \times \mathbf{J}_i dS' \right. \\
& \quad - j\omega \frac{\epsilon_j}{4\pi} \int_{S_j} \mathbf{M}_j G^j dS' + \nabla \frac{1}{4\pi\mu_j} \int_{S_j} \frac{\nabla'_S \cdot \mathbf{M}_j}{j\omega} G^j dS' \\
& \quad \left. + \frac{1}{4\pi} PV \int_{S_j} \nabla G^j \times \mathbf{J}_j dS' \right)_{\tan} = \delta \mathbf{H}_{\tan}^i, \quad \text{na } S_{i,j},
\end{aligned} \quad (7.8)$$

gdzie $G^{i(j)}$ oznacza funkcję Greena dla jednorodnego ośrodka o parametrach $\epsilon_{i(j)}$, $\mu_{i(j)}$. Parametr δ przyjmuje wartość 1, gdy, czyli gdy rozpatrywana powierzchnia graniczna jest zewnętrzną powierzchnią bryły lub wartość 0, gdy $i \neq 0$, czyli gdy $S_{i,j}$ jest jedną z powierzchni wewnętrznych. Przyjmuje się, że $i \neq j$ oraz $j \neq 0$.

Jeżeli powierzchnia graniczna oddziela obszar materialny i od idealnego przewodnika j , wykorzystuje się równanie EFIE:

$$\begin{aligned}
& \left(j\omega \frac{\mu_i}{4\pi} \int_{S_i} \mathbf{J}_i G^i dS' - \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon_i} \int_{S_i} \frac{\nabla'_S \cdot \mathbf{J}_i}{j\omega} G^i dS' \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4\pi} \int_{S_i} \nabla G^i \times \mathbf{M}_i dS' \right)_{\tan} = \delta \mathbf{E}_{\tan}^i, \quad \text{na } S_{i,j},
\end{aligned} \quad (7.9)$$

gdzie przy całce zawierającej prąd magnetyczny zrezygnowano z symbolu PV symbolizującego wartość główną, ponieważ na $S_{i,j}$ prąd magnetyczny jest zerowy, nie ma zatem konieczności obliczania tej całki dla punktów obserwacji położonych w obszarze źródłowym

Przy wyprowadzaniu równań założono ponadto, że punkty obserwacji znajdują się na gładkich częściach poszczególnych fragmentów powierzchni.

W celu rozwiązania układu równań skonstruowanych dla danego zagadnienia, z wykorzystaniem równań typu (7.7)–(7.9), można zastosować metodę momentów z funkcjami RWG dla dowolnych obiektów trójwymiarowych lub z funkcjami typu (5.44)–(5.45) dla brył charakteryzujących się symetrią obrotową. Przykłady zastosowania podanego sformułowania pokazano w kolejnych punktach. W celu zilustrowania

nia zasad konstruowania równań dla każdego z przykładów podano najpierw zapis odpowiednich warunków brzegowych, z których, po zastosowaniu potencjałowej reprezentacji pola, otrzymuje się równania całkowe dla konkretnej analizowanej sytuacji.

7.2. Obiekty otoczone jednorodnym dielektrykiem

Szczegółowe rozważania rozpoczniemy od problemu pokazanego na rysunku 7.1a. Rozważymy oba zasygnalizowane przypadki, to jest sytuację, gdy obiekt wewnętrzny jest idealnie przewodzący oraz gdy ten obiekt jest obiektem materialnym o różniących się od powłoki zewnętrznej parametrach. W drugim przypadku przyjęcie za parametry części wewnętrznej parametrów ośrodka otaczającego bryłę prowadzi do analizowania pustej powłoki/osłony. W celu uproszczenia notacji oznaczono zewnętrzną powierzchnię bryły jako S_z , a wewnętrzną jako S_w . Prądy zastępcze oznaczono jako:

$$\mathbf{J}_z = \mathbf{J}_1 = -\mathbf{J}_0, \quad \text{na } S_z, \quad (7.10)$$

$$\mathbf{M}_z = \mathbf{M}_1 = -\mathbf{M}_0, \quad \text{na } S_z, \quad (7.11)$$

$$\mathbf{J}_w = \mathbf{J}_1 = -\mathbf{J}_2, \quad \text{na } S_w, \quad (7.12)$$

$$\mathbf{M}_w = \mathbf{M}_1 = -\mathbf{M}_2, \quad \text{na } S_w. \quad (7.13)$$

Ponieważ obszar 1 jest ograniczony dwiema powierzchniami – zewnętrzną i wewnętrzną, także całkowite prądy zastępcze generujące odpowiednie pola w tym obszarze (czyli $\mathbf{J}_1, \mathbf{M}_1$) dzielą się na część płynącą po powierzchni zewnętrznej S_z oraz wewnętrznej S_w . Pola elektryczne i magnetyczne wytwarzane przez prądy (w odpowiednich konfiguracjach zastępczych) będziemy oznaczać jako $\mathbf{E}_i(\pm\mathbf{J}_k, \pm\mathbf{M}_k)$ i $\mathbf{H}_i(\pm\mathbf{J}_k, \pm\mathbf{M}_k)$, gdzie $i = 0, 1, 2$ – ośrodek, w którym zachodzi promieniowanie – w danej konfiguracji zastępczej wypełniający oczywiście całą przestrzeń, indeks $k = z$ lub w wskazuje natomiast odpowiedni prąd elektryczny lub magnetyczny, zdefiniowany poprzez (7.10)–(7.13). W przypadku określania pola na powierzchni ograniczającej dany podobzdar, przyjmuje się, że punkt obserwacji osiąga tę powierzchnię od strony tego podobzaru. W kontekście sformułowania PMCHWT oznacza to zapis równań w postaci odpowiadającej (6.25), (6.26). Przy takim założeniu pomija się w zapisie równań znaki $\pm$ oznaczające stronę powierzchni rozgraniczającej ośrodki.

7.2.1. Bryła dielektryczna otoczona zewnętrznym dielektrykiem

Warunki brzegowe dla tej konfiguracji można zapisać następująco:

$$\left(\mathbf{E}_1(\mathbf{J}_z, \mathbf{M}_z) + \mathbf{E}_1(\mathbf{J}_w, \mathbf{M}_w) \right)_{\tan} = \left(\mathbf{E}_0(-\mathbf{J}_z, -\mathbf{M}_z) + \mathbf{E}^i \right)_{\tan}, \quad \text{na } S_z, \quad (7.14)$$

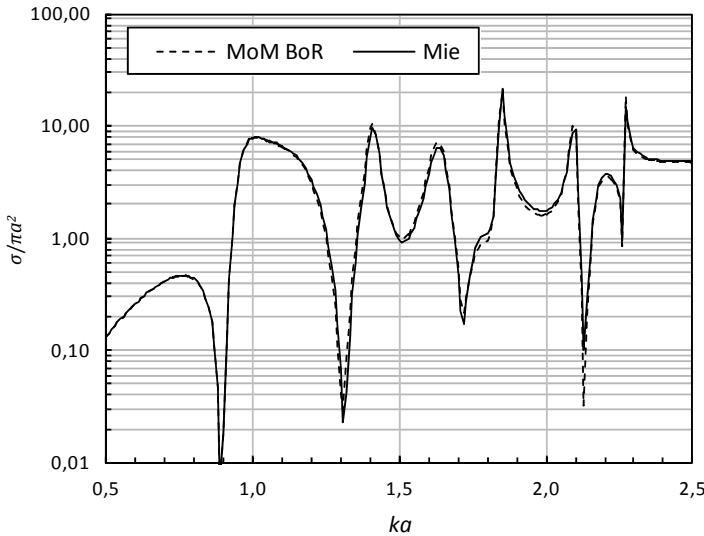
$$\left(H_1(J_z, M_z) + H_1(J_w, M_w) \right)_{\tan} = \left(H_0(-J_z, -M_z) + H^i \right)_{\tan}, \quad \text{na } S_z, \quad (7.15)$$

$$\left(E_1(J_z, M_z) + E_1(J_w, M_w) \right)_{\tan} = \left(E_2(-J_w, -M_w) \right)_{\tan}, \quad \text{na } S_w, \quad (7.16)$$

$$\left(H_1(J_z, M_z) + H_1(J_w, M_w) \right)_{\tan} = \left(H_2(-J_w, -M_w) \right)_{\tan}, \quad \text{na } S_w. \quad (7.17)$$

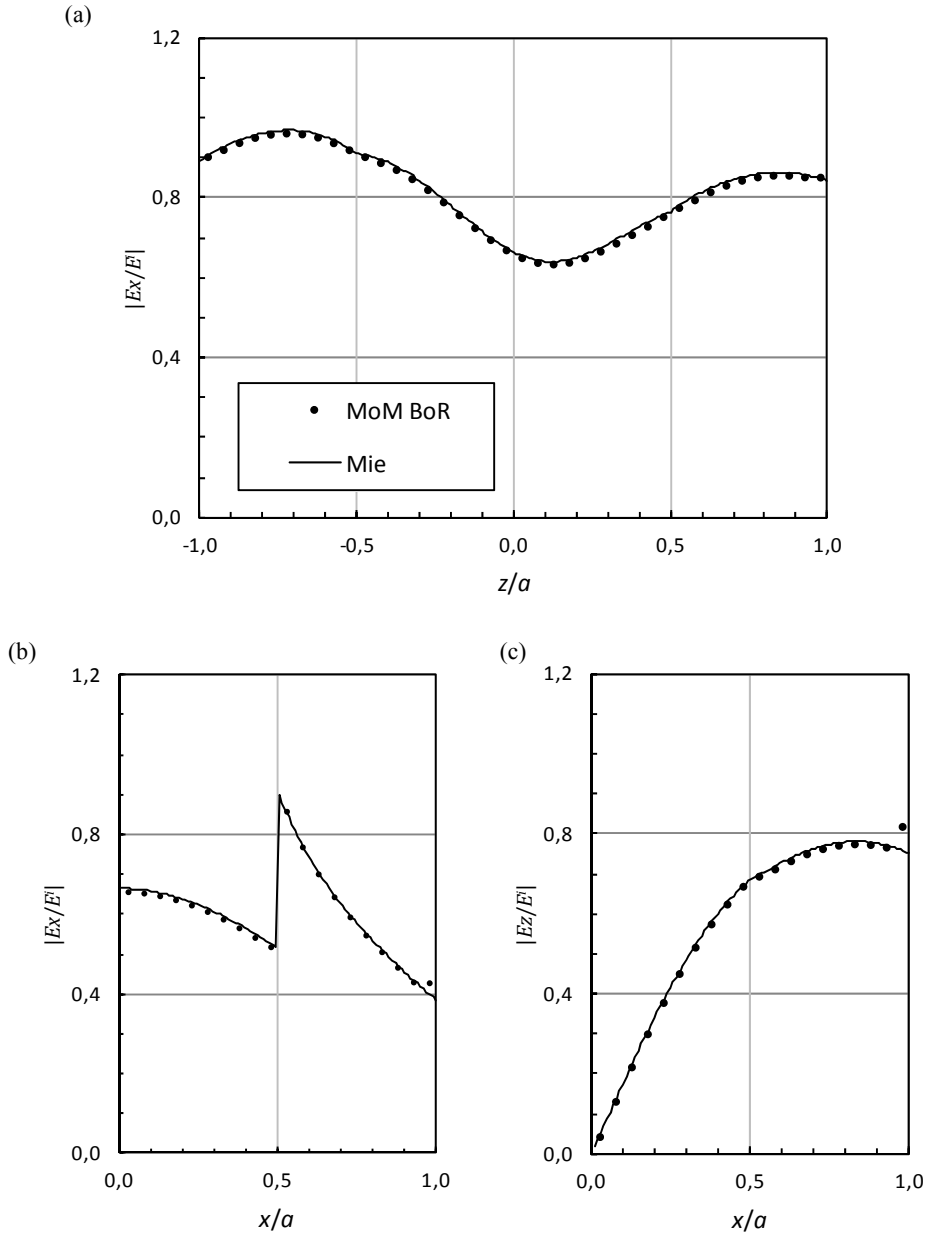
Po zastosowaniu metody momentów podany układ równań jest przekształcany w układ równań liniowych zawierający jako niewiadome współczynniki służące do aproksymacji J_z, M_z, J_w, M_w z użyciem zastosowanych funkcji bazowych. Znając aproksymacje prądów zastępczych, wyznacza się pola w poszczególnych podobszarach, korzystając z odpowiednich zagadnień zastępczych.

Opisaną metodę zastosowano do analizy rozpraszania płaskiej fali elektromagnetycznej przez dwuwarstwową kulę dielektryczną. Fala płaska pada w kierunku przeciwnym do osi z , a wektor pola elektrycznego pola padającego jest spolaryzowany w kierunku osi x . Zastosowano algorytm wykorzystujący symetrię obrotową (MoM BoR). Wyniki obliczeń skutecznej powierzchni radarowej w funkcji elektrycznej wielkości kuli pokazano na rysunku 7.3. Wyniki porównano z rozwiązaniem analitycznym wykorzystującym szeregi Mie^{*)}.



Rys. 7.3. Skuteczna wsteczna powierzchnia odbijająca dwuwarstwowej kuli dielektrycznej o promieniu zewnętrznym a i wewnętrznym b ; $b/a = 0,5$ dla części wewnętrznej przenikalność $\varepsilon_{r1} = 16,0$, dla części zewnętrznej $\varepsilon_{r2} = 9,0$

^{*)} Podobnie jak w rozdziale 6 do obliczeń wykorzystano autorski program dla analizy kul dwuwarstwowych napisany na podstawie artykułu: A.I. Aden, M. Kerker, *Scattering of electromagnetic waves from two concentric spheres*, Journal of Applied Physics, Vol. 22, No. 10, 1951, 1242–1246.



Rys. 7.4. Pole elektryczne w obrębie dwuwarstwowej kuli dielektrycznej o parametrach z rysunku 7.3; obliczenia dla $ka = 0,8$; (a) składowa E_x wzdłuż osi z ; (b) składowa E_x wzdłuż osi x ; (c) składowa E_z wzdłuż osi x

W celu zilustrowania spełnienia przez rozwiązanie warunków brzegowych na granicy warstw warto pokazać wybrane rozkłady pola w obrębie kuli. Obliczenia wykonano dla wartości $ka = 0,8$. Wyniki – wykresy wartości pola elektrycznego wzdłuż wybranych odcinków w obrębie kuli pokazano na rysunku 7.4. Na rysunku 7.4a wykreslana wzdłuż osi z składowa E_x jest styczna do powierzchni sfery rozdzielającej ośrodki o różnych parametrach w punktach $z/a = \pm 0,5$ – widać, że ta składowa jest ciągła na granicy ośrodków. Podobny efekt można zaobserwować dla $x/a = 0,5$ na rysunku 7.4c, gdzie jest wykreslana składowa E_z wzdłuż osi x . Natomiast na rysunku 7.4b wykreślono składową E_x wzdłuż osi x . Dla punktu $x/a = 0,5$ jest to składowa normalna do granicy ośrodków, która jest w tym miejscu nieciągła (ciągła jest indukcja elektryczna $D_x = \varepsilon E_x$).

7.2.2. Idealny przewodnik otoczony warstwą dielektryczną

W przypadku gdy obiekt wewnętrzny jest wykonany z idealnego przewodnika, warunki brzegowe przybierają postać:

$$\left(E_1(\mathbf{J}_z, \mathbf{M}_z) + E_1(\mathbf{J}_w) \right)_{\tan} = \left(E_0(-\mathbf{J}_z, -\mathbf{M}_z) + \mathbf{E}^i \right)_{\tan}, \quad \text{na } S_z, \quad (7.18)$$

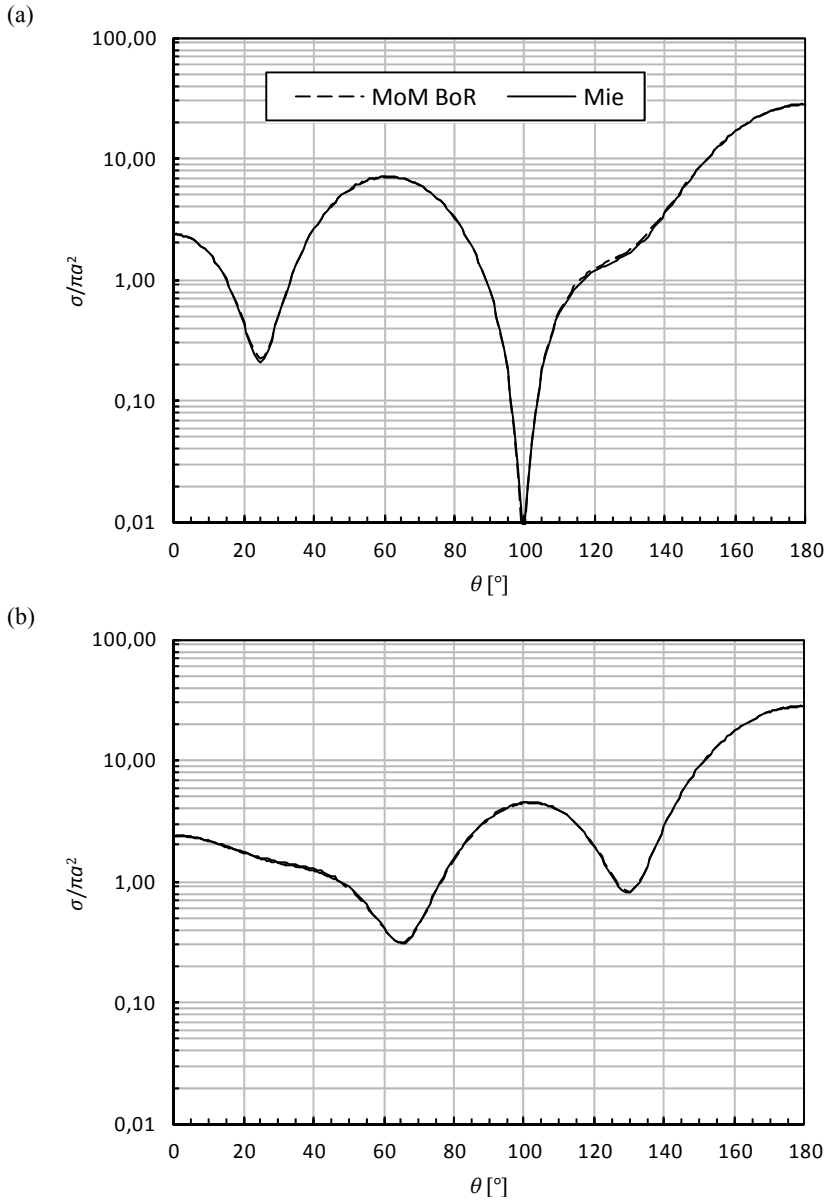
$$\left(H_1(\mathbf{J}_z, \mathbf{M}_z) + H_1(\mathbf{J}_w) \right)_{\tan} = \left(H_0(-\mathbf{J}_z, -\mathbf{M}_z) + \mathbf{H}^i \right)_{\tan}, \quad \text{na } S_z, \quad (7.19)$$

$$\left(E_1(\mathbf{J}_z, \mathbf{M}_z) + E_1(\mathbf{J}_w) \right)_{\tan} = 0, \quad \text{na } S_w. \quad (7.20)$$

Stosując ponownie metodę momentów, przekształca się podany układ równań całkowo-różniczkowych w układ równań liniowych, z którego wyznacza się współczynniki aproksymacji prądów $\mathbf{J}_z$, $\mathbf{M}_z$, $\mathbf{J}_w$, a znając te aproksymacje – pola w dowolnym punkcie przestrzeni.

Na powierzchni przewodnika znika składowa styczna pola elektrycznego, dlatego w równaniach (7.18)–(7.20) nie występuje prąd magnetyczny płynący po tej powierzchni, natomiast zamiast dwóch warunków brzegowych na powierzchni S_w , generujących dwa równania dla przypadku z punktu poprzedniego, stosuje się jedno równanie (7.20) – w tym przypadku jest to równanie pola elektrycznego.

Za przykład analizy wykonano obliczenia skutecznej powierzchni odbijającej metalowej kuli z pokryciem dielektrycznym. Wyniki porównano z rozwiązaniem analitycznym (szeregi Mie), do którego zastosowano program z poprzedniego punktu, zmodyfikowany tak, aby na wewnętrznej powierzchni uwzględnić warunek znikania składowej stycznej pola elektrycznego. Porównanie wyników pokazano na rysunku 7.5 – jak widać, zgodność wyników obliczeń jest bardzo dobra.



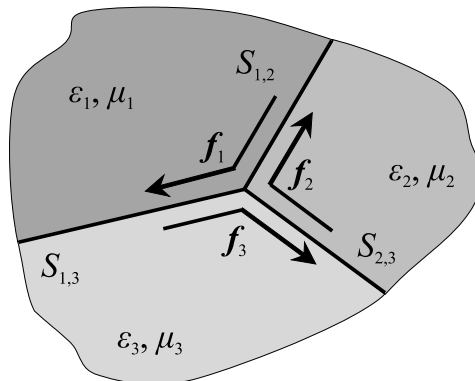
Rys. 7.5. Skuteczna powierzchnia odbijająca idealnie przewodzącej kuli o promieniu b otoczonej dielektrykiem o promieniu $a = 3b$ i przenikalności $\epsilon_r = 4,0$, dla $ka = 3,0$, w funkcji kąta θ ; (a) $\sigma_{\theta\theta}$; (b) $\sigma_{\phi\theta}$

7.3. Bryły składające się z dwóch połączonych obszarów

Rozpatrzmy teraz przypadek pokazany na rysunku 7.1b. Cechą charakterystyczną takiej sytuacji, w przeciwieństwie problemu z rysunku 7.1a, jest występowanie krawędzi wspólnych dla trzech lub większej liczby podobszarów różniących się parametrami. Biorąc pod uwagę, że przez taką krawędź płyną – w odpowiednich konfiguracjach równoważnych – przynależące do odpowiednich podobszarów prądy zastępcze, przez analogię do sytuacji z rysunku 4.3, taką krawędź nazywa się *złączem*.

Przeanalizujmy najpierw złącze pokazane na rysunku 7.6, będące krawędzią wspólną trzech, różniących się parametrami obszarów dielektrycznych. Na rysunku symbolami łamanych strzałek zaznaczono także funkcje daszkowe (np. typu RWG) f_1 , f_2 , f_3 służące do aproksymacji płynących przez złącze prądów elektrycznych i magnetycznych, promieniujących w odpowiednich problemach równoważnych. Kierunek strzałek został celowo zaznaczony w taki sposób, aby wzdłuż każdej z krawędzi przynależących do złącza prądy „po obu stronach” tej krawędzi miały przeciwne zwroty. Zgodnie bowiem ze sformułowaniem PMCHWT prąd danego typu (elektrycznego lub magnetycznego) płynący po obu stronach krawędzi jest identyczny co do wartości, a przeciwny co do zwrotu – wynika to z ciągłości odpowiednich składowych stycznych pola magnetycznego i elektrycznego w zagadnieniu oryginalnym (por. p. 6.1). Biorąc pod uwagę ten fakt można dalej stwierdzić, że warunek taki jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie (w tym przypadku trzy) funkcje bazowe związane ze złączem muszą w ramach aproksymacji prądu elektrycznego i magnetycznego być przemnożone przez takie same współczynniki. W układzie równań liniowych opisujących problem z krawędzią stanowiącą złącze jest związany jeden nieznaną współczynnik w aproksymacji zastępczego prądu elektrycznego i jeden – magnetycznego.

Kolejnym zagadnieniem jest konstrukcja stosownych równań algebraicznych – równanie ze względu na nieznanne współczynniki aproksymacji powstaje z odpowied-



Rys. 7.6. Złącze „dielektryczne”

niego równania całkowego poprzez „testowanie” z wykorzystaniem zadanej funkcji testowej/wagowej.

Na poszczególnych powierzchniach, rozgraniczających obszary o różnych parametrach, muszą być spełnione warunki brzegowe:

$$(\mathbf{E}_1)_{\tan} = (\mathbf{E}_2)_{\tan}, \quad \text{na } S_{1,2}, \quad (7.21)$$

$$(\mathbf{E}_2)_{\tan} = (\mathbf{E}_3)_{\tan}, \quad \text{na } S_{2,3}, \quad (7.22)$$

$$(\mathbf{E}_1)_{\tan} = (\mathbf{E}_3)_{\tan}, \quad \text{na } S_{1,3}, \quad (7.23)$$

$$(\mathbf{H}_1)_{\tan} = (\mathbf{H}_2)_{\tan}, \quad \text{na } S_{1,2}, \quad (7.24)$$

$$(\mathbf{H}_2)_{\tan} = (\mathbf{H}_3)_{\tan}, \quad \text{na } S_{2,3}, \quad (7.25)$$

$$(\mathbf{H}_1)_{\tan} = (\mathbf{H}_3)_{\tan}, \quad \text{na } S_{1,3}, \quad (7.26)$$

gdzie pola $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{H}_i$, ($i = 1, 2, 3$) oznaczają całkowite pola w obszarze i , w odpowiednim zagadnieniu zastępczym – czyli, w sformułowaniu PMCHWT takim, gdy wspomniane pola w obszarze i są takie same jak w zagadnieniu oryginalnym, natomiast pola w pozostałych obszarach są zerowe. Pola $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{H}_i$ w ogólnym przypadku są sumą pól wytwarzanych przez prądy zastępcze oraz pól pobudzających, jeżeli takie w obszarze i występują.

Wykonajmy teraz testowanie równania (7.21) przez funkcję daszkową $\mathbf{f}_1$:

$$\int_{S_{1,2}} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{f}_1 dS = \int_{S_{1,2}} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{f}_1 dS. \quad (7.27)$$

W całkowaniach używa się tylko tej części funkcji $\mathbf{f}_1$, która należy do $S_{1,2}$. Jednocześnie na $S_{1,2}$ jest $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}_2$:

$$\int_{S_{1,2}} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{f}_1 dS + \int_{S_{1,2}} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{f}_2 dS = 0. \quad (7.28)$$

Postępując podobnie dla pozostałych równań (7.22)–(7.26), otrzymuje się:

$$\int_{S_{1,3}} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{f}_1 dS + \int_{S_{1,3}} \mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{f}_3 dS = 0, \quad (7.29)$$

$$\int_{S_{2,3}} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{f}_2 dS + \int_{S_{2,3}} \mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{f}_3 dS = 0, \quad (7.30)$$

$$\int_{S_{1,2}} \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{f}_1 dS + \int_{S_{1,2}} \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{f}_2 dS = 0, \quad (7.31)$$

$$\int_{S_{1,3}} \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{f}_1 dS + \int_{S_{1,3}} \mathbf{H}_3 \cdot \mathbf{f}_3 dS = 0, \quad (7.32)$$

$$\int_{S_{2,3}} \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{f}_2 dS + \int_{S_{2,3}} \mathbf{H}_3 \cdot \mathbf{f}_3 dS = 0. \quad (7.33)$$

Zsumujmy teraz stronami równania dla pola elektrycznego (7.28)–(7.30):

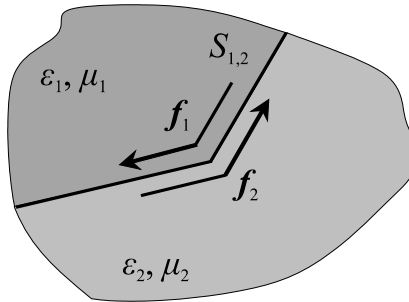
$$\int_{S_{1,2} \cup S_{1,3}} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{f}_1 dS + \int_{S_{1,2} \cup S_{2,3}} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{f}_2 dS + \int_{S_{1,3} \cup S_{2,3}} \mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{f}_3 dS = 0 \quad (7.34)$$

oraz magnetycznego (7.31)–(7.33):

$$\int_{S_{1,2} \cup S_{1,3}} \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{f}_1 dS + \int_{S_{1,2} \cup S_{2,3}} \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{f}_2 dS + \int_{S_{1,3} \cup S_{2,3}} \mathbf{H}_3 \cdot \mathbf{f}_3 dS = 0. \quad (7.35)$$

W rezultacie otrzymano dla złącza *dwa* równania, w których wykorzystuje się wszystkie związane ze złączem funkcje wagowe. Z tym samym zbiorem funkcji, traktowanych jako funkcje bazowe, związane są w sumie *dwie* niewiadome. Wynika stąd, że obecność każdego złącza typu dielektrycznego wprowadza do wynikowego układu równań liniowych dwie dodatkowe niewiadome oraz dwa równania. Po zsumowaniu, całkowania w (7.34), (7.35) są wykonywane po całych dziedzinach funkcji wagowych, ani w aproksymacjach prądów zastępczych zatem, ani podczas „testowania” równań nie jest konieczne posługiwanie się „połówkami” funkcji daszkowych.

Uogólnienie przedstawionego rozumowania na złącza wynikające z połączenia jedną krawędzią większej niż trzy liczby jednorodnych obszarów jest oczywiste. Warto też zauważyć, że używane poprzednio sformułowania PMCHWT dla brył jednorodnych lub dla sytuacji, gdy w bryle niejednorodnej występują wyłącznie powierzchnie rozgraniczające dwa obszary dielektryczne, można sformułować w konwencji



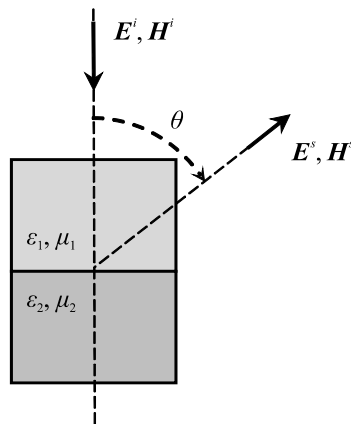
Rys. 7.7. Złącze „dielektryczne” zredukowane do połączenia dwóch obszarów jednorodnych

węzła (złącza) z dwiema przeciwnie skierowanymi funkcjami daszkowymi, którym w aproksymacjach prądów elektrycznych i magnetycznych przypisane są pojedyncze współczynniki skalujące (rys. 7.7). Odpowiednie równania zapewniające spełnienie warunków brzegowych na granicy ośrodków przybierają wtedy postać równań (7.34), (7.35) z dwiema przeciwnymi co do kierunku funkcjami daszkowymi. Taka konwencja pozwala w kodzie komputerowym traktować w ujednolicony sposób wszystkie funkcje bazowe i testowe, niezależnie czy krawędź definiująca funkcję jest krawędzią wspólną dwóch, trzech czy też większej liczby jednorodnych obszarów.

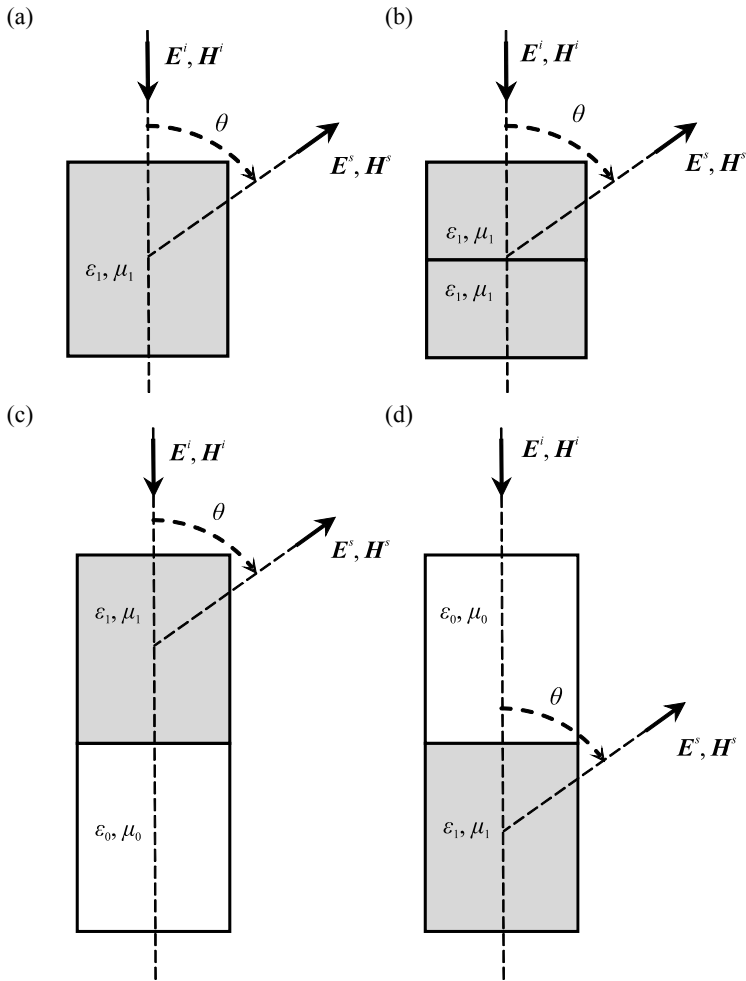
Powyższe rozumowanie wykorzystano do analizy rozpraszania fali elektromagnetycznej przez bryły składające się z dwóch przylegających do siebie obszarów dielektrycznych. Jako przykład rozpatrzono przedzielony w połowie walec (cylinder) dielektryczny, którego połówki różnią się przenikalnością, pokazany na rysunku 7.8. Wybrany przykład może, w prosty sposób, posłużyć do weryfikacji obliczeń: zwróćmy uwagę, że różne pod względem obliczeniowym problemy pokazane na rysunku 7.9 opisują to samo zagadnienie. Wyniki obliczeń skutecznej powierzchni odbijającej dla konfiguracji z rysunku 7.9 pokazano na rysunku 7.10. Z kolei na rysunku 7.11 przedstawiono wyniki dla dwuczęściowego walca, dla różnych przenikalności elektrycznych obu części. W obliczeniach wykorzystano modele trójwymiarowe.

Rozpatrzmy teraz przypadek (rys. 7.12), gdy jeden z obszarów generujących „złącze” jest idealnym przewodnikiem – na rysunku ten obszar, oznaczony numerem 3, wypełniono kolorem czarnym. Przeprowadzając rozumowanie podobne jak dla złącza czysto dielektrycznego, można zauważyć, że:

- w modelu złącza nie występuje funkcja daszkowa odpowiadająca obszarowi idealnego przewodnika, w obrębie którego pola elektryczne i magnetyczne są zerowe;

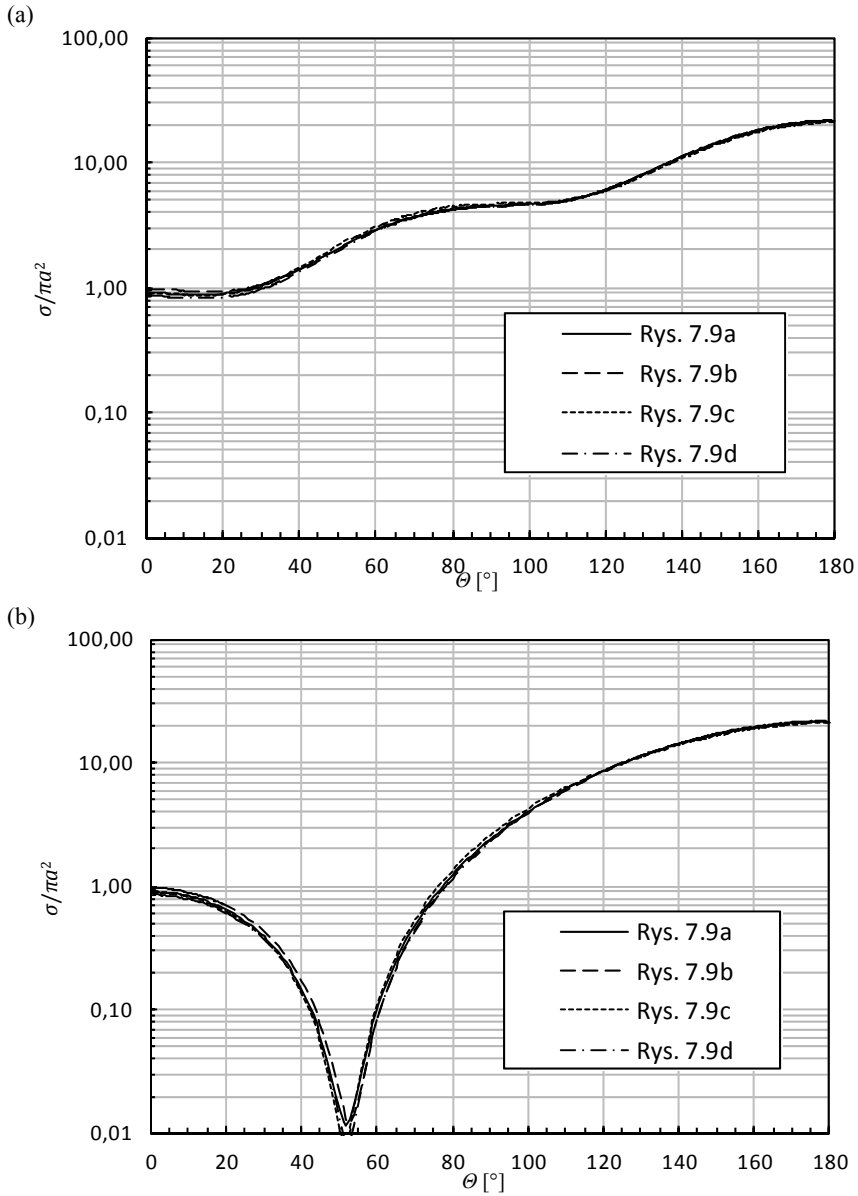


Rys. 7.8. Rozpraszanie fali elektromagnetycznej przez cylinder dielektryczny złożony z dwóch, różniących się parametrami obszarów

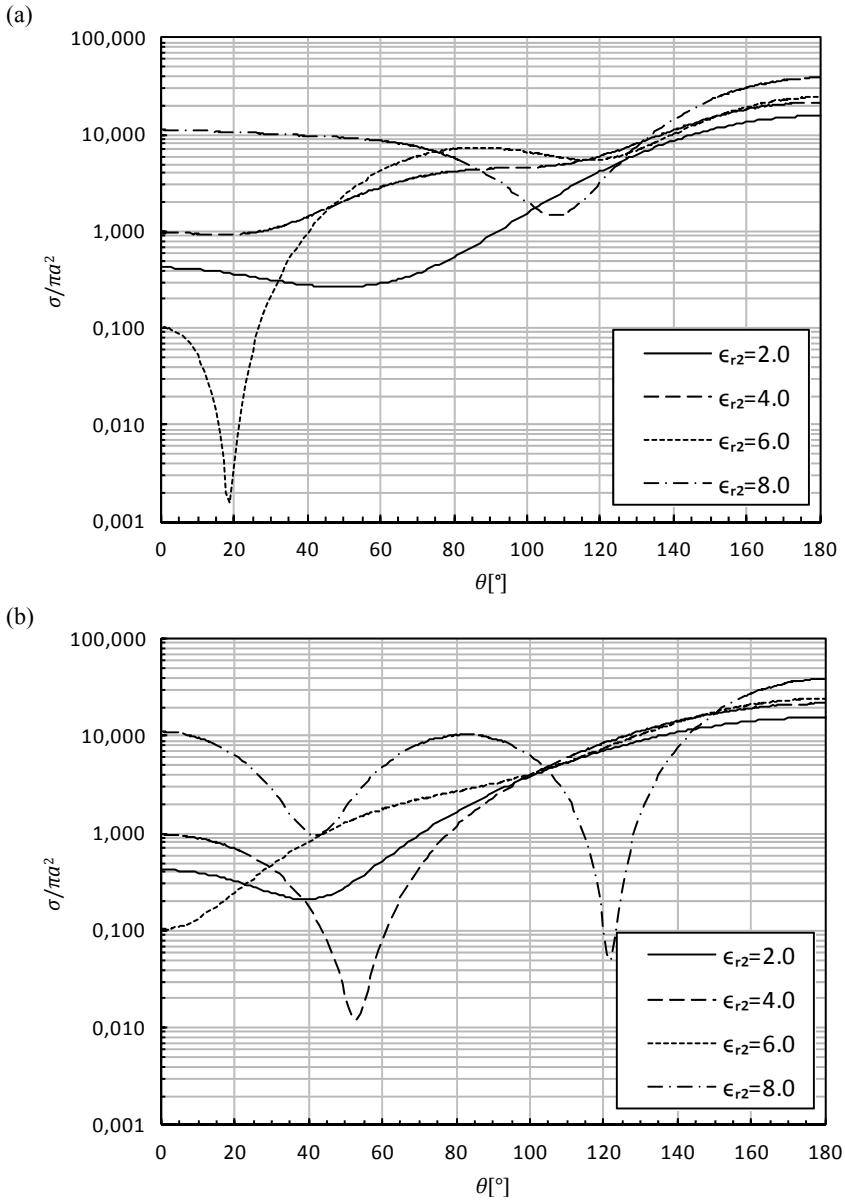


Rys. 7.9. Równoważne sobie problemy umożliwiające weryfikację metody służącej do analizy zagadnienia z rysunku 7.8

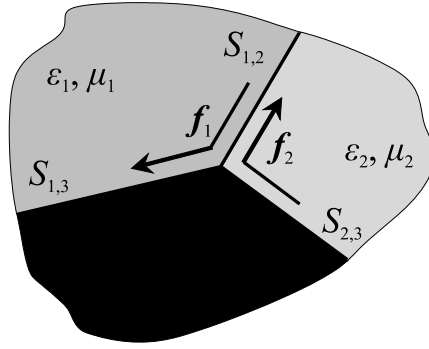
- pozostałe (tu: dwie) funkcje daszkowe służą wyłącznie do aproksymacji zastępczych prądów elektrycznych – prąd magnetyczny na powierzchni idealnego przewodnika nie istnieje, ponieważ definiująca go składowa styczna pola elektrycznego jest zerowa;
- z powodu ciągłości składowej stycznej pola magnetycznego na powierzchni $S_{1,2}$ zorientowane funkcje f_1 i f_2 są w aproksymacji zastępczych prądów elektrycznych mnożone przez ten sam współczynnik, w wynikowym układzie równań liniowych odpowiada im zatem jedna niewiadoma.



Rys. 7.10. Skuteczna powierzchnia odbijająca walca o promieniu a , wysokości $2a$ i przenikalności względnej $\varepsilon_r = 4,0$, dla $\lambda_0 = 4a$, w funkcji kąta θ ; (a) $\sigma_{\theta\theta}$; (b) $\sigma_{\phi\theta}$



Rys. 7.11. Skuteczna powierzchnia odbijająca walca o promieniu a , wysokości $2a$ i przenikalności górnej części $\epsilon_{r1} = 4,0$ oraz różnych wartości przenikalności części dolnej ϵ_{r2} , dla $\lambda_0 = 4a$, w funkcji kąta θ ; (a) $\sigma_{\theta\theta}$; (b) $\sigma_{\phi\theta}$



Rys. 7.12. Złącze „dielektryczno-metalowe”

Zakładając, że obiekty metalowe modeluje się z wykorzystaniem równania pola elektrycznego (EFIE) z warunków brzegowych na poszczególnych powierzchniach rozgraniczających, otrzymuje się:

$$(\mathbf{E}_1)_{\tan} = (\mathbf{E}_2)_{\tan}, \quad \text{na } S_{1,2}, \quad (7.36)$$

$$(\mathbf{E}_2)_{\tan} = 0, \quad \text{na } S_{2,3}, \quad (7.37)$$

$$(\mathbf{E}_1)_{\tan} = 0, \quad \text{na } S_{1,3}. \quad (7.38)$$

Wykonując teraz testowanie równań z użyciem $\mathbf{f}_1$ i $\mathbf{f}_2$, otrzymuje się:

$$\int_{S_{1,2}} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{f}_1 dS + \int_{S_{1,2}} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{f}_2 dS = 0, \quad (7.39)$$

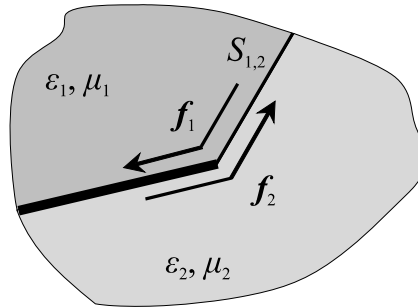
$$\int_{S_{1,3}} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{f}_1 dS = 0, \quad (7.40)$$

$$\int_{S_{2,3}} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{f}_2 dS = 0, \quad (7.41)$$

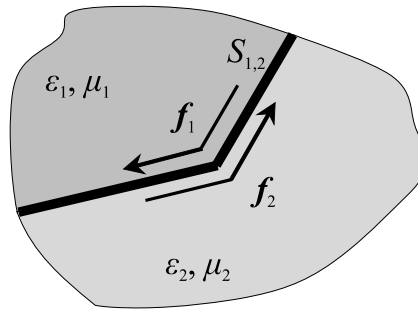
które po zsumowaniu dają odpowiednik równania (7.34):

$$\int_{S_{1,2} \cup S_{1,3}} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{f}_1 dS + \int_{S_{1,2} \cup S_{2,3}} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{f}_2 dS = 0. \quad (7.42)$$

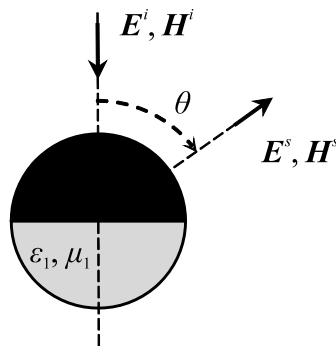
Jeżeli przewodnik jest „otwarty” (rysunek 7.13), zarówno równanie generowane przez złącze, jak i uwagi dotyczące aproksymacji prądów zastępczych z użyciem związanych ze złączem funkcji $\mathbf{f}_1$ i $\mathbf{f}_2$ pozostają w mocy. Jedyną różnicą w stosunku



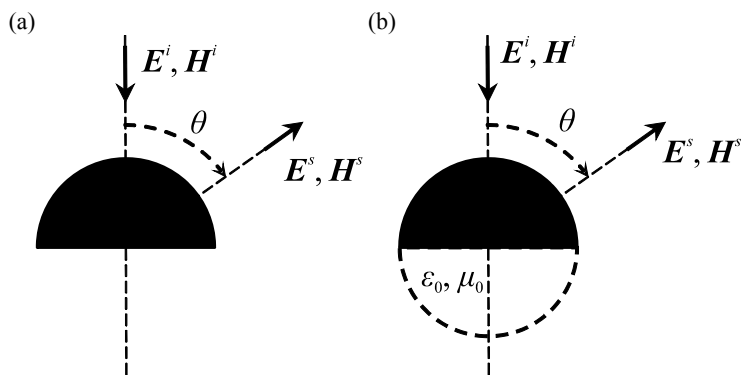
Rys. 7.13. Złącze „dielektryczno-metalowe” dla nieskończenie cienkiego otwartego przewodnika leżącego na granicy dwóch obszarów jednorodnych; przewodnik zaznaczono grubą czarną linią



Rys. 7.14. Nieskończenie cienki otwarty przewodnik leżący na granicy dwóch obszarów jednorodnych



Rys. 7.15. Rozpraszanie fali elektromagnetycznej przez kulę złożoną z półkul metalowej i dielektrycznej



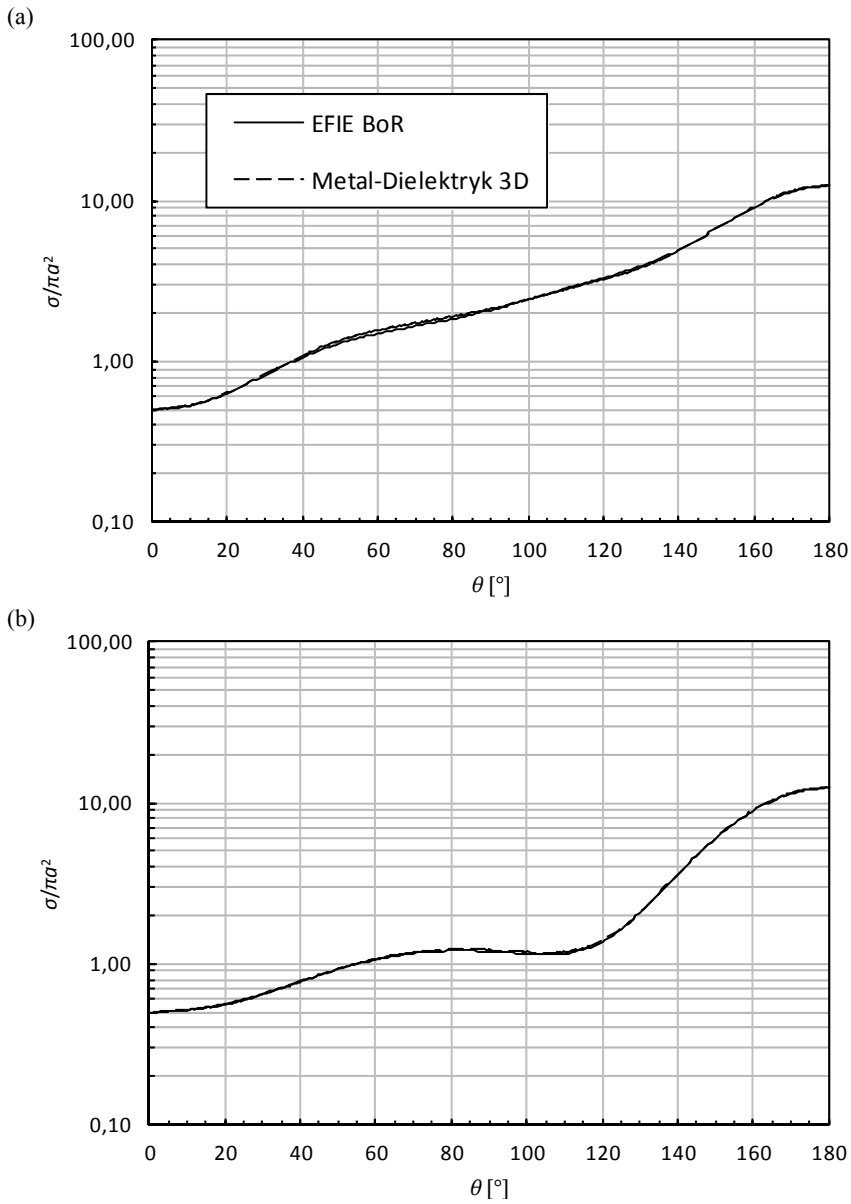
Rys. 7.16. Rozpraszanie fali elektromagnetycznej przez metalową półkulę (a) oraz kulę złożoną z półkul metalowej i dielektrycznej o parametrach próżni (b)

do sytuacji z rysunku 7.12 jest to, że obydwie funkcje są tym razem zdefiniowane na tych samych poddziedzinach.

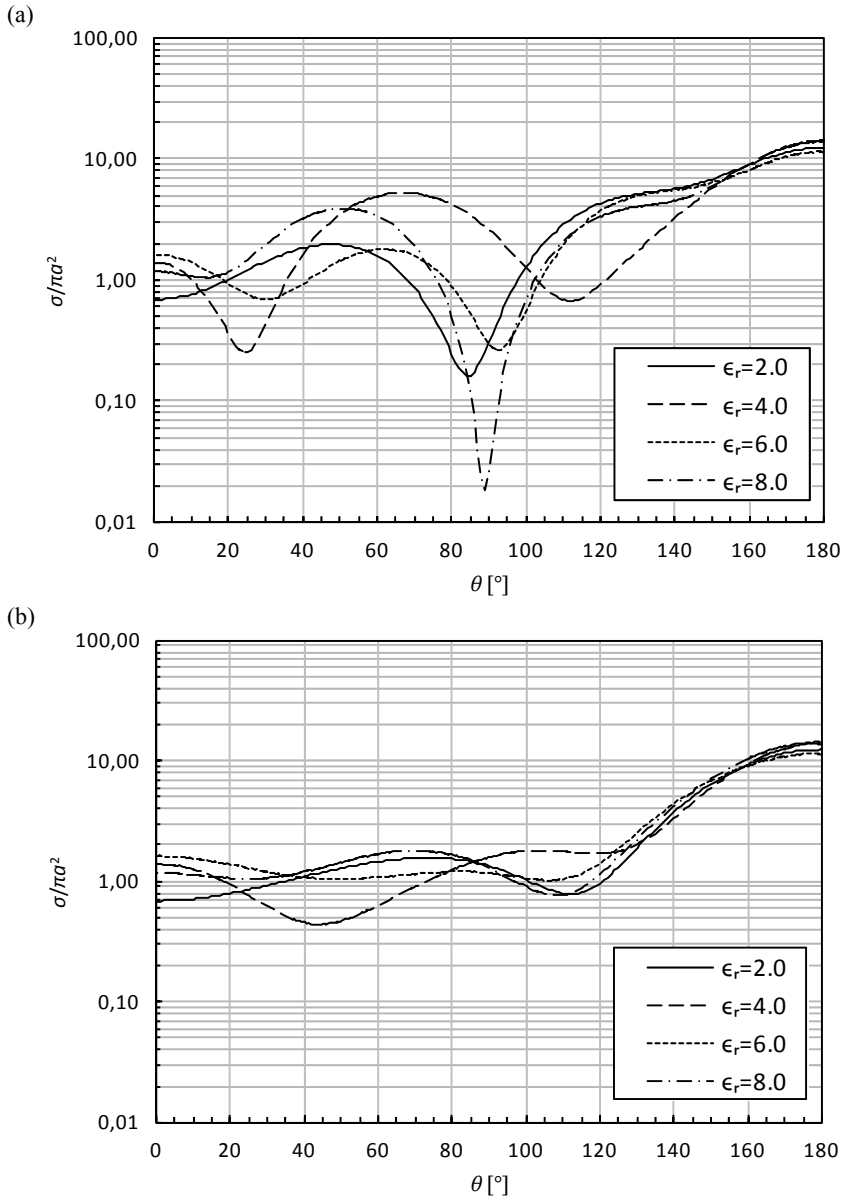
Dla przypadku z rysunku 7.14, gdy nie mamy do czynienia ze złączem, a tylko z sytuacją, w której nieskończenie cienki, otwarty przewodnik rozgranicza dwa różne co do parametrów obszary, każda z pokazanych na rysunku funkcji bazowych/testowych generuje osobne równanie typu EFIE i odpowiada jej osobny współczynnik w aproksymacji każdego z dwóch promieniujących w innych środowiskach, prądów zastępczych.

Tylko w sytuacji gdy po obu stronach przewodnika znajduje się taki sam ośrodek, można wykorzystać aproksymację sumy obydwu prądów z użyciem pojedynczej funkcji bazowej, o czym była mowa w rozdziale 5.3.

Dla zilustrowania streszczonej metody obliczeniowej przeanalizujemy rozpraszanie fali elektromagnetycznej przez podzieloną na pół kulę, której jedna z części jest wykonana z idealnego przewodnika, a druga – z jednorodnego dielektryka (rys. 7.15). W przypadku gdy parametry części dielektrycznej są takie same jak otaczającej przestrzeni, zagadnienie jest formalnie równoważne zagadnieniu rozpraszania fali elektromagnetycznej przez metalową półkulę (por. rys. 7.16a i b), co można wykorzystać do weryfikacji kodu obliczeniowego. Przykładowe wyniki obliczeń tego przypadku pokazano na rysunku 7.17. Do porównawczych obliczeń przypadku z rysunku 7.16a użyto kodu bazującego na równaniu EFIE, wykorzystującego symetrię obrotową bryły. Z kolei na rysunku 7.18 zaprezentowano wyniki obliczeń dla różnych parametrów półkuli dielektrycznej.



Rys. 7.17. Skuteczna powierzchnia odbijająca metalowej półkuli o promieniu a ,
gdy $ka = 3,0$, w funkcji kąta θ ; (a) $\sigma_{\theta\theta}$; (b) $\sigma_{\phi\theta}$



Rys. 7.18. Skuteczna powierzchnia odbijająca kuli złożonej z półkul metalowej i dielektrycznej o promieniu a , gdy $ka = 3,0$, w funkcji kąta θ ; (a) $\sigma_{\theta\theta}$; (b) $\sigma_{\phi\theta}$; fala padająca jak na rysunku 7.15; parametrem jest względna przenikalność elektryczna półkuli dielektrycznej

Literatura

- [7.1] Medgyesi-Mitschang L.N., Putnam J.M., *Electromagnetic scattering from axially inhomogeneous bodies of revolution*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 32, No. 8, 1984, 797–806.
- [7.2] Kolundžija B.M., Djordjević A.R., *Electromagnetic modeling of composite metallic and dielectric structures*, Artech House, 2002.
- [7.3] Kishk A., Shafai L., *Different formulations for numerical solution of single or multibodies of revolution with mixed boundary conditions*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 34, No. 5, 1986, 666–673.
- [7.4] Ylä-Oijala P., Taskinen M., Sarvas J., *Surface integral equation method for general composite metallic and dielectric structures with junctions*, Progress in Electromagnetics Research, PIER, 52, 2005, 81–108.
- [7.5] Shin J., Glisson A.W., Kishk A.A., *Analysis of combined conducting and dielectric structures of arbitrary shape using an E-PMCHW integral equation formulation*, Antennas and Propagation Society International Symposium, 2000. IEEE, Vol. 4, 2000, 2282–2285.

8. Silnie niejednorodne dielektryki

W poprzednim rozdziale pokazano, w jaki sposób można analizować obiekty dielektryczne składające się z pewnej liczby jednorodnych podobszarów. W przypadku obiektów silnie niejednorodnych alternatywą dla zaprezentowanego tam podejścia może być użycie, omówionej w rozdziale drugim, *objętościowej zasady równoważności*, pozwalającej zastąpić obiekt niejednorodny objętościowym rozkładem prądów: elektrycznego i magnetycznego, promieniujących w ośrodku, z którego oryginalny obiekt został usunięty [8.1]. W ramach niniejszego rozdziału omówimy metodę analizy wykorzystującą powyższą zasadę równoważności. Rozważania ograniczymy do, istotnego z praktycznego punktu widzenia, przypadku bryły czysto dielektrycznej [8.2–8.7], to jest takiej, której przenikalność magnetyczna jest taka sama jak otaczającego ośrodka, natomiast różna od otoczenia jest, zależna od miejsca w obrębie obiektu, przenikalność elektryczna. Takie założenie oznacza, że w zagadnieniu zastępczym (rys. 2.7b) nie występuje rozkład prądu magnetycznego. Analizowaną sytuację i odpowiednią konfigurację zastępczą pokazano zatem na rysunku 8.1, przy czym zgodnie z (2.57), zastępczy objętościowy rozkład prądu polaryzacji jest dany zależnością [8.3]:

$$\mathbf{J}_V(\mathbf{r}) = j\omega(\varepsilon(\mathbf{r}) - \varepsilon_0)\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (8.1)$$

gdzie $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ – wypadkowe pole w obrębie bryły dielektrycznej.

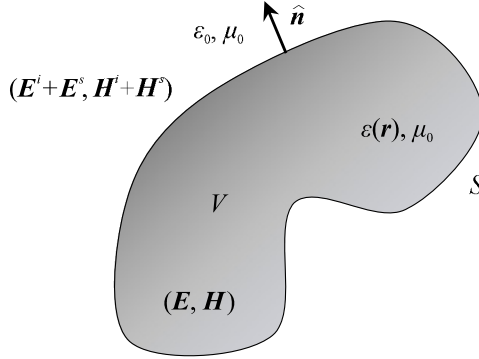
Przez zapisaną *explicite* zależność poszczególnych wielkości od wektora $\mathbf{r}$ wskazującego położenie w obrębie bryły podkreślono niejednorodność obiektu. Wygodniej jest posługiwać się, zamiast polem elektrycznym, indukcją elektryczną, co pozwala zapisać prąd polaryzacji w postaci:

$$\mathbf{J}_V(\mathbf{r}) = j\omega \frac{(\varepsilon(\mathbf{r}) - \varepsilon_0)}{\varepsilon(\mathbf{r})} \mathbf{D}(\mathbf{r}) = j\omega\kappa(\mathbf{r}) \mathbf{D}(\mathbf{r}), \quad (8.2)$$

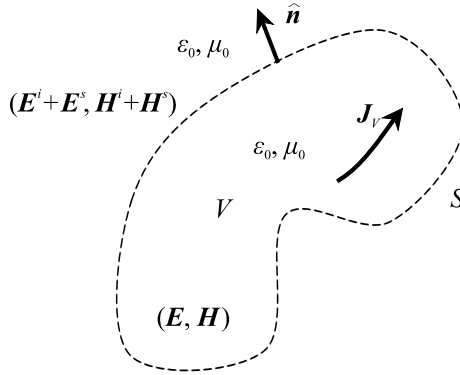
gdzie wprowadzono tzw. współczynnik kontrastu [8.3]:

$$\kappa(\mathbf{r}) = \frac{(\varepsilon(\mathbf{r}) - \varepsilon_0)}{\varepsilon(\mathbf{r})}. \quad (8.3)$$

(a)



(b)



Rys. 8.1. Niejednorodny obiekt dielektryczny w polu elektromagnetycznym (a) oraz konfiguracja równoważna z zastępczym objętościowym prądem elektrycznym (b)

Z prądem polaryzacji związany jest (w zagadnieniu zastępczym) ładunek dany równaniem ciągłości:

$$\begin{aligned} q(\mathbf{r}) &= -\frac{\nabla \cdot \mathbf{J}_V(\mathbf{r})}{j\omega} = -\nabla \cdot (\kappa(\mathbf{r}) \mathbf{D}(\mathbf{r})) \\ &= -\nabla \kappa(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) - \kappa(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Ponieważ (rys. 8.1a) w obrębie objętości V nie występują ładunki swobodne, dywergencja indukcji elektrycznej pojawiająca się w drugim składniku prawej strony (8.4) jest równa zero, w zagadnieniu zatem zastępczym:

$$q(\mathbf{r}) = -\nabla \kappa(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V. \quad (8.5)$$

Zależność (8.5) oznacza, że niejednorodność przenikalności elektrycznej bryły powoduje w zagadnieniu zastępczym pojawienie się ładunków elektrycznych.

W przypadku gdy przenikalność w funkcji położenia jest opisana funkcją ciągłą i (fragmentami) różniczkowalną, ładunek ten ma charakter ładunku objętościowego. W przypadku gdy przenikalność zmienia się w sposób skokowy pomiędzy dwoma obszarami, występujący w (8.5) gradient współczynnika kontrastu jest funkcją uogólnioną, co sprawia, że opisywany przez (8.5) ładunek ma charakter ładunku powierzchniowego, umieszczonego na powierzchni rozgraniczającej wspomniane obszary [8.3], o gęstości powierzchniowej:

$$q_S(\mathbf{r}) = (\kappa^+(\mathbf{r}) - \kappa^-(\mathbf{r})) \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{r} \in A, \quad (8.6)$$

gdzie A oznacza powierzchnię, przy przekraczaniu której, zgodnie z kierunkiem normalnego wektora $\hat{\mathbf{n}}$, następuje skokowa zmiana współczynnika kontrastu z wartości oznaczonej indeksem górnym „+” do wartości oznaczonej indeksem „-”. Pamiętając, że w zagadnieniu oryginalnym na granicy ośrodków składowa normalna indukcji elektrycznej jest ciągła^{*)}, na podstawie (8.2) łatwo zauważyć, że w konfiguracji zastępczej nieciągła jest składowa normalna prądu polaryzacji.

Zauważmy, że nawet jeżeli przenikalność elektryczna w obrębie bryły nie zmienia się w sposób skokowy, ładunek powierzchniowy (8.6) może występować na powierzchni S ograniczającej całkowitą objętość bryły V , jeżeli tylko parametry bryły nie przechodzą w sposób płynny w parametry otaczającego ją ośrodka. Obecności ładunku powierzchniowego na S towarzyszy różna od zera wartość składowej normalnej prądu polaryzacji.

8.1. Objętościowe równanie całkowite

Nieznana wielkością w zagadnieniu zastępczym z rysunku 8.1b jest rozkład objętościowej gęstości prądu $\mathbf{J}_V$. Ten prąd wytwarza w zagadnieniu równoważnym pole wtórne, które można zapisać, korzystając z reprezentacji dwupotencjałowej, jako:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^s(\mathbf{r}) &= -j\omega \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \nabla \Phi(\mathbf{r}) \\ &= -j\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}_V(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \\ &\quad - \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V q(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \end{aligned} \quad (8.7)$$

^{*)} Podkreślenia wymaga fakt, że w prowadzonych w rozdziale 8 rozważaniach posłużono się indukcją elektryczną $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})$ występującą w zagadnieniu oryginalnym. Nie jest ona tożsama z indukcją elektryczną w zagadnieniu zastępczym równą $\epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r})$, gdzie niezmiennione, względem zagadnienia oryginalnego, zostaje pole elektryczne $\mathbf{E}$. Formułę (8.6) można wyprowadzić z warunku (2.31) zastosowanego do zagadnienia oryginalnego.

Gdzie $\mathbf{r}' \in V$ oznacza punkt źródłowy, $\mathbf{r}$ punkt obserwacji, natomiast funkcja Gre-na dana jest wzorem (2.18), dla liczby falowej $k = k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. Gęstość ładunku w (8.7) jest dana przez (8.4).

Pole $\mathbf{E}^s$ dane poprzez (8.7) oznacza tu nie tylko tradycyjne pole rozproszone na zewnątrz bryły (por. rozdział 2.6), ale także pole będące różnicą pomiędzy polem wypadkowym w punktach leżących wewnątrz bryły i, zdefiniowanym w tych samych punktach, polem padającym (przypomnijmy, że pole padające jest zdefiniowane jako hipotetyczne pole występujące w środowisku po usunięciu obiektu rozpraszającego). Stwierdzenie to można zapisać w postaci równania:

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V. \quad (8.8)$$

Po podstawieniu do wzoru (8.8) reprezentacji (8.7) oraz korzystając z definicji prądu polaryzacji (8.1), i równania ciągłości (8.4), otrzymuje się po uporządkowaniu równanie całkowite, w którym niewiadomą jest rozkład gęstości prądu polaryzacji:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{J}_V(\mathbf{r})}{j\omega(\varepsilon(\mathbf{r}) - \varepsilon_0)} + j\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}_V(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \\ - \nabla \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}_V(\mathbf{r}')}{j\omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' = \mathbf{E}^i(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Alternatywnie, traktując jako niewiadomą indukcję elektryczną, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{D}(\mathbf{r})}{\varepsilon(\mathbf{r})} - \omega^2 \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \kappa(\mathbf{r}') \mathbf{D}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \\ - \nabla \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \nabla \cdot (\kappa(\mathbf{r}') \mathbf{D}(\mathbf{r}')) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' = \mathbf{E}^i(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Zapis równania w postaci (8.10) ma między innymi tę zaletę, że nie występuje w nim dzielenie przez zero, obecne w pierwszym składniku po lewej stronie równania (8.9), gdy pewne fragmenty bryły mają przenikalność taka sama jak przenikalność otoczenia.

W szczególnym przypadku gdy obiekt jest jednorodny i jego przenikalność wynosi ε , wzór (8.10) można, korzystając z (8.5) i (8.6), przekształcić do postaci:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{D}(\mathbf{r})}{\varepsilon} - \omega^2 \frac{\mu_0\kappa}{4\pi} \int_V \mathbf{D}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \\ - \nabla \frac{\kappa}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' = \mathbf{E}^i(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V, \end{aligned} \quad (8.11)$$

gdzie zgodnie z (8.3) $\kappa = (\varepsilon - \varepsilon_0)/\varepsilon$. Jedyny ładunek jaki pojawia się w tym przypadku w zagadnieniu zastępczym, jest ładunkiem powierzchniowym na powierzchni S , stąd całka reprezentująca potencjał skalarny redukuje się w (8.11) do całki powierzchniowej [8.2].

8.2. Uogólnienie funkcji RWG na zagadnienia opisane objętościową gęstością prądu

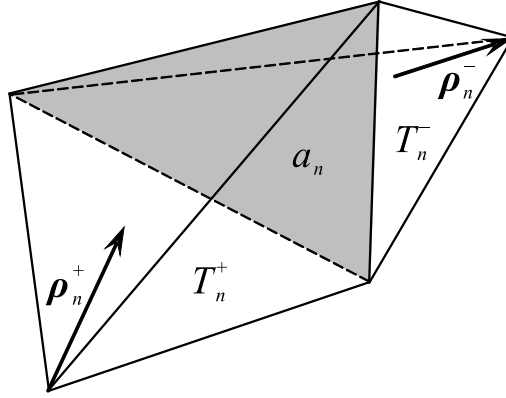
Zanim przystąpimy do omówienia metody rozwiązywania równania (8.9) lub (8.10) należy zrobić jeszcze jedno dodatkowe uproszczenie. Załóżmy, że niejednorodność bryły dielektrycznej (czyli zmiany przenikalności) będziemy aproksymować funkcją stałą w niewielkich podobszarach. Powszechnie przyjmuje się, że najbardziej elastyczny model uzyskuje się, gdy te elementarne podobszary mają kształt przylegających do siebie czworościanów. Zastosowanie jako podstawowego bloku aproksymacji czworościanu jest porównywalne z zastosowaniem elementów trójkątnych w aproksymacji powierzchni.

Cechy, jakimi powinny charakteryzować się funkcje bazowe zależą od wyboru postaci równania objętościowego. Jeżeli jest rozwiązywane równanie (8.9), wielkością aproksymowaną jest objętościowy prąd polaryzacji, jeżeli natomiast przyjmie się równanie (8.10), wielkością aproksymowaną jest objętościowy rozkład indukcji elektrycznej.

Podczas analizy zagadnień opisanych całkowitymi równaniami powierzchniowymi zauważyliśmy, że przydatne w aproksymacji powierzchniowych rozkładów prądu są tzw. funkcje bazowe RWG „rozpięte” na sąsiadujących ze sobą trójkątnych fragmentach powierzchni. Należałoby się zatem zastanowić, czy da się skonstruować funkcje o podobnych właściwościach, ale przydatne do opisu prądów objętościowych. Rozwiązanie tego problemu zaproponowali w 1984 roku Schaubert, Wilton i Glisson [8.3], proponując funkcje zdefiniowane właśnie na dwóch przylegających do siebie czworościanach (rys. 8.2).

Funkcję bazową definiuje się jako:

$$f_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{a_n \boldsymbol{\rho}_n^+}{3V_n^+} = \frac{\boldsymbol{\rho}_n^+}{h_n^+}, & \mathbf{r} \in T_n^+, \\ \frac{a_n \boldsymbol{\rho}_n^-}{3V_n^-} = \frac{\boldsymbol{\rho}_n^-}{h_n^-}, & \mathbf{r} \in T_n^-, \\ 0, & \mathbf{r} \notin T_n^+ \cup T_n^-, \end{cases} \quad (8.12)$$



Rys. 8.2. Funkcja do objętościowej aproksymacji indukcji elektrycznej zdefiniowana na dwóch sąsiadujących czworościanach

gdzie V_n^+ , V_n^- oznaczają odpowiednio objętości czworościanów T_n^+ , T_n^- , h_n^+ , h_n^- oznaczają wysokości tych czworościanów, liczone od swobodnych wierzchołków dowsólnej powierzchni, wektor ρ_n^+ jest wektorem od swobodnego wierzchołka czworościanu T_n^+ do punktu $\mathbf{r}$, gdy $\mathbf{r} \in T_n^+$, a wektor ρ_n^- jest wektorem od punktu $\mathbf{r}$ do swobodnego wierzchołka czworościanu T_n^- , gdy $\mathbf{r} \in T_n^-$.

Funkcja bazowa zdefiniowana wzorem (8.12) charakteryzuje się następującymi właściwościami:

- (1) $\mathbf{f}_n$ jest styczna do ścianek czworościanów, z wyjątkiem ścianki wspólnej;
- (2) składowa normalna $\mathbf{f}_n$ przecinająca ściankę wspólną pomiędzy czworościanami jest ciągła;
- (3) dywergencja $\mathbf{f}_n$ wynosi

$$\nabla \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{a_n}{V_n^+} = \frac{3}{h_n^+}, & \mathbf{r} \in T_n^+ \\ -\frac{a_n}{V_n^-} = -\frac{3}{h_n^-}, & \mathbf{r} \in T_n^- \\ 0, & \mathbf{r} \notin T_n^+ \cup T_n^- \end{cases} \quad (8.13)$$

Zwróćmy uwagę na właściwość numer (2). Konstrukcja funkcji zapewnia ciągłość składowej normalnej na ścianie wspólnej, co jest oczywistą analogią do właściwości numer (2) powierzchniowej funkcji RWG. Tymczasem, jak to już zauważono, składowa normalna prądu polaryzacji nie musi być ciągła na granicy ośrodków! Co więcej, analogia do powierzchniowych funkcji RWG nie jest właściwa w jeszcze jednym przypadku. Przy wykorzystaniu równań powierzchniowych do analizy dielektry-

ków powierzchnia S , po której płynie prąd jest zawsze powierzchnią zamkniętą, przy aproksymacji z użyciem elementów trójkątnych nie występują więc krawędzie „zewnątrzne” – do każdej krawędzi definiującej funkcje bazowe przylegają więc dwa trójkąty. Podobnie jest w analizie powierzchni przewodzących – nawet jeśli taka powierzchnia jest powierzchnią otwartą (do analizy stosujemy wtedy równanie pola elektrycznego), to z krawędziami zewnętrznymi, czyli położonymi „na brzegu” przewodnika, nie są związane funkcje bazowe. Wynika to z oczywistej obserwacji, że prąd prostopadły do takiej „końcowej” krawędzi musi być zerowy, gdyż inaczej nie byłoby spełnione I prawo Kirchhoffa. Tymczasem zauważyliśmy w punkcie 8.1, że prąd polaryzacji *może* mieć składową normalną do powierzchni S . Można zatem stwierdzić, że zdefiniowane funkcje nie nadają się bezpośrednio do aproksymacji objętościowego prądu polaryzacji.

Inaczej jest w przypadku, gdy aproksymowaną wielkością jest indukcja elektryczna – wtedy warunek ciągłości składowej normalnej na ścianie wspólnej wbudowany w definicję (8.12) jest właściwy, odpowiada bowiem stosownemu warunkowi brzegowemu, jaki na indukcję elektryczną narzucają równania Maxwella. Do przeanalizowania pozostaje jeszcze problem ścianek zewnętrznych bryły – prostym rozwiązaniem tego zagadnienia jest odstąpienie od konieczności budowania funkcji bazowych wyłącznie na parach czworościanów. W przypadku gdy ścianka czworościanu, z którą wiąże się funkcję bazową należy do powierzchni S otaczającej bryłę (a ściślej – do jej aproksymacji z użyciem elementów trójkątnych), wiąże się z nią „połówkową” funkcję bazową, zdefiniowaną zgodnie z (8.12) na jednym tylko czworościanie.

Istnieje pożądana właściwość funkcji bazowych służących do aproksymacji indukcji elektrycznej, której funkcje (8.12) nie spełniają. Jest nią warunek zerowania się dywergencji indukcji elektrycznej $\mathbf{D}$. Jak wynika z (8.13), rozważane funkcje bazowe mają dywergencję różną od zera, zatem gdy na podstawie aproksymacji z użyciem takich funkcji oblicza się ładunki elektryczne w zagadnieniu zastępczym, drugi składnik po prawej stronie (8.4) nie zniknie, jak w przypadku zależności (8.5). Co więcej, wprowadzone przez ten składnik ładunki objętościowe będą źródłem dodatkowego potencjału skalarnego w (8.10). W takiej sytuacji warunek zerowania się dywergencji indukcji elektrycznej $\mathbf{D}$ jest spełniony w rozwiązaniu jedynie w sposób przybliżony.

8.3. Elementy macierzy impedancyjnej i wektora pobudzenia

Równanie (8.10) można rozwiązywać zgodnie z typową procedurą metody momentów. W pierwszej kolejności założono, że indukcję elektryczną wewnątrz bryły aproksymuje się jako:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) \cong \sum_{n=1}^N D_n \mathbf{f}_n(\mathbf{r}), \quad (8.14)$$

gdzie D_n są to nieznane współczynniki rozwinięcia, a $\mathbf{f}_n$ są funkcjami bazowymi zdefiniowanymi wzorem (8.12) dla ścianek wewnętrznych lub połówkami tych funkcji dla ścianek zewnętrznych.

Po podstawieniu (8.14) do (8.10) i wykonaniu procedury testowania, z wykorzystaniem tego samego zestawu funkcji, otrzymuje się równanie macierzowe w postaci:

$$[S_{mn}][D_n] = [E_m], \quad (8.15)$$

ze współczynnikami danymi jako:

$$\begin{aligned} S_{mn} &= \int_V \frac{\mathbf{f}_n(\mathbf{r})}{\varepsilon(\mathbf{r})} \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV + j\omega \int_V \mathbf{A}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV + \int_V \nabla \Phi_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV \\ &= \int_V \frac{\mathbf{f}_n(\mathbf{r})}{\varepsilon(\mathbf{r})} \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV - \omega^2 \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \int_V \kappa(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV' dV \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \left\{ \nabla \left(\int_V \nabla' \cdot (\kappa(\mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}')) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \right) \right\} \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV, \end{aligned} \quad (8.16)$$

$$E_m = \int_V \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV. \quad (8.17)$$

gdzie $\mathbf{A}_n$ i Φ_n oznaczają potencjały wektorowy i skalarny wytwarzane przez rozkład prądu opisany funkcją bazową $\mathbf{f}_n$:

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{r}) = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \kappa(\mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dV', \quad (8.18)$$

$$\Phi_n(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \nabla' \cdot (\kappa(\mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}')) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV'. \quad (8.19)$$

Potencjał wektorowy (8.18) w danym punkcie obserwacji $\mathbf{r}$ oblicza się zwykle numerycznie. Dla funkcji zdefiniowanej przez (8.12) otrzymuje się [8.3]:

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{r}) = \frac{j\omega\mu_0 a_n}{12\pi} \left[\frac{\kappa_n^+}{V_n^+} \int_{T_n^+} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \boldsymbol{\rho}_n^+ dV' + \frac{\kappa_n^-}{V_n^-} \int_{T_n^-} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \boldsymbol{\rho}_n^- dV' \right], \quad (8.20)$$

gdzie $\kappa_n^\pm$ oznacza wartość współczynnika kontrastu w obrębie czworościanu $T_n^\pm$.

Potencjał skalarny (8.19) oblicza się, uwzględniając (8.4), (8.6) i (8.13):

$$\begin{aligned} \Phi_n(\mathbf{r}) = & -\frac{a_n}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\kappa_n^+}{V_n^+} \int_{T_n^+} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' - \frac{\kappa_n^-}{V_n^-} \int_{T_n^-} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \right. \\ & \left. - \frac{(\kappa_n^+ - \kappa_n^-)}{a_n} \int_{a_n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right]. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Jeżeli $T_n^\pm \notin V$, w (8.20) i (8.21) podstawiamy wartość $\kappa_n^\pm = 0$. Podobnie jak w przypadku powierzchniowych równań całkowych, szczególnej uwagi wymaga sytuacja, gdy punkt obserwacji leży w obszarze źródłowym i wyrażenie podcałkowe jest osobliwe.

Rozpatrzmy teraz sposób obliczania elementów macierzy momentów za pomocą (8.16), z uwzględnieniem definicji (8.12). Pierwszą całkę po prawej stronie (8.16) obliczamy jako:

$$\int_V \frac{\mathbf{f}_n(\mathbf{r})}{\epsilon(\mathbf{r})} \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{\epsilon_m^+} \int_{T_m^+} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV + \frac{1}{\epsilon_m^-} \int_{T_m^-} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV, \quad (8.22)$$

gdzie $\epsilon_m^\pm$ oznacza przenikalność w obrębie czworościanu $T_m^\pm$. Całki (8.22) są niezerowe wyłącznie w przypadku, gdy dziedziny funkcji $\mathbf{f}_n$ i $\mathbf{f}_m$ pokrywają się w obrębie przynajmniej jednego czworościanu.

Pozostałe całki w (8.16) są całkami podwójnymi. Aby uniknąć czasochłonnego całkowania numerycznego, wygodnie jest – podobnie jak w rozdziale piątym – aproksymować funkcje podcałkowe w całkach zewnętrznych za pomocą ich wartości w środkach odpowiednich czworościanów. W ten sposób dla drugiej całki w (8.16), związanej z potencjałem wektorowym, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} j\omega \int_V \mathbf{A}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV &= j\omega \int_{T_m^+} \mathbf{A}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV + j\omega \int_{T_m^-} \mathbf{A}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV \\ &\cong j\omega \mathbf{A}_n(\mathbf{r}_m^{c+}) \cdot \int_{T_m^+} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV + j\omega \mathbf{A}_n(\mathbf{r}_m^{c-}) \cdot \int_{T_m^-} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV \quad (8.23) \\ &= j\omega \mathbf{A}_n(\mathbf{r}_m^{c+}) \cdot \frac{a_m \boldsymbol{\rho}_m^{c+}}{3} + j\omega \mathbf{A}_n(\mathbf{r}_m^{c-}) \cdot \frac{a_m \boldsymbol{\rho}_m^{c-}}{3}, \end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{r}_m^{c\pm}$ oznacza wektor wskazujący środek geometryczny czworościanu $T_m^\pm$, a $\boldsymbol{\rho}_m^{c\pm}$ oznacza wektor $\boldsymbol{\rho}_m^{c\pm}$ (por. rys. 8.2) dla punktu położonego w środku geometrycznym $T_m^\pm$ (czyli wskazywanego przez $\mathbf{r}_m^{c\pm}$).

Podobnie jak (8.23) oblicza się elementy wektora pobudzenia:

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV &= \int_{T_m^+} \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV + \int_{T_m^-} \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV \\ &\cong \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_m^{c+}) \cdot \int_{T_m^+} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV + \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_m^{c-}) \cdot \int_{T_m^-} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV \quad (8.24) \\ &= \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_m^{c+}) \cdot \frac{a_m \rho_m^{c+}}{3} + \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_m^{c-}) \cdot \frac{a_m \rho_m^{c-}}{3}. \end{aligned}$$

Jeżeli funkcja testująca jest funkcją połówkową (czyli jeżeli $T_m^+ \notin V$ lub $T_m^- \notin V$), nie uwzględniamy odpowiedniego składnika w (8.23) i (8.24).

Osobnego rozważenia wymaga ostatnia całka w (8.16), czyli całka związana z potencjałem skalarnym. Problemem w obliczeniach numerycznych jest tu (podobnie jak w powierzchniowych równaniach całkowych) operator gradientu oddziałujący na potencjał skalarny. Można skorzystać tu z następującej zależności:

$$\int_{T_m^\pm} \nabla \Phi_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV = \int_{\partial T_m^\pm} \Phi_n(\mathbf{r}) \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS - \int_{T_m^\pm} \Phi_n(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV, \quad (8.25)$$

gdzie $\partial T_m^\pm$ oznacza powierzchnię czworościanu $T_m^\pm$, $\mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}$ przybiera wartość niezerową (i równą ± 1) wyłącznie dla wspólnej ścianki pomiędzy czworościanami tworzącymi funkcję $\mathbf{f}_m$. Dla sytuacji, w której dziedziną funkcji są dwa czworościany, mamy zatem:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \Phi_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV &= \int_{T_m^+} \nabla \Phi_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV + \int_{T_m^-} \nabla \Phi_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV \\ &= - \int_{T_m^+} \Phi_n(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV - \int_{T_m^-} \Phi_n(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV, \end{aligned} \quad (8.26)$$

ponieważ całki powierzchniowe od obu czworościanów się redukują.

Po podstawieniu do wzoru (8.26) wzoru na dywergencję funkcji testowej (8.13), a także zastosowaniu aproksymacji potencjału w obrębie $T_m^\pm$ jego wartością w punkcie $\mathbf{r}_m^{c\pm}$, otrzymuje się ostatecznie:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \Phi_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV &\cong -\Phi_n(\mathbf{r}_m^{c+}) \int_{T_m^+} \frac{a_m}{V_m^+} dV + \Phi_n(\mathbf{r}_m^{c-}) \int_{T_m^-} \frac{a_m}{V_m^-} dV \\ &= a_m [\Phi_n(\mathbf{r}_m^{c-}) - \Phi_n(\mathbf{r}_m^{c+})], \quad T_m^+ \in V \text{ i } T_m^- \in V. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Jeżeli funkcja testująca jest związana ze ścianką należącą do S , czyli jest funkcją połówkową, na podstawie (8.25) otrzymuje się [8.3]:

$$\int_{T_m^\pm} \nabla \Phi_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV = \pm a_m [\Phi_n(\mathbf{r}_m^c) - \Phi_n(\mathbf{r}_m^{c\pm})], \quad T_m^\pm \in V \text{ i } T_m^\mp \notin V, \quad (8.28)$$

gdzie $\mathbf{r}_m^c$ oznacza środek geometryczny ścianki a_m , z którą jest związana funkcja testująca.

8.4. Bezźródłowe funkcje bazowe dla brył obrotowych

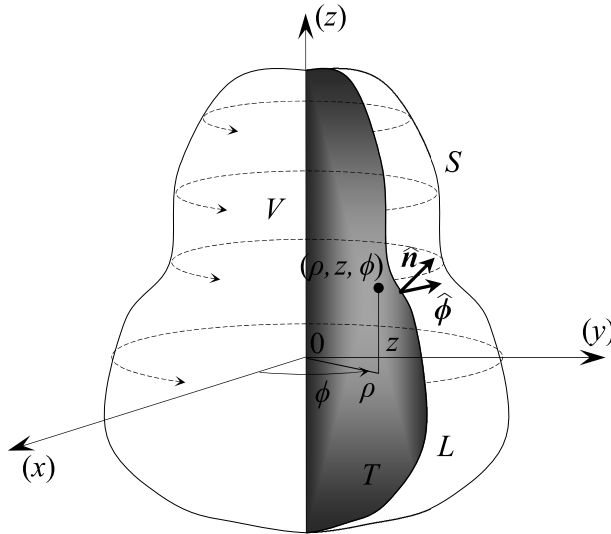
Rozpatrzmy teraz wykorzystanie objętościowego równania całkowego dla bryły o symetrii obrotowej [8.6, 8.7]. W tym przypadku mówi się, że bryła obrotowa jest niejednorodna, jeżeli jej przenikalność elektryczna, w biegunowym układzie współrzędnych, zależy od współrzędnych (ρ, z) , natomiast jest stała w funkcji współrzędnej azymutalnej ϕ . W opisie tego typu bryły rolę linii tworzącej L z rysunku 5.5 przejmuje *powierzchnia tworząca* T , zaznaczona na rysunku 8.3, natomiast linia L pełni teraz rolę konturu T w płaszczyźnie (ρ, z) . Poglądowo można stwierdzić, że linia L obracana wokół osi (z) generuje zewnętrzną powierzchnię bryły S , natomiast powierzchnia T generuje objętość bryły V .

Postępując podobnie jak w punkcie 5.4, założono, że funkcje bazowe, które posłużą do aproksymacji indukcji elektrycznej będą miały ogólną postać:

$$\mathbf{f}_n^p(\rho, z, \phi) = \left(\mathbf{f}_n^T(\rho, z) + f_n^\phi(\rho, z) \hat{\phi} \right) e^{ip\phi}, \quad (8.29)$$

natomiast jako funkcje wagowe wykorzystano funkcje zespolone sprzężone do (8.29).

We wzorze (8.29) $\mathbf{f}_n^T$ oznacza składową wektorową leżącą w płaszczyźnie T , natomiast f_n^ϕ – składową azymutalną. Zwróćmy uwagę, że w przeciwieństwie do rozdziału 5.4, gdzie zdefiniowano dwie oddzielne skalarne funkcje bazowe dwóch składowych prądu (formuły (5.44) i (5.45)), tu zastosowano uniwersalną notację wektorową.



Rys. 8.3. Bryła obrotowa powstała w wyniku obrotu wokół osi (z) powierzchni tworzącej T

Dywergencję funkcji bazowej (8.29) można obliczyć jako:

$$\nabla \cdot \left[\left(\mathbf{f}_n^T(\rho, z) + f_n^\phi(\rho, z) \hat{\phi} \right) e^{jp\phi} \right] = \left(\nabla_T \cdot \mathbf{f}_n^T(\rho, z) + \frac{jp}{\rho} f_n^\phi(\rho, z) \right) e^{jp\phi} \quad (8.30)$$

gdzie wprowadzono notację

$$\nabla_T \cdot \mathbf{D}^T(\rho, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho D^\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial D^z}{\partial z}. \quad (8.31)$$

Przyjmując

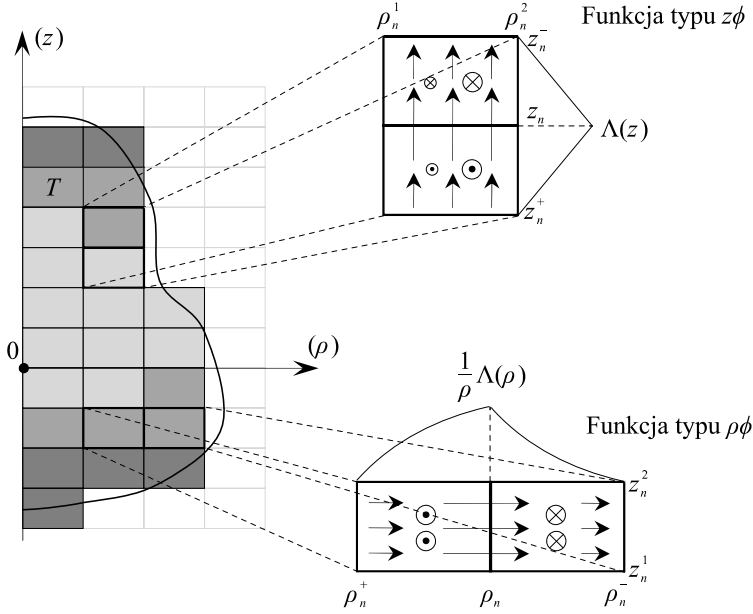
$$f_n^\phi(\rho, z) = -\frac{\rho}{jp} \nabla_T \cdot \mathbf{f}_n^T(\rho, z), \quad (8.32)$$

otrzymuje się bezźródłową, a zatem dobrze nadającą się do aproksymacji indukcji elektrycznej, funkcję bazową:

$$\mathbf{f}_n^p(\rho, z, \phi) = \left(\mathbf{f}_n^T(\rho, z) - \frac{\rho}{jp} \nabla_T \cdot \mathbf{f}_n^T(\rho, z) \hat{\phi} \right) e^{jp\phi}. \quad (8.33)$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja zespolona sprzężona do (8.33), czyli funkcja wagowa, również spełnia warunek bezźródłowości, co ma znaczenie w testowaniu składnika równania całkowego związanego z potencjałem skalarnym. Definicja (8.33) ma sens dla $p \neq 0$. Przypadkiem, gdy $p = 0$, zajmiemy się w dalszej części rozdziału. Zastosowanie (8.33) do rozwiązywania równania całkowego (8.10) oznacza, że nie trzeba wprowadzać osobnego zestawu nieznanych współczynników do aproksymacji składowej azymutalnej indukcji elektrycznej. Po założeniu, że aproksymacja każdej ze składowych wektorowych indukcji, czyli w biegunowym układzie współrzędnych D^ρ , D^z , D^ϕ , wymaga użycia porównywalnej liczby nieznanych współczynników, oznacza to, że liczbę niewiadomych redukuje się w tym przypadku o około 1/3.

Uszczegółowienie (8.33) wymaga zdefiniowania funkcji $\mathbf{f}_n^T(\rho, z)$, najlepiej w taki sposób, aby ta funkcja gwarantowała ciągłość składowej normalnej indukcji przy skokowej zmianie przenikalności (lub współczynnika kontrastu) – innymi słowy, aby miała ona charakter funkcji daszkowej. W celu zdefiniowania takiej funkcji, płaszczyzną tworzącą bryły trzeba podzielić na elementarne segmenty. Podobnie jak w rozwiązaniu trójwymiarowym, założono, że współczynnik kontrastu w obrębie segmentu jest stały. Doświadczenie z poprzednich rozdziałów wskazuje, że najbardziej elastyczny model uzyska się, stosując podział na elementy trójkątne i definiując na parach trójkątów funkcje typu RWG. Niestety, rozwiązanie takie nie jest optymalne dla aproksymacji indukcji w bezpośrednim otoczeniu osi symetrii bryły, czyli dla ρ bliskich zera, gdzie wygodnie jest zastosować oddzielne aproksymacje dla składowych D^ρ i D^z . Z tego powodu stosuje się aproksymację z wykorzystaniem elementarnych prostokąt-



Rys. 8.4. Aproksymacja powierzchni tworzącej T za pomocą elementarnych prostokątów oraz zdefiniowane na parach prostokątów funkcje bazowe typu $z\phi$ i typu $\rho\phi$; strzałki ilustrują rozkład składowej ρ lub z odpowiedniej funkcji, natomiast okręgi – stowarzyszoną składową ϕ ; kierunek składowej ϕ zaznaczono dla dodatnich p

tów pokazaną na rysunku 8.4. Po takim założeniu kontur L jest aproksymowany linią schodkową. Praktycznie nic nie stoi na przeszkodzie, aby powierzchnię tworzącą T uzupełnić o prostokąty zaznaczone linią popielatą i przypisać im zerowy współczynnik kontrastu. Dowolną bryłę obrotową można potraktować wtedy jako niejednorodny walec. Takie podejście zwiększa oczywiście liczbę niewiadomych współczynników aproksymacji, prowadzi jednak do prostszego kodu komputerowego.

Funkcje typu ρ i typu z , oznaczone jako f_n^ρ i f_n^z , definiujemy z wykorzystaniem odpowiednio funkcji daszkowych $1/\rho\Lambda(\rho)$ oraz $\Lambda(z)$, w sposób następujący:

$$f_n^\rho(\rho, z) = \hat{\rho} \frac{1}{\rho} \Lambda_n(\rho) - \hat{\phi} \frac{1}{jp} \frac{\partial \Lambda_n(\rho)}{\partial \rho}$$

$$= \begin{cases} \hat{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{(\rho - \rho_n^+)}{(\rho_n^- - \rho_n^+)} - \hat{\phi} \frac{1}{jp(\rho_n^- - \rho_n^+)}, & \rho \in (\rho_n^+, \rho_n^-) \wedge z \in (z_n^1, z_n^2) \\ \hat{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{(\rho_n^- - \rho)}{(\rho_n^- - \rho_n^+)} + \hat{\phi} \frac{1}{jp(\rho_n^- - \rho_n^+)}, & \rho \in (\rho_n^-, \rho_n^+) \wedge z \in (z_n^1, z_n^2) \\ 0, & \rho \notin (\rho_n^+, \rho_n^-) \vee z \notin (z_n^1, z_n^2) \end{cases} \quad (8.34)$$

$$\begin{aligned}
 f_n^z(\rho, z) &= \hat{\mathbf{z}} \Lambda_n(z) - \hat{\phi} \frac{\rho}{jp} \frac{\partial \Lambda_n(z)}{\partial z} \\
 &= \begin{cases} \hat{\mathbf{z}} \frac{(z - z_n^+)}{(z^n - z_n^+)} - \hat{\phi} \frac{\rho}{jp(z^n - z_n^+)}, & \rho \in (\rho_n^1, \rho_n^2) \wedge z \in (z_n^+, z^n) \\ \hat{\mathbf{z}} \frac{(z_n^- - z)}{(z_n^- - z^n)} + \hat{\phi} \frac{\rho}{jp(z_n^- - z^n)}, & \rho \in (\rho_n^1, \rho_n^2) \wedge z \in (z^n, z_n^-) \\ 0, & \rho \notin (\rho_n^1, \rho_n^2) \vee z \notin (z_n^+, z_n^-) \end{cases} \quad (8.35)
 \end{aligned}$$

gdzie parametry geometryczne pokazano na rysunku 8.4.

Formuły (8.34), (8.35) definiują zależność funkcji bazowych od współrzędnych (ρ, z) . Kompletne funkcje bazowe otrzymuje się, uzupełniając powyższe zależności o czynnik eksponencjalny zależny od ϕ , czyli:

$$f_n^{p, \rho}(\rho, z, \phi) = f_n^\rho(\rho, z) e^{jp\phi}, \quad (8.36)$$

$$f_n^{p, z}(\rho, z, \phi) = f_n^z(\rho, z) e^{jp\phi}. \quad (8.37)$$

Indukcję elektryczną w (8.10) będziemy zatem aproksymować za pomocą:

$$\mathbf{D}(\rho, z, \phi) \cong \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{N_\rho} D_n^{p, \rho} f_n^\rho(\rho, z) + \sum_{n=1}^{N_z} D_n^{p, z} f_n^z(\rho, z) \right) e^{jp\phi}. \quad (8.38)$$

Postępując podobnie jak w rozdziale 5.4, można wykazać, że zastosowanie aproksymacji (8.38) oraz użycie w charakterze funkcji wagowych zestawu funkcji zespolonych sprzężonych do (8.36) i (8.37) prowadzi do osobnego układu równań liniowych dla każdego rodzaju azymutalnego p :

$$\begin{bmatrix} [S_{mn}^{p, \rho\rho}] & [S_{mn}^{p, \rho z}] \\ [S_{mn}^{p, z\rho}] & [S_{mn}^{p, zz}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [D_n^{p, \rho}] \\ [D_n^{p, z}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [E_n^{p, \rho}] \\ [E_n^{p, z}] \end{bmatrix}. \quad (8.39)$$

gdzie elementy macierzy oblicza się na podstawie (8.36), (8.37):

$$\begin{aligned}
S_{mn}^{p,\rho\rho} = & 2\pi \int_T \frac{1}{\varepsilon(\rho, z)} \left(\frac{1}{\rho} \Lambda_n(\rho) \Lambda_m(\rho) + \frac{\rho}{p^2} \frac{\partial \Lambda_n(\rho)}{\partial \rho} \frac{\partial \Lambda_m(\rho)}{\partial \rho} \right) dT \\
& - \omega^2 \frac{\mu_0}{2} \int_T \int_T \kappa(\rho', z') \left[\left(\frac{G_{p-1} + G_{p+1}}{2} \right) \left(\Lambda_n(\rho') \Lambda_m(\rho) \right. \right. \\
& + \left. \frac{\rho' \rho}{p^2} \frac{\partial \Lambda_n(\rho')}{\partial \rho'} \frac{\partial \Lambda_m(\rho)}{\partial \rho} \right) \\
& + \left(\frac{G_{p-1} - G_{p+1}}{2} \right) \left(\Lambda_n(\rho') \frac{\rho}{p} \frac{\partial \Lambda_m(\rho)}{\partial \rho} \right. \\
& + \left. \left. \frac{\rho'}{p} \frac{\partial \Lambda_n(\rho')}{\partial \rho'} \Lambda_m(\rho) \right) \right] dT' dT \\
& - \frac{1}{2\varepsilon_0} \int_L \left(\int_\Sigma (\kappa_n^+ - \kappa_n^-) \Lambda_n(\rho') G_p dL' \right) \Lambda_m(\rho) dL,
\end{aligned} \tag{8.40}$$

$$\begin{aligned}
S_{mn}^{p,z\rho} = & 2\pi \int_T \frac{1}{\varepsilon(\rho, z)} \left(\frac{\rho^2}{p^2} \frac{\partial \Lambda_n(\rho)}{\partial \rho} \frac{\partial \Lambda_m(z)}{\partial z} \right) dT \\
& - \omega^2 \frac{\mu_0}{2} \int_T \int_T \kappa(\rho', z') \left(\frac{G_{p-1} + G_{p+1}}{2} \right) \frac{\rho^2 \rho'}{p^2} \frac{\partial \Lambda_n(\rho')}{\partial \rho'} \frac{\partial \Lambda_m(z)}{\partial z} dT' dT \\
& - \frac{1}{2\varepsilon_0} \int_L \left(\int_\Sigma (\kappa_n^+ - \kappa_n^-) \Lambda_n(\rho') G_p dL' \right) \Lambda_m(z) \rho dL,
\end{aligned} \tag{8.41}$$

$$\begin{aligned}
S_{mn}^{p,\rho z} = & 2\pi \int_T \frac{1}{\varepsilon(\rho, z)} \left(\frac{\rho^2}{p^2} \frac{\partial \Lambda_n(z)}{\partial z} \frac{\partial \Lambda_m(\rho)}{\partial \rho} \right) dT \\
& - \omega^2 \frac{\mu_0}{2} \int_T \int_T \kappa(\rho', z') \left(\frac{G_{p-1} + G_{p+1}}{2} \right) \frac{\rho'^2 \rho}{p^2} \frac{\partial \Lambda_n(z')}{\partial z'} \frac{\partial \Lambda_m(\rho)}{\partial \rho} dT' dT \\
& - \frac{1}{2\varepsilon_0} \int_L \left(\int_\Sigma (\kappa_n^+ - \kappa_n^-) \Lambda_n(z') G_p \rho' dL' \right) \Lambda_m(\rho) dL,
\end{aligned} \tag{8.42}$$

$$\begin{aligned}
S_{mn}^{p,zz} = & 2\pi \int_T \frac{1}{\varepsilon(\rho, z)} \left(\Lambda_n(z) \Lambda_m(z) + \frac{\rho^2}{p^2} \frac{\partial \Lambda_n(z)}{\partial z} \frac{\partial \Lambda_m(z)}{\partial z} \right) \rho dT \\
& - \omega^2 \frac{\mu_0}{2} \int_T \int_T \kappa(\rho', z') G_p \left(\Lambda_n(z') \Lambda_m(z) \right. \\
& \left. + \left(\frac{G_{p-1} + G_{p+1}}{2} \right) \frac{\rho' \rho}{p^2} \frac{\partial \Lambda_n(z')}{\partial z'} \frac{\partial \Lambda_m(z)}{\partial z} \right) \rho' \rho dT' dT \\
& - \frac{1}{2\varepsilon_0} \int_L \left(\int_\Sigma (\kappa_n^+ - \kappa_n^-) \Lambda_n(z') G_p \rho' dL' \right) \Lambda_m(z) \rho dL,
\end{aligned} \tag{8.43}$$

gdzie G_p zdefiniowano formułą (5.55).

Kilku słów komentarza wymaga obliczanie całek związanych z potencjałem skalarnym. Skorzystano tu z odpowiednika (8.25), przy czym druga całka w (8.25) przyjmuje wartość zerową, gdyż funkcje testowe są bezźródłowe. Dlatego też ostatnie całki w (8.40)–(8.43) są całkami po konturze powierzchni tworzącej L . Oczywiście na tym konturze niezerowe są wyłącznie połówkowe funkcje wagowe – co więcej ich składowa normalna do L odpowiada wartości jeden odpowiedniej funkcji daszkowej. W tym kontekście pozostawienie $\Lambda_m(\rho)$ w ostatniej całce (8.40) i (8.42) oraz $\Lambda_m(z)$ w ostatniej całce (8.41) i (8.43) oznacza wyłącznie wyznaczenie dziedziny całkowania całki zewnętrznej.

Występujący w (8.5) gradient współczynnika kontrastu generuje w przypadku gdy ten współczynnik jest opisany funkcją zmieniającą się w sposób skokowy pomiędzy segmentami, a stały w obrębie segmentów ładunek powierzchniowy opisany przez (8.6). Wynika z tego, że całka wewnętrzna jest tu nie całką po powierzchni T , a całką po liniach siatki pokazanej na rysunku 8.4. Sumę geometryczną wszystkich krawędzi siatki oznaczono symbolem Σ .

Elementy wektora pobudzeń oblicza się jako:

$$\begin{aligned}
E_m^{p,\rho} = & \int_T \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{E}^i(\rho, z, \phi) \cdot \hat{\rho} e^{-jp\phi} d\phi + \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{E}^i(\rho, z, \phi) \cdot \hat{\phi} e^{-jp\phi} d\phi \right) \\
& \cdot \left(\hat{\rho} \frac{1}{\rho} \Lambda_m(\rho) + \hat{\phi} \frac{1}{jp} \frac{\partial \Lambda_m(\rho)}{\partial \rho} \right) \rho dT,
\end{aligned} \tag{8.44}$$

$$\begin{aligned}
E_m^{p,z} = & \int_V \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV \\
= & \int_T \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{E}^i(\rho, z, \phi) \cdot \hat{\mathbf{z}} e^{-jp\phi} d\phi + \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{E}^i(\rho, z, \phi) \cdot \hat{\phi} e^{-jp\phi} d\phi \right) \\
& \cdot \left(\hat{\mathbf{z}} \Lambda_m(z) + \hat{\phi} \frac{\rho}{jp} \frac{\partial \Lambda_m(z)}{\partial z} \right) \rho dT.
\end{aligned} \tag{8.45}$$

Jak wspomniano, zarówno konstrukcja bezźródłowych funkcji bazowych, jak i wynikające z ich zastosowania formuły na elementy równania (8.39) wymagają różnych od zera wartości współczynnika p . Przypadek $p=0$, co oznacza niezmiennosc indukcji elektrycznej względem składowej azymutalnej, czyli $\partial/\partial\phi=0$, wymaga zatem szczególnego traktowania. Przepiszmy zatem równanie (8.10), z uwzględnieniem tego warunku w biegunowym układzie współrzędnych.

Ponieważ dla $\partial/\partial\phi=0$, gradient nie ma składowej azymutalnej, a jednocześnie dywergencja składowej azymutalnej jest równa zero, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{D^\rho(\rho, z)}{\varepsilon(\rho, z)} - \omega^2 \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \kappa(\rho', z') D^\rho(\rho', z') \cos(\phi - \phi') G dV' \\ - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \left(\rho \int_V \nabla_T \cdot (\kappa(\rho', z') \mathbf{D}^T(\rho', z')) G dV' \right)}{\partial \rho} = E^{i,\rho}(\rho, z), \end{aligned} \quad (8.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{D^z(\rho, z)}{\varepsilon(\rho, z)} - \omega^2 \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \kappa(\rho', z') D^z(\rho', z') G dV' \\ - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\partial \int_V \nabla_T \cdot (\kappa(\rho', z') \mathbf{D}^T(\rho', z')) G dV'}{\partial z} = E^{i,z}(\rho, z), \end{aligned} \quad (8.47)$$

gdzie $\mathbf{D}^T(\rho', z') = D^\rho(\rho', z') \hat{\rho} + D^z(\rho', z') \hat{z}$ oraz

$$\frac{D^\phi(\rho, z)}{\varepsilon(\rho, z)} - \omega^2 \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \kappa(\rho', z') D^\phi(\rho', z') \cos(\phi - \phi') G dV' = E^{i,\phi}(\rho, z), \quad (8.48)$$

gdzie $E^{i,\rho}$, $E^{i,z}$ i $E^{i,\phi}$ oznaczają odpowiednie składowe pola padającego, a operator ∇_T zdefiniowano poprzez (8.31).

Wykonując całkowanie względem $\alpha = \phi - \phi'$, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \frac{D^\rho(\rho, z)}{\varepsilon(\rho, z)} - \omega^2 \frac{\mu_0}{4\pi} \int_T \kappa(\rho', z') D^\rho(\rho', z') G_1 \rho' dV' \\ - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \left(\rho \int_T \nabla_T \cdot (\kappa(\rho', z') \mathbf{D}^T(\rho', z')) G_0 \rho' dV' \right)}{\partial \rho} = E^{i,\rho}(\rho, z), \end{aligned} \quad (8.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{D^z(\rho, z)}{\varepsilon(\rho, z)} - \omega^2 \frac{\mu_0}{4\pi} \int_T \kappa(\rho', z') D^z(\rho', z') G_0 \rho' dT' \\ - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\partial \int_T \nabla_T \cdot (\kappa(\rho', z') \mathbf{D}^T(\rho', z')) G_0 \rho' dT'}{\partial z} = E^{i,z}(\rho, z), \end{aligned} \quad (8.50)$$

$$\frac{D^\phi(\rho, z)}{\varepsilon(\rho, z)} - \omega^2 \frac{\mu_0}{4\pi} \int_T \kappa(\rho', z') D^\phi(\rho', z') G_1 \rho' dT' = E^{i,\phi}(\rho, z). \quad (8.51)$$

We wzorach (8.49) i (8.51) skorzystaliśmy z faktu, że $G_{-1}(\rho, z, \rho', z') = G_1(\rho, z, \rho', z')$

Równania, w których niewiadomymi są składowe $\mathbf{D}^T$, czyli (8.49), (8.50) oraz równanie (8.51), w którym niewiadomą jest współrzędna azymutalna D^ϕ są od siebie niezależne, można je zatem rozwiązywać osobno z wykorzystaniem różnych zestawów funkcji bazowych i wagowych. W szczególności w układzie (8.49)–(8.50) należy zastosować różniczkowalne funkcje bazowe. Mogą to być funkcje (8.34), (8.35) pozbawione części azymutalnej. Oczywiście takie funkcje nie są bezźródłowe, w obliczaniu potencjału skalarnego pojawiają się więc ładunki objętościowe, będące odpowiednikiem pierwszych dwóch całek po prawej stronie (8.21). Jednocześnie podczas testowania fragmentu równań zawierających pochodne potencjału skalarnego trzeba uwzględnić odpowiedniki drugiej całki w (8.25), ponieważ funkcje wagowe też nie są bezźródłowe. Z kolei, aby rozwiązać równanie (8.51), wystarczy aproksymować $D^\phi(\rho, z)$ funkcją fragmentami stałą – nie jest bowiem wymagane, aby funkcje bazowe były w tym przypadku różniczkowalne.

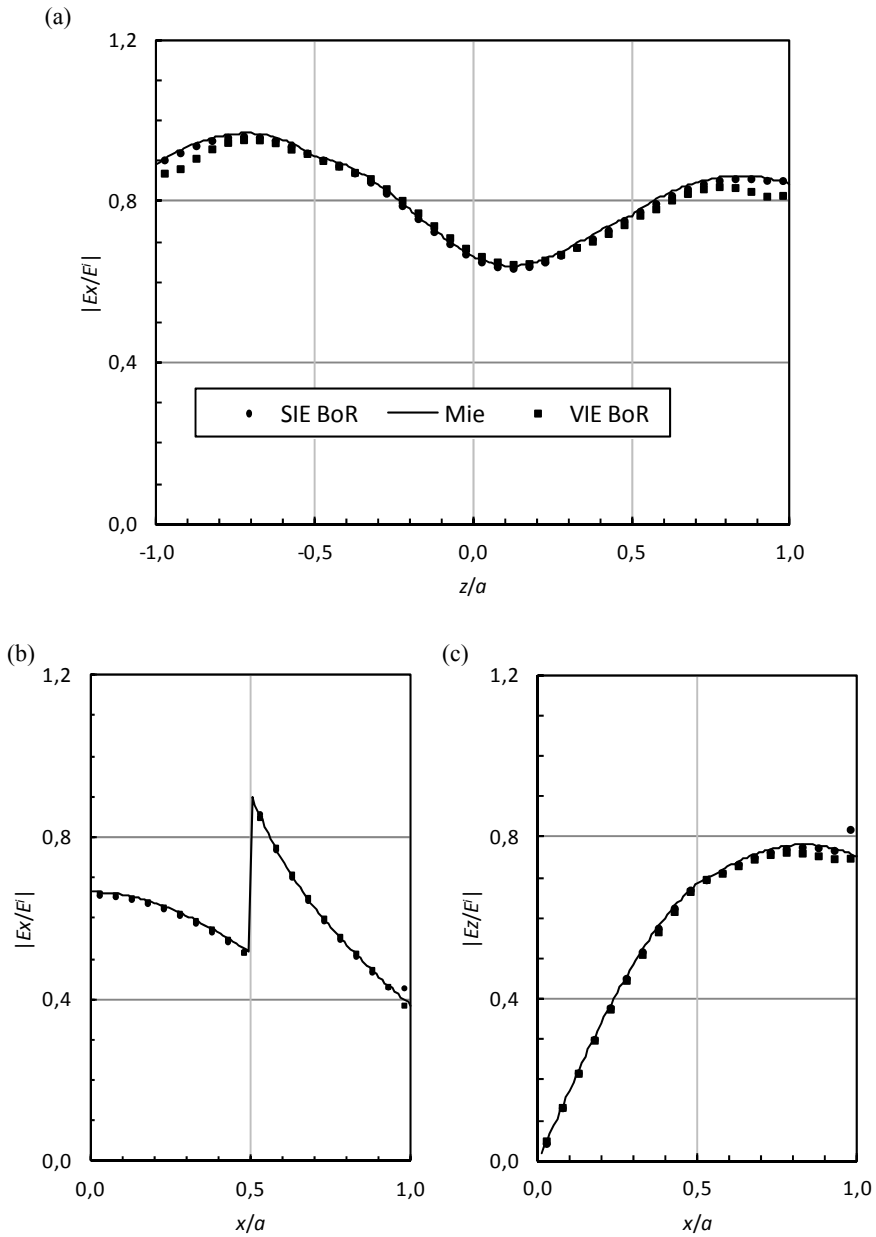
Choć rozwiązanie dla $p = 0$ wymaga bardziej skomplikowanego algorytmu niż dla $p \neq 0$, dzięki separacji równań liczba niewiadomych w wynikowych układach równań liniowych nie jest w tym przypadku większa.

8.5. Przykłady obliczeniowe

Ze względu na duże liczby niewiadomych, związane z objętościowym charakterem aproksymowanych wielkości, zaprezentowane dalej przykłady dotyczą brył o symetrii obrotowej, do analizy których wykorzystano algorytm opisany w punkcie 8.4. W przykładach wyniki uzyskane metodą opisaną w niniejszym rozdziale oznaczono jako VIE (ang. *Volume Integral Equation* – objętościowe równanie całkowe), natomiast oznaczenie SIE (ang. *Surface Integral Equation* – powierzchniowe równanie całkowe) odnosi się do metody opisanej w rozdziale siódmym.

8.5.1. Dwuwarstwowa kula dielektryczna

Pierwszym z przykładów jest przykład przeanalizowany uprzednio w punkcie 7.2.1 – dwuwarstwowa kula dielektryczna o promieniu zewnętrznym a i wewnętrznym $b = a/2$ oraz przenikalności względnej części wewnętrznej równej 16,0 i części ze-

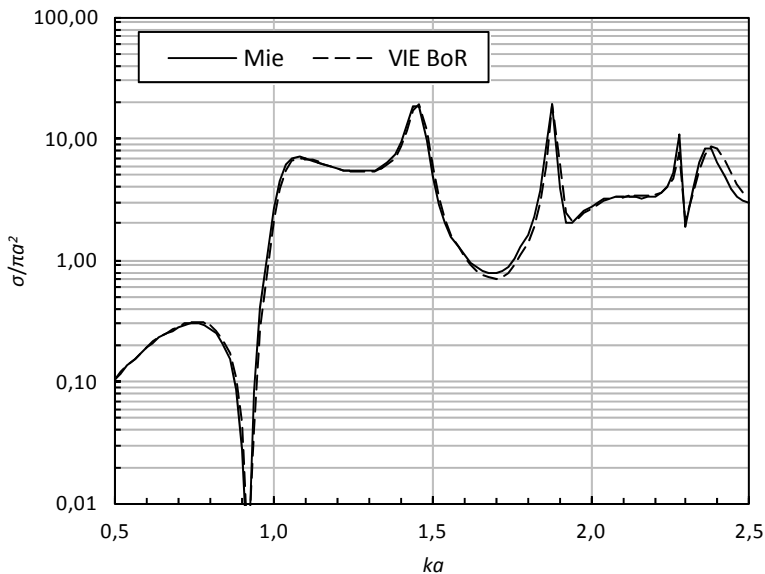


Rys. 8.5. Pole elektryczne w obrębie dwuwarstwowej kuli dielektrycznej o promieniu zewnętrznym a i wewnętrznym b ; $b/a = 0,5$ dla części wewnętrznej przenikalność $\varepsilon_{r1} = 16,0$, dla części zewnętrznej $\varepsilon_{r2} = 9,0$; obliczenia dla $ka = 0,8$; (a) składowa E_x wzdłuż osi z ; (b) składowa E_x wzdłuż osi x ; (c) składowa E_z wzdłuż osi x

wewnętrznej równej 9,0. Kula jest oświetlona płaską falą elektromagnetyczną poruszającą się w kierunku przeciwnym do osi z , spolaryzowaną w kierunku osi x . Obliczenia przeprowadzono, wpisując kulę w walec o promieniu a i wysokości $2a$, którego powierzchnię tworzącą podzielono na $20 \times 40 = 800$ elementarnych kwadratów. Dało to w wyniku układ równań liniowych o 1620 niewiadomych. Fala pobudzająca generuje wyłącznie rodzaje azymutalne o numerach $p = \pm 1$, w obliczeniach zatem wykorzystano wyłącznie bezźródłowe funkcje bazowe. Porównanie wyników – rozkładów pola elektrycznego wzdłuż osi układu współrzędnych wewnątrz kuli dla $ka = 0,8$, pokazano na rysunku 8.5. Jak widać, zgodność wyników obliczeń jest dobra, choć nie jest idealna.

8.5.2. Wydrążona kula dielektryczna

W drugim przykładzie wykorzystano taki sam model, jak w punkcie poprzednim, zmieniając tylko przenikalność względną części wewnętrznej na 1,0, co oznacza analizę kuli wydrążonej/pustej w środku. Obliczano skuteczną powierzchnię odbijającą w funkcji parametru ka . Wyniki pokazano na rysunku 8.6. Jak widać, zgodność wyników obliczeń z rozwiązaniem analitycznym jest bardzo dobra.



Rys. 8.6. Skuteczna wsteczna powierzchnia odbijająca wydrążonej kuli dielektrycznej o promieniu zewnętrznym a i wewnętrznym b ; $b/a = 0,5$ dla części zewnętrznej przenikalność względną wynosi $\varepsilon_r = 9,0$

Literatura

- [8.1] Volakis J., *Alternative field representations and integral equations for modeling inhomogeneous dielectrics*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. 40, No. 3, 1992, 604–608.
- [8.2] Poggio A.J., Miller E.K., *Integral equation solutions of three-dimensional scattering problems*, [w:] R. Mittra (red.), *Computer Techniques for Electromagnetics*, Oxford, England, Pergamon, 4, 1973.
- [8.3] Schaubert D.H., Wilton D.R., Glisson A.W., *A tetrahedral modeling method for electromagnetic scattering by arbitrarily shaped inhomogeneous dielectric bodies*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 32, No. 1, 1984, 77–85.
- [8.4] Sarkar T.K., Arvas E., Ponnappalli S., *Electromagnetic scattering from dielectric bodies*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 37, No. 5, 1989, 673–676.
- [8.5] Su C.-C., *Electromagnetic scattering by a dielectric body with arbitrary inhomogeneity and anisotropy*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 37, No. 3, 1989, 384–389.
- [8.6] Kucharski A.A., *A method of moments solution for electromagnetic scattering by inhomogeneous dielectric bodies of revolution*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 48, No. 8, 2000, 1202–1210.
- [8.7] Kucharski A.A., *Electromagnetic scattering by dielectric bodies*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2001.

9. Apertura w nieskończonej metalowej płaszczyźnie

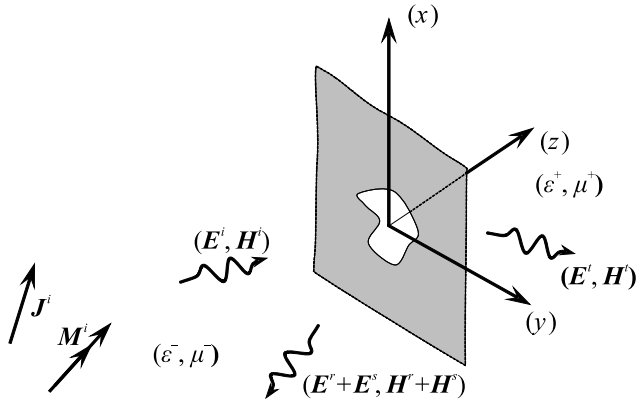
W rozdziałach poprzednich zajmowano się między innymi zagadnieniem, w którym pewien obiekt metalowy o skończonych rozmiarach (w założeniu – zbudowany z *idealnego* przewodnika) jest umieszczony w zewnętrznym polu elektromagnetycznym. Często interesującym przypadkiem jest problem dualny – gdy fala padająca oświetla otwór (szczelinę) w przewodniku. Zazwyczaj interesuje nas wtedy, jakie pole elektromagnetyczne pojawi się „po drugiej stronie” otworu, inaczej nazywanego *aperturą*. Po obu stronach apertury mogą znajdować się ośrodki scharakteryzowane różnymi parametrami propagacyjnymi oraz różną geometrią. Przykłady to otwór w nieskończonej metalowej płaszczyźnie rozdzielającej ośrodki o różnych właściwościach, otwór w ścianie wnęki rezonansowej, czy falowodu, zasilanie przez szczelinę anteny, do której energia doprowadzana jest linią mikropaskową itp.

9.1. Równania całkowe i metoda momentów

Rozpatrzono aperturę o dowolnym kształcie, wykonaną w nieskończone rozległe i nieskończenie cienkiej metalowej płaszczyźnie $z = 0$ (rys. 9.1), rozdzielającej półprzestrzenie o różnych parametrach. Z jednej strony otworu (w lewej półprzestrzeni) zdefiniowano pole pobudzające, wytwarzane przez *niezależne* źródła położone w lewej półpłaszczyźnie. Określenie *niezależne* oznacza, że obecność apertury nie wpływa na wytwarzane przez te źródła pola elektromagnetyczne.

Zaznaczone na rysunku pola ($\mathbf{E}^t, \mathbf{H}^t$) są polami transmitowanymi do półprzestrzeni $z > 0$, pola ($\mathbf{E}^r, \mathbf{H}^r$) to pola powstające w półprzestrzeni $z < 0$ w wyniku odbicia się fali padającej ($\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i$) od metalowej płaszczyzny bez apertury, natomiast pola ($\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s$) to różnica pomiędzy polami w tym regionie w obecności i bez obecności otworu.

Przedstawiony problem nie nadaje się oczywiście do analizy techniką opracowaną dla idealnych przewodników – metalowa płaszczyzna wokół otworu jest nieskończenie rozległa, nie można więc aproksymować jej za pomocą skończonej liczby segmentowych funkcji bazowych. Pomocne będą wielokrotnie już stosowane zasady równo-



Rys. 9.1. Transmisja fali elektromagnetycznej przez otwór w nieskończenie rozległej metalowej płaszczyźnie $z = 0$ rozdzielającej półprzestrzenie o różnych parametrach

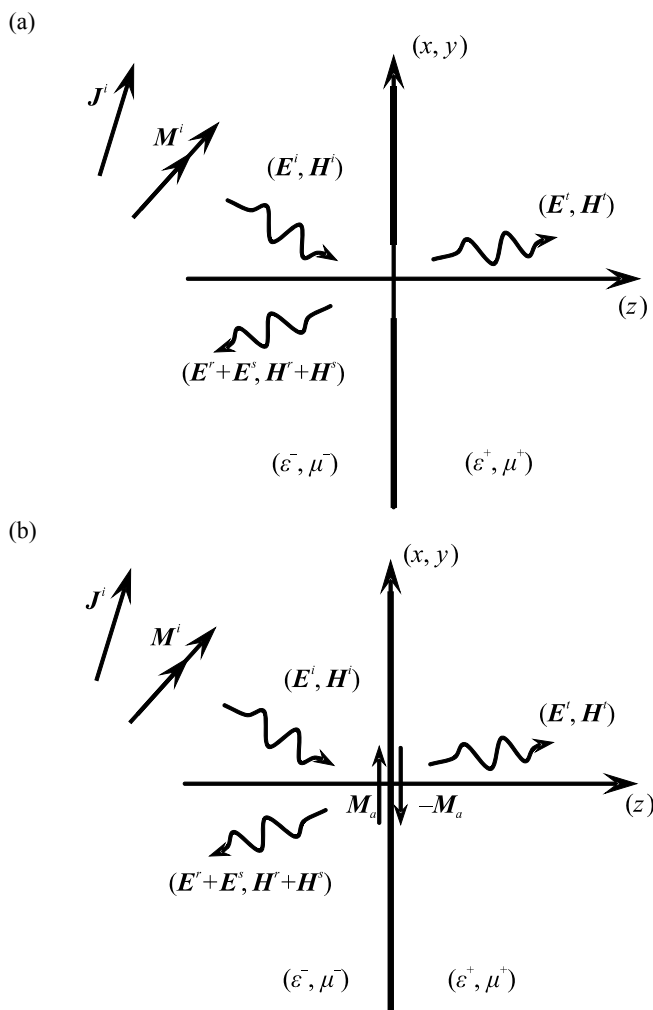
ważności [9.1–9.4]. Skonstruowano zatem zagadnienie równoważne, z prawidłowymi polami w obu podobszarach, zawierając otwór i, zgodnie z zasadą opisaną w punkcie 2.5, umieszczając po obu stronach jego powierzchni zastępcze prądy magnetyczne, przy czym jest kwestią umowną, po której stronie umieści się prąd ze znakiem dodatnim, a po której – z ujemnym. Zagadnienie oryginalne przedstawiono na rysunku 9.2a, a zagadnienie równoważne – na rysunku 9.2b.

W zagadnieniu równoważnym prąd magnetyczny umiejscowiony *tuż na lewo* od płaszczyzny $z = 0$ wytwarza oryginalne pola w lewej półprzestrzeni, natomiast jego ujemny odpowiednik *tuż na prawo* od płaszczyzny $z = 0$ wytwarza właściwe pola (E^t, H^t) w prawej półprzestrzeni. Prądy magnetyczne M_a oraz $-M_a$ promieniują w obecności metalowej nieskończonej płaszczyzny. Aby do obliczania pola wytwarzanego przez te prądy można było wykorzystać formuły dwupotencjałowe opisujące promieniowanie w ośrodku niekończenie rozległym, należy ponownie zastosować zasadę równoważności – tym razem w postaci tzw. metody obrazów (por. rys. 2.4). W wyniku otrzymuje się dwa zagadnienia zastępcze, zachowujące oryginalne pole odpowiednio w lewej i prawej półprzestrzeni, pokazane na rysunku 9.3. Na rysunku zaznaczone równoległymi strzałkami zastępcze prądy magnetyczne leżą w istocie w płaszczyźnie $z = 0$, należy je traktować zatem jako podwojone prądy $2M_a$ i $-2M_a$, promieniujące w odpowiednich konfiguracjach równoważnych. Pola wytwarzane przez podwojone prądy są oczywiście obecne w całej jednorodnej przestrzeni występującej w konfiguracji równoważnej, nas jednak interesuje fakt, że są one identyczne z polami w zagadnieniu oryginalnym dla półprzestrzeni, której dotyczy dany model, dlatego też pola (E^s, H^s) i (E^t, H^t) zaznaczono na rysunku 9.3 tylko po odpowiednich stronach płaszczyzny $z = 0$.

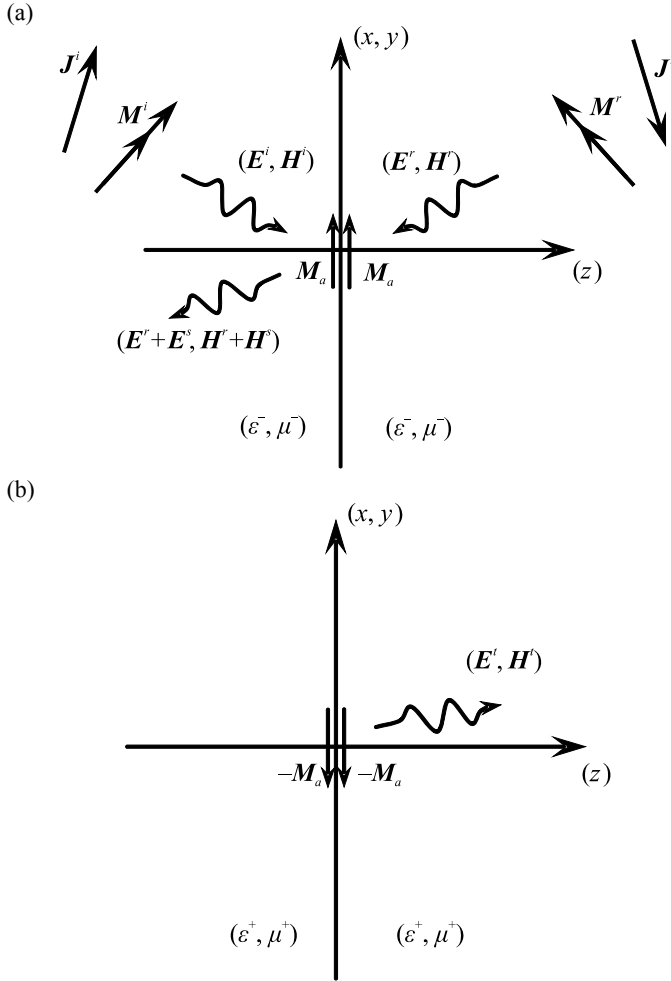
Warto zwrócić uwagę na źródła pobudzające zaznaczone na rysunku 9.3a. W zagadnieniu zastępczym dla lewej półprzestrzeni promieniują zarówno źródła oryginalne

$(\mathbf{J}^i, \mathbf{M}^i)$, wytwarzając pole padające $(\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i)$, jak i ich obrazy $(\mathbf{J}^r, \mathbf{M}^r)$, wytwarzające pole $(\mathbf{E}^r, \mathbf{H}^r)$, odpowiadające części pola pobudzającego odbitej od nieskończonej metalowej płaszczyzny w zagadnieniu oryginalnym.

Można teraz przystąpić do sformułowania opisującego problem równania całkowego. Na powierzchni apertury, gdzie występuje nieciągłość parametrów elektrycznych ośrodka, musi być zachowana ciągłość składowych stycznych pola elektrycznego i magnetycznego. Ciągłość składowej stycznej pola elektrycznego jest zapewniona w zagadnieniu równoważnym przez założenie, że po obu stronach zwartej płaszczyzny



Rys. 9.2. Modelowanie transmisji pola elektromagnetycznego przez otwór w metalowej płaszczyźnie: (a) konfiguracja oryginalna; (b) konfiguracja równoważna



Rys. 9.3. Konfiguracje zastępcze po zastosowaniu metody obrazów:
(a) model dla lewej półprzestrzeni; (b) model dla prawej półprzestrzeni

metalowej promieniają prądy równe co do modułu, a przeciwne co do znaku. Warunek ciągłości składowej stycznej pola magnetycznego pozwala sformułować równanie:

$$\left(\mathbf{H}^i(\mathbf{r}) + \mathbf{H}^r(\mathbf{r}) + \mathbf{H}^s(\mathbf{r}) \right)_{\tan} = \left(\mathbf{H}^t(\mathbf{r}) \right)_{\tan}, \quad \mathbf{r} \in S_a, \quad (9.1)$$

gdzie S_a oznacza powierzchnię apertury.

Uwzględniając, że pole $\mathbf{H}^s$ jest wytwarzane, w konfiguracji z rysunku 9.3a, przez podwojony prąd $\mathbf{M}_a$ promieniujący w nieskończonym ośrodku o parametrach (ϵ^-, μ^-) , a pole $\mathbf{H}^t$, w konfiguracji z rysunku 9.3b, przez podwojony prąd $-\mathbf{M}_a$ promieniujący

w nieskończonym ośrodku o parametrach (ε^+, μ^+) , można przepisać (9.1) z wykorzystaniem reprezentacji dwupotencjałowych jako:

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{H}^i(\mathbf{r}) + \mathbf{H}^r(\mathbf{r}) - j\omega \frac{\varepsilon^-}{4\pi} \int_{S_a} 2\mathbf{M}_a(\mathbf{r}') G^-(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right. \\ & \quad \left. + \nabla \frac{1}{4\pi\mu^-} \int_{S_a} \frac{\nabla'_S \cdot 2\mathbf{M}_a(\mathbf{r}')}{j\omega} G^-(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right)_{\tan} \\ & = \left(j\omega \frac{\varepsilon^+}{4\pi} \int_{S_a} 2\mathbf{M}_a(\mathbf{r}') G^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right. \\ & \quad \left. - \nabla \frac{1}{4\pi\mu^+} \int_{S_a} \frac{\nabla'_S \cdot 2\mathbf{M}_a(\mathbf{r}')}{j\omega} G^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right)_{\tan}, \quad \mathbf{r} \in S_a \end{aligned} \quad (9.2)$$

gdzie $G^-(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ oraz $G^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ – funkcje Greena (2.18) zdefiniowane dla nieskończonego ośrodku o parametrach, odpowiednio, lewej i prawej półprzestrzeni.

W przypadku gdy metalowa płaszczyzna z aperturą rozdziela ośrodki o takich samych parametrach, czyli gdy $\varepsilon^- = \varepsilon^+ = \varepsilon$ i $\mu^- = \mu^+ = \mu$, (9.2) redukuje się do:

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{H}^i(\mathbf{r}) + \mathbf{H}^r(\mathbf{r}) - j\omega \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{S_a} 4\mathbf{M}_a(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right. \\ & \quad \left. + \nabla \frac{1}{4\pi\mu} \int_{S_a} \frac{\nabla'_S \cdot 4\mathbf{M}_a(\mathbf{r}')}{j\omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right)_{\tan} = 0, \quad \mathbf{r} \in S_a. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Równanie (9.3) jest formalnie takie samo jak równanie (3.2) opisujące rozpraszanie fali elektromagnetycznej przez metalowy obiekt. Co więcej, występujący w (9.3) zastępczy prąd magnetyczny zachowuje się tak samo jak prąd elektryczny w nieskończonej cienkiej planarnej obiekcie przewodzącym – jego składowa normalna do krawędzi apertury znika ze względu na zerową wartość stycznej do tej krawędzi składowej pola elektrycznego w zagadnieniu oryginalnym.

Na podstawie tzw. zasady dualności [9.1] do rozwiązania (9.3) można zatem wykorzystać dowolny algorytm służący do numerycznego rozwiązywania (3.2), podstawiając $\mathbf{H}^i(\mathbf{r}) + \mathbf{H}^r(\mathbf{r})$ zamiast $\mathbf{E}^i(\mathbf{r})$, ε zamiast μ , μ zamiast ε i $4\mathbf{M}_a$ zamiast $\mathbf{J}$. W szczególności rozkład prądu magnetycznego w płaszczyźnie apertury S_a można aproksymować z wykorzystaniem funkcji RWG, modyfikując algorytm opisany w rozdziale 5.1. W przypadku gdy powierzchnia S_a charakteryzuje się symetrią obrotową względem osi (z), możliwe jest także zastosowanie odpowiednio zmodyfikowanego algorytmu z rozdziału 5.4. Niewiele bardziej skomplikowana jest modyfikacja wspomnianego algorytmu, tak aby zamiast równania (9.3) umożliwiał on rozwiązywanie bardziej ogólnego równania (9.2). Po zastosowaniu funkcji RWG jako funkcji bazowych aproksymacja prądu magnetycznego ma postać:

$$\mathbf{M}_a(\mathbf{r}) \cong \sum_{n=1}^N M_n \mathbf{f}_n(\mathbf{r}'), \quad (9.4)$$

gdzie funkcje bazowe dane są przez (5.8). Stosując te same funkcje jako funkcje wagowe, przekształca się (9.2) w równanie macierzowe o postaci:

$$[Y_{mn}][M_n] = [I_m], \quad (9.5)$$

w którym elementy macierzy *admitancyjnej* [9.2] dane są przez:

$$Y_{mn} = 2j\omega l_m \left[\mathbf{F}_n^-(\mathbf{r}_m^{c+}) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{c+}}{2} + \mathbf{F}_n^-(\mathbf{r}_m^{c-}) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{c-}}{2} + \mathbf{F}_n^+(\mathbf{r}_m^{c+}) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{c+}}{2} + \mathbf{F}_n^+(\mathbf{r}_m^{c-}) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{c-}}{2} \right] \\ + 2l_m \left[\Psi_n^-(\mathbf{r}_m^{c-}) - \Psi_n^-(\mathbf{r}_m^{c+}) + \Psi_n^+(\mathbf{r}_m^{c-}) - \Psi_n^+(\mathbf{r}_m^{c+}) \right] \quad (9.6)$$

oraz

$$I_m = l_m \left[\left(\mathbf{H}^i(\mathbf{r}_m^{c+}) + \mathbf{H}^r(\mathbf{r}_m^{c+}) \right) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{c+}}{2} + \left(\mathbf{H}^i(\mathbf{r}_m^{c-}) + \mathbf{H}^r(\mathbf{r}_m^{c-}) \right) \cdot \frac{\boldsymbol{\rho}_m^{c-}}{2} \right]. \quad (9.7)$$

Potencjały: wektorowy i skalarny we wzorze (9.6) oblicza się jako:

$$\mathbf{F}_n^\pm(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon^\pm}{4\pi} \int_{S_a} G^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS', \quad (9.8)$$

$$\Psi_n^\pm(\mathbf{r}) = -\frac{1}{j\omega 4\pi\mu^\pm} \int_{S_a} \nabla'_S \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') G^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS'. \quad (9.9)$$

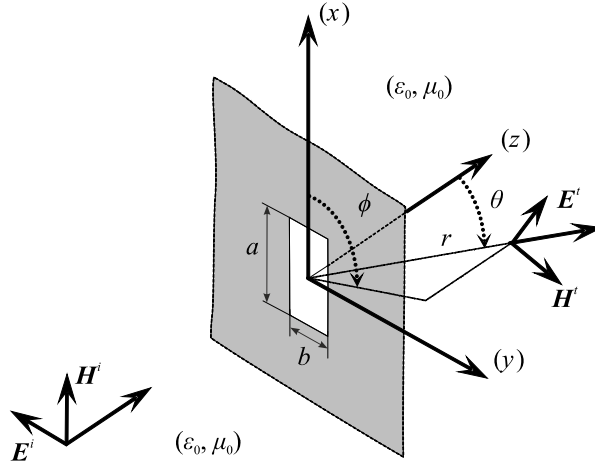
Parametry geometryczne związane z funkcjami RWG są takie same jak w rozdziale 5.

9.2. Transmisja przez otwór w nieskończonej metalowej płaszczyźnie

Opisany w poprzednim punkcie algorytm zastosowano do przeanalizowania transmisji płaskiej fali elektromagnetycznej, rozchodzącej się wzdłuż osi (z), przez prostokątną szczelinę wykonaną w nieskończonej metalowej płaszczyźnie, w sposób pokazany na rysunku 9.4.

Wielkością obliczaną jest tzw. *skuteczna powierzchnia transmisyjna* (TCS – ang. *Transmission Cross Section*), zdefiniowana jako [9.2]:

$$\tau = \lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi r^2 \frac{|\mathbf{H}^t|}{|\mathbf{H}^i|}. \quad (9.10)$$



Rys. 9.4. Transmisja fali elektromagnetycznej przez prostokątny otwór w nieskończonej rozległej metalowej płaszczyźnie $z = 0$

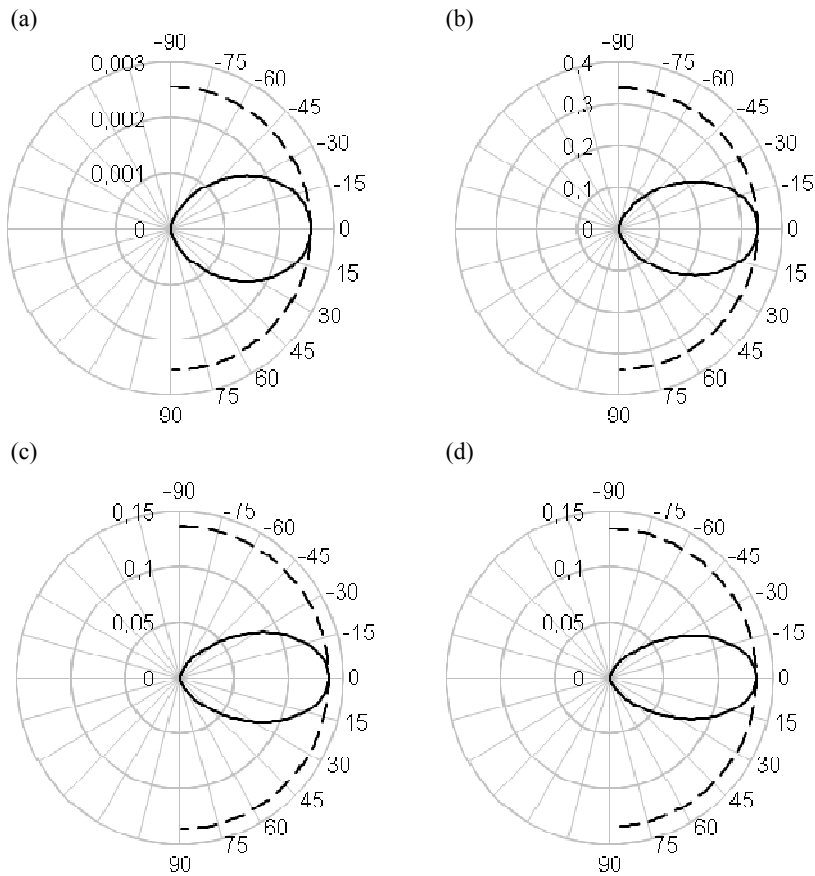
W obliczeniach założono, że wektor padającego pola magnetycznego jest spolaryzowany w kierunku osi (x) . Skuteczną powierzchnię transmisyjną obliczono w dwóch płaszczyznach – w płaszczyźnie XZ , czyli $y = 0$ oraz w płaszczyźnie YZ , czyli $x = 0$. W pierwszym przypadku odczytywano składową θ transmitowanego pola magnetycznego, w drugim – składową x , które odpowiednio oznaczono jako [9.2]:

$$\tau_{\theta y} = \lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi r^2 \frac{|H^{t, \theta}|}{|H^i|}, \quad y = 0 \quad (9.11)$$

$$\tau_{xx} = \lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi r^2 \frac{|H^{t, x}|}{|H^i|}, \quad x = 0. \quad (9.12)$$

Ponieważ w rozważanej konfiguracji parametry ośrodków po obu stronach szczeliny są takie same, rozwiązywano równanie (9.3). Dla fali płaskiej padającej prostopadle do płaszczyzny szczeliny wypadkowe magnetyczne pole pobudzające w płaszczyźnie $z = 0$ jest równe podwojonemu polu padającemu, gdyż na powierzchni idealnego przewodnika wytworzona fala stojąca ma strzałkę pola magnetycznego. Po obliczeniu rozkładu zastępczego prądu magnetycznego $\mathbf{M}_a$, transmitowane pole magnetyczne jest wytwarzane przez prąd $-2\mathbf{M}_a$ promieniujący w nieskończenie rozległej przestrzeni (por. rys. 9.3b).

W obliczeniach przyjęto szerokość szczeliny $b = \lambda/20$ (λ oznacza długość fali), dla różnych długości szczeliny a . Zastosowano podział szczeliny na trójkąty oraz funkcje bazowe RWG. Wyniki – wartości skutecznej powierzchni transmisyjnej w funkcji kąta θ – pokazano na rysunku 9.5. Kierunek $\theta = 0$ oznacza falę transmitowaną w kierunku

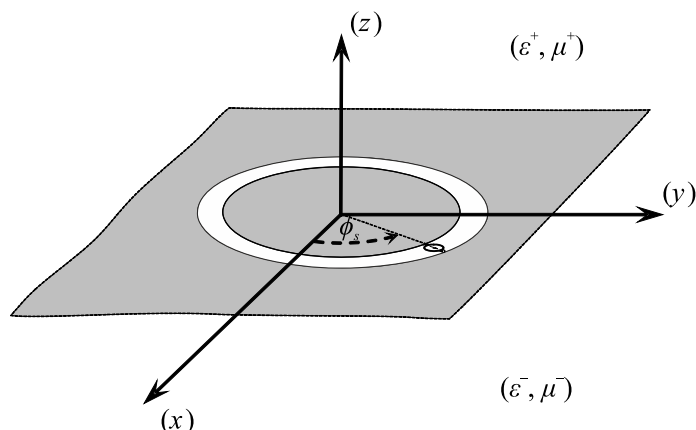


Rys. 9.5. Unormowana skuteczna powierzchnia transmisyjna prostokątnej szczeliny o szerokości $b = \lambda/20$, w funkcji kąta θ podawanego w stopniach; linia ciągła $-\tau_{\theta_y}/\lambda^2$, linia przerywana $-\tau_{xx}/\lambda^2$; długość szczeliny (a) $a = \lambda/4$; (b) $a = \lambda/2$; (c) $a = 3\lambda/4$; (d) $a = \lambda$

osi (z). Fala transmitowana występuje wyłącznie dla $z \geq 0$, stąd na wykresach brak linii dla $|\theta| > 90$ stopni. Otrzymane wyniki są zgodne z prezentowanymi w literaturze [9.1].

9.3. Anteny szczelinowe

Innym zastosowaniem algorytmu do modelowania apertur w niekończenie rozległym metalowym ekranie jest analiza tzw. anten szczelinowych. Przykłady dotyczące prostokątnych anten szczelinowych zostaną zaprezentowane w kolejnych rozdziałach



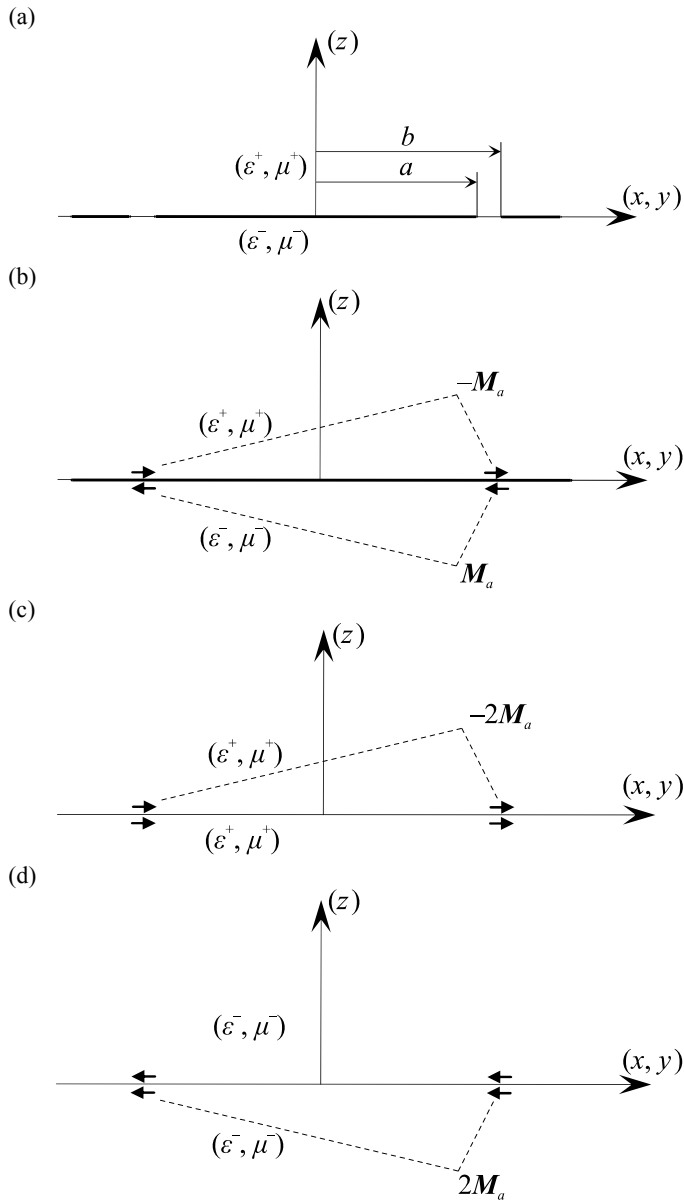
Rys. 9.6. Okrągła antena szczelinowa wykonana w nieskończonym ekranie położonym w płaszczyźnie $z = 0$

pracy, tu natomiast przeanalizowano inną antenę z tej grupy – okrągłą antenę szczelinową [9.5, 9.6] (ang. *annular ring antenna*), pokazaną na rysunku 9.6.

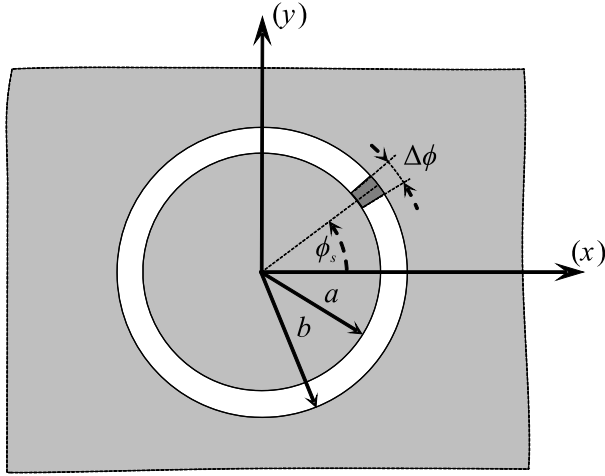
Założono, że antena, traktowana jako nadawcza, jest zasilana źródłem prądowym, którego zaciski dołączono do wewnętrznej i zewnętrznej krawędzi szczeliny w miejscu wyznaczonym przez pokazany na rysunku kąt ϕ_s . Metalowa płaszczyzna, w której wykonano szczelinę, rozdziela ośrodki o różnych parametrach – w praktycznych zastosowaniach taki model odpowiada antenie umieszczonej na powierzchni dużej elektrycznie soczewki dielektrycznej [9.5].

Tego typu antenę można istotnie analizować za pomocą algorytmu opisanego w punkcie 9.1. Pierwszy etap prowadzący do sformułowania odpowiedniego równania całkowego jest taki sam, jak w przypadku analizy transmisji pola elektromagnetycznego przez szczelinę w nieskończeniu rozległym ekranie – na podstawie zasady równoważności można zewrzeć szczelinę, a na jej powierzchni umieścić po obu stronach nieskończonego, jednolitego, ekranu zastępcze prądy magnetyczne, przeciwne co do znaku. Do określenia pól wytwarzanych przez te prądy wygodnie jest oczywiście użyć metodę obrazów – podwojone prądy magnetyczne promieniają wtedy w nieskończeniu rozległych ośrodkach o parametrach równych parametrom odpowiedniej półprzestrzeni. Poszczególne etapy prowadzące do konstrukcji zagadnień zastępczych pokazano na rysunku 9.7.

W analizowanej sytuacji nie występuje fala padająca (i odbita), nie jest także prawdą, że w zagadnieniu oryginalnym na całej powierzchni szczeliny składowa styczna pola magnetycznego jest ciągła – nieciągłość występuje w miejscu, gdzie jest zdefiniowany prąd pobudzający antenę.



Rys. 9.7. Etapy konstruowania zagadnień zastępczych do analizy okrągłej anteny szczelinowej: (a) konfiguracja oryginalna; (b) konfiguracja z wprowadzonymi prądami magnetycznymi; (c) konfiguracja równoważna dla górnej półprzestrzeni; (d) konfiguracja równoważna dla dolnej półprzestrzeni



Rys. 9.8. Okrągła antena szczelinowa z – zaznaczonym kolorem ciemnoszarym – sektorem, w którym płynie wymuszony prąd $\mathbf{J}^{imp}$

Założono, że ten prąd ma postać prądu powierzchniowego, płynącego w radialnym sektorze pokazanym na rysunku 9.8. Oznaczono powierzchnię tego sektora przez S_J , a gęstość prądu pobudzającego symbolem $\mathbf{J}^{imp}$. Zgodnie z warunkami brzegowymi wynikającymi z równań Maxwella na powierzchni S_J występuje nieciągłość składowej stycznej pola magnetycznego:

$$(\mathbf{H}^+(\mathbf{r}) - \mathbf{H}^-(\mathbf{r}))_{\tan} = -\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{J}^{imp}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_J. \quad (9.13)$$

Po oznaczeniu $-\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{J}^{imp}$ jako $\mathbf{H}_J^{imp}$ można zapisać:

$$(\mathbf{H}^+(\mathbf{r}) - \mathbf{H}^-(\mathbf{r}))_{\tan} = \mathbf{H}_J^{imp}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_J. \quad (9.14)$$

Przy założeniu, że $\mathbf{J}^{imp}$ ma wyłącznie składową radialną, skierowaną od krawędzi zewnętrznej do wewnętrznej, można zauważyć, że $-\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{J}^{imp}$ ma tylko składową azymutalną, wtedy zatem $\mathbf{H}_J^{imp} = H_0 \hat{\phi}$.

Oczywiście, na pozostałej części S_a składowa styczna pola magnetycznego jest ciągła:

$$(\mathbf{H}^+(\mathbf{r}) - \mathbf{H}^-(\mathbf{r}))_{\tan} = 0, \quad \mathbf{r} \in S_a - S_J. \quad (9.15)$$

Biorąc pod uwagę, że pole magnetyczne w górnej i dolnej półprzestrzeni może być obliczone na podstawie odpowiednich konfiguracji zastępczych, pokazanych na rysunkach 9.7c i 9.7d, można ostatecznie zapisać równanie:

$$\begin{aligned}
& \left(j\omega \frac{\varepsilon^+}{4\pi} \int_{S_a} 2\mathbf{M}_a(\mathbf{r}') G^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' - \nabla \frac{1}{4\pi\mu^+} \int_{S_a} \frac{\nabla'_S \cdot 2\mathbf{M}_a(\mathbf{r}')}{j\omega} G^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right. \\
& \left. + j\omega \frac{\varepsilon^-}{4\pi} \int_{S_a} 2\mathbf{M}_a(\mathbf{r}') G^-(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' - \nabla \frac{1}{4\pi\mu^-} \int_{S_a} \frac{\nabla'_S \cdot 2\mathbf{M}_a(\mathbf{r}')}{j\omega} G^-(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right)_{\tan} \quad (9.16) \\
& = \mathbf{H}^{imp}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{H}_J^{imp}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in S_J \\ 0, & \mathbf{r} \in S_a - S_J \end{cases}.
\end{aligned}$$

Porównując równanie (9.16) z (9.2), można stwierdzić, że równania te różnią się wyłącznie definicją pobudzenia – w przypadku równania (9.2) jest to suma fali padającej i odbitej w płaszczyźnie szczeliny, w równaniu (9.16) jest to wprost pole wymuszające zdefiniowane na fragmencie szczeliny. Do analizy nadawczej anteny szczelinowej można zatem zastosować taki sam algorytm, co do analizy transmisji pola przez otwór, zmieniając tylko odpowiednio definicję pola pobudzającego.

Jednym z istotnych parametrów anteny jest jej impedancja wejściowa, zdefiniowana jako iloraz napięcia i prądu na zaciskach anteny. W naszym przypadku, dla dostatecznie wąskiego pobudzanego sektora można przyjąć, że całkowity prąd pomiędzy zaciskami, płynący od krawędzi wewnętrznej do zewnętrznej, jest równy wartości H^{imp} pomnożonej przez długość łuku elementarnego, czyli $H^{imp} \Delta\phi(a+b)/2$. Z kolei napięcie na zaciskach jest równe całce składowej radialnej pola elektrycznego pomiędzy zaciskami anteny, czyli w przybliżeniu $M^\phi(b-a)$, gdzie M^ϕ oznacza składową azymutalną obliczonego z równania (9.16) prądu magnetycznego, wziętą w obszarze pobudzenia. Ostatecznie:

$$Z_{we} = \frac{2M^\phi(b-a)}{H^{imp} \Delta\phi(a+b)}, \quad (9.17)$$

czyli, przyjmując np. jednostkowe pobudzenie w wybranym wąskim sektorze szczeliny, a następnie wyznaczając wytworzony w tym sektorze prąd magnetyczny, można obliczyć impedancję wejściową anteny.

Obliczenia takie można wykonać, stosując algorytm z poprzedniego punktu, to jest wykorzystując do aproksymacji prądu magnetycznego funkcje RWG, można także zastosować algorytm dla powierzchni o symetrii obrotowej [9.7], czyli zastosować do opisu prądu magnetycznego w szczelinie odpowiednik aproksymacji (5.46). Zajmijmy się teraz tą drugą możliwością. Rolę linii tworzącej L z rysunku 5.6 pełni krótki radialny odcinek, o długości równej szerokości szczeliny. Jeżeli szczelina jest wąska elektrycznie, azymutalne pole elektryczne będzie pomijalne, a w konsekwencji zastępczy prąd magnetyczny nie będzie miał składowej radialnej, skierowanej wzdłuż linii tworzącej. Z kolei składowa azymutalna na wąskim odcinku może być aproksymowana jednym tylko impulsem typu $\Pi(t')$. W rezultacie można zapisać:

$$\mathbf{M}(t', \phi') \cong \sum_{p=-\infty}^{\infty} M^{p, \phi} \Pi(t') \hat{\phi}' \varepsilon^{ip\phi'}, \quad (9.18)$$

gdzie $\Pi(t') = 1$ dla $t' \in (a, b)$.

Podstawiając (9.18) do (9.16) i stosując funkcje wagowe (por. (5.48)):

$$\mathbf{w}^{r, \phi}(t, \phi) = \Pi(t) e^{-jr\phi} \hat{\phi}, \quad (9.19)$$

Otrzymuje się, jak zwykle w przypadku symetrii obrotowej, osobne równania dla każdego rodzaju azymutalnego p :

$$Y^{p, \phi\phi} M^{p, \phi} = I^{p, \phi}, \quad (9.20)$$

gdzie współczynniki $Y^{p, \phi\phi}$ oblicza się podobnie jak elementy (5.64):

$$\begin{aligned} Y^{p, \phi\phi} = & \int_a^b \int_a^b \left\{ j\omega \varepsilon^+ \frac{G_{p-1}^+ + G_{p+1}^+}{2} + \frac{p^2}{j\omega \mu^+} \frac{1}{\rho'} \frac{1}{\rho} G_p^+ \right\} \rho \rho' dL' dL \\ & + \int_a^b \int_a^b \left\{ j\omega \varepsilon^- \frac{G_{p-1}^- + G_{p+1}^-}{2} + \frac{p^2}{j\omega \mu^-} \frac{1}{\rho'} \frac{1}{\rho} G_p^- \right\} \rho \rho' dL' dL, \end{aligned} \quad (9.21)$$

przy czym $G_p^\pm$ oznacza funkcję (5.54) obliczoną dla ośrodka o parametrach $(\varepsilon^\pm, \mu^\pm)$. Dla wąskiej szczeliny o szerokości $w = b - a$ można przyjąć, że $\rho = \rho' = (a + b)/2 = R$ i przekształcić (9.21) do postaci:

$$\begin{aligned} Y^{p, \phi\phi} = & \left\{ j\omega \varepsilon^+ \frac{g_{p-1}^+ + g_{p+1}^+}{2} + \frac{p^2}{j\omega \mu^+} \frac{1}{R^2} g_p^+ \right\} wR \\ & + \left\{ j\omega \varepsilon^- \frac{g_{p-1}^- + g_{p+1}^-}{2} + \frac{p^2}{j\omega \mu^-} \frac{1}{R^2} g_p^- \right\} wR, \end{aligned} \quad (9.22)$$

gdzie, biorąc pod uwagę (5.55) oraz fakt, że $z = z' = 0$, wprowadzono oznaczenie:

$$g_p^\pm = \int_a^b G_p^\pm(R, 0, \rho', 0) \rho' dL'. \quad (9.23)$$

Prawą stronę (9.20) oblicza się, korzystając z odpowiednika (5.66):

$$I^{p, \phi} = \int_a^b \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{H}^{imp}(t, \phi) \cdot \hat{\phi} e^{-jp\phi} d\phi \right) \rho dL \quad (9.24)$$

W tym przypadku wygodnie jest przyjąć, że pobudzenie jest umieszczone w punkcie $\phi = \phi_s = 0$ i ma postać:

$$\mathbf{H}^{imp}(t, \phi) = H_0 \delta(\phi) \hat{\phi}, \quad t \in (a, b). \quad (9.25)$$

Po podstawieniu (9.25) do (9.24) otrzymuje się:

$$I^{p, \phi} = \int_a^b H_0 \rho dL = H_0 w R. \quad (9.26)$$

Biorąc pod uwagę, że równanie (9.20) dla każdego p jest równaniem z jedną niewiadomą, można znaleźć wyrażenie na współczynniki szeregu Fouriera azymutalnego prądu magnetycznego:

$$M^{p, \phi} = \frac{I^{p, \phi}}{Y^{p, \phi}} = H_0 \left(j\omega \varepsilon^+ \frac{g_{p-1}^+ + g_{p+1}^+}{2} + \frac{p^2}{j\omega \mu^+} \frac{1}{R^2} g_p^+ + j\omega \varepsilon^- \frac{g_{p-1}^- + g_{p+1}^-}{2} + \frac{p^2}{j\omega \mu^-} \frac{1}{R^2} g_p^- \right)^{-1}. \quad (9.27)$$

Impedancję wejściową anteny można zatem obliczyć z odpowiednika wzoru (9.17), tak zmodyfikowanego, aby uwzględnić impulsowy charakter pobudzenia umieszczonego w punkcie $\phi = 0$:

$$Z_{we} = \frac{w \sum_{p=-\infty}^{\infty} M^{p, \phi}}{H_0 R}. \quad (9.28)$$

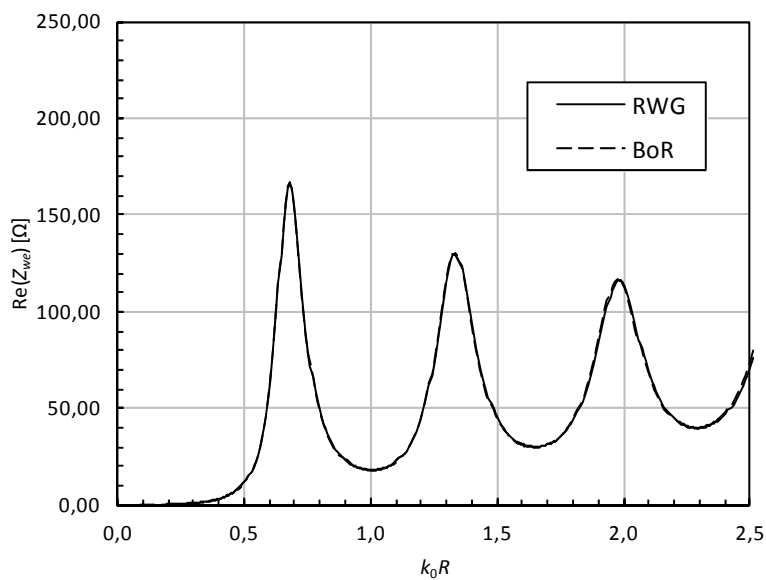
W praktyce nieskończoną sumę w (9.28) zastępuje się sumą dla skończonej liczby rodzajów azymutalnych, co daje:

$$Z_{we} = \frac{w \sum_{p=-P}^P M^{p, \phi}}{H_0 R}. \quad (9.29)$$

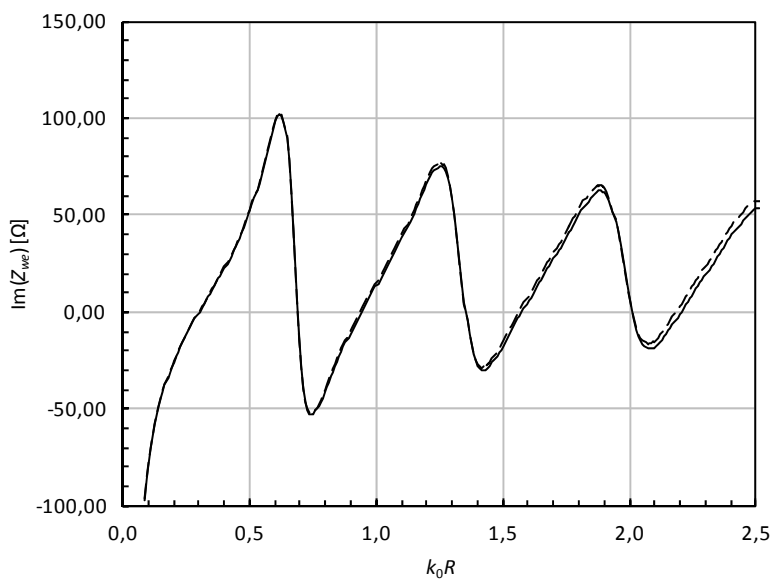
Wybór wartości P zależy od elektrycznej wielkości anteny. W prowadzonych dalej obliczeniach P zwiększano iteracyjnie, kończąc procedurę, gdy zwiększanie liczby rodzajów nie powodowało istotnej zmiany impedancji wejściowej dla największej analizowanej częstotliwości.

Na rysunku 9.9 pokazano obliczoną w funkcji unormowanej częstotliwości, impedancję wejściową okrągłej anteny szczelinowej [9.5, 9.6] o promieniu wewnętrznym 19,25 mm i promieniu zewnętrznym 20,75 mm. Metalowa płaszczyzna, w której wykonano szczelinę rozdziela ośrodki o przenikalnościach ε_0 i $4\varepsilon_0$. Obliczenia wykonano z użyciem algorytmu przeznaczanego do analizy szczelin o dowolnym kształcie, wykorzystującego funkcje daszkowe RWG, oraz omówionego specjalnego algorytmu dla szczeliny okrągłej. W przypadku algorytmu ogólnego przeznaczenia powierzchnię

(a)



(b)



Rys. 9.9. Impedancja wejściowa okrągłej anteny szczelinowej o promieniu wewnętrznym $a = 19,25$ mm i promieniu zewnętrznym $b = 20,75$ mm, położonej na granicy ośrodków o przenikalnościach ε_0 i $4\varepsilon_0$: (a) część rzeczywista, (b) część urojona; $R = (a + b)/2 = 20$ mm

szczeliny podzielono na 144 elementarne trójkąty, z których stworzono 144 funkcje bazowe. Zgodność wyników uzyskanych obydwoma metodami jest bardzo dobra. Widoczne na wykresach rezonanse odpowiadają różnym rodzajom azymutalnym pola wzbudzanych w antenie [9.5, 9.7].

Algorytm dla szczeliny okrągłej, wykorzystujący standardowe podejście słuszne dla brył obrotowych, mimo że formalnie został uzyskany przez uproszczenie ogólnych formuł metody momentów, jest w istocie rozwiązaniem półanalitycznym, gdyż dla każdego azymutalnego rodzaju pola ma się do czynienia ze zwykłym równaniem skalarnym z jedną niewiadomą, zamiast typowego dla metody momentów równania macierzowego.

Literatura

- [9.1] Harrington R.F., *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill Book Company, 1961.
- [9.2] Harrington R.F., Mautz J.R., *Electromagnetic transmission through an aperture in a conducting plane*, Arch. Elek. Übertragung., Vol. 31, 1977, 81–87.
- [9.3] Butler C.M., Umashankar K.R., *Electromagnetic penetration through aperture in an infinite, planar screen separating two half spaces of different electromagnetic properties*, Radio Science, Vol. 11, 1976, 611–619.
- [9.4] Butler C.M., Rahmat-Samii Y., Mittra R., *Electromagnetic penetration through apertures in conducting surfaces*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 26, No. 1, 1978, 82–93.
- [9.5] Tong C.E., Blundell R., *An annular slot antenna on a dielectric half-space*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 42, No. 7, 1994, 967–974.
- [9.6] Leung K.W., *Efficient and accurate computation of an annular slot on a dielectric half-space*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 48, No. 3, 2000, 467–468.
- [9.7] Kucharski A.A., *Simple analysis of wide annular slot antennas*, Microwave and Optical Technology Letters, Vol. 48, No. 9, 2006, 1679–1683.

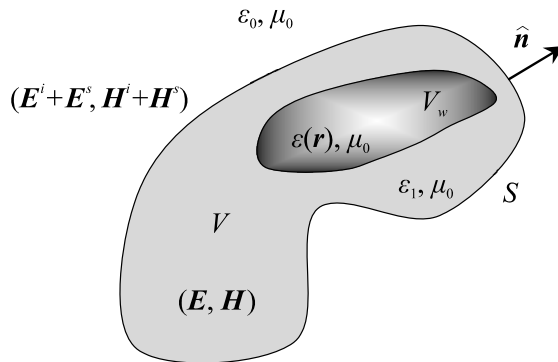
10. Algorytmy mieszane

Algorytmy obliczeniowe opisane w poprzednich rozdziałach nadają się do analizy zagadnień należących do ściśle określonych klas, takich jak analiza obiektów metalowych, jednorodnych lub fragmentami jednorodnych dielektryków, niejednorodnych dielektryków, wreszcie szczelin w nieskończonych metalowych ekranach. Pewnym wyjątkiem jest tu algorytm scharakteryzowany w rozdziale siódmym, poświęconym modelowaniu obiektów składających się z fragmentów dielektrycznych oraz (opcjonalnie) metalowych powierzchni.

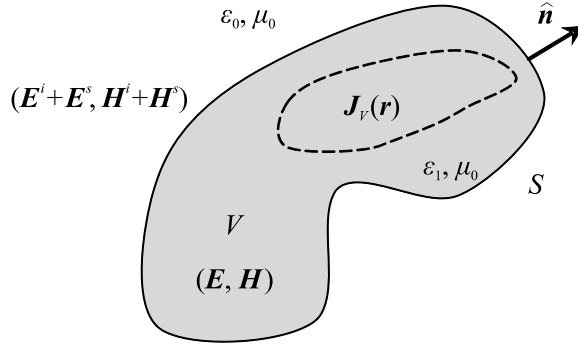
W niniejszym rozdziale pokazano na dwóch przykładach, w jaki sposób, na podstawie wymienionych metod, można budować algorytmy nadające się do analizy zagadnień nienależących bezpośrednio do żadnej z omówionych grup.

10.1. Częściowo niejednorodne bryły dielektryczne

Rozpraszanie fal elektromagnetycznych przez obiekt dielektryczny, składający się z części silnie niejednorodnej, otoczonej materiałem jednorodnym, przedstawiono na rysunku 10.1. Problem taki można przeanalizować, używając algorytmu bazującego



Rys. 10.1. Rozpraszanie fali elektromagnetycznej przez częściowo niejednorodną bryłę dielektryczną



Rys. 10.2. Zagadnienie równoważne zagadnieniu z rysunku 10.1 po zastosowaniu objętościowej zasady równoważności

na objętościowym równaniu całkowym, omówionego w rozdziale ósmym. W przypadku gdy stosunek objętości części niejednorodnej do objętości części jednorodnej jest niewielki, algorytm taki jest nieoptymalny pod względem liczby niewiadomych współczynników. Lepszym rozwiązaniem może być zastosowanie algorytmu utworzonego na bazie mieszanej metody, wykorzystującej zarówno równania objętościowe, jak i powierzchniowe [10.1, 10.2].

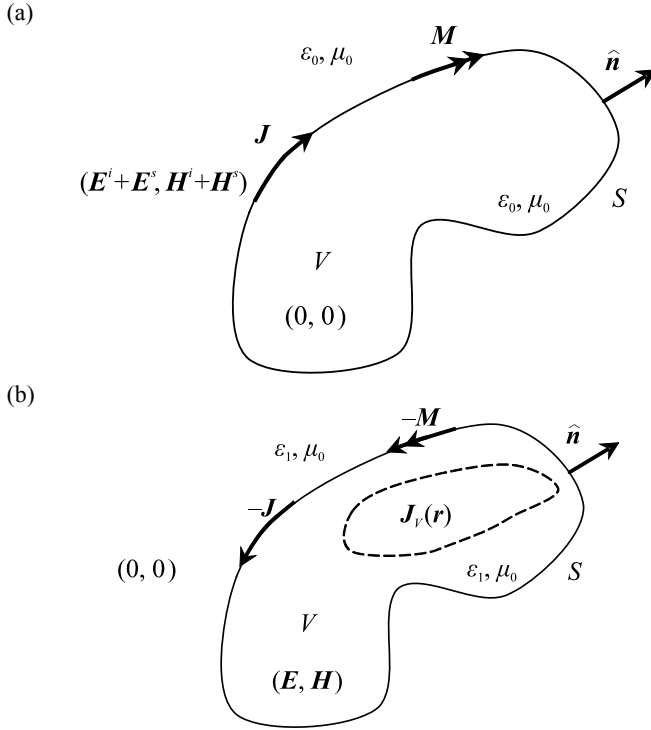
W pierwszej kolejności zastosujemy objętościową zasadę równoważności, zastępując niejednorodny fragment o objętości V_m objętościowym prądem polaryzacji, o gęstości danej przez (por. formuła (8.1)):

$$\mathbf{J}_V(\mathbf{r}) = j\omega(\varepsilon(\mathbf{r}) - \varepsilon_1)\mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (10.1)$$

Przenikalnością odniesienia jest we wzorze (10.1) przenikalność elektryczna jednorodnej części obiektu, a nie przenikalność ośrodka otaczającego bryłę, jak w definicji (8.1). Konfiguracja zastępcza wygląda zatem, jak na rysunku 10.2.

Następnie wykorzystuje się powierzchniową zasadę równoważności (por. rys. 2.5 oraz 6.1), wprowadzając odpowiedni zastępczy prąd powierzchniowy płynący po powierzchni S , otrzymując dwa zagadnienia zastępcze – zewnętrzne i wewnętrzne, pokazane na rysunku 10.3. W zagadnieniu zastępczym wewnętrznym pola w obrębie S są wytwarzane przez prąd powierzchniowy elektryczny $-\mathbf{J}$ i magnetyczny $-\mathbf{M}$ oraz prąd objętościowy $\mathbf{J}_V$, promieniujące w nieskończenie rozległym ośrodku o parametrach (ε_1, μ_0) , natomiast w zagadnieniu zastępczym zewnętrznym prąd $\mathbf{J}$ i $\mathbf{M}$ wytwarzają na zewnątrz obiektu pola $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s)$, promieniując w nieskończenie rozległym ośrodku o parametrach (ε_0, μ_0) .

Biorąc pod uwagę warunki brzegowe na powierzchni S oraz pole elektryczne w obrębie objętości V_w , można skonstruować układ równań wiążący prądy zastępcze z polem oświetlającym bryłę:



Rys. 10.3. Konfiguracje równoważne konfiguracji z rysunku 10.1 po zastosowaniu objętościowej i powierzchniowej zasady równoważności:

(a) konfiguracja równoważna zewnętrzna,

(b) konfiguracja równoważna wewnętrzna

$$\left(\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s(\mathbf{J}, \mathbf{M}) \right)_{\tan} = \left(\mathbf{E}(\mathbf{J}_V) + \mathbf{E}(-\mathbf{J}, -\mathbf{M}) \right)_{\tan}, \quad \text{na } S \quad (10.2)$$

$$\left(\mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s(\mathbf{J}, \mathbf{M}) \right)_{\tan} = \left(\mathbf{H}(\mathbf{J}_V) + \mathbf{H}(-\mathbf{J}, -\mathbf{M}) \right)_{\tan}, \quad \text{na } S \quad (10.3)$$

$$\frac{\mathbf{J}_V}{j\omega(\epsilon(\mathbf{r}) - \epsilon_1)} = \mathbf{E}(\mathbf{J}_V) + \mathbf{E}(-\mathbf{J}, -\mathbf{M}), \quad \text{wewnątrz } V_w \quad (10.4)$$

gdzie podobnie jak w rozdziale siódmym założono, że dla punktów obserwacji leżących na powierzchni S pola są obliczane „od strony” ośrodka, w którym promieniuje odpowiedni prąd zastępczy.

Zamiast gęstości prądu polaryzacji można użyć, jak w rozdziale ósmym, indukcji elektrycznej.

Dalsze postępowanie jest standardowe – do opisu prądu zastępczego na powierzchni S i indukcji elektrycznej w obrębie V_w stosuje się kombinacje liniowe wykorzystujące odpowiednio powierzchniowe i objętościowe funkcje bazowe opisane w poprzednich rozdziałach:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') \equiv \sum_{n=1}^N J_n \mathbf{f}_n^S(\mathbf{r}'), \quad (10.5)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}') \equiv \sum_{n=1}^N M_n \mathbf{f}_n^S(\mathbf{r}'), \quad (10.6)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) \equiv \sum_{k=1}^K D_k \mathbf{f}_k^V(\mathbf{r}), \quad (10.7)$$

gdzie $\mathbf{f}_m^S$ oznacza bazowe funkcje powierzchniowe (np. typu RWG), a $\mathbf{f}_k^V$ objętościowe funkcje bazowe (np. zdefiniowane przez (8.12)).

Następnie wykonuje się testowanie równań, przy czym – biorąc pod uwagę ich powierzchniowy lub objętościowy charakter – równania (10.2) i (10.3) testuje się z wykorzystaniem powierzchniowych funkcji wagowych, a równanie (10.4) z wykorzystaniem objętościowych funkcji wagowych. Wynikowe równanie macierzowe ma w ogólnym przypadku postać:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{mn}^{EJ} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z_{mn}^{EM} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z_{mk}^{ED} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Z_{mn}^{HJ} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z_{mn}^{HM} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z_{mk}^{HD} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Z_{ln}^{EJ} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z_{ln}^{EM} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z_{lk}^{ED} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} J_n \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} M_n \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} D_k \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} V_m^E \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} V_m^H \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (10.8)$$

gdzie indeksy $m = 1, \dots, N$ oraz $l = 1, \dots, K$ odnoszą się odpowiednio do zestawów powierzchniowych lub objętościowych funkcji wagowych.

Zerowy fragment wektora pobudzeń w części (10.8), odpowiadającej równaniu (10.4), wynika z faktu, że w konfiguracji zastępczej wewnętrznej z rysunku 10.3b nie występuje pole pobudzające – interakcja prądu polaryzacji z otoczeniem całej bryły odbywa się wyłącznie za pośrednictwem zastępczych prądów powierzchniowych.

Elementy macierzy impedancyjnej Z_m^{EJ} , Z_{mn}^{EM} , Z_{mn}^{HJ} , Z_{mn}^{HM} , a także elementy wektora pobudzenia V_m^E , V_m^H są dane formułami (6.28)–(6.33), w których zamiast $\mathbf{f}_{m(n)}$ należy podstawić $\mathbf{f}_{m(n)}^S$, w miejsce $\mu_{e(i)}$ wartość μ_0 , zamiast $\varepsilon_{e(i)}$ wartości $\varepsilon_{0(1)}$, wreszcie zamiast $G^{e(i)}$ funkcje Greena $G^{0(1)}$, gdzie $G^{0(1)}$ oznacza funkcje (2.18) obliczaną dla ośrodka zewnętrznego (G^0) lub wewnętrznego (G^1).

Podobnie elementy Z_{lk}^{ED} są dane poprzez (8.16), gdzie zamiast $\mathbf{f}_{m(n)}$ należy podstawić $\mathbf{f}_{l(k)}^V$, a w definicji współczynnika kontrastu oraz w formule (8.16) zamienić ε_0 na ε_l , V na V_w , a funkcję Greena z G na G^l .

Pozostałe elementy macierzy oblicza się jako:

$$Z_{mk}^{ED} = \omega^2 \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \int_{V_w} G^l(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \kappa(\mathbf{r}') \mathbf{f}_k^V(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_m^S(\mathbf{r}) dV' dS \\ + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \left\{ \nabla \left(\int_{V_w} \nabla' \cdot (\kappa(\mathbf{r}') \mathbf{f}_k^V(\mathbf{r}')) G^l(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \right) \right\} \cdot \mathbf{f}_m^S(\mathbf{r}) dS, \quad (10.9)$$

$$Z_{mk}^{HD} = - \int_S \left(\frac{j\omega}{4\pi} \int_{V_w} \nabla G^l(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times (\kappa(\mathbf{r}') \mathbf{f}_k^V(\mathbf{r}')) dV' \right) \cdot \mathbf{f}_m^S(\mathbf{r}) dS, \quad (10.10)$$

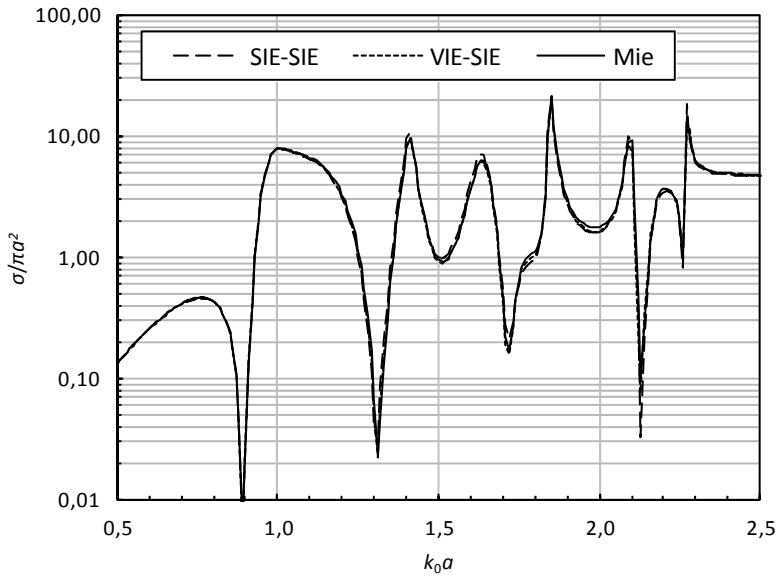
$$Z_{ln}^{EJ} = -j\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \int_{V_w} G^l(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_n^S(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_l^V(\mathbf{r}) dV' dS \\ + \frac{1}{j\omega 4\pi\varepsilon_l} \int_S \left\{ \nabla \left(\int_S \nabla'_S \cdot \mathbf{f}_n^S(\mathbf{r}') G^l(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right) \right\} \cdot \mathbf{f}_l^V(\mathbf{r}) dV, \quad (10.11)$$

$$Z_{ln}^{EM} = - \int_{V_w} \left(\frac{1}{4\pi} \int_S \nabla G^l(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{f}_n^S(\mathbf{r}') dS' \right) \cdot \mathbf{f}_l^V(\mathbf{r}) dV. \quad (10.12)$$

W obliczaniu gradientów we wzorach (10.9) i (10.11) stosuje się takie same metody jak opisane w rozdziałach 5 i 8.

Streszczony algorytm zaimplementowano w wersji dla brył obrotowych, wykorzystując funkcje (5.44), (5.45) oraz (5.47), (5.48), odpowiednio w roli powierzchniowych funkcji bazowych i wagowych, a bezźródłowe funkcje (8.36), (8.37) i funkcje zespolone sprzężone do (8.36), (8.37) jako objętościowe funkcje bazowe i wagowe.

Przykładowe wyniki obliczeń – skuteczną powierzchnię odbicia dwuwarstwowej kuli dielektrycznej w funkcji elektrycznego rozmiaru kuli analizowaną uprzednio w rozdziale siódmym – pokazano na rysunku 10.4. Tym razem wewnętrzna część została zamodelowana jako niejednorodny walec o promieniu b , znajdujący się wewnątrz jednorodnej kuli o promieniu a . Wyniki uzyskane opisywaną metodą oznaczono jako VIE-SIE (ang. *Volume Integral Equation – Surface Integral Equation*). Wyniki porównano z uzyskanymi metodą powierzchniowych równań całkowych z punktu 7.2.1 (SIE-SIE) oraz rozwiązaniem analitycznym. Jak widać, zgodność wyników uzyskanych opisywanymi metodami jest znakomita.



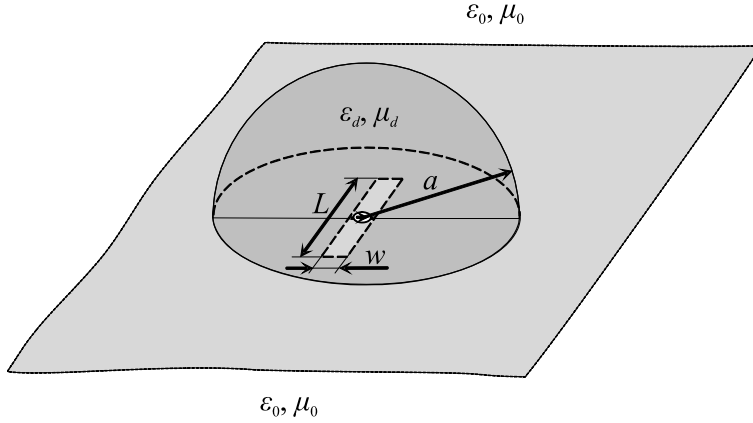
Rys. 10.4. Skuteczna wsteczna powierzchnia odbijająca dwuwarstwowej kuli dielektrycznej o promieniu zewnętrznym a i wewnętrznym b ; $b/a = 0,5$; dla części wewnętrznej przenikalność $\varepsilon_{r1} = 16,0$, dla części zewnętrznej $\varepsilon_{r2} = 9,0$

10.2. Antena dielektryczna zasilana szczelinowo

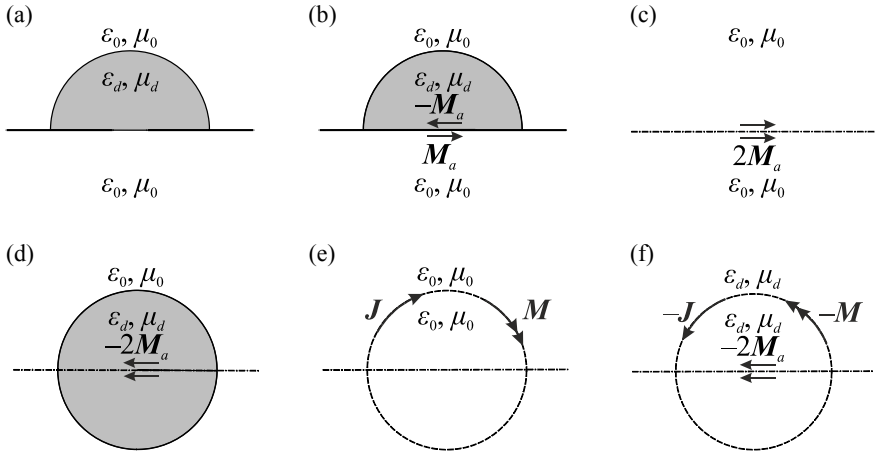
Drugim przykładem ilustrującym połączenie omówionych wcześniej algorytmów jest analiza półsferycznej dielektrycznej anteny rezonatorowej (DRA – ang. *Dielectric Resonator Antenna*) zasilanej szczelinowo [10.3–10.6] w sposób pokazany na rysunku 10.5.

W tym przypadku wykorzystuje się dwie metody obliczeniowe – metodę analizy jednorodnych obiektów dielektrycznych (sformułowanie PMCHWT) omówioną w rozdziale szóstym oraz metodę analizy szczelin w nieskończonym metalowym ekranie omówioną w rozdziale dziewiątym. Stosuje się jednocześnie, wykorzystywaną już wcześniej, metodę obrazów.

W pierwszej kolejności zastąpiono szczelinę występującą w zagadnieniu oryginalnym (rys. 10.6a) rozkładem powierzchniowym prądu magnetycznego (rys. 10.6b). Następnie zastosowano metodę obrazów, tworząc dwie konfiguracje zastępcze dla dolnej i górnej półprzestrzeni (rys. 10.6c i 10.6d). W ostatnim kroku, dla zagadnienia z rysunku 10.6d skonstruowano dwie kolejne konfiguracje zastępcze z prawidłowymi polami elektromagnetycznymi na zewnątrz oraz wewnątrz dielektryka (odpowiednio rys. 10.6e i 10.6f).



Rys. 10.5. Półsferyczna rezonatorowa antena dielektryczna zasilana szczelinowo



Rys. 10.6. Zasady konstrukcji konfiguracji zastępczych dla anteny dielektrycznej zasilanej szczelinowo

Na podstawie warunków brzegowych na powierzchni dielektryka (przez powierzchnię tę rozumie się powierzchnię sfery z rysunku 10.6d, czyli powierzchnię zewnętrzną, powstałą w wyniku połączenia półsferycznego rezonatora z jego zwierciadlanym odbiciem) oraz na powierzchni szczeliny można skonstruować układ równań całkowych ze względu na nieznaną rozkład zastępczych prądów powierzchniowych.

Dla powierzchni szczeliny S_a , na podstawie rysunków 10.6c i 10.6f, otrzymujemy:

$$\left(\mathbf{H}_d(-\mathbf{J}, -\mathbf{M}) + \mathbf{H}_d(-2\mathbf{M}_a) - \mathbf{H}_0(2\mathbf{M}_a) \right)_{\tan} = (\mathbf{H}^{imp})_{\tan}, \quad \text{na } S_a, \quad (10.13)$$

a na powierzchni dielektryka uzupełnionej o lustrzane odbicie S_d , na podstawie rysunków 10.6e i 10.6f:

$$\left(\mathbf{E}_d(-\mathbf{J}, -\mathbf{M}) + \mathbf{E}_d(-2\mathbf{M}_a) \right)_{\tan} = \left(\mathbf{E}_0(\mathbf{J}, \mathbf{M}) \right)_{\tan}, \quad \text{na } S_d, \quad (10.14)$$

$$\left(\mathbf{H}_d(-\mathbf{J}, -\mathbf{M}) + \mathbf{H}_d(-2\mathbf{M}_a) \right)_{\tan} = \left(\mathbf{H}_0(\mathbf{J}, \mathbf{M}) \right)_{\tan}, \quad \text{na } S_d. \quad (10.15)$$

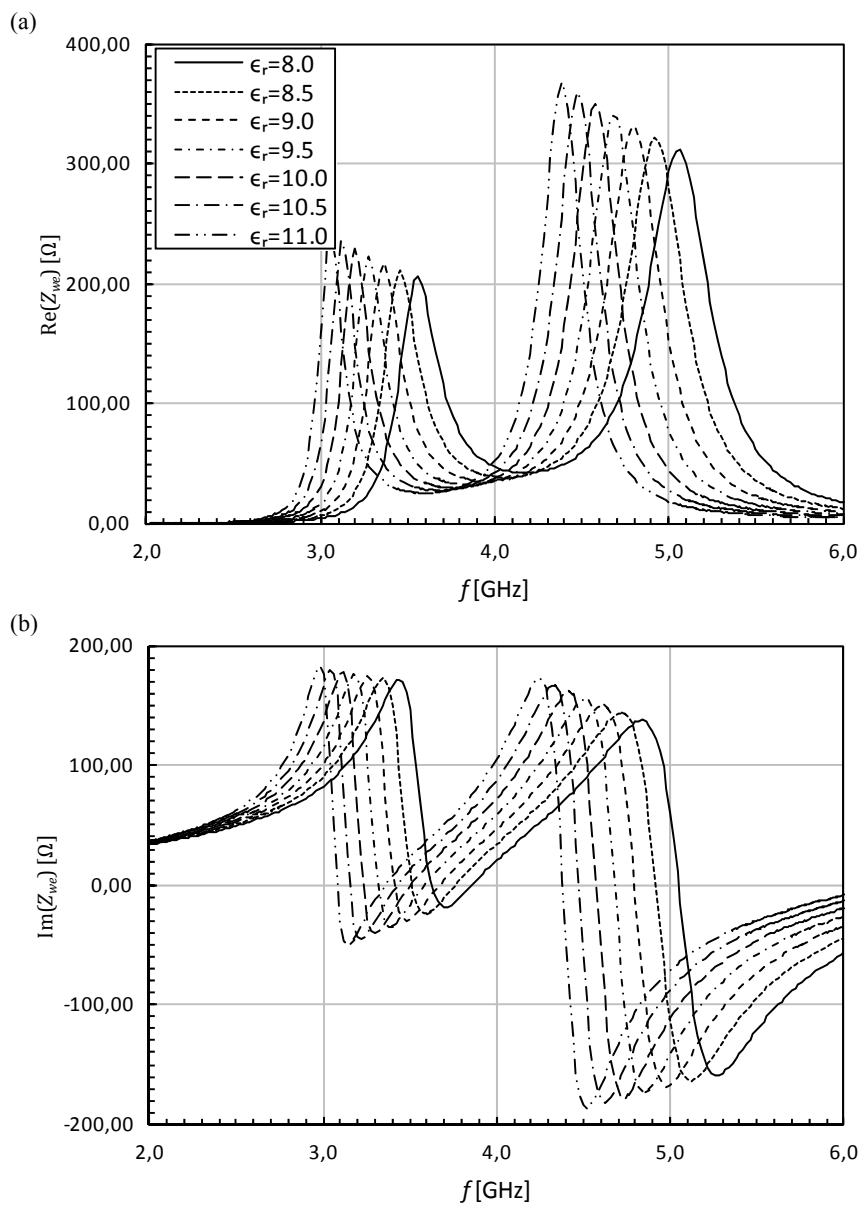
We wzorach (10.13)–(10.15) indeks dolny oznacza, że pole jest wytwarzane przez wskazane źródła promieniujące w jednorodnym ośrodku o parametrach swobodnej przestrzeni (indeks 0) lub dielektryka (indeks d).

Dalsze postępowanie jest standardowym rozwiązywaniem sformułowanych równań całkowych z wykorzystaniem metody momentów.

W ramach przykładu obliczono, w funkcji częstotliwości, impedancję wejściową półsferycznej anteny dielektrycznej [10.6], o promieniu $a = 1,25$ cm, długości szczeliny $L = 15,4$ mm i szerokości szczeliny $w = 0,5$ mm. Założono, że szczelina jest umieszczona symetrycznie w środku podstawy rezonatora, a pobudzenie znajduje się w środku szczeliny. Szczegóły modelu zasilania oraz sposób obliczania impedancji wejściowej są takie same jak przedstawiono w rozdziale 9.3. W analizie do aproksymacji prądu powierzchniowego na powierzchni S_d wykorzystano funkcje RWG, natomiast do aproksymacji prądu magnetycznego w szczelinie – funkcje daszkowe zbudowane na parach prostokątów.

Liczbę niewiadomych opisujących aproksymację prądu elektrycznego i magnetycznego na powierzchni S_d można zredukować o połowę, biorąc pod uwagę symetrię w konfiguracjach zastępczych z rysunków 10.6e i 10.6f. W pierwszej kolejności wygodnie jest dokonać aproksymacji powierzchni S_d w sposób symetryczny względem umownej płaszczyzny ekranu, co w sposób naturalny powoduje, że żaden z trójkątów nie przecina tej płaszczyzny. Wtedy, jeżeli funkcji bazowej RWG o numerze n znajdującej się całkowicie powyżej (usuniętej) powierzchni ekranu odpowiadają aproksymacji prądu $\mathbf{J}$ i $\mathbf{M}$ współczynniki I_n i M_n , to jej lustrzanemu odbiciu (uzyskanemu w ten sposób, że trójkąt $T^\pm$ odbitej funkcji bazowej jest lustrzanym odbiciem trójkąta $T_n^\pm$) odpowiadają, zgodnie z zasadami przedstawionymi na rysunkach 2.3 i 2.4, współczynniki $-I_n$ i M_n . Z kolei dla funkcji bazowych ze wspólną krawędzią leżącą w płaszczyźnie ekranu można z góry założyć zerowe współczynniki w aproksymacji prądu magnetycznego. Takie funkcje bazowe opisują bowiem składową normalną prądu magnetycznego, która nie może istnieć na powierzchni idealnego przewodnika.

W obliczeniach do aproksymacji rozkładu prądu na powierzchni S_d użyto 1140 funkcji bazowych RWG, z którymi, bez wspomnianej redukcji, byłoby związane $2 \times 1140 = 2280$ niewiadomych współczynników (1140 dla prądu $\mathbf{J}$ i 1140 dla prądu $\mathbf{M}$). Prąd magnetyczny na powierzchni szczeliny aproksymowano z użyciem 39 daszkowych funkcji bazowych. Dzięki skorzystaniu z symetrii rozwiązywano wyni-



Rys. 10.7. Impedancja wejściowa anteny z rysunku 10.5, $a = 1,25$ cm, $L = 15,4$ mm, $w = 0,5$ mm: (a) część rzeczywista; (b) część urojona

kowy układ równań o 1179 niewiadomych, podczas gdy bez korzystania z symetrii konieczne byłoby rozwiązywanie układu o 2319 niewiadomych. Wyniki obliczeń dla różnych wartości względnej przenikalności elektrycznej materiału rezonatora dielektrycznego pokazano na rysunku 10.7. Otrzymane wyniki są zgodne z teoretycznymi i eksperymentalnymi rezultatami przedstawionymi dla przenikalności $\epsilon_r = 9,5$, przez Chow i współautorów [10.6]. Widoczne na wykresach części rzeczywistej impedancji dwa maksima odpowiadają rezonansom dielektrycznej anteny rezonatorowej i szczeliny zasilającej [10.6]. Na podstawie wykresów można też stwierdzić, że zwiększanie wartości ϵ_r powoduje zmniejszanie częstotliwości rezonansowych anteny – jest to zgodne z oczekiwaniami, ponieważ zmniejszeniu ulega wtedy długość fali elektromagnetycznej w materiale dielektrycznym, zatem zwiększa się elektryczna wielkość anteny.

Literatura

- [10.1] Kucharski A.A., *Electromagnetic scattering by partially inhomogeneous dielectric bodies of revolution*, Microwave and Optical Technology Letters, Vol. 44, No. 3, 2005, 275–281.
- [10.2] Kucharski A.A., *Resonances in partially inhomogeneous bodies of revolution: VIE/SIE analysis*, Microwave and Optical Technology Letters, Vol. 44, No. 1, 2005, 73–77.
- [10.3] Junker G.P., Kishk A.A., Glisson A.W., *Input impedance of an aperture coupled dielectric resonator antenna*, Proc. IEEE Int. Symp. APS, Vol. 2, 1994, 748–751.
- [10.4] Kishk A.A., Zhou G., Glisson A.W., *Analysis of dielectric-resonator antennas with emphasis on hemispherical structures*, IEEE Antennas Propagat. Mag., Vol. 36, No. 2, 1994, 20–31.
- [10.5] Junker G.P., Kishk A.A., Glisson A.W., *Input impedance of aperture-coupled dielectric resonator antennas*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 44, No. 5, 1996, 600–607.
- [10.6] Chow K.Y., Leung K.W., Luk K.M., Yung E.K.N., *Input impedance of the slot-fed dielectric resonator antenna with/without a backing cavity*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 49, No. 2, 2001, 307–309.

11. Metoda AWE i techniki dekompozycji przestrzennej

Algorytmy analizy zagadnień promieniowania i rozpraszania fal elektromagnetycznych zaprezentowane w poprzednich rozdziałach charakteryzują się dwiema zasadniczymi cechami:

- obliczenia są prowadzone w dziedzinie częstotliwości;
- ostateczny etap analizy wymaga rozwiązywania układów równań liniowych, które – zapisane w notacji macierzowej – charakteryzują się macierzami gęstymi.

Te właściwości powodują, że w przypadku obliczenia pewnych parametrów w szerokim pasmie częstotliwości, może być konieczne prowadzenie obliczeń dla bardzo dużej liczby tych częstotliwości, co z kolei wiąże się z koniecznością wielokrotnego obliczania macierzy impedancyjnej i wektora pobudzenia oraz rozwiązywania wynikowego układu równań. Wypadkowy czas obliczeń może być wtedy nieakceptowalnie długi.

W tym rozdziale omówiono wybrane techniki pozwalające na zmniejszenie wspomnianych ograniczeń. W pierwszej kolejności zajęto się tzw. metodą przebiegów asymptotycznych (AWE – ang. *Asymptotic Waveform Evaluation* [11.1–11.6]), pozwalającą znacznie ograniczyć liczbę częstotliwości, dla jakich są prowadzone obliczenia. Następnie scharakteryzowano dwie techniki pozwalające ominąć konieczność rozwiązywania bardzo dużych układów równań liniowych – technikę dekompozycji przestrzennej wykorzystującą powierzchnię zasadę równoważności oraz technikę tzw. charakterystycznych funkcji bazowych. Pokazano także, w jaki sposób można połączyć te dwa podejścia z techniką AWE.

11.1. Metoda AWE

We wprowadzeniu do metody momentów przedstawionym w rozdziale trzecim stwierdzono, że w wyniku zastosowania tej metody rozwiązanie równań całkowych lub całkowo-różniczkowych opisujących analizowany problem sprowadza się do rozwiązania równania macierzowego typu (3.11):

$$[Z_{mn}][I_n] = [V_m], \quad m, n = 1, \dots, N, \quad (11.1)$$

gdzie $[I_n]$ – macierz kolumnowa N nieznanych współczynników opisujących aproksymację poszukiwanej wielkości fizycznej $[Z_{mn}]$ – elementy tzw. macierzy impedancyjnej opisującej wzajemne oddziaływania pomiędzy elementarnymi fragmentami badanej struktury $[V_m]$ – wektor tzw. elementów pobudzenia zależny zarówno od samej struktury, jak i pola pobudzającego/wymuszonego. Zarówno elementy macierzy impedancyjnej, jak i wektora pobudzenia są w ogólnym przypadku zależne od częstotliwości, dla jakiej jest prowadzona analiza. Często zamiast częstotliwością f wygodnie jest posługiwać się liczbą falową ośrodka, w jakim znajduje się badany obiekt $k = 2\pi f \sqrt{\epsilon\mu}$. W zagadnieniach otwartych jest to najczęściej liczba falowa (współczynnik propagacji) próżni, czyli $k = 2\pi f \sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Świadomie nie posłużono się tu oznaczeniem k_0 , rezerwując je do oznaczenia *wybranego punktu* na osi k , odpowiadającego pewnej częstotliwości f_0 . Można zatem zapisać, że:

$$[Z_{mn}(k)][I_n(k)] = [V_m(k)], \quad m, n = 1, \dots, N. \quad (11.2)$$

W sytuacji gdy w obliczeniach dla pojedynczej częstotliwości dominujący jest czas tworzenia macierzy, skuteczną techniką skrócenia całkowitego czasu obliczeń jest wykorzystanie interpolacji elementów macierzy impedancyjnej w funkcji częstotliwości [11.7, 11.8] – pełne obliczenia macierzy są wtedy prowadzone dla wybranych wartości k , natomiast układ równań (11.2) jest rozwiązywany z dużo mniejszym krokiem częstotliwościowym. W przypadku ogólnym dąży się do zminimalizowania liczby częstotliwości, przy których prowadzone są obliczenia, *łącznie* z etapem rozwiązania końcowego układu równań. W literaturze opisano kilka metod, opartych na aproksymacji poszukiwanej wielkości w funkcji częstotliwości, na podstawie obliczeń prowadzonych dla stosunkowo niewielkiej liczby punktów częstotliwościowych. Do technik tego typu należy metoda Cauchy'ego, w której zakłada się, że poszukiwana wielkość może być aproksymowana za pomocą funkcji wymiernej [11.9, 11.10], a zwłaszcza jej wariant oparty na zastosowaniu aproksymacji Padé [11.11]. Podobną metodą jest za-prezentowana poniżej metoda AWE.

Założmy, że można obliczyć współczynniki rozwinięć $Z_{mn}(k)$ oraz $V_m(k)$ w szereg Taylora, wokół wspomiananej, wybranej *a priori* wartości $k = k_0$:

$$Z_{mn}(k) \cong \sum_{p=0}^Q \frac{Z_{mn}^{(p)}(k_0)}{p!} (k - k_0)^p, \quad (11.3)$$

$$V_m(k) \cong \sum_{q=0}^Q \frac{V_m^{(q)}(k_0)}{q!} (k - k_0)^q, \quad (11.4)$$

gdzie indeks górny w nawiasie okrągłym oznacza rząd pochodnej $Z_{mn}(k)$ obliczanej względem k w punkcie $k = k_0$, a Q jest założonym rzędem aproksymacji.

Przyjęto, że nieznane elementy wektora $[I_n(k)]$ można także zapisać w postaci szeregu potęgowego, przy czym liczba elementów tego szeregu także ogranicza się do $Q + 1$:

$$I_n(k) = \sum_{r=0}^Q I_{n,r} (k - k_0)^r. \quad (11.5)$$

Po podstawieniu (11.3)–(11.5) do (11.2), a następnie przyrównaniu współczynników przy poszczególnych potęgach $(k - k_0)$ otrzymuje się [11.1]:

$$[I_{n,0}] = [Z_{mn}(k_0)]^{-1} [V_m(k_0)] \quad (11.6)$$

$$[I_{n,r}] = [Z_{mn}(k_0)]^{-1} \left\{ \left[\frac{V_m^{(r)}(k_0)}{r!} \right] - \sum_{i=1}^r \left[\frac{Z_{mn}^{(i)}(k_0)}{i!} \right] [I_{n,r-1}] \right\}, \quad r = 1, \dots, Q. \quad (11.7)$$

We wzorze (11.7) obiekty w nawiasach kwadratowych są macierzami – mnożenie występujące pod znakiem sumy jest więc mnożeniem macierzy współczynników przy i -tej potędze rozwinięcia Taylora elementów macierzy impedancyjnej przez wektor elementów rozwinięcia (11.5). Obliczenie (11.6) oznacza znalezienie rozwiązania (11.2) dla punktu $k = k_0$. Do znalezienia tego rozwiązania należy użyć metody polegającej na odwróceniu macierzy $[Z_{mn}(k_0)]$ oraz zapamiętaniu odwróconej macierzy $[Z_{mn}(k_0)]^{-1}$, a następnie pomnożeniu odwróconej macierzy przez wektor $[V_m(k_0)]$. Odwrócona macierz jest bowiem następnie wykorzystana w kolejnych rekurencyjnych krokach algorytmu opisanych formułą (11.7). Obliczenie wektorów współczynników $[I_{n,r}]$ oznacza znalezienie aproksymacji (11.5), słusznej w pewnym zakresie k , za pomocą rozwiązania równania macierzowego uzyskanego wyłącznie w punkcie rozwinięcia $k = k_0$.

Rozwinięcie Taylora (11.5) charakteryzuje się stosunkowo niewielkim zakresem wartości k , w którym aproksymacja poszukiwanej wielkości jest poprawna. Bardziej szerokopasmową aproksymację można uzyskać, stosując tzw. aproksymację Padé:

$$I_n(k) = \frac{\sum_{i=0}^L a_{n,i} (k - k_0)^i}{1 + \sum_{j=1}^M b_{n,j} (k - k_0)^j}, \quad (11.8)$$

gdzie $L + M = Q$. Współczynniki $a_{n,i}$ oraz $b_{n,j}$ opisujące aproksymację (11.8) dla danego elementu wektora $[I_n(k)]$ oblicza się najpierw podstawiając (11.5) do lewej

strony (11.8), następnie mnożąc uzyskane równanie stronami przez mianownik (11.8), wreszcie przyrównując współczynniki przy poszczególnych potęgach $(k - k_0)$. Prowadzi to do zależności macierzowych [11.1]:

$$\begin{bmatrix} I_{n,L} & I_{n,L-1} & I_{n,L-2} & \cdots & I_{n,L-M+1} \\ I_{n,L+1} & I_{n,L} & I_{n,L-1} & \cdots & I_{n,L-M+2} \\ I_{n,L+2} & I_{n,L+1} & I_{n,L} & \cdots & I_{n,L-M+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{n,L+M-1} & I_{n,L+M-2} & I_{n,L+M-3} & \cdots & I_{n,L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{n,1} \\ b_{n,2} \\ b_{n,3} \\ \vdots \\ b_{n,M} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} I_{n,L+1} \\ I_{n,L+2} \\ I_{n,L+3} \\ \vdots \\ I_{n,L+M} \end{bmatrix}, \quad (11.9)$$

z których oblicza się współczynniki $b_{n,j}$ oraz do równań:

$$a_{n,i} = \sum_{j=0}^i b_{n,j} I_{n,i-j}, \quad (11.10)$$

z których obliczamy współczynniki $a_{n,i}$.

Obliczenie (11.7) wymaga znalezienia pochodnych elementów macierzy impedancyjnej i wektora pobudzenia względem k . O ile w przypadku wektora pobudzenia jest to sprawa zwykle stosunkowo prosta – pobudzenia typu fala płaska lub wymuszone stałe pole w wycinku przestrzeni charakteryzują się prostą zależnością od częstotliwości lub po prostu brakiem takiej zależności, o tyle obliczenie pochodnych macierzy impedancyjnej może nastroić trudności.

W przypadku analizy obiektów metalowych i równania EFIE elementy macierzy impedancyjnej są postaci (5.4), którą można przedstawić w formie:

$$\begin{aligned} Z_{mn}(k) = & j \frac{\eta}{4\pi} \int_S \int_S \frac{ke^{-jkR}}{R} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS' dS \\ & - \frac{\eta}{j4\pi} \int_S \left\{ \nabla \left(\int_S \nabla'_S \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \frac{e^{-jkR}}{kR} dS' \right) \right\} \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS, \end{aligned} \quad (11.11)$$

gdzie $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$.

Pochodna (11.2) jest zatem dana formułą:

$$\begin{aligned} Z_{mn}^{(p)}(k) = & j \frac{\eta}{4\pi} \int_S \int_S \frac{d^p}{dk^p} \left(\frac{ke^{-jkR}}{R} \right) \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS' dS \\ & - \frac{\eta}{j4\pi} \int_S \left\{ \nabla \left(\int_S \nabla'_S \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \frac{d^p}{dk^p} \left(\frac{e^{-jkR}}{kR} \right) dS' \right) \right\} \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Elementy $Z_{mn}^{(p)}(k_0)$ można obliczyć, używając podobnych procedur jak używane do obliczania $Z_{mn}(k_0)$, zmieniając tylko funkcje podcałkowe z postaci (11.11) na (11.12). Wymaga to oczywiście obliczenia występujących w (11.12) pochodnych, które są dane przez [11.1]:

$$\frac{d^p}{dk^p} \left(\frac{ke^{-jkR}}{R} \right) = \left[p(-jR)^{p-1} + (-jR)^p k \right] \frac{e^{-jkR}}{R}, \quad (11.13)$$

$$\frac{d^p}{dk^p} \left(\frac{e^{-jkR}}{kR} \right) = \left[\frac{(-jR)^p}{k} - \frac{p(-jR)^{p-1}}{k^2} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{p!(-jR)^{i-1}}{(i-1)!k^{p-i+2}} \right] \frac{e^{-jkR}}{R}. \quad (11.14)$$

Osobliwość wyrażen podcałkowych, pojawiająca się, gdy w obrębie całki wewnętrznej wystąpi punkt $R=0$, jest we wzorze (11.12) tego samego rzędu co w (11.11).

W przypadku innych niż EFIE równań całkowych schemat postępowania jest taki sam – grupujemy wraz z zależną od k funkcją Greena wszystkie czynniki we wzorze na element macierzy impedancyjnej zawierające zależność od k , a następnie powstałe w ten sposób wyrażenie podcałkowe zastępuje się jego pochodną.

W przypadku gdy w obliczaniu elementów macierzy impedancyjnej wykorzystuje się jądro równania MFIE, konieczne jest obliczanie pochodnej względem k wyrażenia (5.24), otrzymuje się [11.1]:

$$\frac{d^p}{dk^p} \left(\frac{1+jkR}{R^2} e^{-jkR} \right) = (-jR)^p [1-p+jkR] \frac{e^{-jkR}}{R^2}. \quad (11.15)$$

Gdy korzysta się z metody AWE w analizie jednorodnych dielektryków, wzory do obliczania pochodnej trzeba odpowiednio skorygować. Jeżeli k dotyczy otaczającego obiekt powietrza, a przez k_d oznacza się stałą propagację w dielektryku, otrzymuje się:

$$\frac{d^p}{dk^p} \left(\frac{k_d e^{-jk_d R}}{R} \right) = \left[p(-jR)^{p-1} + (-jR)^p k_d \right] \frac{e^{-jk_d R}}{R} \left(\frac{k_d}{k} \right)^p, \quad (11.16)$$

$$\frac{d^p}{dk^p} \left(\frac{e^{-jk_d R}}{k_d R} \right) = \left[\frac{(-jR)^p}{k_d} - \frac{p(-jR)^{p-1}}{k_d^2} - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{p!(-jR)^{i-1}}{(i-1)!k_d^{p-i+2}} \right] \frac{e^{-jk_d R}}{R} \left(\frac{k_d}{k} \right)^p, \quad (11.17)$$

$$\frac{d^p}{dk^p} \left(\frac{1+jk_d R}{R^2} e^{-jk_d R} \right) = (-jR)^p [1-p+jk_d R] \frac{e^{-jk_d R}}{R^2} \left(\frac{k_d}{k} \right)^p. \quad (11.18)$$

Szczególnej uwagi wymaga obliczanie pochodnych elementów macierzy impedancyjnej, w sytuacji gdy w algorytmie jest wykorzystywana objętościowa zasada rów-

noważności i prąd polaryzacji. Ponieważ w definicji prądu polaryzacji występuje mnożenie przez wartość częstotliwości, w sytuacji gdy aproksymowaną wielkością jest, jak w rozdziale ósmym, indukcja elektryczna, wzór na element macierzy impedancyjnej ma postać (8.16) lub po wyrażeniu pulsacji z pomocą liczby falowej:

$$S_{mn}(k) = \int_V \frac{\mathbf{f}_n(\mathbf{r})}{\varepsilon(\mathbf{r})} \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \int_V \kappa(\mathbf{r}') \frac{k^2 e^{-jkR}}{R} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV' dV - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \left\{ \nabla \left(\int_V \nabla' \cdot (\kappa(\mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}')) \frac{e^{-jkR}}{R} dV' \right) \right\} \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dV. \quad (11.19)$$

W celu obliczenia pochodnych (11.7) względem k , zamiast (11.13), (11.14), należy obliczyć pochodne [11.12]:

$$\frac{d^p}{dk^p} \left(\frac{k^2 e^{-jkR}}{R} \right) = \left[p(p-1)(-jR)^{p-2} + 2pk(-jR)^{p-1} + k^2(-jR)^p \right] \frac{e^{-jkR}}{R}, \quad (11.20)$$

$$\frac{d^p}{dk^p} \left(\frac{e^{-jkR}}{R} \right) = (-jR)^p \frac{e^{-jkR}}{R}. \quad (11.21)$$

W algorytmie dla częściowo niejednorodnych obiektów dielektrycznych, opisanym w punkcie 10.1, występuje jeszcze jeden rodzaj zależności elementów macierzy impedancyjnej od częstotliwości – jest to sytuacja, dla której objętościowy prąd polaryzacji wytwarza pole magnetyczne konieczne do zapisu powierzchniowych warunków brzegowych na zewnętrznej powierzchni obiektu. Elementy tego typu są dane wzorem (10.10). Łatwo zauważyć, że różniczkowanie względem k wymaga wtedy obliczania pochodnych typu:

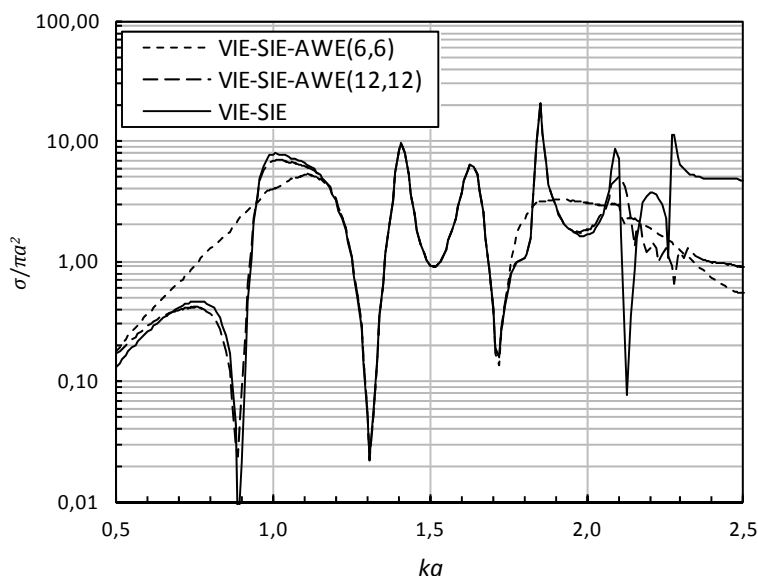
$$\frac{d^p}{dk^p} \left(k \frac{1+jkR}{R^2} e^{-jkR} \right) = \left\{ kR(2p-1) + j \left[p(p-2) - k^2 R^2 \right] \right\} (-jR)^{p-2} \frac{e^{-jkR}}{R}. \quad (11.22)$$

W celu zilustrowania działania techniki AWE zaprezentowano wyniki dla dwóch wcześniej analizowanych złożonych przykładów obliczeniowych – rozpraszania fali elektromagnetycznej przez dwuwarstwową kulę dielektryczną, analizowanego metodą mieszanych równań powierzchniowo-objętościowych w punkcie 10.1, oraz anteny dielektrycznej zasilanej szczelinowo, analizowanej w punkcie 10.2.

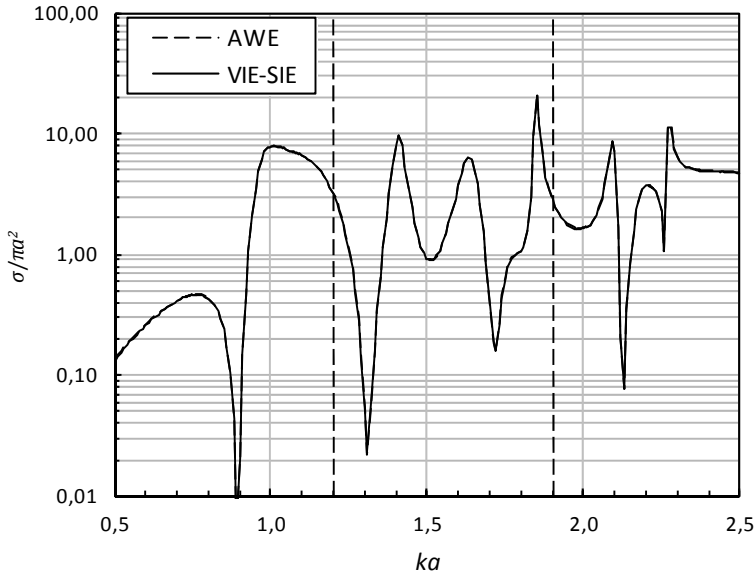
W pierwszym z rozważanych przykładów rozpatrzono podobny przypadek jak ten, dla którego wyniki obliczeń pokazano na rysunku 10.4. Na rysunku przedstawiono zależność od unormowanego współczynnika propagacji skutecznej powierzchni odbijającej dwuwarstwową kuli dielektrycznej o promieniu zewnętrznym a i wewnętrznym b , $b/a = 0,5$, względnej przenikalności części wewnętrznej $\varepsilon_{r1} = 16,0$ i zewnętrznej $\varepsilon_{r2} = 9,0$. Jak wspomniano, kulę analizowano za pomocą powierzchniowo-

-objętościowych równań całkowych, z wykorzystaniem funkcji bazowych dla brył obrotowych – zastosowanie takich funkcji nie zmienia istoty implementacji algorytmu AWE.

W metodzie AWE należy wybrać wartość liczby falowej, stanowiącą punkt rozwinięcia szeregów Taylora. Podczas pierwszej próby założono, że jest to środek analizowanego interwału, to jest wartość $k_0 a = 1,5$. Pozostaje teraz dobrać rząd aproksymacji Padé, to znaczy stopnie licznika i mianownika w (11.8) oznaczone jako L i M . Źródła z literatury podają [11.1], że zwykle dobrym wyborem jest przypadek $L = M$. Na rysunku 11.1 pokazano wyniki obliczeń z zastosowaniem różnych rzędów aproksymacji AWE – oznaczenia na rysunku są podane w konwencji $AWE(L, M)$. Zamieszczono także wyniki obliczeń tradycyjnym algorytmem VIE-SIE. Jak widać, na podstawie obliczeń prowadzonych metodą AWE dla tylko jednego punktu częstotliwościowego, można uzyskać poprawne wyniki w stosunkowo szerokim pasmie. Zwiększanie rzędu aproksymacji, czyli w konsekwencji liczby pochodnych elementów macierzy impedancyjnej, powoduje poszerzanie pasma, ale nie jest możliwe uzyskanie dowolnie szerokiego interwału przez zastosowanie bardzo dużych wartości parametrów L i M . W celu uzyskania rozwiązania dostatecznie dokładnego w szerszym pasmie częstotliwości należy prowadzić obliczenia dla większej liczby punktów rozwinięcia szeregów Taylora. Na rysunku 11.2 pokazano wyniki obliczeń, w których przyjęto trzy punkty rozwinięcia: $k_0 a = 1,0, 1,5$ oraz $2,2$, dla założenia $L = M = 14$. Wyniki uzyskane dla $k_0 a = 1,0$ są wykorzystane w zakresie $0,5 \leq ka \leq 1,2$, dla $k_0 a = 1,5$



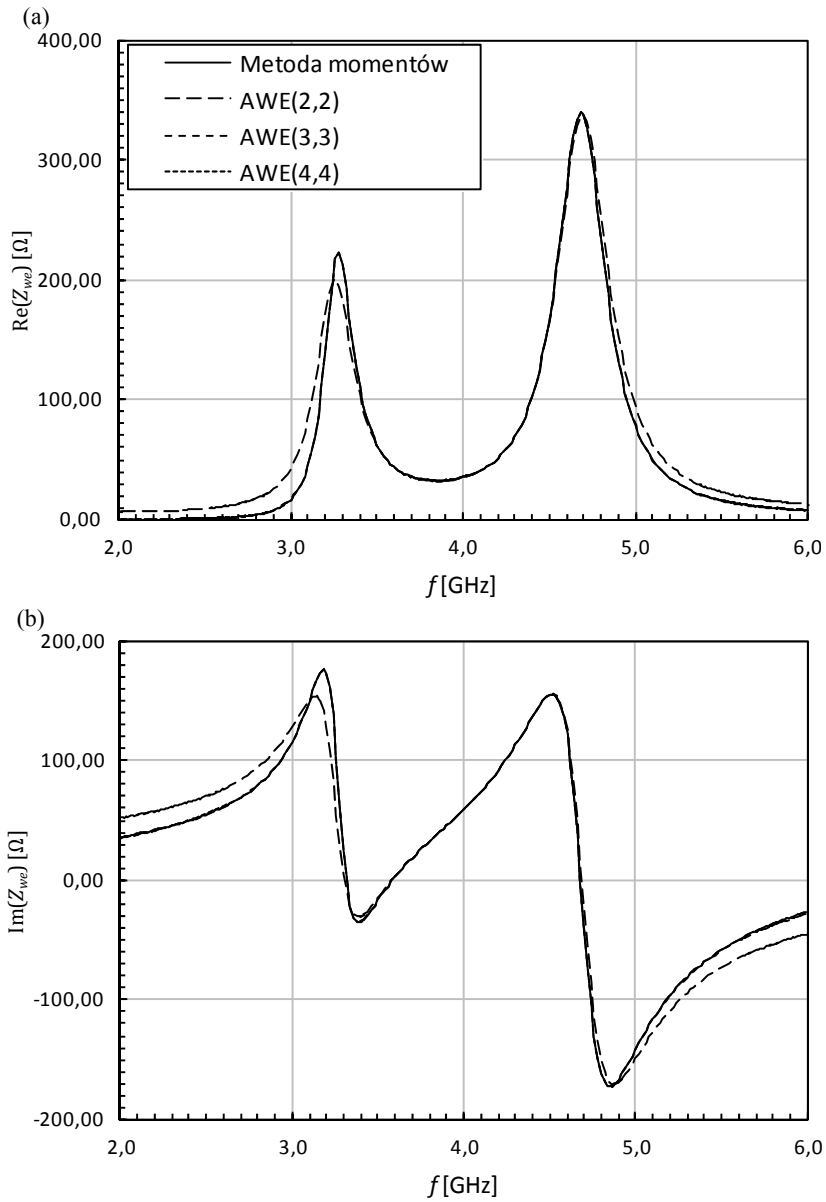
Rys. 11.1. Skuteczna wsteczna powierzchnia odbijająca dwuwarstwowej kuli dielektrycznej o parametrach z rysunku 10.4 obliczona techniką AWE, punkt rozwinięcia $k_0 a = 1,5$



Rys. 11.2. Przykład z rysunku 11.1 dla trzech punktów rozwinięcia
 $k_0a = 1,0, 1,5$ oraz $2,2, L = M = 14$

w zakresie $1,2 \leq ka \leq 1,9$ i dla $k_0a = 2,2$ w zakresie $1,9 \leq ka \leq 2,2$. Na rysunku pionowe linie przerywane oddzielają wspomniane trzy interwały częstotliwościowe, a czarne kółka wskazują rozwiązanie w punktach rozminięcia. W ogólnym przypadku, gdy aproksymacja wykorzystująca pojedynczy punkt rozwinięcia jest niewystarczająca, można zastosować algorytm wielopunktowy z automatycznym doбором punktów rozwinięcia metodą skakania po częstotliwościach [11.1, 11.13] (CFH – ang. *Complex Frequency Hopping*).

W drugim przykładzie obliczano impedancję wejściową półsferycznej anteny dielektrycznej zasilanej szczelinowo pokazanej na rysunku 10.5. Przyjęto parametry jak dla wykresów z rysunku 10.7 oraz względną przenikalność elektryczną anteny równą 9.5. Na rysunku 11.3 pokazano przebieg impedancji wejściowej w funkcji częstotliwości obliczony klasyczną metodą momentów (punkt po punkcie) oraz wyniki uzyskane za pomocą metody AWE dla punktu rozwinięcia $f_0 = 4$ GHz i różnych rzędów aproksymacji Padé. W tym przypadku już wykres uzyskany metodą AWE(3,3) jest praktycznie nierozróżnialny od wykresu odniesienia. Dla omawianego przykładu przeprowadzono porównanie czasu obliczeń. W zastosowaniu metody AWE(3,3) dla modelu zawierającego 1179 niewiadomych i obliczeniach przeprowadzonych dla 201 częstotliwości czas obliczeń był około 9 razy krótszy niż w przypadku metody klasycznej.

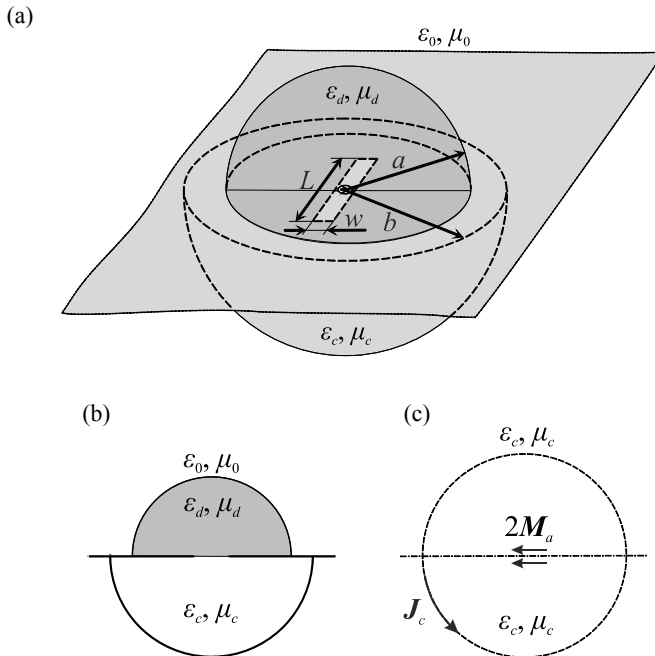


Rys. 11.3. Impedancja wejściowa anteny z rysunku 10.5 obliczona klasyczną metodą momentów i metodą AWE, $a = 1,25$ cm, $L = 15,4$ mm, $w = 0,5$ mm, $\varepsilon_r = 9,5$, $f_0 = 4$ GHz:
(a) część rzeczywista; (b) część urojona

Technika AWE, wymagająca obliczania pochodnych elementów macierzy momentów i wektora pobudzenia względem częstotliwości/liczby falowej, nie nadaje się do zastosowania, gdy nie ma możliwości uzupełnienia kodu komputerowego o procedury obliczania tychże pochodnych. Dlatego też w literaturze dotyczącej analizy szerokopasmowej sporo uwagi poświęca się metodom bazującym wyłącznie na próbkowaniu aproksymowanej wielkości, które nie wymagają obliczania pochodnych, takich jak wariant metody Cauchy'ego bez pochodnych [11.14, 11.15], techniki dopasowania wektorowego [11.14–11.17] (ang. *Vector Fitting*) czy algorytmy próbkowania adaptacyjnego [11.14, 11.17–11.20].

11.2. Makromodele całkowe

Rozpatrzmy teraz sytuację pokazaną na rysunku 11.4a, b. Zasilana szczelinowo rezonatorowa antena dielektryczna, podobna do tej z rysunku 10.5, została uzupełniona półsferyczną metalową wnęką, blokującą promieniowanie wsteczne. Układ równań całkowych opisujący problem konstruuje się w sposób podobny do streszczonego w podrozdziale 10.2. W analizowanym przykładzie modyfikacji ulega zagadnienie



Rys. 11.4. Półsferyczna rezonatorowa antena dielektryczna zasilana szczelinowo z wnęką tłumiącą promieniowanie wsteczne (a, b) oraz odpowiednia konfiguracja zastępcza dla dolnej półprzestrzeni (c)

równoważne dla dolnej półprzestrzeni (por. rys. 10.6c), które przybiera teraz postać pokazaną na rysunku 11.4c. Wprowadza się tu dodatkową niewiadomą, w postaci gęstości powierzchniowej prądu elektrycznego $\mathbf{J}_c$ na powierzchni wnęki (uzupełnionej o lustrzane odbicie) S_c oraz dodatkowe równanie całkowe typu EFIE, opisujące warunek znikania składowej stycznej pola elektrycznego na S_c .

Wynikowy układ równań ma postać:

$$\left(\mathbf{E}_d^+(-\mathbf{J}, -\mathbf{M}) + \mathbf{E}_d^+(-2\mathbf{M}_a) \right)_{\tan} = \left(\mathbf{E}_0^-(\mathbf{J}, \mathbf{M}) \right)_{\tan}, \quad \text{na } S_d, \quad (11.23)$$

$$\left(\mathbf{H}_d^+(-\mathbf{J}, -\mathbf{M}) + \mathbf{H}_d^+(-2\mathbf{M}_a) \right)_{\tan} = \left(\mathbf{H}_0^-(\mathbf{J}, \mathbf{M}) \right)_{\tan}, \quad \text{na } S_d, \quad (11.24)$$

$$\left(\mathbf{H}_d(-\mathbf{J}, -\mathbf{M}) + \mathbf{H}_d(-2\mathbf{M}_a) - \mathbf{H}_0(2\mathbf{M}_a) - \mathbf{H}_0(\mathbf{J}_c) \right)_{\tan} = \left(\mathbf{H}^{imp} \right)_{\tan}, \quad \text{na } S_a, \quad (11.25)$$

$$\left(\mathbf{E}_0(\mathbf{J}_c) + \mathbf{E}_0(2\mathbf{M}_a) \right)_{\tan} = 0, \quad \text{na } S_c. \quad (11.26)$$

W równaniach (11.23)–(11.26) nie zachodzą bezpośrednie wzajemne interakcje między prądem i polem znajdującymi się po przeciwnych stronach szczeliny zasilającej – nie oblicza się pola na powierzchni S_d pochodzącego od $\mathbf{J}_c$, ani nie oblicza pola na powierzchni S_c wytwarzanego przez $\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$ lub $-\mathbf{J}$, $-\mathbf{M}$. Wynika to z faktu, że w procesie konstrukcji układu równań nie występuje konfiguracja zastępcza, w której wspomniane źródła byłyby obecne jednocześnie. Powiązanie zjawisk zachodzących w obu półprzestrzeniach jest opisane wyłącznie przez prąd magnetyczny w miejscu szczeliny $\mathbf{M}_a$ oraz równanie całkowe (11.25).

Brak interakcji jest szczególnie dobrze widoczny po zastosowaniu metody momentów i zapisaniu opowiadającego (11.23)–(11.26) równania macierzowego. Równanie ma ogólną postać:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{dd}^u & \mathbf{Z}_{da}^u & 0 \\ \mathbf{Z}_{ad}^u & \mathbf{Z}_{aa}^u + \mathbf{Z}_{aa}^l & \mathbf{Z}_{ac}^l \\ 0 & \mathbf{Z}_{ca}^l & \mathbf{Z}_{cc}^l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ \mathbf{M}_a \\ \mathbf{J}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{V} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (11.27)$$

gdzie $\mathbf{Z}_{rs}^p$ – fragment macierzy impedancyjnej^{*)}, dla którego funkcje bazowe użyte w aproksymacji prądów zastępczych płynących na powierzchni S_s wytwarzają pola testowane następnie za pomocą funkcji testowych zdefiniowanych na powierzchni S_r .

Górny indeks p ($p = u$ lub l) oznacza odpowiednio górną lub dolną półprzestrzeń, stanowiącą punkt wyjścia do konstrukcji właściwych sytuacji zastępczych. Indeks ten

^{*)} W rozdziale 9 macierz w wynikowym układzie równań sformułowanym dla zagadnienia transmisji przez aperturę określano jako „macierz admitancyjną”, w celu podkreślenia dualności z problemem rozpraszania fal elektromagnetycznych przez metalową płytę. Tu, dla zagadnienia złożonego, pozostaniemy przy określeniu „macierz impedancyjna”.

nie może być utożsamiany z parametrami ośrodka, w którym zachodzi promieniowanie, bo np. obliczanie elementów podmacierzy $\mathbf{Z}_{dd}^u$ wymaga obliczania oddziaływań zachodzących zarówno w ośrodku o parametrach rezonatora dielektrycznego, jak i otaczającego go powietrza (por. formuły (11.23), (11.24)). Oznaczenia w wektorze niewiadomych w (11.27) odpowiadają oznaczeniom nieznanym rozkładów prądów w równaniach (11.23)–(11.26), przy czym wektory w (11.27) zawierają współczynniki aproksymacji tych prądów z użyciem funkcji bazowych. Wektor $\mathbf{K}$ zawiera współczynniki aproksymacji obu prądów zastępczych $\mathbf{J}$ i $\mathbf{M}$ wprowadzonych na powierzchni S_d .

Pierwszy wiersz w (11.27) wynika z dyskretyzacji równań (11.23) i (11.24), drugi – z równania (11.25), a trzeci – (11.26). Ponieważ w analizowanej sytuacji pole pobudzające jest zdefiniowane wyłącznie w szczelinie, wektor po prawej stronie (11.27) wynikający z testowania prawych stron równań (11.23)–(11.26) jest różny od zera tylko dla drugiego wiersza równania macierzowego.

Fragment macierzy impedancyjnej wynikający z testowania pola magnetycznego w szczelinie, pochodzącego od aproksymacji prądu magnetycznego w tej szczelinie, celowo został zapisany w postaci sumy $\mathbf{Z}_{aa}^u + \mathbf{Z}_{aa}^l$, aby podkreślić, że w tym jedynym przypadku w obliczaniu elementów macierzy impedancyjnej korzysta się z parametrów ośrodka zarówno poniżej, jak i powyżej szczeliny.

W tradycyjnym schemacie rozwiązania problemu kolejnym etapem powinno być rozwiązanie równania macierzowego (11.27). Spróbujmy jednak przeformułować równanie (11.27), eliminując z niego niewiadome $\mathbf{K}$ oraz $\mathbf{J}_c$. Z pierwszego równania w (11.27) mamy:

$$\mathbf{K} = -\left(\mathbf{Z}_{dd}^u\right)^{-1} \mathbf{Z}_{da}^u \mathbf{M}_a, \quad (11.28)$$

a z trzeciego:

$$\mathbf{J}_c = -\left(\mathbf{Z}_{cc}^l\right)^{-1} \mathbf{Z}_{ca}^l \mathbf{M}_a. \quad (11.29)$$

Po podstawieniu (11.28) i (11.29) do drugiego równania (11.27) otrzymuje się:

$$\left[\left\{ \mathbf{Z}_{aa}^u - \mathbf{Z}_{ad}^u \left(\mathbf{Z}_{dd}^u \right)^{-1} \mathbf{Z}_{da}^u \right\} + \left\{ \mathbf{Z}_{aa}^l - \mathbf{Z}_{ac}^l \left(\mathbf{Z}_{cc}^l \right)^{-1} \mathbf{Z}_{ca}^l \right\} \right] \mathbf{M}_a = \mathbf{V}. \quad (11.30)$$

W równaniu macierzowym (11.30) liczba niewiadomych odpowiada liczbie współczynników użytych w aproksymacji prądu $\mathbf{M}_a$, jest zatem znacznie mniejsza niż liczba niewiadomych w równaniu wyjściowym (11.27). Oczywiście, w celu uzyskania (11.30) należy odwracać duże macierze $\mathbf{Z}_{dd}^u$ i $\mathbf{Z}_{cc}^l$, ale na żadnym etapie rozwiązania nie odwraca się pełnej macierzy impedancyjnej z równania (11.27). Można uznać, że obliczając macierze w nawiasach klamrowych w (11.30) rozwiązujemy dwa, niezależne, cząstkowe problemy związane z górną i dolną półprzestrzenią w problemie oryginalnym. Te cząstkowe rozwiązania są następnie podstawą do uzyskania rozwiązania końcowego (11.30). To rozwiązanie zawiera oczywiście informację wyłącznie o prą-

dzie magnetycznym w szczelinie, może więc np. posłużyć do obliczenia impedancji wejściowej anteny. Jeżeli jest potrzebne obliczenie innych parametrów, np. pola w odpowiednich podobszarach, charakterystyki promieniowania itp., konieczne jest uzyskanie informacji o pozostałych prądach zastępczych. Można je obliczyć, podstawiając rozwiązanie (11.30) do (11.28) i (11.29), przy czym nie wymaga to już odwracania macierzy – odpowiednie operacje zostały wykonane przy tworzeniu równania (11.30).

Podany schemat analizy nosi nazwę metody dekompozycji przestrzennej opartej na zasadach równoważności (EP-DDM – ang. *Equivalence Principle – Domain Decomposition Method* [11.21, 11.22]). Tego typu metody umożliwiają analizę złożonego zagadnienia elektromagnetyzmu przez ich podział na mniejsze (pod względem liczby niewiadomych) problemy cząstkowe.

Stosując metodę dekompozycji nie trzeba doprowadzać układu równań do postaci (11.30), czyli równania macierzowego, w którym jedynymi niewiadomymi są współczynniki opisujące zastępczy prąd na powierzchni rozdzielającej dziedzinę, w których definiuje się zagadnienia cząstkowe. Jeżeli wyeliminuje się wyłącznie niewiadome związane z jedną z części złożonego zagadnienia, np. elementy wektora $\mathbf{K}$, z wykorzystaniem pierwszego z równań (11.27), podstawiając (11.28) do drugiego równania, otrzymuje się równanie z niewiadomymi $\mathbf{M}_a$ i $\mathbf{J}_c$:

$$\begin{bmatrix} \left\{ \mathbf{Z}_{aa}^u - \mathbf{Z}_{ad}^u \left(\mathbf{Z}_{dd}^u \right)^{-1} \mathbf{Z}_{da}^u \right\} + \mathbf{Z}_{aa}^l & \mathbf{Z}_{ac}^l \\ \mathbf{Z}_{ca}^l & \mathbf{Z}_{cc}^l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_a \\ \mathbf{J}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (11.31)$$

które może być przydatne np. w zadaniu optymalizacji kształtu lub rozmiaru wnęki umieszczonej w dolnej półprzestrzeni. Można wtedy raz rozwiązać problem cząstkowy dla układu rezonator dielektryczny/szczelina, czyli obliczyć macierz w nawiasach klamrowych w (11.31), a następnie podstawiać tę macierz do wielu równań typu (11.31) opisujących różne kształty wnęki i różne ośrodki poniżej szczeliny. W równaniu (11.31) bardzo proste jest uwzględnienie źródła/pola pobudzającego występujących w dolnej półprzestrzeni (a nie tylko na powierzchni szczeliny). W wektorze pobudzeń, zamiast wektora zerowego, pojawiają się wtedy po prostu elementy wynikające z testowania pola pobudzającego na powierzchni S_c . Oczywiście, jeżeli poniżej szczeliny wnęki w ogóle nie występuje, równanie (11.31) redukuje się do:

$$\left\{ \mathbf{Z}_{aa}^u - \mathbf{Z}_{ad}^u \left(\mathbf{Z}_{dd}^u \right)^{-1} \mathbf{Z}_{da}^u \right\} + \mathbf{Z}_{aa}^l \mathbf{M}_a = \mathbf{V}, \quad (11.32)$$

które opisuje sytuację analizowaną w podrozdziale 10.2.

Niedogodnością zastosowania opisanej metody do obliczeń szerokopasmowych jest konieczność powtarzania całego schematu analizy dla poszczególnych częstotliwości z zadanego pasma. Takie obliczenia można znacznie przyspieszyć, znajdując szerokopasmową aproksymację elementów macierzy w nawiasach klamrowych. Taką

aproksymację można uzyskać, stosując algorytm bazujący na omówionej w poprzednim podrozdziale metodzie AWE [11.23].

Rozpatrzmy macierz:

$$\mathbf{Z}_M = \left\{ \mathbf{Z}_{aa} - \mathbf{Z}_{ad} (\mathbf{Z}_{dd})^{-1} \mathbf{Z}_{da} \right\}, \quad (11.33)$$

występującą w (11.30)–(11.32), przy czym dla uproszczenia zapisu pominęto indeks górny u . Oznaczono liczbę niewiadomych współczynników w wektorze $\mathbf{M}_a$ jako N_a , a liczbę niewiadomych współczynników w wektorze $\mathbf{K}$ jako N_d . Założono następnie, że wszystkie, zależne od wartości współczynnika propagacji k macierze, występujące po prawej stronie (11.33), można rozwinąć w szereg Taylora wokół pewnej wartości k_0 :

$$\mathbf{Z}_{rs}(k) = \sum_{p=0}^Q \frac{\mathbf{Z}_{rs}^{(p)}(k_0)}{p!} (k - k_0)^p, \quad (11.34)$$

gdzie $r, s = a, d$.

Oznaczono przez $(\mathbf{z})_l$ l -tą kolumnę dowolnej macierzy $\mathbf{Z}$. Na podstawie (11.33) można zapisać wyrażenie na poszczególne kolumny macierzy $\mathbf{Z}_M$:

$$(\mathbf{z}_M)_l = \left\{ (\mathbf{z}_{aa})_l - \mathbf{Z}_{ad} (\mathbf{Z}_{dd})^{-1} (\mathbf{z}_{da})_l \right\}, \quad l = 1, \dots, N_a. \quad (11.35)$$

Etapem obliczania (11.35) jest obliczenie wyrażenia:

$$\mathbf{x}_l = (\mathbf{Z}_{dd})^{-1} (\mathbf{z}_{da})_l, \quad (11.36)$$

co jest równoważne rozwiązaniu układu równań:

$$\mathbf{Z}_{dd} \cdot \mathbf{x}_l = (\mathbf{z}_{da})_l. \quad (11.37)$$

Do uzyskania aproksymacji Taylora dla zależnego od k wektora $\mathbf{x}_l$ można zastosować metodę AWE, tzn. obliczyć współczynniki rozwinięcia:

$$\mathbf{x}_l(k) = \sum_{r=0}^Q \mathbf{x}_{l,r} (k - k_0)^r, \quad (11.38)$$

w sposób opisany formułami (11.6), (11.7):

$$\mathbf{x}_{l,0} = [\mathbf{Z}_{dd}(k_0)]^{-1} (\mathbf{z}_{da})_l(k_0) \quad (11.39)$$

$$\mathbf{x}_{l,r} = [\mathbf{Z}_{dd}(k_0)]^{-1} \left\{ \frac{(\mathbf{z}_{da})_l^{(r)}(k_0)}{r!} - \sum_{i=1}^r \frac{\mathbf{Z}_{dd}^{(i)}(k_0)}{i!} \cdot \mathbf{x}_{l,r-i} \right\}, \quad r = 1, \dots, Q \quad (11.40)$$

Procedurę powtarza się N_a razy dla kolejnych kolumn l macierzy $\mathbf{Z}_{da}$. Zauważmy, że w tej części algorytmu odwrócenie macierzy $\mathbf{Z}_{dd}(k_0)$ jest dokonywane tylko raz.

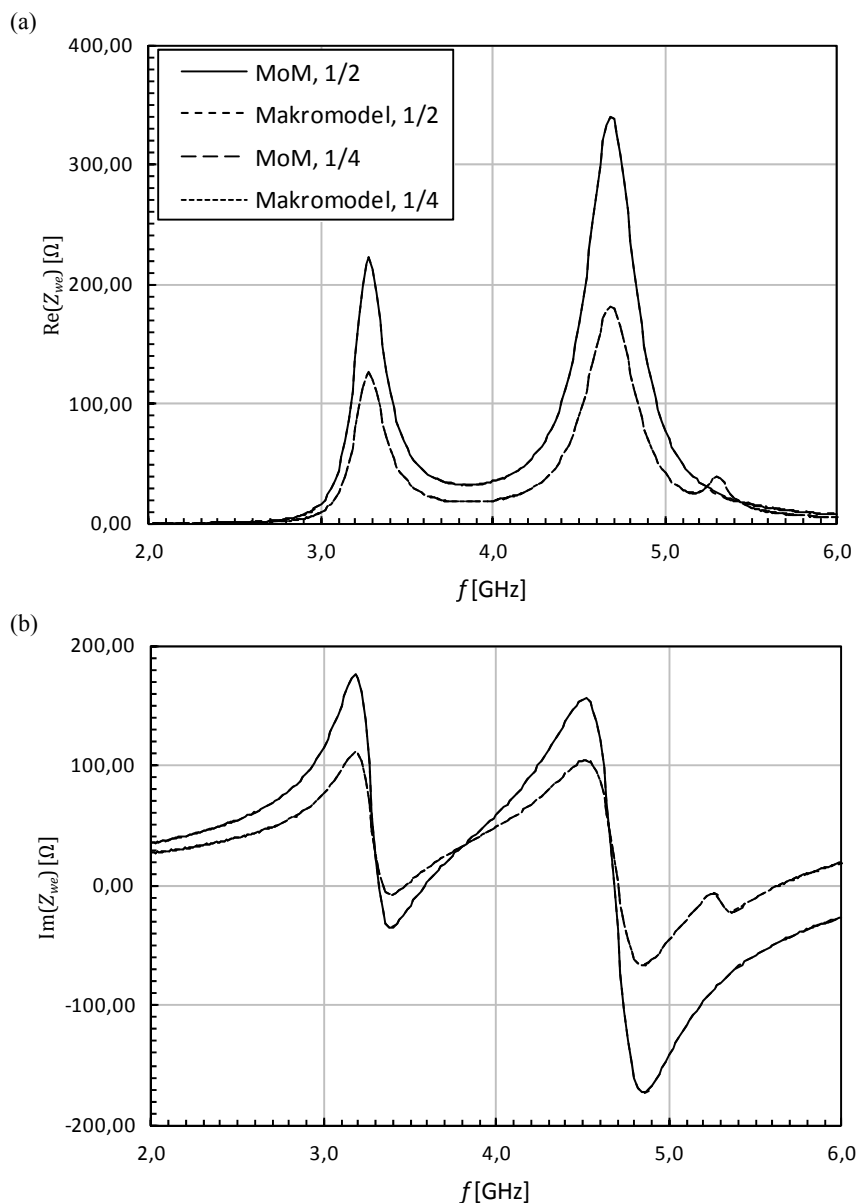
W kolejnym kroku oblicza się współczynniki Taylora poszczególnych kolumn macierzy $\mathbf{Z}_M$:

$$(\mathbf{z}_M)_{l,r} = \frac{(\mathbf{z}_{da}^{(r)})_l(k_0)}{r!} - \sum_{p=0}^r \frac{\mathbf{Z}_{ad}^{(p)}(k_0)}{p!} \cdot \mathbf{x}_{l,r-i}, \quad r = 0, \dots, Q \quad (11.41)$$

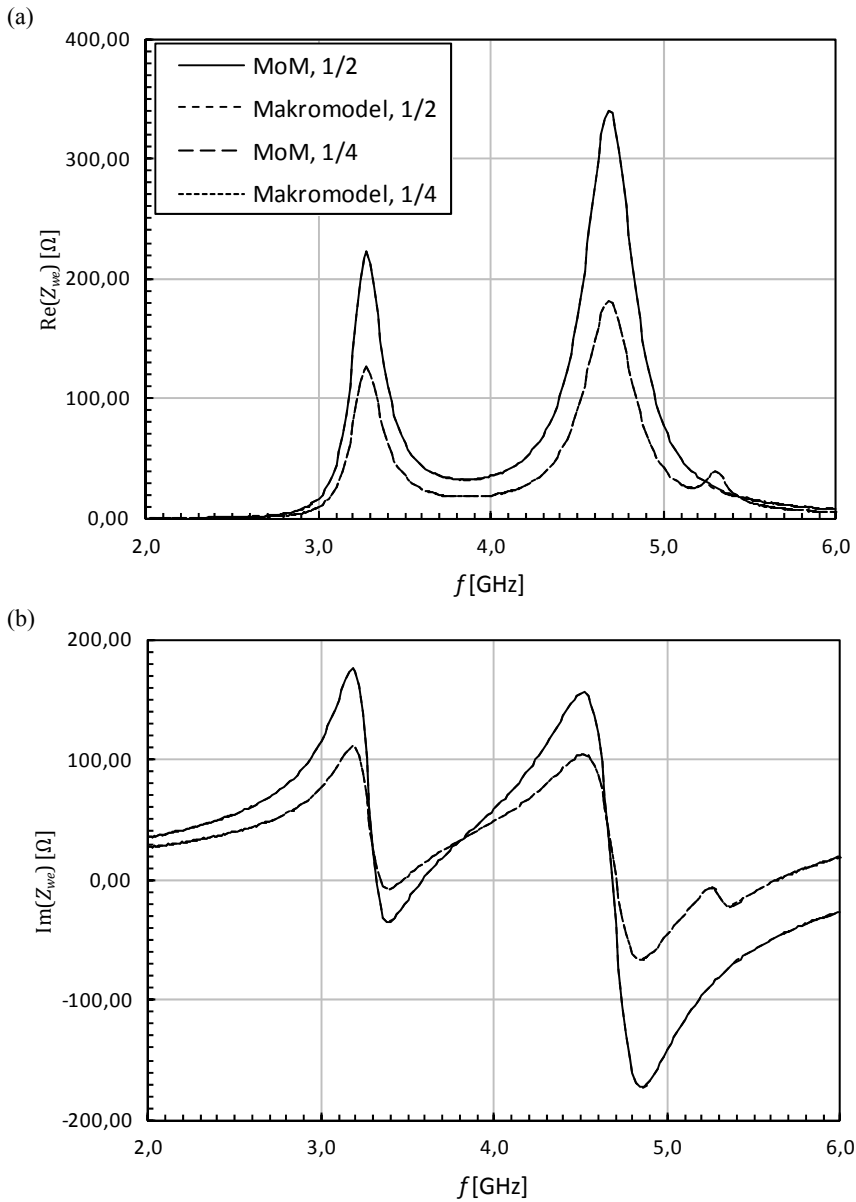
Znajomość współczynników rozwinięcia Taylora wszystkich kolumn macierzy $\mathbf{Z}_M$ oznacza, że są znane aproksymacje dla wszystkich elementów tej macierzy. Z aproksymacji Taylora można następnie uzyskać słuszne w szerszym zakresie wartości k , aproksymacje Padé, stosując algorytm opisany w rozdziale 11.1. Przez analogię do terminologii stosowanej w metodach siatkowych [11.24, 11.25], szerokopasmową aproksymację macierzy $\mathbf{Z}_M$ będziemy nazywać *makromodelem całkowym*. Podobnie jak w klasycznych zastosowaniach metody AWE makromodel tworzy się, wybierając odpowiednią wartość k_0 , dla której są obliczane odpowiednie współczynniki rozwinięcia Taylora, a także wartości L i M charakteryzujące rząd aproksymacji Padé. Uzyskany makromodel jest słuszny w pewnym przedziale wartości współczynnika propagacji k . Jeżeli ten przedział jest zbyt wąski, makromodel można zbudować, wykorzystując rozwinięcia dla kilku wartości k_0 , poprawne w węższych pasmach częstotliwościowych.

Zaletą stosowania makromodeli w analizie złożonych zagadnień elektromagnetyzmu jest możliwość wyodrębnienia i osobnego, szerokopasmowego przeanalizowania fragmentów większej konfiguracji. Jest też możliwe stworzenie bibliotek makromodeli wybranych typowych struktur i ich wykorzystywanie w analizie i optymalizacji bardziej skomplikowanych konfiguracji. Typowym przykładem, wynikającym z rozważenia sytuacji przedstawionej na początku niniejszego podrozdziału, jest zasilana szczelinowo dielektryczna antena rezonatorowa. Można stworzyć makromodel takiej anteny, a następnie wykorzystać go w procedurze optymalizacji wnęki blokującej promieniowanie wsteczne i/lub miejsca zasilania szczeliny. Można także zastosować opracowany makromodel dla zupełnie innej konfiguracji struktury zasilającej leżącej poniżej szczeliny sprzęgającej, zawierającej np. układ mikropaskowych linii zasilających.

Zastosowano teraz opisaną metodę do analizy sytuacji z rysunku 11.4, dla danych $a = 1,25$ cm, $b = 6,2$ cm, $L = 15,4$ mm, $w = 0,5$ mm, $\varepsilon_r = 9,5$. W pierwszej kolejności utworzono makromodel dla górnej części struktury, to jest dla układu rezonator-szczelina. Makromodel przetestowano dla sytuacji prostszej, w której w dolnej półprzestrzeni o parametrach próżni nie ma metalowej wnęki, czyli dla sytuacji z rysunku 10.5. Na rysunku 11.5 pokazano obliczoną w funkcji częstotliwości impedancję wejściową takiej anteny przeanalizowaną za pomocą klasycznego algorytmu opisanego w rozdziale 10 oraz za pomocą makromodelu stworzonego wokół częstotliwościowego punktu rozwinięcia 4.0 GHz, z zastosowaniem aproksymacji Padé o stopniach



Rys. 11.5. Impedancja wejściowa półsferycznej rezonatorowej anteny dielektrycznej zasilanej szczelinowo, $a = 1,25$ cm, $L = 15,4$ mm, $w = 0,5$ mm, $\epsilon_r = 9,5$, obliczenia z wykorzystaniem klasycznej metody momentów (MoM) i makromodelu; zasilanie w połowie i jednej czwartej długości szczeliny: (a) część rzeczywista; (b) część urojona



Rys. 11.6. Impedancja wejściowa półsferycznej rezonatorowej anteny dielektrycznej zasilanej szczelinowo z wnętrza tłumiącą promieniowanie wsteczne, $a = 1,25$ cm, $b = 6,2$ cm, $L = 15,4$ mm, $w = 0,5$ mm, $\epsilon_r = 9,5$, wyniki obliczeń z wykorzystaniem makromodeli porównane z danymi literaturowymi [11.27]: (a) część rzeczywista; (b) część urojona

licznika i mianownika równych odpowiednio 6 oraz 6. Obliczenia przeprowadzono dla dwóch punktów umieszczenia zasilania anteny w szczelinie – w środku (w połowie) szczeliny, co odpowiada sytuacji analizowanej w rozdziałach 10.2 i 11.1, oraz w jednej czwartej długości szczeliny. Podczas gdy obliczenia klasycznym algorytmem wykorzystującym metodę momentów wymagają powtórzenia pełnego cyklu obliczeniowego dla wszystkich częstotliwości z analizowanego pasma (tu było ich 201), w obliczeniach z użyciem makromodelu wykorzystuje się *ten sam* makromodel opisujący oddziaływanie antena–szczelina. Warto porównać w tym przypadku czas obliczeń. Czas obliczania makromodelu wynosił (1140 niewiadomych dla anteny i 39 dla szczeliny) 282 sekundy, czas rozwiązania klasycznego (201 częstotliwości, 1179 niewiadomych) – 1051 sekund, rozwiązania wykorzystującego utworzony uprzednio makromodel (201 częstotliwości, 39 niewiadomych) – 2 sekundy. Jak widać, obliczenia z wykorzystaniem gotowego makromodelu są tu około 500 razy szybsze od obliczeń metodą klasyczną. Warto odnotować fakt, że zmiana położenia punktu zasilania szczeliny może być wykorzystana do dostrojenia impedancji wejściowej anteny [11.26]. Na wykresach odpowiadających zasilaniu w jednej czwartej długości szczeliny można także zaobserwować pojawienie się dodatkowego zafalowania, które odpowiada wzbudzeniu w antenie rodzaju rezonansowego niepobudzanego w przypadku zasilania symetrycznego [11.27].

W podobny sposób przygotowano makromodel dla dolnej części struktury z rysunku 11.4. Tym razem wykorzystano dwa punkty rozwinięcia: 3,0 GHz dla zakresu od 2,0 do 4,0 GHz i 5,0 GHz dla zakresu od 4,0 do 6,0 GHz oraz, ponownie, aproksymacje Padé o stopniach licznika i mianownika równych odpowiednio 6 i 6. Następnie obydwa makromodele wykorzystano w aproksymacji równania (11.30).

Wyniki – wykres impedancji wejściowej w funkcji częstotliwości dla anteny dielektrycznej z wnęką tłumiącą promieniowanie wsteczne – pokazano na rysunku 11.6^{*)}. W tym przykładzie zasilanie umieszczono w środku szczeliny pobudzającej [11.23, 11.28]. Dodanie do konfiguracji metalowej wnęki powoduje pojawienie się dodatkowego rezonansu [11.28].

Podobny schemat analizy można zastosować dla innych układów równań – warunkiem przeprowadzenia dekompozycji przestrzennej wykorzystującej zasady równoważności jest występowanie w analizowanej sytuacji powierzchni oddzielającej od siebie obszary zawierające obiekty oraz źródła. W omawianym przykładzie tą powierzchnią była powierzchnia nieskończonego ekranu ze szczeliną. W innych sytuacjach może to być np. powierzchnia zamknięta, ograniczająca wybrany fragment przestrzeni. Takim problemem jest np. zagadnienie omówione w podrozdziale 10.1, gdzie interakcje pomiędzy źródłami zewnętrznym (polem pobudzającym) a wnętrzem niejednorodnej bryły dielektrycznej odbywają się wyłącznie za pośrednictwem prą-

^{*)} Dane porównawcze w formie elektronicznej uzyskano dzięki uprzejmości prof. K.W. Leunga z City University of Hong Kong.

dów zastępczych umieszczonych na zewnętrznej powierzchni bryły. W ostatecznym układzie równań, powstałym po eliminacji niewiadomych opisujących źródła objętościowe wewnątrz obiektu, niewiadomymi są tylko współczynniki opisujące rozkład prądów zastępczych na powierzchni zewnętrznej [11.29].

11.3. Charakterystyczne funkcje bazowe

Inną metodą, dzięki której można uniknąć konieczności rozwiązywania układu równań z bardzo dużą liczbą niewiadomych współczynników jest metoda tzw. *charakterystycznych funkcji bazowych* (CBF – ang. *Characteristic Basis Functions*). Ta metoda, wprowadzona przez Mittrę i współpracowników [11.30, 11.31], polega – podobnie jak metoda omówiona w poprzednim podrozdziale – na podziale oryginalnego zagadnienia na mniejsze podproblemy, analizowane w pierwszym przybliżeniu niezależnie od siebie. W odróżnieniu od opisanej metody dekompozycji przestrzennej bazującej na zasadzie równoważności, w której na mniejsze obszary dzieli się przestrzeń, gdzie znajduje się analizowany obiekt (w istocie – źródła zastępcze), w tym przypadku na mniejsze fragmenty dzieli się sam obiekt/źródło.

Rozważmy najpierw układ dwóch, umieszczonych dowolnie w przestrzeni obiektów metalowych, pobudzanych falą elektromagnetyczną (rys. 11.7). Typowe rozwiązanie tak postawionego problemu, opisane w rozdziale 3, polega na zastąpieniu obu obiektów zastępczym rozkładem powierzchniowym prądu elektrycznego, a następnie znalezieniu odpowiednich aproksymacji tego prądu za pomocą metody równań całkowych/metody momentów. Zauważmy, że fakt, iż mamy do czynienia z *dwoma* rozłącznymi obiektami jest – przy takim podejściu – nieistotny ze względu na schemat analizy, macierz impedancyjna opisuje bowiem interakcje w obrębie par typu funkcja bazowa – funkcja wagowa, nie uwzględniając w żaden sposób, czy dana para należy do jednego czy też dwóch różnych obiektów.

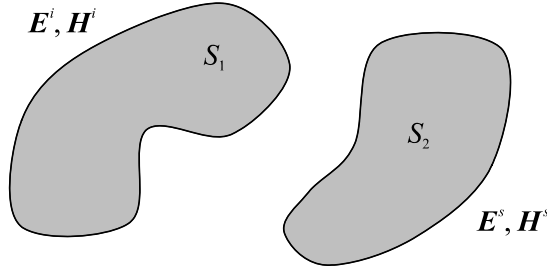
Do dalszych rozważań zapiszemy teraz wynikowy układ równań liniowych w postaci wypuklającej fakt, że struktura rozpraszająca składa się z dwóch oddzielnych części:

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{V} \quad (11.42)$$

We wzorze (11.42) wektory $\mathbf{J}_1$ i $\mathbf{J}_2$ opisują odpowiednio aproksymacje prądu na S_1 i S_2 , a wektory pobudzenia $\mathbf{V}_1$ i $\mathbf{V}_2$ wynikają z testowania elektrycznego pola pobudzającego na S_1 i S_2 . Podmacierze $\mathbf{Z}_{11}$ i $\mathbf{Z}_{22}$ opisują oddziaływania własne obu obiektów, a $\mathbf{Z}_{12}$ i $\mathbf{Z}_{21}$ – oddziaływania wzajemne.

Obydwa (macierzowe) równania opisane układem (11.42) można zapisać w postaci:

$$\mathbf{Z}_{ii} \mathbf{J}_i = \mathbf{V}_i - \mathbf{Z}_{ij} \mathbf{J}_j, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (11.43)$$



Rys. 11.7. Rozpraszanie fal elektromagnetycznych przez dwa metalowe obiekty

Jeżeli pominie się oddziaływania wzajemne pomiędzy obiektami, równania (11.43) przybiorą postać:

$$\mathbf{Z}_{ii} \mathbf{J}_i^{(i)} = \mathbf{V}_i, \quad i = 1, 2, \quad (11.44)$$

gdzie oczywiście $\mathbf{J}_i^{(i)}$ jest różne od $\mathbf{J}_i$ z równania (11.43). Rozwiązanie (11.44) opisuje aproksymację prądu, jaki powstałby na powierzchni S_i pod wpływem pola padającego $(\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i)$ w razie braku drugiego z obiektów.

W metodzie charakterystycznych funkcji bazowych zakłada się, że aproksymacja prądu płynącego na powierzchni S_i może być, z dobrą dokładnością, przedstawiona jako kombinacja liniowa $\mathbf{J}_i^{(i)}$, uzyskanego w wyniku rozwiązania (11.44) oraz rozwiązania pomocniczego równania:

$$\mathbf{Z}_{ii} \mathbf{J}_i^{(j)} = -\mathbf{Z}_{ij} \mathbf{J}_j^{(j)}, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (11.45)$$

Prawa strona (11.45) odpowiada (wziętemu ze znakiem minus – por. równanie (11.43)) polu wtórnemu, wytwarzanemu na powierzchni S_i przez prąd $\mathbf{J}_j^{(j)}$ płynący po powierzchni S_j .

Postuluje się zatem:

$$\mathbf{J}_i \cong \sum_{j=1}^2 \alpha_i^{(j)} \mathbf{J}_i^{(j)} \quad (11.46)$$

gdzie współczynniki $\alpha_i^{(j)}$, $j = 1, 2$ są na razie nieznanne.

Aproksymację (11.46) wygodnie jest zapisać w odniesieniu do całego rozwiązania układu (11.42), tzn.:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \end{bmatrix} \cong \alpha_1^{(1)} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1^{(1)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \alpha_1^{(2)} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1^{(2)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \alpha_2^{(2)} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_2^{(2)} \end{bmatrix} + \alpha_2^{(1)} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_2^{(1)} \end{bmatrix}. \quad (11.47)$$

Wektory po prawej stronie (11.47), będące uzupełnionymi odpowiednio zerami rozwiązaniami (11.44) i (11.45), opisują aproksymacje, które można potraktować jako

nowe, *globalne* funkcje bazowe. Funkcje, dla których indeks górny jest taki sam jak indeks dolny, wskazujący dziedzinę, na której funkcja jest zdefiniowana, są to tzw. *pierwotne* charakterystyczne funkcje bazowe, a funkcje, dla których indeks górny jest różny od indeksu dolnego – *wtórne* charakterystyczne funkcje bazowe. W tym drugim przypadku, jak wynika z (11.45), indeks górny wskazuje funkcję pierwotną, będącą źródłem oddziaływania wtórnego pomiędzy obszarami. W rozwiązywaniu (11.45) można skorzystać z faktoryzacji macierzy $\mathbf{Z}_{ii}$ dokonanej uprzednio podczas rozwiązywania (11.44).

Do znalezienia współczynników α można zastosować metodę momentów w wersji Galerkina. Nie trzeba w tym celu przeprowadzać od początku obliczania elementów macierzy momentów za pomocą formuły (3.8) lub (3.9). Użycie w charakterze funkcji bazowej i wagowej charakterystycznych funkcji bazowych prowadzi do następującej formuły na element nowej, zredukowanej macierzy impedancyjnej (por. wzór (3.12)):

$$Z_{rs}^c = \left\langle \mathcal{L} \left(\sum_{n=1}^N I_n^s \mathbf{i}_n(\mathbf{r}') \right); \sum_{m=1}^N I_m^r \mathbf{i}_m(\mathbf{r}) \right\rangle, \quad (11.48)$$

gdzie wektory $\mathbf{J}^s = [\mathbf{I}_n^s]$ i $\mathbf{J}^r = [\mathbf{I}_m^r]$ są wektorami ze zbioru (w tym przypadku czterech) wektorów obecnych po prawej stronie (11.47). Funkcje $\mathbf{i}_n(\mathbf{r})$ oraz $\mathbf{i}_m(\mathbf{r})$ są tradycyjnymi elementarnymi funkcjami bazowymi (np. RWG) użytymi do aproksymacji prądów na S_1 i S_2 , a N jest całkowitą liczbą tych funkcji, czyli długością wektora $\mathbf{J}$ z oryginalnego równania (11.42). Po skorzystaniu z liniowości operatorów otrzymuje się:

$$Z_{rs}^c = \sum_{m=1}^N I_m^r \sum_{n=1}^N I_n^s \left\langle \mathcal{L}(\mathbf{i}_n(\mathbf{r}')) \mathbf{i}_m(\mathbf{r}) \right\rangle = \sum_{m=1}^N I_m^r \sum_{n=1}^N I_n^s Z_{mn} = \mathbf{J}^{r^T} \mathbf{Z} \mathbf{J}^s, \quad (11.49)$$

gdzie indeks T oznacza macierz transponowaną.

Podobnie można postąpić z wektorem pobudeń (por. wzór (3.13)):

$$\mathbf{V}_r^c = \left\langle \mathcal{E}(\mathbf{r}); \sum_{m=1}^N I_m^r \mathbf{i}_m(\mathbf{r}) \right\rangle = \sum_{m=1}^N I_m^r \left\langle \mathcal{E}(\mathbf{r}); \mathbf{i}_m(\mathbf{r}) \right\rangle = \sum_{m=1}^N I_m^r V_m = \mathbf{J}^{r^T} \mathbf{V}. \quad (11.50)$$

Widzimy zatem, że nowe równanie macierzowe, służące do znalezienia współczynników aproksymacji (11.47) uzyskuje się, korzystając z oryginalnej macierzy momentów i wektora pobudeń z równania (11.42) oraz wektorów opisujących charakterystyczne funkcje bazowe, uzyskane z (11.44) i (11.45).

Ostatecznie, dla analizowanej sytuacji otrzymuje się układ czterech równań z czterema niewiadomymi:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_1^{(1)T} \mathbf{Z}_{11} \mathbf{J}_1^{(1)} & \mathbf{J}_1^{(1)T} \mathbf{Z}_{11} \mathbf{J}_1^{(2)} & \mathbf{J}_1^{(1)T} \mathbf{Z}_{12} \mathbf{J}_2^{(2)} & \mathbf{J}_1^{(1)T} \mathbf{Z}_{12} \mathbf{J}_2^{(1)} \\ \mathbf{J}_1^{(2)T} \mathbf{Z}_{11} \mathbf{J}_1^{(1)} & \mathbf{J}_1^{(2)T} \mathbf{Z}_{11} \mathbf{J}_1^{(2)} & \mathbf{J}_1^{(2)T} \mathbf{Z}_{12} \mathbf{J}_2^{(2)} & \mathbf{J}_1^{(2)T} \mathbf{Z}_{12} \mathbf{J}_2^{(1)} \\ \mathbf{J}_2^{(2)T} \mathbf{Z}_{21} \mathbf{J}_1^{(1)} & \mathbf{J}_2^{(2)T} \mathbf{Z}_{21} \mathbf{J}_1^{(2)} & \mathbf{J}_2^{(2)T} \mathbf{Z}_{22} \mathbf{J}_2^{(2)} & \mathbf{J}_2^{(2)T} \mathbf{Z}_{22} \mathbf{J}_2^{(1)} \\ \mathbf{J}_2^{(1)T} \mathbf{Z}_{21} \mathbf{J}_1^{(1)} & \mathbf{J}_2^{(1)T} \mathbf{Z}_{21} \mathbf{J}_1^{(2)} & \mathbf{J}_2^{(1)T} \mathbf{Z}_{22} \mathbf{J}_2^{(2)} & \mathbf{J}_2^{(1)T} \mathbf{Z}_{22} \mathbf{J}_2^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)} \\ \alpha_2^{(2)} \\ \alpha_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1^{(1)T} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{J}_1^{(2)T} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{J}_2^{(2)T} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{J}_2^{(1)T} \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}, \quad (11.51)$$

gdzie w zapisie wykorzystano niezerowe fragmenty wektorów definiujących charakterystyczne funkcje bazowe.

Podane rozumowanie łatwo uogólnić na dowolną liczbę obiektów. Jeżeli obiektów jest M , dla każdego z nich (potraktowanego jak obiekt odosobniony) rozwiązuje się układ równań typu (11.44), generując pierwotną funkcję bazową. Następnie wykorzystuje się obliczoną funkcję pierwotną do wygenerowania $M - 1$ funkcji wtórnych, na pozostałych $M - 1$ obiektach, za pomocą odpowiedników (11.45). Otrzymuje się w ten sposób M^2 charakterystycznych funkcji bazowych (dla każdego z M obiektów jest jedna funkcja pierwotna i $M - 1$ funkcji wtórnych). Następnie konstruuje się układ równań, typu (11.51), o M^2 niewiadomych, pozwalający określić współczynniki wagowe dla poszczególnych funkcji, czyli w rezultacie aproksymację docelowego rozwiązania. Na żadnym etapie algorytmu nie jest konieczne rozwiązywanie układu równań z całkowitą liczbą niewiadomych N , obejmującą wszystkie M obiektów.

Można również rozważania zastosować także do dużych elektrycznie obiektów, nieskładających się z odseparowanych fragmentów. Obiekt dzielimy wtedy na M części, które pełnią rolę obiektów z opisanego algorytmu. Aby zapewnić poprawną aproksymację przepływu prądu między sąsiadującymi ze sobą częściami na etapie generowania charakterystycznych funkcji bazowych stosuje się rozszerzenie dziedzin tych funkcji, przez ich nałożenie na dziedziny funkcji sąsiadujących. Tego nakładania się rozszerzonych dziedzin charakterystycznych funkcji bazowych nie należy mylić z – naturalnym przy używanych funkcjach typu trójkątnego/daszkiowego – zachodzeniem na siebie dziedzin elementarnych funkcji bazowych, stosowanych do generowania oryginalnego układu równań (11.42). Przez nakładanie się rozszerzonych dziedzin charakterystycznych funkcji bazowych rozumie się sytuację, w której istnieją elementarne funkcje bazowe przypisane jednocześnie do co najmniej dwóch fragmentów.

Stosowanie takich nakładających się fragmentów powoduje konieczność specjalnego potraktowania sytuacji, gdy – podczas generowania wtórnej funkcji bazowej za pomocą odpowiednika (11.45) – istnieje wspólny fragment dziedziny $\mathbf{J}_i^{(j)}$ i $\mathbf{J}_j^{(j)}$. W takim przypadku wykorzystuje się wyłącznie te fragmenty $\mathbf{J}_j^{(j)}$, których dziedzina nie należy do dziedziny $\mathbf{J}_i^{(j)}$ [11.30]. Oczywiście pociąga to za sobą konieczność wyeliminowania odpowiednich kolumn z macierzy $\mathbf{Z}_{ij}$. Po zakończeniu procedury two-

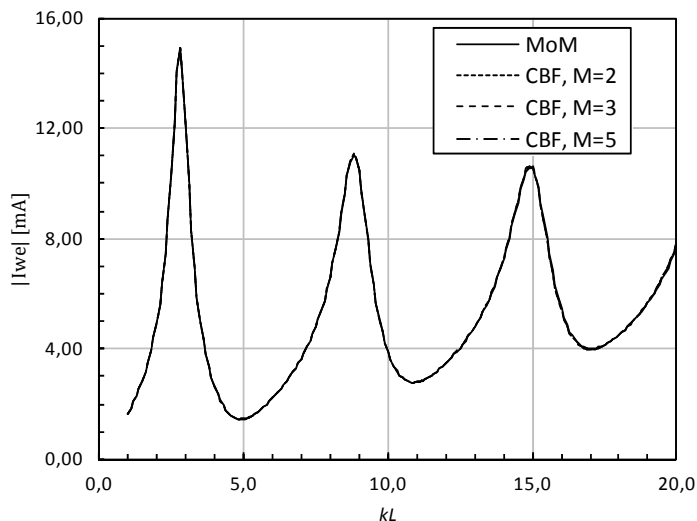
zenia pierwotnych i wtórnych funkcji bazowych na rozszerzonych dziedzinach funkcje należy ograniczyć do fragmentów oryginalnych [11.31]. Oczywiście, jeżeli oryginalne funkcje bazowe są typu trójkątnego/daszkowego (np. RWG), czyli są np. związane z krawędzią pomiędzy dwoma elementarnymi segmentami – i dana krawędź leży na granicy dwóch fragmentów – przypisuje się tę krawędź do jednego z tych fragmentów.

Komentarza wymaga teraz zastosowanie metody do przypadków, gdy pobudzenie jest ograniczone do niewielkiego fragmentu analizowanego obiektu. Z taką sytuacją mamy np. do czynienia podczas analizy zagadnień promieniowania. Wtedy wektor V z układu równań (11.42) jest wypełniony w większości zerami i może wystąpić sytuacja, że wektor V_i , stanowiący fragment V , będzie zerowy. Wtedy nie można wygenerować dla danego fragmentu pierwotnej charakterystycznej funkcji bazowej (rozwiązanie (11.44) jest zerowe), nie można także wygenerować dla pozostałych fragmentów wtórnych funkcji bazowych, dla których pobudzeniem byłaby wspomniana pierwotna funkcja bazowa. Rozwiązaniem tego problemu jest zastosowanie, na etapie tworzenia charakterystycznych funkcji bazowych, specjalnych „sztucznych” pobudzeń [11.31]. Podczas rozwiązywania ostatecznego układu równań typu (11.51) powracamy do pobudzeń oryginalnych.

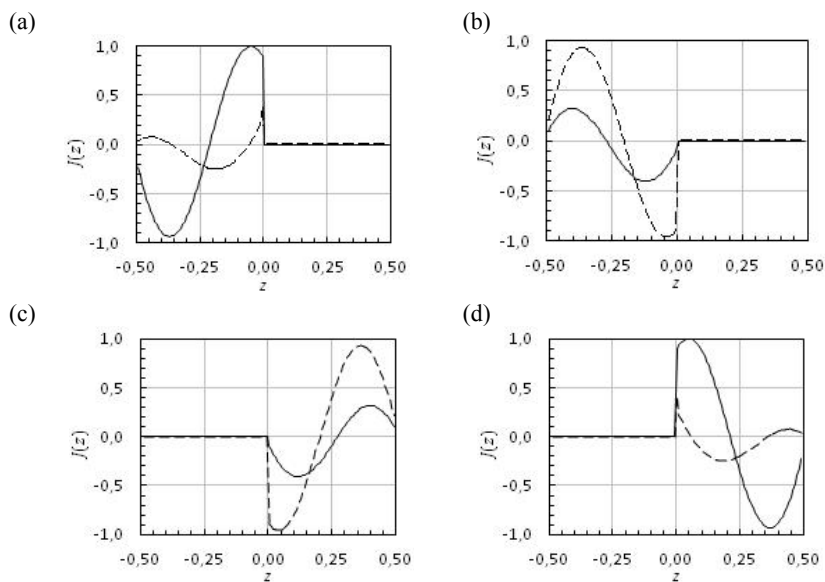
Metodę charakterystycznych funkcji bazowych zilustrowano na prostym przykładzie promieniowania anteny prętowej. Wykorzystano algorytm opisany w rozdziale czwartym. Przeanalizowano anteną prętową o długości $L = 1$ m i promieniu $a = 0,01 L$, pobudzaną centralnie napięciem 1 V. Obliczono prąd płynący przez zaciski anteny w funkcji stałej propagacji $k = 2\pi/\lambda$, pomnożonej przez L . W obliczeniach założono, że pręt jest podzielony na 121 jednakowych segmentów, na których rozpięto 120 trójkątnych funkcji bazowych. Obliczenia przeprowadzono za pomocą klasycznego algorytmu (układ równań ze 120 niewiadomymi) oraz za pomocą charakterystycznych funkcji bazowych, z zastosowaniem podziału pręta na $M = 2, 3$ i 5 fragmentów.

Założono, że – do celów generowania charakterystycznych funkcji bazowych – fragmenty są powiększane o jedną ósmą długości fali dla $k = 10,0$, czyli o 10 elementarnych segmentów. W przypadku $M = 2$ każdy z wektorów V_i , $i = 1, 2$, zawiera niezerowe elementy, nie są więc potrzebne żadne specjalne kroki. Dla $M > 2$ niektóre wektory V_i są zerowe. Jak wspomniano, na etapie generowania charakterystycznych funkcji bazowych stosuje się wtedy sztuczne pobudzenia – w omawianym przykładzie w charakterze takich pobudzeń zastosowano falę płaską padającą prostopadle do pręta, o wektorze pola elektrycznego spolaryzowanym równolegle do anteny i jednostkowej amplitudzie.

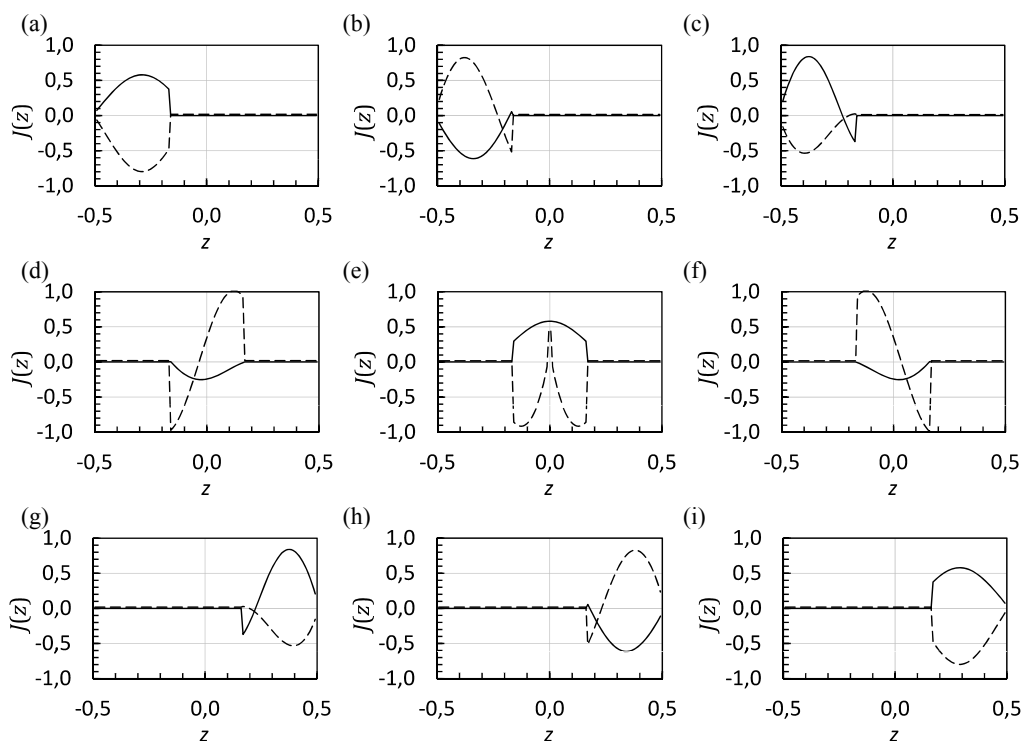
Porównanie uzyskanych wyników obliczeń przedstawiono na rysunku 11.8. Jak widać, rezultaty uzyskiwane za pomocą metody charakterystycznych funkcji bazowych są w tym przypadku nieodróżnialne od wyników uzyskanych metodą tradycyjną.



Rys. 11.8. Prąd płynący przez zaciski zasilanej centralnie źródłem napięciowym 1 V anteny prętowej o długości $L = 1$ m i promieniu $a = 0,01 L$ w funkcji stałej propagacji swobodnej przestrzeni; obliczenia z wykorzystaniem klasycznej metody momentów (MoM) i metody charakterystycznych funkcji bazowych (CBF), o różnej liczbie fragmentów M



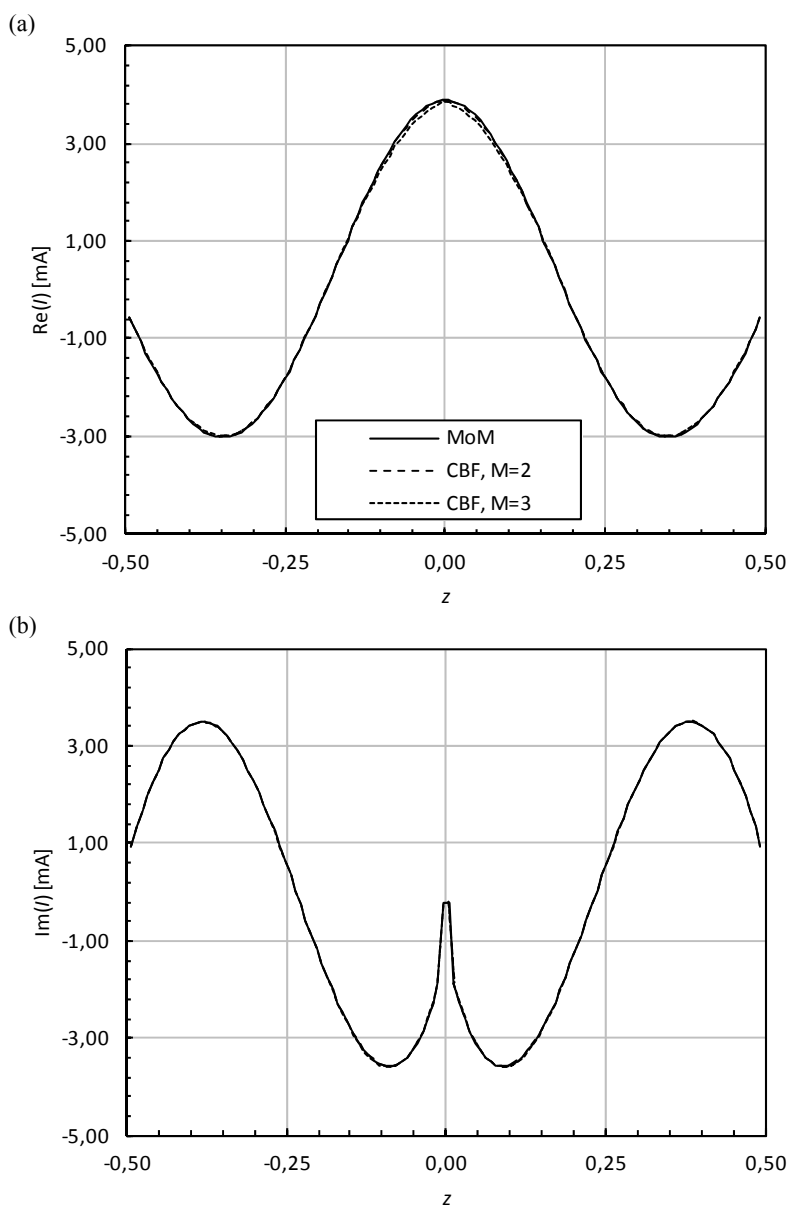
Rys. 11.9. Charakterystyczne funkcje bazowe dla prostoliniowego pręta o długości $L = 1$ m, gdy $k = 10,0$, dla $M = 2$: (a) $J_1^{(1)}$; (b) $J_1^{(2)}$; (c) $J_2^{(1)}$; (d) $J_2^{(2)}$; linia ciągła oznacza część rzeczywistą, linia przerywana – część urojoną



Rys. 11.10. Charakterystyczne funkcje bazowe dla prostoliniowego pręta o długości $L = 1$ m, gdy $k = 10,0$, $M = 3$: (a) $J_1^{(1)}$; (b) $J_1^{(2)}$; (c) $J_1^{(3)}$; (d) $J_2^{(1)}$; (e) $J_2^{(2)}$; (f) $J_2^{(3)}$; (g) $J_3^{(1)}$; (h) $J_3^{(2)}$; (i) $J_3^{(3)}$; linia ciągła oznacza część rzeczywistą, linia przerywana – część urojoną

Warto w tym miejscu zaobserwować, jaki charakter mają charakterystyczne funkcje bazowe wykorzystane w obliczeniach. Na rysunkach 11.9 i 11.10 pokazano unormowane charakterystyczne funkcje bazowe uzyskane odpowiednio dla $M = 2$ i $M = 3$, dla środka pasma z rysunku 11.7, czyli dla $k = 10,0$. Jak sugeruje formuła (11.47), funkcje rozszerzono na całą długość analizowanego przewodu, przyjmując wartość zero poza fragmentem stanowiącym jej właściwą dziedzinę.

Należy zwrócić uwagę na (pierwotną) funkcję $J_2^{(2)}$ dla $M = 3$ (rys. 11.10e), która opisuje zachowanie się prądu w otoczeniu punktu pobudzenia (por. wyniki przedstawione w rozdziale czwartym). Pomimo innego charakteru charakterystycznych funkcji bazowych, zastosowanie obu pokazanych zestawów funkcji prowadzi po rozwiązaniu ostatecznego układu równań typu (11.51) do niemal identycznego całkowitego rozkładu prądu (rys. 11.11).



Rys. 11.11. Wypadkowy rozkład prądu wzdłuż prostoliniowego pręta o długości $L = 1$ m, przy $k = 10,0$, obliczony klasyczną metodą momentów (MoM) oraz z użyciem charakterystycznych funkcji bazowych dla $M = 2$ (CBF, $M = 2$) i $M = 3$ (CBF, $M = 3$):
(a) część rzeczywista; (b) część urojona

11.4. Szerokopasmowe charakterystyczne funkcje bazowe

Charakterystyczne funkcje bazowe są generowane przez sukcesywne rozwiązywanie układów równań liniowych typu (11.44) i (11.45), w których wszystkie wielkości są zależne od częstotliwości/stałej propagacji. Sugeruje to możliwość połączenia metody charakterystycznych funkcji bazowych z omawianą wcześniej techniką AWE [11.32, 11.33].

Algorytm postępowania jest wtedy następujący. Podobnie jak w klasycznej metodzie AWE dokonujemy rozwinięcia elementów oryginalnej macierzy impedancyjnej $\mathbf{Z}$ oraz wektora pobudzeń $\mathbf{V}$ w szeregi Taylora z zadaniem maksymalnym rzędem pochodnej Q , wokół wybranej wartości stałej propagacji k_0 , korzystając z (11.3), (11.4).

Na tej podstawie, stosując schemat AWE opisany formułami (11.6), (11.7), do równań typu (11.44) można uzyskać aproksymacje pierwotnych charakterystycznych funkcji bazowych, traktowanych jako funkcje stałej propagacji k :

$$\mathbf{J}_i^{(i)}(k) \cong \sum_{q=0}^Q \mathbf{J}_{i,q}^{(i)}(k - k_0)^q, \quad (11.52)$$

gdzie

$$\mathbf{J}_{i,0}^{(i)} = (\mathbf{Z}_{ii}^0)^{-1} \mathbf{V}_i^0, \quad (11.53)$$

$$\mathbf{J}_{i,q}^{(i)} = (\mathbf{Z}_{ii}^0)^{-1} \left[\frac{\mathbf{V}_i^q}{q!} - \sum_{p=1}^q \frac{\mathbf{Z}_{ii}^p}{p!} [\mathbf{J}_{i,p-1}^{(i)}] \right], \quad q = 1, \dots, Q \quad (11.54)$$

gdzie $\mathbf{Z}_{ii}^p$ i $\mathbf{V}_i^q$ oznaczają odpowiednio macierz i wektor złożone z pochodnych rzędu odpowiednio p i q , elementów macierzy $\mathbf{Z}_{ii}$ oraz wektora $\mathbf{V}_i$, wziętych dla $k = k_0$.

Następnie tworzy się współczynniki rozwinięć prawych stron (11.45):

$$\mathbf{R}_{i,q}^{(j)} = \sum_{p=1}^q \frac{\mathbf{Z}_{ij}^p}{p!} \mathbf{J}_{j,p}^{(j)}, \quad q = 0, \dots, Q, \quad (11.55)$$

które wykorzystuje się do uzyskania współczynników rozwinięć dla wtórnych funkcji bazowych:

$$\mathbf{J}_{i,0}^{(j)} = (\mathbf{Z}_{ii}^0)^{-1} \mathbf{R}_{i,0}^{(j)}, \quad (11.56)$$

$$\mathbf{J}_{i,q}^{(j)} = (\mathbf{Z}_{ii}^0)^{-1} \left[\frac{\mathbf{R}_{i,q}^{(j)}}{q!} - \sum_{p=1}^q \frac{\mathbf{Z}_{ii}^p}{p!} \mathbf{J}_{i,p-1}^{(j)} \right], \quad q = 1, \dots, Q. \quad (11.57)$$

Oczywiście $\mathbf{Z}_{ii}^p$ w (11.55) oznacza macierz złożoną z pochodnych rzędu p , elementów macierzy $\mathbf{Z}_{ij}$, wziętych dla $k = k_0$, a współczynniki obliczone za pomocą (11.56) i (11.57) stanowią podstawę aproksymacji:

$$\mathbf{J}_i^{(j)}(k) \cong \sum_{q=0}^Q \mathbf{J}_{i,q}^{(j)}(k - k_0)^q.$$

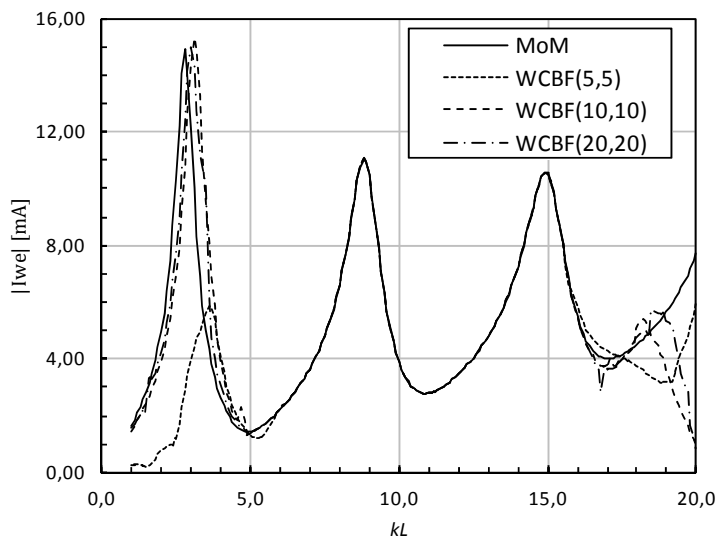
Aproksymacje szeregami Taylora charakterystycznych funkcji bazowych wyrażone przez (11.52) i (11.58) można następnie przekształcić w aproksymacje Padé, wykorzystując algorytm przedstawiony w rozdziale 11.1. Otrzymane aproksymacje nazwano się *szerokopasmowymi charakterystycznymi funkcjami bazowymi* (WCBF – ang. *Wide-band Characteristic Basis Functions*).

Na podstawie obliczeń prowadzonych dla $k = k_0$ otrzymuje się charakterystyczne funkcje bazowe dla pewnego interwału k , w okolicy k_0 , nie musimy zatem powtarzać procedury generowania tych funkcji dla każdej wartości k osobno. Dla każdego k wykonuje się natomiast rozwiązanie końcowego układu równań typu (11.51). Wygenerowanie takiego układu równań wymaga znajomości elementów macierzy impedancyjnej $\mathbf{Z}(k)$ oraz wektora pobudzeń $\mathbf{V}(k)$ dla danej wartości współczynnika propagacji, podczas gdy na etapie tworzenia funkcji charakterystycznych korzystano wyłącznie z elementów $\mathbf{Z}(k_0)$ i $\mathbf{V}(k_0)$. Dysponując jednak współczynnikami rozwinięcia Taylora macierzy impedancyjnej i wektora pobudzeń, można $\mathbf{Z}(k)$ i $\mathbf{V}(k)$ zrekonstruować za pomocą (11.3) i (11.4).

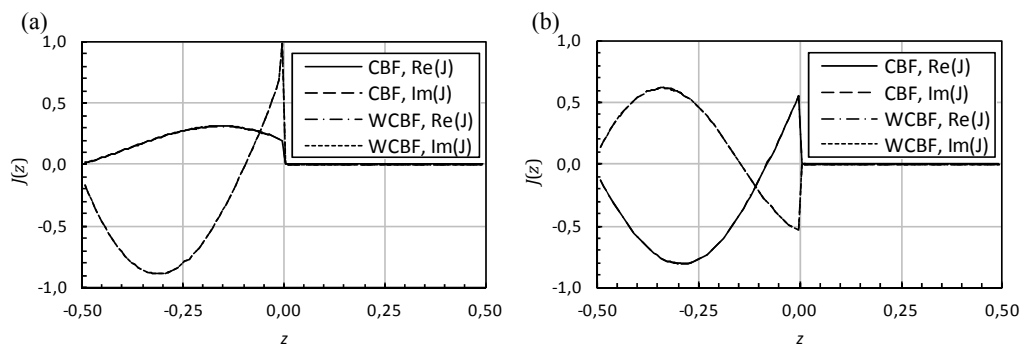
Algorytm generowania szerokopasmowych charakterystycznych funkcji bazowych zilustrowano w pierwszej kolejności na przykładzie z poprzedniego podrozdziału, tzn. analizując promieniowanie zasilanej centralnie anteny prętowej. Na rysunku 11.12 pokazano odpowiednik wykresu z rysunku 11.7, czyli przebiegi w funkcji k prądu na zaciskach anteny o długości $L = 1$ m i promieniu $a = 0,01 L$, zasilanej źródłem napięciowym o napięciu 1 V.

Wykorzystano podział pręta na trzy części (co daje trzy pierwotne i sześć wtórnych charakterystycznych funkcji bazowych – por. rozdział 11.3). Obliczenia przeprowadzono dla $k_0 = 10,0$, z użyciem różnych rzędów aproksymacji Padé. Liczby w nawiasach przy skrócie WCBF oznaczają stopnie licznika i mianownika aproksymacji Padé. Widać, że poprawne wyniki uzyskano dla zakresu k od około 6 do 16. Zwiększanie rzędu aproksymacji nie wpływa znacząco na zakres stosowalności szerokopasmowych funkcji bazowych.

Warto teraz porównać charakterystyczne funkcje bazowe uzyskane dla danej wartości k w sposób klasyczny, przedstawiony w rozdziale 11.3, oraz funkcje zrekonstruowane na podstawie ich szerokopasmowej aproksymacji. Porównania wykonano przy założeniu podziału pręta na dwa fragmenty dla $k = 7,0$ i $k = 13,0$. Aproksymacje Padé uzyskano, przyjmując ponownie $k_0 = 10,0$ oraz stopnie licznika i mianownika

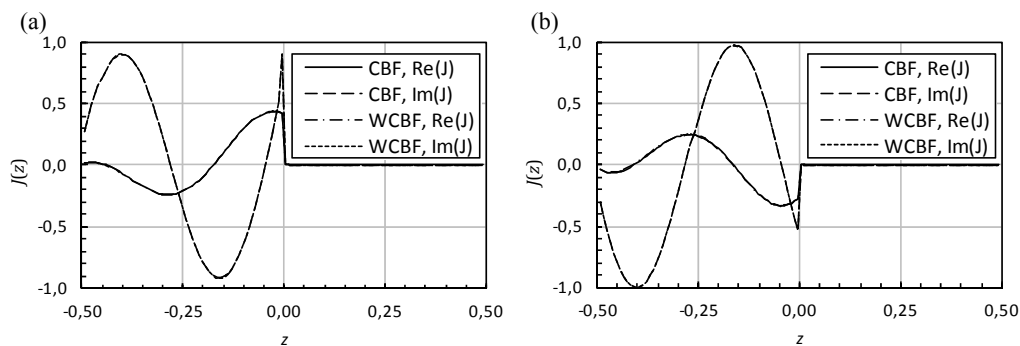


Rys. 11.12. Prąd płynący przez zaciski zasilanej centralnie źródłem napięciowym 1 V anteny prętowej o długości $L = 1$ m i promieniu $a = 0,01 L$ w funkcji stałej propagacji swobodnej przestrzeni; obliczenia z wykorzystaniem klasycznej metody momentów (MoM) i metody szerokopasmowych charakterystycznych funkcji bazowych (WCBF), o różnych rzędach aproksymacji Padé; przy generowaniu funkcji charakterystycznych zastosowano podział pręta na trzy fragmenty

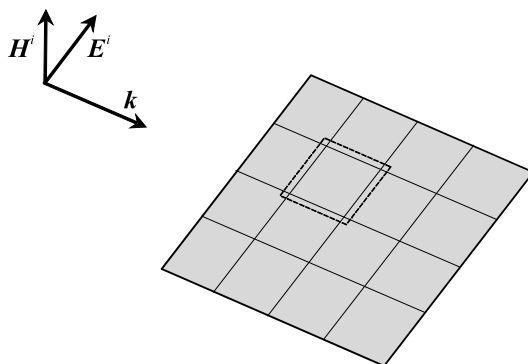


Rys. 11.13. Charakterystyczne funkcje bazowe (CBF) i szerokopasmowe charakterystyczne funkcje bazowe (WCBF), dla prostoliniowego pręta o długości $L = 1$ m, dla $k = 7,0$, $M = 2$: (a) $J_1^{(1)}$; (b) $J_1^{(2)}$; funkcje szerokopasmowe utworzone przy $k_0 = 10,0$

równe 10. Wyniki ilustrują rysunki 11.13 i 11.14. Ze względu na symetrię (por. rys. 11.9) zaprezentowano tylko funkcje $J_1^{(1)}$ i $J_1^{(2)}$. Widać, że w tym przypadku klasyczne charakterystyczne funkcje bazowe i ich rekonstrukcje z rozwinięć szerokopasmowych są identyczne.



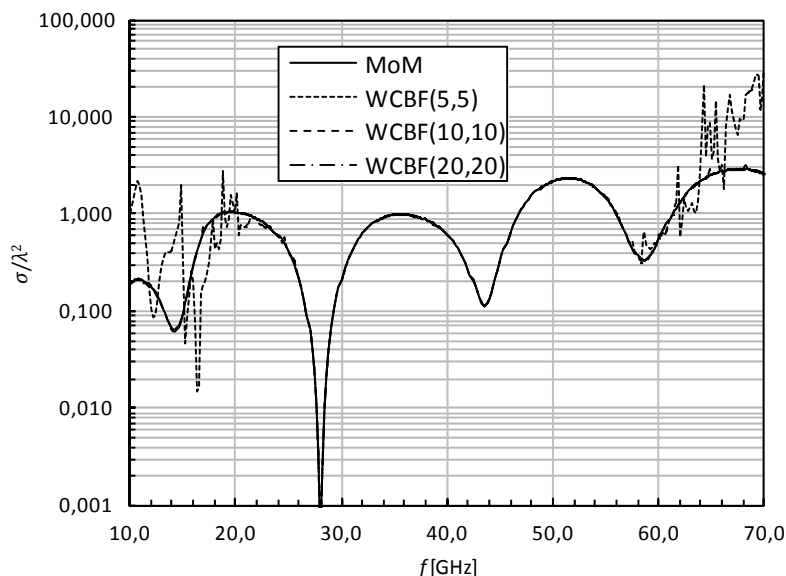
Rys. 11.14. Charakterystyczne funkcje bazowe (CBF) i szerokopasmowe charakterystyczne funkcje bazowe (WCBF) dla prostoliniowego pręta o długości $L = 1$ m, dla $k = 13,0$, $M = 2$; (a) $J_1^{(1)}$; (b) $J_1^{(2)}$; funkcje szerokopasmowe utworzone przy $k_0 = 10,0$



Rys. 11.15. Fala płaska padająca od strony krawędzi na kwadratową płytę wykonaną z idealnego przewodnika; zaznaczono fragmenty stanowiące dziedziny charakterystycznych funkcji bazowych; linia przerywana wskazuje przykładowy fragment o rozszerzonej dziedzinie, nakładającej się na fragmenty sąsiadujące

W kolejnym przykładzie pokazano wykorzystanie techniki szerokopasmowych funkcji bazowych do analizy rozpraszania fal elektromagnetycznych przez metalową płytę o wymiarach 1×1 cm, pokazaną na rysunku 11.15 [11.34].

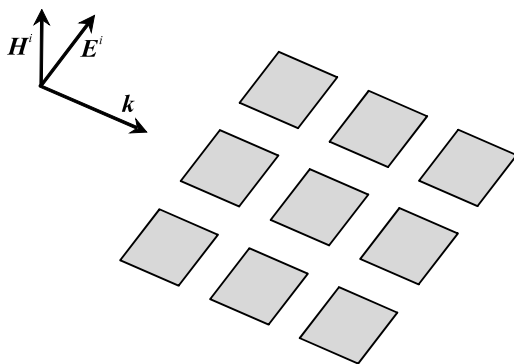
Wielkością obliczaną jest skuteczna powierzchnia odbijająca w funkcji częstotliwości, w zakresie od 10 do 70 GHz. Obliczenia przeprowadzono najpierw klasyczną metodą momentów, dzieląc płytę na 800 elementarnych trójkątów, na których rozpięto 1160 funkcji daszkowych typu RWG. Następnie wykorzystano metodę szerokopasmowych charakterystycznych funkcji bazowych, z punktem rozwinięcia szeregów Taylora odpowiadającym środkowej częstotliwości pasma, czyli 40 GHz. Płytę podzielono na 16 fragmentów, z marginesem wynoszącym jedną ósmą długości fali dla



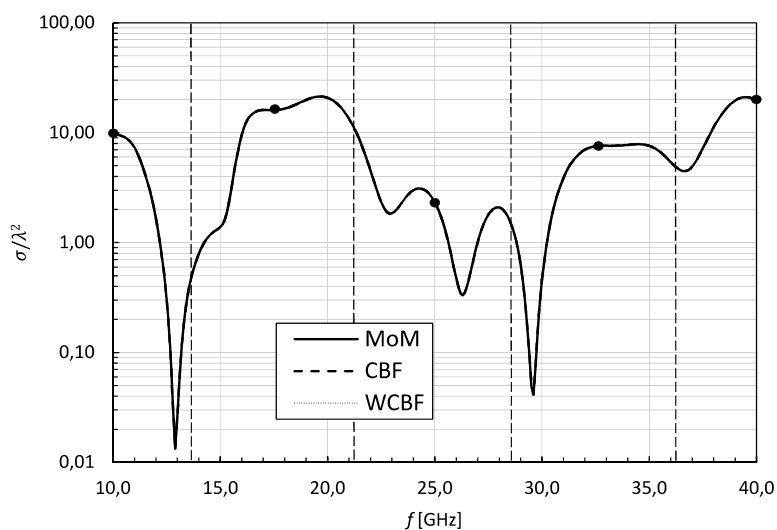
Rys. 11.16. Skuteczna powierzchnia odbijająca metalowej płyty 1×1 cm w funkcji częstotliwości; fala pobudzająca od strony krawędzi; obliczanie klasyczną metodą momentów (MoM) oraz z wykorzystaniem szerokopasmowych charakterystycznych funkcji bazowych o różnych rzędach aproksymacji Padé (WCBF)

częstotliwości środkowej. Oznacza to, że użyto 256 charakterystycznych funkcji bazowych. Wyniki, dla różnych rzędów aproksymacji Padé, pokazano na rysunku 11.16. Jak widać, w aproksymacji oznaczonej jako WCBF(10,10) metoda szerokopasmowych funkcji bazowych daje zadowalające wyniki w całym pasmie analizy, a w aproksymacji WCBF(20,20) wyniki są nieodróżnialne od rozwiązania odniesienia.

W ostatnim przykładzie rozważono przypadek zilustrowany na rysunku 11.17, w którym fala elektromagnetyczna jest rozpraszana przez układ dziewięciu metalowych płytek o wymiarach 1×1 cm każda. Odstępy między płytkami wynoszą 0,5 cm. Obliczano skuteczną powierzchnię odbijającą w funkcji częstotliwości, w zakresie od 10 do 40 GHz. Każda z płytek została podzielona na 450 trójkątów, na których zdefiniowano 645 funkcji RWG. Całkowita liczba funkcji bazowych w modelu wynosiła zatem $9 \times 645 = 5805$. W tym przypadku jako dziedziny charakterystycznych funkcji bazowych przyjęto powierzchnię poszczególnych płytek, wykorzystano zatem 81 funkcji. Rząd aproksymacji Padé został z góry przyjęty jako WCBF(5,5), natomiast obliczenia przeprowadzono, umieszczając najpierw punkty rozwinięcia szeregów Taylora na krańcach rozważanego zakresu częstotliwości, a następnie, iteracyjnie dodając kolejne punkty rozwinięcia w środkach poszczególnych przedziałów, do osiągnięcia zadowalającej zbieżności wyników [11.1]. Za kryterium zbieżności przyjęto zgodność



Rys. 11.17. Fala płaska padająca od strony krawędzi na układ kwadratowych płytek wykonanych z idealnego przewodnika



Rys. 11.18. Skuteczna powierzchnia odbijająca układu dziewięciu metalowych płytek o wymiarach 1×1 cm, oddalonych o 0,5 cm, w funkcji częstotliwości; fala pobudzająca od strony krawędzi; obliczanie klasyczną metodą momentów (MoM), z wykorzystaniem charakterystycznych funkcji bazowych (CBF) i szerokopasmowych charakterystycznych funkcji bazowych (WCBF)

wyników dla środka podprzedziału, uzyskanych z wykorzystaniem sąsiednich punktów rozwinięcia. Wyniki pokazano na rysunku 11.18 – jak widać zgodność wyników jest bardzo dobra. Interesujące jest porównanie czasu obliczeń poszczególnymi metodami. W przypadku obliczeń z użyciem jednego rdzenia procesora Intel® Xeon® X5472 3,0 GHz CPU czas obliczeń dla jednej częstotliwości wynosił około 100,5 s dla klasycznej metody momentów i około 58,5 s dla metody CBF. Dla metody WCBF obliczenia szerokopasmowych charakterystycznych funkcji bazowych dla poje-

dynczego punktu rozwinięcia szeregów Taylora trwały około 863 s, a rozwiązanie problemu z wykorzystaniem obliczonych funkcji zajęło około 8,4 s dla pojedynczej częstotliwości. Oznacza to, że:

- obliczenia z wykorzystaniem charakterystycznych funkcji bazowych powodowały skrócenie czasu obliczeń o około 40%,
- użycie funkcji szerokopasmowych ma w tym przypadku sens, jeżeli wykonuje się obliczenia dla co najmniej 18 częstotliwości w sąsiedztwie pojedynczego punktu rozwinięcia.

Całkowity czas obliczeń wykresów z rysunku 11.18 (301 częstotliwości) wynosił: około 8,4 godziny dla metody klasycznej, 4,9 godziny dla metody CBF i 2,6 godziny dla metody WCBF. W tym ostatnim przypadku, w procesie iteracyjnym, obliczenia dla niektórych częstotliwości były oczywiście wykonywane wielokrotnie.

Zastosowanie dwóch procesorów i ośmiu rdzeni spowodowało znaczące przyspieszenie obliczeń metodą klasyczną (5,1 godziny), natomiast czas obliczeń metodami CBF i WCBF skrócił się nieznacznie (odpowiednio 4,8 i 2,56 godziny). Wynika to z tego, że w przypadku metody klasycznej, znaczącemu przyspieszeniu uległo rozwiązywanie dużego układu równań liniowych – użyta do tego celu biblioteka Intel® MKL wykorzystuje efektywnie całą dostępną moc obliczeniową stacji roboczej. W przypadku pozostałych metod odwracane są stosunkowo niewielkie macierze, przyspieszenie zatem odpowiednich części algorytmów jest nieznaczne.

Literatura

- [11.1] Chew W.C., Michielssen E., Song J.M., Jin J.M., *Fast and efficient algorithms in computational electromagnetic*, Artech House, Boston, London 2001.
- [11.2] Pillage L.T., Rohrer R.A., *Asymptotic waveform evaluation for timing analysis*, IEEE Trans. Comput.-Aided Design, Vol. 9, No. 4, 1990, 352–366.
- [11.3] Chiprout E., Nakhla M.S., *Asymptotic waveform evaluation and moment matching for interconnect analysis*, Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [11.4] Cockrell C.R., Beck F.B., *Asymptotic waveform evaluation (AWE) technique for frequency domain electromagnetic analysis*, NASA technical memorandum 110292, 1996.
- [11.5] Reddy C.J., Deshpande M.D., Cockrell C.R., Beck F.B., *Fast RCS computation over a frequency band using method of moments in conjunction with asymptotic waveform evaluation technique*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 46, No. 8, 1998, 1229–1233.
- [11.6] Bracken J.E., Sun D.-K., Cendes Z.J., *S-domain methods for simultaneous time and frequency characterization of electromagnetic devices*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. 46, No. 9, 1998, 1277–1290.
- [11.7] Newman E.H., *Generation of wide-band data from the method of moments by interpolating the impedance matrix*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 36, No. 12, 1988, 1820–1824.
- [11.8] Karwowski A., Noga A., *Fast MM-PO-based numerical modeling technique for wide-band analysis of antennas near conducting objects*, Electronics Letters, Vol. 43, No. 9, 2007, 486–487.
- [11.9] Kottapalli K., Sarkar T.K., Hua Y., Miller E.K., Burke G.J., *Accurate computation of wide-band response of electromagnetic systems utilizing narrow-band information*, IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, Vol. 39, No. 5, 1997, 837–845.

- [11.10] Adve R.S., Sarkar T.K., Rao S.M., Miller E.K., Pflug D.R., *Application of the Cauchy method for extrapolating/interpolating narrow-band system responses*, IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, Vol. 45, No. 4, 1991, 682–687.
- [11.11] Burke G.J., Miller E.K., Chakrabarti S., Demarest K., *Using model-based parameter estimation to increase the efficiency of computing electromagnetic transfer functions*, IEEE Trans. Magnetics, Vol. 25, No. 4, 1989, 2807–2809.
- [11.12] Kucharski A.A., *Asymptotic waveform evaluation for scattering by inhomogeneous dielectric bodies of revolution*, Microw. Opt. Tech. Lett., Vol. 49, No. 5, 2007, 1028–1031.
- [11.13] Kolbehdari M.A., Srinivasan M., Nakhla M.S., Zhang Q.J., Achar R., *Simultaneous time and frequency domain solutions of EM problems using finite element and CFH techniques*, IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, Vol. 44, No. 9, 1996, 1526–1534.
- [11.14] Peik S.F., Mansour R.R., Chow Y.L., *Multidimensional Cauchy method and adaptive sampling for an accurate microwave circuit modeling*, IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, Vol. 46, No. 12, 1998, 2364–2371.
- [11.15] A. Karwowski, *Generation of wide-band responses of electromagnetic systems from Method-of-Moments simulations*, 22nd International Conference Radioelektronika 2012.
- [11.16] Gustavsen B., Semlyen A., *Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting*, IEEE Trans. Power Delivery, Vol. 14, No. 3, 1999, 1052–1061.
- [11.17] Karwowski A., Wójcik D., *Wide-band evaluation of antennas using adaptive Stoer-Bulirsch algorithm and vector fitting combined with MoM*, Proceedings of the Fourth European Conference Antennas and Propagation (EuCAP), 2010.
- [11.18] Dhaene T., Ureel J., Fache N., De Zutter D., *Adaptive frequency sampling algorithm for fast and accurate S-parameter modeling of general planar structures*, Microwave Symposium Digest, 1995, 1427–1430.
- [11.19] Tham C.Y., McCowen A., Towers M.S., Poljak D., *A dynamic adaptive sampling technique in frequency-domain transient analysis*, IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility, Vol. 44, No. 4, 2002, 522–528.
- [11.20] Karwowski A., *Wide-band analysis of highly resonant wire antennas and scatterers via adaptive sampling*, 15th International Conference on Microwaves, Radar and Wireless Communications, MIKON-2004, Vol. 1, 277–280.
- [11.21] Li M.-K., Chew W.C., Jiang L.J., *A domain decomposition scheme based on equivalence theorem*, Microw. Opt. Tech. Lett., Vol. 48, No. 9, 2006, 1853–1857.
- [11.22] Li M.-K., Chew W.C., *Wave-field interaction with complex structures using equivalence principle algorithm*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 55, No. 1, 2007, 130–138.
- [11.23] Kucharski A.A., *Efficient Solution of Integral-Equation Based Electromagnetic Problems with the Use of Macromodels*, IEEE Trans. on Antennas and Propagation, Vol. 56, No. 5, 2008, 1482–1487.
- [11.24] Zhu Yu, Cangellaris A.C., *Macro-elements for efficient FEM simulation of small geometric features in waveguide components*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. 48, No. 12, 2000, 2254–2260.
- [11.25] Kulas L., Mrozowski M., *Macromodels in the frequency domain analysis of microwave resonators*, IEEE Microw. Wireless Comp. Lett., Vol. 14, No. 3, 2004, 94–96.
- [11.26] Junker G.P., Kishk A.A., Glisson A.W., *Input impedance of an aperture coupled dielectric resonator antenna*, Proc. IEEE Int. Symp. APS, Vol. 2, 1994, 748–751.
- [11.27] Harrington R.F., *Field Computation by Moment Methods*, Macmillan, New York 1968.
- [11.28] Chow K.Y., Leung K.W., Luk K.M., Yung E.K.N., *Input impedance of the slot-fed dielectric resonator antenna with/without a backing cavity*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 49, No. 2, 2001, 307–309.

- [11.29] Kucharski A.A., *Wideband analysis of electromagnetic scattering from partially inhomogeneous dielectric bodies-of-revolution with the use of macromodels*, 3rd European Conference on Antennas and Propagation, EuCAP 2009, 2009, 93–96.
- [11.30] Prakash V.V.S., Mittra R., *Characteristic basis function method: a new technique for efficient solution of method of moments matrix equations*, Microw. Opt. Tech. Lett., Vol. 36, No. 2, 2003, 96–100.
- [11.31] Mittra R., Du K., *Characteristic basis function method for iteration-free solution of large method of moments problems*, Progress in Electromagnetics Research B, Vol. 6, 2008, 307–336.
- [11.32] Yufa S., Yan D., Yong S., *Fast computation of wideband RCS using characteristic basis function method and asymptotic waveform evaluation technique*, Journal of Electronics (China), Vol. 27, No. 4, 2010, 453–457.
- [11.33] Kucharski A.A., *Wideband characteristic basis functions in radiation problems*, Radioengineering, Vol. 21, No. 2, 2012, 590–596.
- [11.34] Reddy C.J., *Application of model based parameter estimation for RCS frequency response calculations using method of moments*, NASA Report no. NASA/CR-1998-206951, 1998.

12. Uwagi końcowe

W niniejszej pracy omówiono kilka metod przydatnych w analizie problemów spotykanych w technice antenowej. Opisane metody bazują na wykorzystaniu równań całkowych, sformułowanych w dziedzinie częstotliwości, rozwiązywanych metodą momentów. W zaprezentowanych przykładach wynikowy układ równań liniowych rozwiązywano metodami bezpośrednimi, opartymi na algorytmie faktoryzacji macierzy LU [12.1]. W tym algorytmie liczba operacji jest proporcjonalna do N^3 (por. np. pozycja [12.2], str. 21), co oznacza się symbolem $O(N^3)$, gdzie N jest liczbą niewiadomych współczynników. W przypadku obiektów, dla których aproksymacja rozkładu źródeł jest opisywana bardzo dużą liczbą niewiadomych, takie podejście staje się nieefektywne, prowadzi bowiem do nieakceptowalnie długich obliczeń. Wykorzystywaną w tym przypadku alternatywą jest zastosowanie metod iteracyjnych rozwiązywania układów równań liniowych [12.2]. Ponieważ wspólną cechą tego typu metod jest powtarzana w każdej iteracji operacja mnożenia macierzy impedancyjnej przez wektor (kolejne przybliżenie rozwiązania), stosuje się metody przyspieszania tego mnożenia. W tym celu analizowany obiekt dzieli się na fragmenty, a macierz impedancyjną na odpowiadające im bloki. Dla bloków pozadiagonalnych, czyli opisujących oddziaływanie pomiędzy różnymi fragmentami struktury, wykonuje się odpowiednią faktoryzację, dzięki której operacja mnożenia tego bloku przez odpowiedni fragment kolejnej iteracji wektora rozwiązań wymaga znacznie mniejszej liczby elementarnych mnożeń, niż bezpośrednie mnożenie macierzy. Faktoryzację można wykonać, odwołując się do właściwości – wykorzystywanej w przedstawionych w pracy algorytmach – funkcji Greena dla nieograniczonego jednorodnego ośrodka (szybka metoda multipolowa, FMM – ang. *Fast Multipole Method* [12.2]) bądź metodą czysto algebraiczną, np. wykorzystując algorytm dekompozycji QR [12.3]. Zastosowanie jednopoziomowych wersji tych algorytmów pozwala zredukować koszt obliczeniowy pojedynczego mnożenia macierzy przez wektor (pojedynczej iteracji) z $O(N^2)$ do $O(N^{1.5})$ [12.2, 12.3], a w przypadku algorytmów wielopoziomowych do $O(N \log N)$ [12.2].

Inne metody zwiększenia efektywności obliczeń dla pojedynczej iteracji to np. zastosowanie technik prowadzących do uzyskania *rzadkiej* (czyli zawierającej dużo elementów zerowych) macierzy impedancyjnej [12.4–12.6], zastosowanie algorytmu szybkiej transformaty Fouriera do obliczania iloczynu macierzy i wektora [12.7, 12.8],

czy metoda dekompozycji macierzy zaproponowana przez Michielsena i Boaga [12.9]. Czytelnik zainteresowany szybkimi metodami rozwiązywania zagadnień elektromagnetyzmu może sięgnąć do przeglądowego – niestety dość już starego – artykułu Chew i współautorów [12.10].

Dla oszacowania pełnej efektywności algorytmu koszt obliczeniowy pojedynczej iteracji musi oczywiście zostać pomnożony przez liczbę tychże iteracji, potrzebną do osiągnięcia rozwiązania o zadanej dokładności. Zmniejszenie liczby iteracji można osiągnąć przez poprawę uwarunkowania równania macierzowego, będącego rezultatem zastosowania metody momentów do danego równania całkowego [12.11].

Problemy z uwarunkowaniem równania macierzowego pojawiają się zwłaszcza przy zastosowaniu powszechnie używanych równań typu EFIE, gdy elementarne segmenty użyte w aproksymacji geometrii badanego obiektu są znacznie mniejsze od długości fali. Z taką sytuacją mamy do czynienia np. w analizie niskoczęstotliwościowej, albo gdy w obiekcie występują fragmenty wymagające bardzo subtelnej dyskretyzacji. Wiele prowadzonych ostatnio prac [12.2, 12.12–12.15] proponuje środki zaradcze dla tego typu sytuacji.

Podjęciem alternatywnym w stosunku do wspomnianych technik szybkiego rozwiązywania układów równań o bardzo dużym N jest proponowane np. w pracach [12.16–12.19] stosowanie funkcji wyższych rzędów do aproksymacji geometrii analizowanych obiektów i/lub do aproksymacji rozkładów źródeł. Tego typu podejście pozwala często osiągnąć dobrą dokładność wyników dla znacznie mniejszej liczby niewiadomych współczynników N , niż przy omawianych w niniejszej pracy aproksymacjach z wykorzystaniem prostoliniowych odcinków przewodów, płaskich łatek trójkątnych, czy też co najwyżej liniowych aproksymacji rozkładu prądu. Odbywa się to oczywiście kosztem skomplikowania algorytmów obliczania poszczególnych elementów macierzy impedancyjnej. Oczywiście jeszcze inną klasę metod przeznaczonych do analizy dużych, w sensie liczby niewiadomych, problemów stanowią – zaprezentowane w rozdziale jedenastym – metody dekompozycji przestrzennej.

Osobną grupę algorytmów stanowią metody wykorzystujące funkcje Greena dla ośrodków innych niż nieskończona jednorodna przestrzeń. W tych algorytmach obecność w problemie pewnych obiektów jest uwzględniana w sposób analityczny. Typowym przykładem takiej sytuacji są tzw. ośrodki uwarstwione (ang. *multilayered media*), spotykane np. w analizie anten mikropaskowych, płytek drukowanych, anten pracujących w obecności tzw. ziemi stratnej, zagadnieniach georadarowych itp. Istotą analizy jest wtedy sformułowanie równania całkowego wyłącznie dla obiektu umieszczonego w takim wielowarstwowym środowisku – np. łaty anteny mikropaskowej, a uwzględnienie faktu, że promieniowanie odbywa się w skomplikowanym ośrodku na etapie obliczania oddziaływań pomiędzy elementami tej łaty, czyli podczas obliczania elementów macierzy impedancyjnej [12.20, 12.21].

Do zmniejszenia liczby niewiadomych w końcowym układzie równań liniowych można też wykorzystywać różnego rodzaju symetrie – przykładem takiego podejścia

są zaprezentowane w pracy algorytmy dla brył obrotowych. Inne możliwe rodzaje to np. wykorzystanie symetrii względem płaszczyzny/płaszczyzn (por. rozdział drugi), struktury periodyczne^{*)} [12.22], bryły o dyskretnej symetrii obrotowej [12.23, 12.24].

Na koniec warto wspomnieć o metodach hybrydowych, łączących metodę momentów z metodami siatkowymi [12.25–12.27], czy technikami przeznaczonymi do analizy przy dużych częstotliwościach [12.28–12.30].

Jak widać z przedstawionego – z konieczności bardzo pobieżnego zestawienia, niniejsza praca obejmuje zaledwie wycinek bardzo obszernej tematyki równań całkowych i metody momentów i dlatego powinna być traktowana jako punkt wyjścia do dalszych szczegółowych studiów.

Literatura

- [12.1] Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J., *Metody numeryczne*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1982.
- [12.2] Chew W.C., Michielssen E., Song J.M., Jin J.M., *Fast and efficient algorithms in computational electromagnetic*, Artech House, Boston, London 2001.
- [12.3] Seo S.M., Lee J.-F., *A single-level low rank IE-QR algorithm for PEC scattering problems using EFIE formulation*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 52, No. 8, 2004, 2141–2146.
- [12.4] Canning F.X., *The impedance matrix localization (IML) method for moment-method calculations*, IEEE Antennas Propagat. Magazine, Vol. 32, No. 5, 1990, 18–30.
- [12.5] Boag A., Mittra R., *Complex multipole beam approach to electromagnetic scattering problems*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 42, No. 3, 1994, 366–372.
- [12.6] Wagner R.L., Chew W.C., *A study of wavelets for the solution of electromagnetic integral equations*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 43, No. 8, 1995, 802–810.
- [12.7] Su C.C., *The three-dimensional algorithm of solving the electric field integral equation using face-centered node points, conjugate gradient method, and FFT*, IEEE Trans. Microwave Theory Techn., Vol. 41, No. 3, 1993, 519–515.
- [12.8] Bleszynski E., Bleszynski M., Jaroszewicz T., *A fast integral-equation solver for electromagnetic scattering problems*, Bleszynski E., Bleszynski M., Jaroszewicz T., *Antennas and Propagation Society International Symposium*, 1994, Vol. 1, 416–419.
- [12.9] Michielssen E., Boag A., *A multilevel matrix decomposition algorithm for analyzing scattering from large structures*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 44, No. 8, 1996, 1086–1093.
- [12.10] Chew W.C., Jin J.-M., Lu C.-C., Michielssen E., Song J.M., *Fast solution methods in electromagnetics*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 45, No. 3, 1997, 533–543.
- [12.11] Wang Y., Lee J., Zhang J., *A short survey on preconditioning techniques for large-scale dense complex linear systems in electromagnetics*, International Journal of Computer Mathematics, Vol. 84, No. 8, 2007, 1211–1223.
- [12.12] Vecchi G., *Loop-star decomposition of basis functions in the discretization of the EFIE*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 47, No. 2, 1999, 339–346.
- [12.13] Adams R.J., *Physical and analytical properties of a stabilized electric field integral equation*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 52, No. 2, 2004, 362–372.

^{*)} Metalowe prostopadłościennne struktury zamknięte można, stosując metodę obrazów, także potraktować jako struktury periodyczne [12.20].

- [12.14] Eibert T.F., *Iterative-solver convergence for loop-star and loop-tree decompositions in method-of-moments solutions of the electric-field integral equation*, IEEE Antennas Propagat. Magazine, Vol. 46, No. 3, 2004, 80–85.
- [12.15] Andriulli F.P., Cools K., Bağcı H., Olyslager F., Buffa A., Christiansen S., Michielssen E., *A multiplicative Calderon preconditioner for the electric field integral equation*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 56, No. 8, 2008, 2398–2412.
- [12.16] Champagne N.J., Williams J.T., Wilton D.R., *The use of curved segments for numerically modeling thin wire antennas and scatterers*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 40, No. 6, 1992, 329–342.
- [12.17] Graglia R.D., Wilton D.R., Peterson A.F., *Higher order interpolatory vector bases for computational electromagnetics*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 45, No. 3, 1997, 682–689.
- [12.18] Brown W.J., Wilton D.R., *Singular basis functions and curvilinear triangles in the solution of the electric field integral equation*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 47, No. 2, 1999, 347–353.
- [12.19] Kolundžija B.M., Djordjević A.R., *Electromagnetic modeling of composite metallic and dielectric structures*, Artech House, 2002.
- [12.20] Michalski K.A., Mosig J.R., *Multilayered media Green's functions in integral equation formulations*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 45, No. 3, 1997, 508–519.
- [12.21] Słobodzian P.M., *Electromagnetic analysis of shielded microwave structures. The surface integral equation approach*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2007.
- [12.22] Mittra R., Chan C.H., Cwik T., *Techniques for analyzing frequency selective surfaces – a review*, Proc. of IEEE, Vol. 76, No. 12, 1988, 1593–1615.
- [12.23] Wilton D.R., Sharpe R.M., *Electromagnetic scattering and radiation by discrete bodies of revolution, Technical Report Number 87-15*, Applied Electromagnetics Laboratory, Department of Electrical Engineering, University of Houston, 1987.
- [12.24] Anastassiou H.T., Volakis J.L., Filipovic D.S., *Integral equation modeling of cylindrically periodic scatterers in the interior of a cylindrical waveguide*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. 46, No. 11, 1998, 1713–1720.
- [12.25] Yuan X., Lynch D.R., Strohbehn J.W., *Coupling of finite element and moment methods for electromagnetic scattering from inhomogeneous objects*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 38, No. 2, 1990, 386–393.
- [12.26] Eibert T.F., Hansen V., *3-D FEM/BEM-hybrid approach based on a general formulation of Huygens' principle for planar layered media*, IEEE Trans. Microwave Theory Techn., Vol. 45, No. 7, 1997, 1105–1112.
- [12.27] Topa T., Karwowski A., *Efficient wideband analysis of electromagnetic problems using the wave adaptive technique with the hybrid MoM-FDTD method*, Microwaves, 17th International Conference on Radar and Wireless Communications, MIKON 2008.
- [12.28] Thiele G.A., Newhouse T.H., *A hybrid technique for combining moment methods with the geometrical theory of diffraction*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 23, No. 1, 1975, 62–69.
- [12.29] Tzoulis A., Eibert T.F., *A hybrid FEI-MLFMM-UTD method for numerical solutions of electromagnetic problems including arbitrarily shaped and electrically large objects*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 53, No. 10, 2005, 3358–3366.
- [12.30] Karwowski A., Noga A., *Fast MM-PO-based numerical modeling technique for wide-band analysis of antennas near conducting objects*, Electronics Letters, Vol. 43, No. 987, 2007, 486–4.

Dodatek 1. Całkowanie funkcji osobliwych

Algorytmy opisane w pracy wymagają w celu obliczania elementów macierzy impedancyjnej, obliczania całek liniowych, powierzchniowych i objętościowych, przy czym źródłem potencjalnych trudności jest to, że w niektórych przypadkach funkcje podcałkowe są osobliwe – ta osobliwość pojawia się w sytuacji, gdy punkt obserwacji – punkt należący do dziedziny całki zewnętrznej w metodzie Galerkinia – wypada w obszarze źródłowym, czyli dziedzinie całki wewnętrznej. Biorąc pod uwagę postać funkcji Greena dla nieograniczonej jednorodnej przestrzeni (2.18), widzimy, że oznacza to pojawienie się dzielenia przez zero w funkcji podcałkowej. Osobliwość funkcji Greena jest rzędu $1/R$, co oznacza, że jest ona całkowalna po powierzchni lub objętości. Wyższy rząd osobliwości pojawia się w wyniku różniczkowania funkcji Greena i taka sytuacja wymaga specjalnego potraktowania [D1.1]. W przypadku sformułowań podanych w pracy taka sytuacja pojawia się w przypadku jądra (5.24) występującego w powierzchniowym równaniu całkowym dla pola magnetycznego, wykazującego osobliwość rzędu $1/R^2$ – ten aspekt został szczegółowo omówiony w rozdziale piątym, tu przypomnijmy tylko stwierdzenie, że gdy fragment powierzchni, którego dotyczy całkowanie, jest płaski, odpowiednia całka (rozumiana w sensie wartości głównej Cauchy’ego) jest tożsamościowo równa zero, nie wymaga więc całkowania numerycznego. Inna sytuacja, w której osobliwość funkcji podcałkowej jest wyższego (niż $1/R$) rzędu, może się pojawić w przypadku zastosowania równania całkowego dla pola elektrycznego. W niektórych sformułowaniach tego typu równań funkcja Greena jest dwukrotnie różniczkowana [D1.1, D1.2], co prowadzi do osobliwości rzędu $1/R^3$. Zwróćmy uwagę, że w metodach opisanych w pracy unikamy takich sytuacji. Dobrym przykładem jest równanie (5.1), a ściślej jego fragment związany z potencjałem skalarnym – w tym przypadku pochodna wewnętrzna (operator dywergencji) oddziałuje na prąd, a pochodną zewnętrzną (gradient) „przenosimy”, podczas obliczania elementów macierzy momentów (5.4) na funkcję testującą (wagową), stosując całkowanie przez części. Oznacza to oczywiście, że stosowane funkcje bazowe i wagowe muszą być różniczkowalne, jednak pojawiające się w funkcjach podcałkowych osobliwości są zawsze rzędu $1/R$.

Typowymi metodami stosowanymi podczas numerycznego całkowania funkcji zawierających osobliwość są [D1.3] metoda eliminacji osobliwości (ang. *singularity cancellation*) oraz metoda wyodrębnienia osobliwości (ang. *singularity subtraction*). Pierwsza z wymienionych metod polega na dokonaniu takiej zamiany zmiennych, aby nowa funkcja podcałkowa nie była osobliwa, a następnie przeprowadzeniu całkowania numerycznego z użyciem wybranej kwadratury. W programach implementujących algorytmy przedstawione w niniejszej pracy wykorzystano drugą ze wspomnianych metod. Polega ona na zapisaniu wyrażenia podcałkowego jako sumy całkowalnej analitycznie funkcji osobliwej i funkcji nieosobliwej, którą całkuje się z wykorzystaniem typowych technik całkowania numerycznego. Technika ta została szczegółowo opisana w artykule D.R. Wiltona i współautorów [D1.4], gdzie podano także formuły bezpośrednio stosowalne do obliczania całek spotykanych w algorytmach wykorzystujących funkcje bazowe RWG lub ich objętościowe odpowiedniki, opisane w rozdziale ósmym. Metodę wyodrębnienia osobliwości zastosowano również w rozdziale czwartym, dotyczącym struktur zbudowanych z cienkich przewodów, dla przypadku tzw. jądra dokładnego.

W dalszej części Dodatku zajęto się całkowaniem osobliwości w obliczaniu elementów macierzy momentów w algorytmach wykorzystujących symetrię obrotową analizowanego obiektu. Mamy wtedy do czynienia z całkami liniowymi po linii tworzącej bryłę L , w przypadku algorytmów wykorzystujących powierzchniowe równania całkowe (por. rozdz. 5.4) oraz całkami powierzchniowymi po powierzchni tworzącej T i liniowymi po linii L generującej kontur bryły oraz liniach Σ opisujących miejsca skokowej zmiany przenikalności elektrycznej wewnątrz obiektu (por. rozdz. 8.4).

We wspomnianym przypadku zastosowania tzw. jądra dokładnego w analizie cienkich przewodów posługuje się w istocie całkowaniem powierzchniowym – analitycznie jest obliczany fragment całki *powierzchniowej* zawierający osobliwość typu $1/R$. Podobna sytuacja zachodzi w przypadku bryły obrotowej – co prawda wynikowe formuły służące do obliczania elementów macierzy momentów zawierają całki liniowe (np. (5.61)–(5.64)), ale jeżeli weźmie się pod uwagę definicję (5.55), można zauważyć, że ostatecznie oblicza się powierzchniowe całki typu:

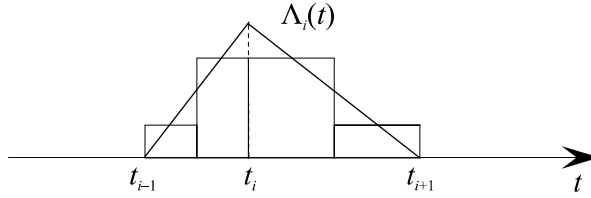
$$IS(t) = \int_L f(t') \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-jkR(t,t',\alpha)}}{R(t,t',\alpha)} e^{-j\rho\alpha} d\alpha dt', \quad (D1.1)$$

gdzie, zgodnie z konwencją przyjętą w rozdziale 5.4 t oznacza punkt obserwacji na linii tworzącej bryłę L o współrzędnych (ρ, z) , a t' punkt źródłowy o współrzędnych (ρ', z') . Funkcja $f(t')$ w (D1.1) odpowiada funkcji bazowej zdefiniowanej na L (trójkątnej lub prostokątnej).

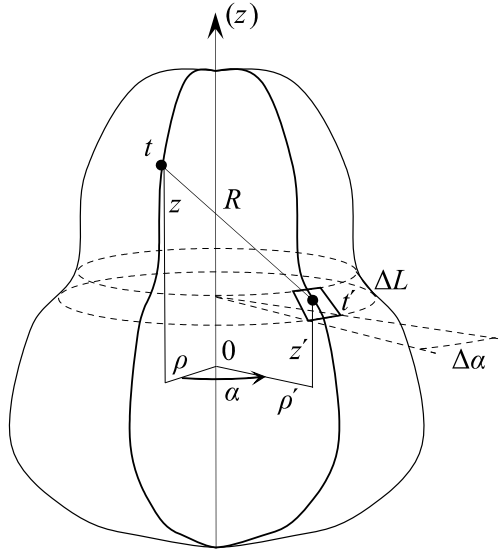
Przyjęto, że w zewnętrznym całkowaniu w (D1.1) wykorzystuje się metodę prostokątów, tj. aproksymuje się $f(t')$ za pomocą przylegających do siebie prostokątnych impulsów – rysunek D1.1 ilustruje taką aproksymację w odniesieniu do trójkątnej funkcji bazowej. Aby obliczyć $IS(t)$, należy więc obliczać elementarne całki:

$$I\Delta L(t) = \int_{\Delta L} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-jkR(t,t',\alpha)}}{R(t,t',\alpha)} e^{-jp\alpha} d\alpha dt', \quad (D1.2)$$

gdzie ΔL – elementarny odcinek stanowiący podstawę prostokąta użytego w aproksymacji funkcji bazowej (na rys. D1.1 są cztery takie odcinki). Numeryczne całkowanie (D1.2) nie nastręcza trudności, z wyjątkiem przypadku, gdy $t \in \Delta L$.



Rys. D1.1. Trójkątna funkcja bazowa zdefiniowana na fragmencie linii tworzącej L bryły obrotowej



Rys. D1.2. Wielkości geometryczne wykorzystane w obliczaniu aproksymacji całki (D1.2); pogrubioną linią wokół punktu t' zaznaczono obszar całkowania

$$\Delta L \times \Delta\alpha$$

Założono, że dziedzinę współrzędnej azymutalnej $(-\pi, \pi)$ dzieli się na N równych segmentów kątowych $\Delta\alpha = 2\pi/N$, co prowadzi do zapisu:

$$I\Delta L(t) = \sum_{n=0}^{N-1} I\Delta L_n(t), \quad (D1.3)$$

gdzie

$$I\Delta L_n(t) = \int_{\Delta L} \int_{\frac{2\pi}{N}(n-\frac{1}{2})}^{\frac{2\pi}{N}(n+\frac{1}{2})} \frac{e^{-jkR(t,t',\alpha)}}{R(t,t',\alpha)} e^{-jp\alpha} d\alpha dt', \quad (D1.4)$$

Funkcję podcałkową w (D1.4) można przybliżyć wartością dla środka dziedziny całkowania, tzn. środka przedziału o numerze n względem współrzędnej α , oraz środka przedziału ΔL względem współrzędnej t' . Prowadzi to do przybliżenia całki (D1.4) wielkością:

$$I\Delta L_n(t) \cong \frac{e^{-jkR(t,t'_s, \frac{2\pi}{N}n)}}{R(t,t'_s, \frac{2\pi n}{N})} e^{-jp\frac{2\pi}{N}\Delta L}, \quad (D1.5)$$

gdzie t'_s – środek przedziału ΔL .

Formuła (D1.5) nie jest słuszna, gdy jednocześnie $t = t'_s$ oraz $n = 0$, wtedy bowiem $R = 0$. Dla takiego przypadku całkę (D1.4) oblicza się, korzystając z metody ekstrakcji osobliwości:

$$\begin{aligned} I\Delta L_0(t = t'_s) &= \int_{\Delta L} \int_{-\frac{\pi}{N}}^{\frac{\pi}{N}} \frac{e^{-jkR}}{R} e^{-jp\alpha} d\alpha dt' \\ &= \int_{\Delta L} \int_{-\frac{\pi}{N}}^{\frac{\pi}{N}} \frac{e^{-jkR} - 1}{R} e^{-jp\alpha} d\alpha dt' + \int_{\Delta L} \int_{-\frac{\pi}{N}}^{\frac{\pi}{N}} \frac{1}{R} e^{-jp\alpha} d\alpha dt', \end{aligned} \quad (D1.6)$$

Pierwsza całka w (D1.6) nie jest osobliwa. Dla małych wartości ΔL i $2\pi/N$, rozwija się e^{-jkR} w szereg Maclaurina i przyjmując $R = 0$, $\alpha = 0$, otrzymuje się:

$$\int_{\Delta L} \int_{-\frac{\pi}{N}}^{\frac{\pi}{N}} \frac{e^{-jkR} - 1}{R} e^{-jp\alpha} d\alpha dt' \cong -jk \frac{2\pi}{N} \Delta L. \quad (D1.7)$$

Drugą całkę w (D1.6) oblicza się, zastępując całkowanie po obszarze wskazanym na rysunku (D1.2) całkowaniem po prostokącie o wymiarach $\Delta L \times 2\pi\rho/N$ oraz ponownie przyjmując $\alpha = 0$ w funkcji eksponencjalnej:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta L} \int_{-\frac{\pi}{N}}^{\frac{\pi}{N}} \frac{1}{R} e^{-jp\alpha} d\alpha dt' &= \frac{1}{\rho} \int_{\Delta L} \int_{-\frac{\pi}{N}}^{\frac{\pi}{N}} \frac{1}{R} \rho d\alpha dt' \\ &\cong \frac{\Delta L}{\rho} \ln \left(\frac{\sqrt{\frac{\Delta L^2}{4} + \left(\frac{\pi\rho}{N}\right)^2} + \frac{\pi\rho}{N}}{\sqrt{\frac{\Delta L^2}{4} + \left(\frac{\pi\rho}{N}\right)^2} - \frac{\pi\rho}{N}} \right) \\ &\quad + \frac{2\pi}{N} \ln \left(\frac{\sqrt{\frac{\Delta L^2}{4} + \left(\frac{\pi\rho}{N}\right)^2} + \frac{\Delta L}{2}}{\sqrt{\frac{\Delta L^2}{4} + \left(\frac{\pi\rho}{N}\right)^2} - \frac{\Delta L}{2}} \right). \end{aligned} \quad (D1.8)$$

Nieco dokładniejszą aproksymację dla $I\Delta L(t)$ podano w pracy Mautza i Harringtona [D1.5].

Podobnie jak w przypadku równań powierzchniowych dla brył obrotowych, postępuje się w przypadku równania objętościowego dla takich brył (rozdział 8.4). W takim przypadku elementarny fragment dziedziny całkowania objętościowego pokazany na rysunku D1.3 aproksymuje się prostopadłościanem i – jeżeli występuje osobliwość – przeprowadza wyodrębnienie problematycznego składnika $1/R$. Oblicza się zatem całki postaci:

$$IV(\rho, z) = \int_T f(\rho', z') \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-jkR(\rho, z, \rho', z', \alpha)}}{R(\rho, z, \rho', z', \alpha)} e^{-jp\alpha} d\alpha d\rho' dz'. \quad (D1.9)$$

Zakładając podział powierzchni tworzącej T na elementarne prostokąty ΔT o wymiarach $\Delta\rho \times \Delta z$ oraz przyjmując, że funkcję $f(\rho', z')$ w obrębie ΔT aproksymuje się stałą wartością, obliczanie (D1.9) można sprowadzić do obliczania elementarnych całek typu:

$$I\Delta T(\rho, z) = \int_{\Delta T} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-jkR(\rho, z, \rho', z', \alpha)}}{R(\rho, z, \rho', z', \alpha)} e^{-jp\alpha} d\alpha d\rho' dz'. \quad (D1.10)$$

Postępując jak poprzednio, to jest dzieląc dziedzinę współrzędnej azymutalnej $(-\pi, \pi)$ na N równych segmentów kątowych $\Delta\alpha = 2\pi/N$, otrzymuje się:

$$I\Delta T(\rho, z) = \sum_{n=0}^{N-1} I\Delta T_n(\rho, z), \quad (D1.11)$$

gdzie

$$I\Delta T_n(\rho, z) = \int_{\Delta T} \int_{-\frac{2\pi}{N}\left(n+\frac{1}{2}\right)}^{\frac{2\pi}{N}\left(n+\frac{1}{2}\right)} \frac{e^{-jkR(\rho, z, \rho', z', \alpha)}}{R(\rho, z, \rho', z', \alpha)} e^{-jp\alpha} d\alpha d\rho' dz'. \quad (D1.12)$$

Funkcję podcałkową w (D1.12) przybliżamy wartością dla środka dziedziny całkowania, tzn. środka przedziału o numerze n względem współrzędnej α , oraz środka prostokąta ΔT w płaszczyźnie T . Prowadzi to do formuły:

$$I\Delta T_n(\rho, z) \cong \frac{e^{-jkR\left(\rho, z, \rho'_s, z'_s, \frac{2\pi}{N}n\right)}}{R\left(\rho, z, \rho'_s, z'_s, \frac{2\pi}{N}n\right)} e^{-jp\frac{2\pi n}{N}} \frac{2\pi}{N} \Delta\rho\Delta z, \quad (D1.13)$$

gdzie współrzędne (ρ'_s, z'_s) wskazują środek prostokąta ΔT .

Podobnie jak uprzednio nie można zastosować (D1.13), gdy punkt obserwacji (ρ, z) jest tożsamy z punktem (ρ'_s, z'_s) i jednocześnie $n = 0$. Wtedy:

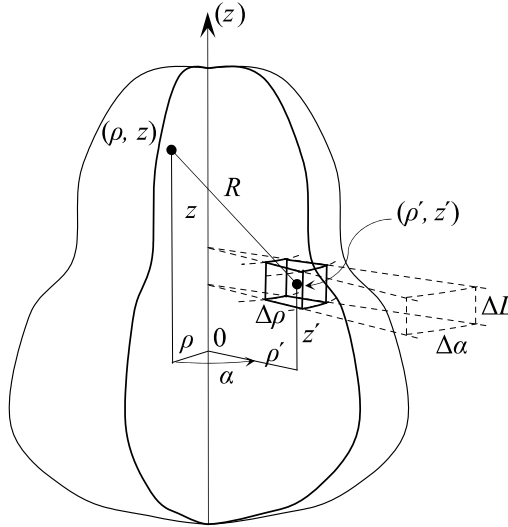
$$\begin{aligned} I\Delta T_0(\rho = \rho'_s, z = z'_s) &= \int_{\Delta L} \int_{-\frac{\pi}{N}}^{\frac{\pi}{N}} \frac{e^{-jkR} - 1}{R} e^{-jp\alpha} d\alpha d\rho' dz' \\ &+ \int_{\Delta L} \int_{-\frac{\pi}{N}}^{\frac{\pi}{N}} \frac{1}{R} e^{-jp\alpha} d\alpha d\rho' dz' \\ &\cong -jk \frac{2\pi}{N} \Delta\rho\Delta z + \frac{1}{\rho} \int_{\Delta L} \int_{-\frac{\pi}{N}}^{\frac{\pi}{N}} \frac{1}{R} \rho d\alpha d\rho' dz'. \end{aligned} \quad (D1.14)$$

W ostatniej całce w (D1.14) dziedzinę całkowania zastępuje się prostopadłościem o wymiarach $\Delta\rho \times \Delta z \times 2\pi\rho/N$, co prowadzi do formuły:

$$\int_{\Delta L} \int_{-\frac{\pi}{N}}^{\frac{\pi}{N}} \frac{1}{R} \rho d\alpha d\rho' dz' \cong 4 \left\{ ab \ln \left(\frac{S+c}{S-c} \right) + ac \ln \left(\frac{S+b}{S-b} \right) + bc \ln \left(\frac{S+a}{S-a} \right) \right. \\ \left. - a^2 \left[\tan^{-1} \left(\frac{bc}{a^2 + c^2 + aS} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{bc}{a^2 + b^2 + aS} \right) \right] \right. \\ \left. - b^2 \left[\tan^{-1} \left(\frac{ac}{b^2 + c^2 + bS} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{ac}{b^2 + a^2 + bS} \right) \right] \right. \\ \left. - c^2 \left[\tan^{-1} \left(\frac{ab}{c^2 + a^2 + cS} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{ab}{c^2 + b^2 + cS} \right) \right] \right\}, \quad (\text{D1.15})$$

gdzie $a = \Delta\rho/2$, $b = \Delta z/2$, $c = \pi\rho/N$, $S = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

W przypadku całek powierzchniowych, które także pojawiają się w sformułowaniu omówionym w rozdziale 8.4, postępujemy analogicznie jak w przypadku całek spotykanych w równaniach powierzchniowych.



Rys. D1.3. Elementarny fragment dziedziny całkowania wykorzystywany przy obliczaniu aproksymacji całek w algorytmie bazującym na równaniach objętościowych dla brył obrotowych

Literatura

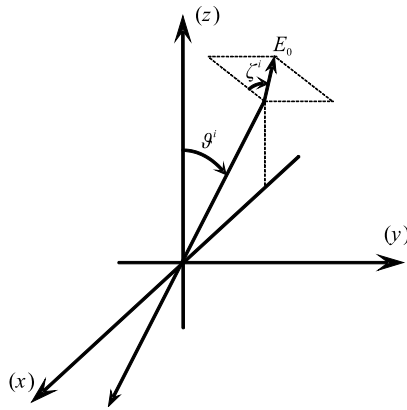
- [D1.1] Wang J.J.H., *Generalized Moment Methods in Electromagnetics*, John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore 1991.
- [D1.2] Kolundžija B.M., Djordjević A.R., *Electromagnetic modeling of composite metallic and dielectric structures*, Artech House, 2002.
- [D1.3] Wilton D.R., *Computational methods*, [w:] P. Sabatier, E.R. Pike (red.), *Scattering*, Academic Press, 2002, 1.5.5, 316–365.
- [D1.4] Wilton D.R., Rao S.M., W. Glisson A., Schaubert D.H., Al-Bundak O.M., Butler C.M., *Potential integrals for uniform and linear source distributions on polygonal and polyhedral domains*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 32, No. 3, 1984, 276–281.
- [D1.5] Mautz J.R., Harrington R.F., *Radiation and scattering from bodies of revolution*, Appl. Sci. Res., Vol. 20, 1969, 405–435.

Dodatek 2. Rozkład fali płaskiej na rodzaje azymutalne

W przypadku analizy zagadnień dotyczących bryły obrotowej, której oś symetrii pokrywa się z osią (z) układu współrzędnych, są przydatne analityczne formuły, opisujące rozkład pola padającego w szereg Fouriera względem współrzędnej azymutalnej [D2.1–D2.3]. Rozpatrzmy płaską falę elektromagnetyczną o amplitudzie E_0 , rozchodzącą się w jednorodnym ośrodku scharakteryzowanym współczynnikiem propagacji k . Bez straty ogólności rozważań, ze względu na symetrię analizowanej bryły, można założyć (por. rys. D.2.1), że wektor $\mathbf{k}$ ($|\mathbf{k}| = k$), wskazujący kierunek propagacji, leży w płaszczyźnie XZ i jest zdefiniowany przez kąt ϑ_i , jaki kierunek padania fali tworzy z osią (z) . Polaryzację fali określa kąt ζ_i , jaki kierunek drgań wektora pola elektrycznego tworzy z płaszczyzną XZ .

Pole elektryczne i magnetyczne tak zdefiniowanej fali w dowolnym punkcie przestrzeni można opisać jako:

$$\mathbf{E}_0^i(x, y, z) = E_0 (\hat{\mathbf{x}} \cos \zeta_i \cos \vartheta_i + \hat{\mathbf{y}} \sin \zeta_i + \hat{\mathbf{z}} \cos \zeta_i \sin \vartheta_i) e^{-jkx \sin \vartheta_i} e^{jkz \cos \vartheta_i}, \quad (\text{D2.1})$$



Rys. D2.1. Parametry geometryczne fali padającej

$$\mathbf{H}_0^i(x, y, z) = \frac{E_0}{\eta} (\hat{x} \sin \zeta_i \cos \vartheta_i - \hat{y} \cos \zeta_i + \hat{z} \sin \zeta_i \sin \vartheta_i) e^{-jkx \sin \vartheta_i} e^{jkz \cos \vartheta_i}. \quad (\text{D2.2})$$

Zapisując (D2.1), (D2.2) w cylindrycznym układzie współrzędnych, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0^i(\rho, z, \phi) = E_0 \Big[& \hat{\rho} (\cos \phi \cos \zeta_i \cos \vartheta_i + \sin \phi \sin \zeta_i) + \hat{z} \cos \zeta_i \sin \vartheta_i \\ & + \hat{\phi} (\cos \phi \sin \zeta_i - \sin \phi \cos \zeta_i \cos \vartheta_i) \Big] e^{-jk\rho \cos \phi \sin \vartheta_i} e^{jkz \cos \vartheta_i}, \end{aligned} \quad (\text{D2.3})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0^i(\rho, z, \phi) = \frac{E_0}{\eta} \Big[& \hat{\rho} (\cos \phi \sin \zeta_i \cos \vartheta_i - \sin \phi \cos \zeta_i) + \hat{z} \sin \zeta_i \sin \vartheta_i \\ & - \hat{\phi} (\sin \phi \sin \zeta_i \cos \vartheta_i - \cos \phi \cos \zeta_i) \Big] e^{-jk\rho \cos \phi \sin \vartheta_i} e^{jkz \cos \vartheta_i}. \end{aligned} \quad (\text{D2.4})$$

Rozłożenie $\mathbf{E}_0^i$ oraz $\mathbf{H}_0^i$ na rodzaje azymutalne wymaga obliczenia współczynników szeregów Fouriera:

$$\mathbf{E}_0^{ip}(\rho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{E}_0^i(\rho, z, \phi) e^{-jp\phi} d\phi, \quad (\text{D2.5})$$

$$\mathbf{H}_0^{ip}(\rho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{H}_0^i(\rho, z, \phi) e^{-jp\phi} d\phi. \quad (\text{D2.6})$$

Biorąc pod uwagę całkową reprezentację funkcji Bessela pierwszego rodzaju [D2.2]:

$$J_n(a) = \frac{j^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ja \cos \phi} e^{-jn\phi} d\phi, \quad (\text{D2.6})$$

można zapisać całki po współrzędnej azymutalnej, pojawiające się w wyniku podstawienia (D2.3) do (D2.5) i (D2.4) do (D2.6), jako:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-jk\rho \cos \phi \sin \vartheta_i} e^{-jp\phi} d\phi = \frac{1}{j^p} J_p(k\rho \sin \vartheta_i), \quad (\text{D2.7})$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \phi e^{-jk\rho \cos \phi \sin \vartheta_i} e^{-jp\phi} d\phi = \frac{1}{j^p} \frac{J_{p+1}(k\rho \sin \vartheta_i) - J_{p-1}(k\rho \sin \vartheta_i)}{2j}, \quad (\text{D2.8})$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \phi e^{-jk\rho \cos \phi \sin \vartheta_i} e^{-jp\phi} d\phi = \frac{1}{j^p} \frac{J_{p+1}(k\rho \sin \vartheta_i) + J_{p-1}(k\rho \sin \vartheta_i)}{2}. \quad (\text{D2.9})$$

Ostatecznie otrzymuje się zatem:

$$\begin{aligned} E_0^{ip}(\rho, z) = \frac{E_0}{j^p} \left[\hat{\rho} \left(\frac{J_{p+1} - J_{p-1}}{2j} \cos \zeta_i \cos \vartheta_i + \frac{J_{p+1} + J_{p-1}}{2} \sin \zeta_i \right) \right. \\ \left. + \hat{\mathbf{z}} J_p \cos \zeta_i \sin \vartheta_i \right. \\ \left. + \hat{\phi} \left(\frac{J_{p+1} - J_{p-1}}{2} \sin \zeta_i - \frac{J_{p+1} + J_{p-1}}{2} \cos \zeta_i \cos \vartheta_i \right) \right] e^{jkz \cos \vartheta_i}, \end{aligned} \quad (\text{D2.10})$$

$$\begin{aligned} H_0^{ip}(\rho, z) = \frac{E_0}{j^p \eta} \left[\hat{\rho} \left(\frac{J_{p+1} - J_{p-1}}{2j} \sin \zeta_i \cos \vartheta_i - \frac{J_{p+1} + J_{p-1}}{2} \cos \zeta_i \right) \right. \\ \left. + \hat{\mathbf{z}} J_p \sin \zeta_i \sin \vartheta_i \right. \\ \left. - \hat{\phi} \left(\frac{J_{p+1} + J_{p-1}}{2} \sin \zeta_i \cos \vartheta_i + \frac{J_{p+1} - J_{p-1}}{2j} \cos \zeta_i \right) \right] e^{jkz \cos \vartheta_i}. \end{aligned} \quad (\text{D2.11})$$

We wzorach (D2.10), (D2.11) wszystkie funkcje Bessela są obliczane dla argumentu $k\rho \sin \vartheta_i$.

Często rozważany jest przypadek, gdy fala pada z kierunku przeciwnego do kierunku osi (z), wtedy $\vartheta_i = 0$, znikają zatem składowe $\hat{\mathbf{z}}$ wektorów pola padającego. Także argument funkcji Bessela jest zerowy. Z właściwości funkcji Bessela wiadomo, że:

$$J_n(0) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}. \quad (\text{D2.12})$$

Można zatem wywnioskować, że jedynie gdy $p = \pm 1$, reprezentacje (D2.10) i (D2.11) będą przyjmować niezerowe wartości. Dla $p = +1$ otrzymuje się:

$$E_0^{ip}(\rho, z) = E_0 \left[\hat{\rho} \left(\frac{1}{2} \cos \zeta_i + \frac{1}{2j} \sin \zeta_i \right) + \hat{\phi} \left(\frac{1}{2} \sin \zeta_i - \frac{1}{2j} \cos \zeta_i \right) \right] e^{jkz}, \quad (\text{D2.13})$$

$$H_0^{ip}(\rho, z) = \frac{E_0}{\eta} \left[\hat{\rho} \left(\frac{1}{2} \sin \zeta_i - \frac{1}{2j} \cos \zeta_i \right) - \hat{\phi} \left(\frac{1}{2} \sin \zeta_i + \frac{1}{2} \cos \zeta_i \right) \right] e^{jkz}, \quad (\text{D2.14})$$

a dla $p = -1$:

$$E_0^{ip}(\rho, z) = E_0 \left[\hat{\rho} \left(\frac{1}{2} \cos \zeta_i - \frac{1}{2j} \sin \zeta_i \right) + \hat{\phi} \left(\frac{1}{2} \sin \zeta_i + \frac{1}{2j} \cos \zeta_i \right) \right] e^{jkz}, \quad (\text{D2.15})$$

$$\mathbf{H}_0^{ip}(\rho, z) = \frac{E_0}{\eta} \left[\hat{\rho} \left(\frac{1}{2} \sin \zeta_i + \frac{1}{2j} \cos \zeta_i \right) + \hat{\phi} \left(\frac{1}{2j} \sin \zeta_i - \frac{1}{2} \cos \zeta_i \right) \right] e^{jkz}. \quad (\text{D2.16})$$

Jeżeli np. przyjmie się, że pole elektryczne jest spolaryzowane w kierunku osi (x), $\zeta_i = 0$ i mamy

$$\mathbf{E}_0^{ip}(\rho, z) = E_0 \left[\hat{\rho} \left(\frac{1}{2} \right) + \hat{\phi} \left(-\frac{1}{2j} \right) \right] e^{jkz}, \quad (\text{D2.17})$$

$$\mathbf{H}_0^{ip}(\rho, z) = \frac{E_0}{\eta} \left[\hat{\rho} \left(-\frac{1}{2j} \right) - \hat{\phi} \left(\frac{1}{2} \right) \right] e^{jkz}, \quad (\text{D2.18})$$

dla $p = +1$, a

$$\mathbf{E}_0^{ip}(\rho, z) = E_0 \left[\hat{\rho} \left(\frac{1}{2} \right) + \hat{\phi} \left(\frac{1}{2j} \right) \right] e^{jkz}, \quad (\text{D2.19})$$

$$\mathbf{H}_0^{ip}(\rho, z) = \frac{E_0}{\eta} \left[\hat{\rho} \left(\frac{1}{2j} \right) - \hat{\phi} \left(\frac{1}{2} \right) \right] e^{jkz}, \quad (\text{D2.20})$$

dla $p = -1$.

Poprawność formuł dla tego szczególnego przypadku łatwo sprawdzić, korzystając wprost z (D2.3), (D2.4) oraz wzorów Eulera.

Literatura

- [D2.1] Andreassen M.G., *Scattering from bodies of revolution*, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 13, No. 2, 303–310, 1965.
- [D2.2] Mautz J.R., Harrington R.F., *Radiation and scattering from bodies of revolution*, Appl. Sci. Res., Vol. 20, 405–435, 1969.
- [D2.3] Kucharski A.A., *Electromagnetic scattering by dielectric bodies*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2001.

W pracy omówiono techniki numerycznej analizy zagadnień promieniowania i rozpraszania fal elektromagnetycznych przez obiekty materialne. Opisane techniki są oparte na sformułowaniu zagadnień w postaci powierzchniowych i/lub objętościowych równań całkowych, rozwiązywanych następnie za pomocą tzw. metody momentów. Przedstawiono analizę obiektów przewodzących, w tym cienkich przewodów, jednorodnych i niejednorodnych obiektów dielektrycznych, apertur, a także obiektów złożonych. Zaprezentowano sposoby przyspieszania obliczeń wykorzystujące metodę przebiegów asymptotycznych oraz techniki dekompozycji przestrzennej.



Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej
są do nabycia w księgarni
plac Grunwaldzki 13, 50-377 Wrocław
budynek D-1 PWr., tel. 71 320 29 35
Prowadzimy sprzedaż wysyłkową
zamawianie.ksiazek@pwr.wroc.pl

ISBN 978-83-7493-728-3