

**INSTYTUT STEROWANIA I TECHNIKI SYSTEMÓW
POLITECHNIKA WROCŁAWSKA**

Raport serii PREPRINTY nr 2/2000

**Analiza i podejmowanie decyzji
w systemie ekspertowym
z hybrydową reprezentacją wiedzy**

(rozprawa doktorska)

Donat ORSKI

Promotor:

Dr hab. inż. Jerzy Józefczyk

WROCŁAW 2000

Spis treści

1. Analiza i podejmowanie decyzji dla systemów z hybrydową reprezentacją wiedzy. Sformułowanie problemów pracy.....	3
1.1 Wstęp	3
1.2 Analiza i podejmowanie decyzji dla systemu z funkcyjną reprezentacją wiedzy	6
1.3 Analiza i podejmowanie decyzji dla systemu z logiczną reprezentacją wiedzy	10
1.4 Problemy analizy i podejmowania decyzji dla systemu z hybrydową reprezentacją wiedzy	15
2. Analiza i podejmowanie decyzji dla podsystemu funkcyjnego z wykorzystaniem wiedzy z podsystemu logicznego	21
2.1 Podsystem funkcyjny z wejściem z podsystemu logicznego	21
2.2 Podsystem funkcyjny z dodatkowym wejściem z podsystemu logicznego	27
3. Analiza i podejmowanie decyzji dla podsystemu logicznego z wykorzystaniem wiedzy z podsystemu funkcyjnego	58
3.1 Podsystem logiczny z wejściem z podsystemu funkcyjnego	58
3.2 Podsystem logiczny z dodatkowym wejściem z podsystemu funkcyjnego	64
3.3 Podsystem logiczny z parametrem wyznaczanym w podsystemie funkcyjnym	72
4. Zastosowanie sieci neuronalnej do podejmowania decyzji w kompleksie operacji z hybrydową reprezentacją wiedzy	81
4.1 Sformułowanie problemu i algorytm rozwiązania.....	81
4.2 Realizacja programowa.....	87
4.3 Badanie procesu uczenia sieci neuronalnej	89
4.4 Badanie efektu uczenia sieci neuronalnej	95
5. Produkcja kompletów foteli przednich do samochodu jako przykład praktyczny systemu z hybrydową reprezentacją wiedzy	100
6. Uwagi końcowe.....	120
Literatura	122

1. Analiza i podejmowanie decyzji dla systemów z hybrydową reprezentacją wiedzy. Sformułowanie problemów pracy

1.1 Wstęp

Metodologiczne i techniczne problemy systemów ekspertowych są intensywnie rozwijane od wielu lat. Obecnie problematyka systemów ekspertowych jest już bardzo obszerna i obejmuje szereg bardziej szczegółowych zagadnień badawczych oraz technicznych. Jako przykłady można wymienić następujące obszary zastosowań: w diagnostyce medycznej [2], [80], [93] i technicznej [44], [58]; w zarządzaniu przedsiębiorstwem [42], [43], [55]; do analizy i wspomagania procesów decyzyjnych w zastosowaniach ekonomicznych (np. do analizy stanu finansowego firmy [38]), finansowych [42], [55], [64] oraz przemysłowych [62], [65], [88]; do celów wojskowych [85], [89]; w przetwarzaniu zdań języka naturalnego [53]; w rolnictwie [60]; w elektroenergetyce [92] i w badaniach naukowych [69]. Rozwój problematyki systemów ekspertowych jest spowodowany rozszerzeniem zastosowań na obszary wymagające nietradycyjnych sposobów modelowania, formułowania oraz rozwiązywania szeroko rozumianych zagadnień analizy i podejmowania decyzji [6], ale również wzrostem technicznych możliwości realizacji konkretnych metod i algorytmów, związanym przede wszystkim z szybkim rozwojem środków informatyki. Istotnym zagadnieniem badawczym jest formułowanie opisów dla obiektów, procesów, zjawisk lub systemów o różnorodnej naturze. Często zachodzi konieczność stosowania formalnych opisów zawierających informacje (wiedzę) o obiekcie, czyli opisów wiedzy w postaci różnych form reprezentacji wiedzy, będących rozszerzeniem modeli tradycyjnych. W konsekwencji, problemy analizy i podejmowania decyzji muszą być formułowane w sposób adekwatny do przyjętej postaci modelu, a metody ich rozwiązania często prowadzą do wyznaczania algorytmów przybliżonych i heurystycznych, które mają charakter algorytmów wnioskowania.

Prace prowadzone w tym zakresie w Zakładzie Systemów Sterowania Instytutu Sterowania i Techniki Systemów Politechniki Wrocławskiej dotyczyły problematyki związanej z systemami opisanymi przy pomocy relacyjnej reprezentacji wiedzy oraz z systemami opisanymi przy pomocy logicznej reprezentacji wiedzy w postaci zestawu formuł logicznych (faktów) zbudowanych przy pomocy operatorów logicznych z formuł elementarnych reprezentujących podstawowe własności wyróżnionych w systemie wielkości charakterystycznych [6]. Do formułowania i rozwiązywania problemów analizy i

podejmowania decyzji dla systemów z logiczną reprezentacją wiedzy zostało w naszym zespole opracowane oryginalne, jednolite podejście zwane metodą logiczno-algebraiczną [6], [10], [14], [22]. Zaproponowano koncepcje wykorzystania metody logiczno-algebraicznej dla systemów relacyjnych [26], do sterowania obiektami statycznymi [6], [16], [17] i obiektami dynamicznymi [6], [23], [24], [36] do formułowania i rozwiązywania problemów rozpoznawania [6], [7], [13] oraz dla wybranych problemów sterowania kompleksami operacji [6], [9], m.in. do sterowania alokacji i szeregowania zadań. Na podstawie podejścia logiczno-algebraicznego opracowane zostały szkieletowe systemy ekspertowe CONTROL-LOG oraz CLASS-LOG do sterowania i rozpoznawania z logiczną reprezentacją wiedzy.

W wielu sytuacjach praktycznych może zachodzić potrzeba stosowania formalnego opisu wiedzy o systemie składającego się z co najmniej dwóch wzajemnie powiązanych części – z wykorzystaniem różnych reprezentacji wiedzy. Możemy wówczas mówić o systemie z hybrydową reprezentacją wiedzy, a dokładniej – o systemie z modelem hybrydowym. Przyczyną wyodrębnienia różnych modeli składowych może być dekompozycja opisu wiedzy o systemie. Nie musi ona znajdować odzwierciedlenia w strukturalnej dekompozycji systemu, tzn. możemy rozpatrywać model pojedynczego obiektu złożony z dwóch wzajemnie powiązanych modeli składowych. Przykładem może być obiekt sterowania opisany zależnością funkcyjną, w której występują zmieniające się, nieznane parametry opisane przy pomocy np. logicznej reprezentacji wiedzy. Dekompozycja modelu wynikająca wprost ze strukturalnych własności systemu złożonego może być nazwana dekompozycją naturalną. Ma ona miejsce, na przykład, w przypadku systemu produkcyjnego z wyodrębnionym podsystemem dostawy (transportu) surowca i podsystemem przetwarzania surowca. Pierwszy z tych podsystemów mógłby być opisany np. za pomocą logicznej reprezentacji wiedzy, a drugi – za pomocą zależności funkcyjnej. Zagadnienia związane z formułowaniem i rozwiązywaniem problemów analizy i podejmowania decyzji dla systemów o modelach hybrydowych były podejmowane i opracowywane dla hybrydowych systemów sterowania [49], w tym dla hybrydowych ekspertowych systemów sterowania [59], [61] [67], [91], a także dla hybrydowych ekspertowych systemów zarządzania [82], doradztwa inwestycyjnego [68], wspomagania diagnostyki medycznej [48] i innych (np. [1], [57]).

Problematyka systemów ekspertowych z hybrydową reprezentacją wiedzy była jak dotąd opracowywana w naszym Instytucie w sposób fragmentaryczny. Nieliczne prace z zakresu złożonych systemów z reprezentacją wiedzy dotyczyły projektowania dwupoziomowego ekspertowego systemu rozpoznawania [83] oraz koncepcji

dwupoziomowego ekspertowego systemu dla wspomagania diagnostyki i terapii dysleksji [84]. Dla dwupoziomowego rozpoznawania z logiczną reprezentacją wiedzy, zarówno na poziomie dolnym jak i górnym rozważano logiczny model wiedzy, co nie prowadzi do hybrydowości w sensie wskazywanym w niniejszej pracy. Poza tym, co wynika ze sformułowania zadania rozpoznawania, rozpatrywano wyłącznie problemy analizy.

W niniejszej pracy przeprowadzono usystematyzowany przegląd podstawowych przypadków sformułowań i rozwiązań problemów analizy i problemów podejmowania decyzji dla klasy systemów o modelu złożonym z dwóch wzajemnie powiązanych modeli składowych, przy czym jeden z modeli ma postać logicznej reprezentacji wiedzy, a drugi dany jest w postaci zależności funkcyjnej. W rezultacie rozpatrywany jest system z hybrydową reprezentacją wiedzy, a komputerowa realizacja algorytmów rozwiązania sformułowanych problemów ma charakter systemu ekspertowego. Takie rozszerzenie, opracowanej już w szerokim zakresie, problematyki systemów ekspertowych z logiczną reprezentacją wiedzy jest uzasadnione nie tylko względami praktycznymi, ale także badawczymi polegającymi na ustaleniu możliwości i ograniczeń w stosowaniu podejścia logiczno-algebraicznego w systemie z hybrydową reprezentacją wiedzy. W związku z tym, podstawowym celem pracy jest **opracowanie podstaw metodologicznych oraz algorytmów rozwiązywania problemów analizy i podejmowania decyzji dla rozpatrywanej klasy ekspertowych systemów z hybrydową tzn. logiczną i funkcyjną reprezentacją wiedzy**. W szczególności opracowano następujące zagadnienia:

1. Sformułowanie różnych problemów analizy i podejmowania decyzji dla rozpatrywanej klasy systemów z hybrydową reprezentacją wiedzy, z uwzględnieniem dopasowania części składowych modelu hybrydowego.
2. Opracowanie metodologicznych podstaw rozwiązywania sformułowanych problemów analizy i podejmowania decyzji z uwzględnieniem możliwości zastosowania metody logiczno-algebraicznej.
3. Zaproponowanie algorytmów przydatnych w komputerowej realizacji systemu ekspertowego.
4. Podanie przykładów obliczeniowych ilustrujących działanie tych algorytmów.
5. Zastosowanie sieci neuronalnej w wybranym przykładzie systemu z hybrydową reprezentacją wiedzy i analiza własności proponowanego podejścia z wykorzystaniem symulacji komputerowej.
6. Przedstawienie przykładu praktycznego ilustrującego możliwość wykorzystania wyników

podstawowych.

Najważniejsze rezultaty pracy są następujące:

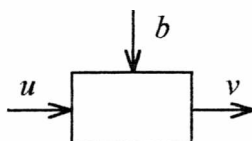
1. Podanie modeli matematycznych oraz przegląd podstawowych przypadków sformułowań problemów analizy i problemów podejmowania decyzji dla rozpatrywanej klasy systemów z hybrydową reprezentacją wiedzy (punkt 1.4).
2. Opracowanie algorytmów rozwiązania sformułowanych problemów i przedstawienie ilustracyjnych przykładów obliczeniowych (punkty 2.1, 2.2, 3.1, 3.2, 3.3).
3. Przeprowadzenie oceny wyników uzyskanych w wyniku zastosowania algorytmów zaproponowanych dla podejścia z dekompozycją (punkty 2.1, 2.2, 3.1, 3.2, 3.3).
4. Opracowanie algorytmu wykorzystującego sieć neuronalną do sterowania rozdziałem zadań w kompleksie operacji równoległych z hybrydową reprezentacją wiedzy (punkt 4.1) oraz programu komputerowego do symulacji procesu uczenia sieci neuronalnej i sterowania (punkt 4.2).
5. Przeprowadzenie badań symulacyjnych w celu oceny neuropodobnego algorytmu sterowania kompleksem operacji z hybrydową reprezentacją wiedzy dla różnych sytuacji wynikających z możliwych wartości parametrów występujących w modelu sieci neuronalnej i wartości parametrów modelu hybrydowego (punkty 4.3, 4.4).
6. Omówienie przykładu praktycznego dotyczącego produkcji kompletów foteli do samochodów (Rozdział 5).

Niektóre z wymienionych rezultatów zostały przedstawione w opracowaniach autora [72], [74], [76].

1.2 Analiza i podejmowanie decyzji dla systemu z funkcyjną reprezentacją wiedzy

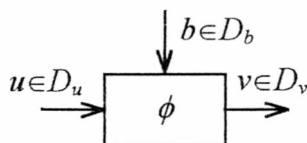
Rozważamy prosty system (Rys. 1.1) z wektorem wejść u , wektorem wyjść v oraz wektorem parametrów (lub dodatkowych wejść) b , $u \in U$, $v \in V$, $b \in B$, który opisany jest za pomocą funkcyjnej reprezentacji wiedzy, tzn. dana jest funkcja $\phi : U \times B \rightarrow V$ taka, że

$$v = \phi(u, b).$$



Rys. 1.1 System funkcyjny.

W modelu tym zakładamy znajomość funkcji ϕ oraz dopuszczamy nieznaną konkretnych wartości wejść, wyjść i parametrów (lub dodatkowych wejść). Zakładamy tylko, że znane są zbiory $D_u \subset U$, $D_v \subset V$, $D_b \subset B$, w których te wartości się mieszczą. Jest to rozszerzenie tradycyjnego modelu funkcyjnego, które może być uzasadnione nie tylko względami praktycznymi, ale przede wszystkim – metodologicznymi, wynikającymi z konieczności rozważania w następnych rozdziałach obiektu z funkcyjną RW jako części złożonego systemu ekspertowego opisanego hybrydową RW. W konsekwencji rozważamy model funkcyjny z własnościami wejściowymi $u \in D_u$, $b \in D_b$ i własnością wyjściową $v \in D_v$.



Rys. 1.2 Model systemu funkcyjnego.

W przypadku systemu z funkcyjną reprezentacją wiedzy (Rys. 1.2) rozróżnienie pomiędzy parametrami b oraz dodatkowymi wejściami b ma charakter umowny i nie ma żadnych konsekwencji metodologicznych. Zachowanie systemu jest opisane zależnością

$$(u \in D_u) \wedge (b \in D_b) \wedge [v = \phi(u, b)] \rightarrow v \in D_v$$

lub

$$(u \in D_u) \wedge (b \in D_b) \rightarrow v \in D_v. \quad (1.1)$$

Zadanie analizy (ZA) formułujemy następująco:

Problem 1.1

Dane: ϕ , $D_u = D_u^*$, $D_b = D_b^*$.

Szukane: D_v^* – najmniejszy zbiór D_v , dla którego spełniona jest implikacja (1.1).

Algorytm rozwiązania Problemu 1.1:

Podstawą rozwiązania ZA może być wzór

$$D_v^* = \{v \in V: \bigvee_{u \in D_u^*} \bigvee_{b \in D_b^*} v = \phi(u, b)\} \quad (1.2)$$

lub po wprowadzeniu relacji

$$u R v = \left\{ (u, v) \in U \times V : \bigvee_{b \in D_b^*} v = \phi(u, b) \right\} \stackrel{\Delta}{=} R(u, v) \quad (1.3)$$

wzór:

$$D_v^* = \left\{ v \in V : \bigvee_{u \in D_u^*} (u, v) \in R \right\}. \quad (1.4)$$

Przykład 1.1: $u = [u_1 \ u_2]^T$, $b = [b_1 \ b_2]$, $v \in \mathbb{R}^1$.

Dane: $\phi(u, b) = b_1 u_1 + b_2 u_2$, $D_u^* = \{u : \underline{u}_1 \leq u_1 \leq \bar{u}_1, \underline{u}_2 \leq u_2 \leq \bar{u}_2\}$,

$$D_b^* = \{b : \underline{b}_1 \leq b_1 \leq \bar{b}_1, \underline{b}_2 \leq b_2 \leq \bar{b}_2\}.$$

Rozwiązanie: $D_v^* = [\underline{v}, \bar{v}]$, gdzie

$$\underline{v} = \min \{ \underline{b}_1 \underline{u}_1, \underline{b}_1 \bar{u}_1, \bar{b}_1 \underline{u}_1, \bar{b}_1 \bar{u}_1 \} + \min \{ \underline{b}_2 \underline{u}_2, \underline{b}_2 \bar{u}_2, \bar{b}_2 \underline{u}_2, \bar{b}_2 \bar{u}_2 \},$$

$$\bar{v} = \max \{ \underline{b}_1 \underline{u}_1, \underline{b}_1 \bar{u}_1, \bar{b}_1 \underline{u}_1, \bar{b}_1 \bar{u}_1 \} + \max \{ \underline{b}_2 \underline{u}_2, \underline{b}_2 \bar{u}_2, \bar{b}_2 \underline{u}_2, \bar{b}_2 \bar{u}_2 \}.$$

Zadanie podejmowania decyzji (ZPD) możemy sformułować następująco:

Problem 1.2

Dane: ϕ , $D_b = D_b^*$, $D_v = D_v^*$.

Szukane: D_u^* – największy zbiór D_u , dla którego spełniona jest implikacja (1.1).

Algorytm rozwiązania Problemu 1.2:

Podstawą rozwiązania ZPD może być wzór

$$D_u^* = \left\{ u \in U : \bigvee_{v \in D_v^*} \bigvee_{b \in D_b^*} v = \phi(u, b) \right\} - \left\{ u \in U : \bigvee_{v \notin D_v^*} \bigvee_{b \in D_b^*} v = \phi(u, b) \right\} \quad (1.5)$$

lub

$$D_u^* = \left\{ u \in U : \bigwedge_{b \in D_b^*} \phi(u, b) \in D_v^* \right\}, \quad (1.6)$$

lub uwzględniając (1.3)

$$D_u^* = \left\{ u \in U : \bigvee_{v \in D_v^*} (u, v) \in R \right\} - \left\{ u \in U : \bigvee_{v \notin D_v^*} (u, v) \in R \right\}. \quad (1.7)$$

Przykład 1.2: $u = [u_1 \ u_2]^T$, $b = [b_1 \ b_2]$, $v \in \mathbb{R}^1$.

Dane: $\phi(u, b) = b_1 u_1 + b_2 u_2$, $D_b^* = \{b: \underline{b}_1 \leq b_1 \leq \bar{b}_1, \underline{b}_2 \leq b_2 \leq \bar{b}_2\}$, $D_v^* = [\underline{v}, \bar{v}]$.

Rozwiązanie: $D_u^* = \{u: \underline{v} \leq \underline{b}_1 u_1 + \underline{b}_2 u_2 \leq \bar{v}, \underline{v} \leq \underline{b}_1 u_1 + \bar{b}_2 u_2 \leq \bar{v},$

$$\underline{v} \leq \bar{b}_1 u_1 + \underline{b}_2 u_2 \leq \bar{v}, \underline{v} \leq \bar{b}_1 u_1 + \bar{b}_2 u_2 \leq \bar{v}\}.$$

W przypadku, gdy ϕ jest funkcją skalarną ograniczoną z dołu możemy sformułować ZPD w następujący sposób:

Problem 1.3

Dane: $\phi, D_b = D_b^*$.

Szukane: wartość u oznaczona jako $u_{\min}$, która minimalizuje wyjście v dla najgorszej sytuacji wynikającej z własności $b \in D_b^*$.

Sformułowanie ZPD w *wersji 1* (sformułowanie Problemu 1.2) nawiązuje do sformułowania zadania sterowania przy zadanym wyjściu, podczas gdy sformułowanie ZPD w *wersji 2* (sformułowanie Problemu 1.3) – do sformułowania zadania sterowania ekstremalnego.

Algorytm rozwiązania Problemu 1.3:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\phi}(u) &= \max_{b \in D_b^*} \phi(u, b), \\ u_{\min} &= \arg \min_u \bar{\phi}(u). \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Przykład 1.3: $u, b, v \in \mathbb{R}^1$.

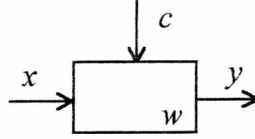
Dane: $\phi(u, b) = (u - b)^2$, $D_b^* = [\underline{b}, \bar{b}]$.

Rozwiązanie:

$$\bar{\phi}(u) = \begin{cases} (u - \underline{b})^2 & u > \frac{\underline{b} + \bar{b}}{2} \\ (u - \bar{b})^2 & u \leq \frac{\underline{b} + \bar{b}}{2} \end{cases},$$
$$u_{\min} = \frac{\underline{b} + \bar{b}}{2}.$$

1.3 Analiza i podejmowanie decyzji dla systemu z logiczną reprezentacją wiedzy

Rozważamy prosty system (Rys. 1.3) z wektorem wejść x , wektorem parametrów c , wektorem wyjść y oraz wektorem wielkości dodatkowo charakteryzujących system w , $x \in X$, $c \in C$, $y \in Y$, $w \in W$ opisany za pomocą logicznej reprezentacji wiedzy.



Rys. 1.3 System logiczny.

Oznacza to, że dany jest ciąg elementarnych formuł logicznych $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ reprezentujących elementarne własności wejść, parametrów, wyjść i wielkości dodatkowych występujących w systemie oraz zestaw (koniunkcja) złożonych formuł logicznych (faktów) $F(\alpha) = F_1(\alpha) \wedge F_2(\alpha) \wedge \dots \wedge F_k(\alpha)$ reprezentujących własności dotyczące zachowania systemu:

$$RW = \langle \alpha, F(\alpha) \rangle.$$

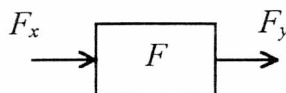
Ciąg formuł elementarnych α tworzą trzy podciągi: $\alpha_x = (\alpha_{x1}, \alpha_{x2}, \dots, \alpha_{xn_1})$, $\alpha_w = (\alpha_{w1}, \alpha_{w2}, \dots, \alpha_{wn_2})$ oraz $\alpha_y = (\alpha_{y1}, \alpha_{y2}, \dots, \alpha_{yn_3})$, gdzie $n_1 + n_2 + n_3 = n$. Formuły wchodzące w skład tych podciągów reprezentują własności dotyczące odpowiednio (x, c) , (x, w, y) oraz (y, c) . Fakty zbudowane są z formuł elementarnych przy użyciu operatorów logicznych: $\vee$ – alternatywy, $\wedge$ – koniunkcji, $\rightarrow$ – implikacji, $\neg$ – negacji. O faktach zakładamy, że są prawdziwe, tzn. $F(a) = 1$, gdzie $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ jest zero-jedynkowym ciągiem wartości logicznych formuł α . Dla potrzeb formułowania i rozwiązywania problemów w oparciu o logiczną RW wprowadza się (Rys. 1.4) własność wejściową $F_x(\alpha_x)$ i własność wyjściową $F_y(\alpha_y)$ – formuły logiczne zbudowane z formuł elementarnych odpowiednio α_x i α_y . Własność F_x oznacza, że $x \in R_x$ (co zapisujemy jako $F_x \leftrightarrow x \in R_x$), gdzie

$$R_x = \{(x, c) \in X \times C: F_x(a_x) = 1\}. \quad (1.9)$$

Dla znanej wartości c F_x oznacza, że $x \in D_x$ ($F_x \leftrightarrow x \in D_x$), gdzie

$$D_x = \{x \in X: F_x(a_x) = 1\}. \quad (1.10)$$

Podobnie rozumiana jest własność F_y .



Rys. 1.4 Model systemu logicznego.

Zachowanie systemu jest opisane zależnością

$$F_x \wedge F \rightarrow F_y. \quad (1.11)$$

Zadanie analizy (ZA) formułujemy następująco:

Problem 1.4

Dane: $F, F_x = F_x^*, \alpha_y$.

Szukane: F_y^* – własność F_y taka, że spełniona jest implikacja (1.11) i najlepsza w tym sensie, że implikująca wszystkie inne F_y spełniające tę implikację.

Algorytm rozwiązania Problemu 1.4:

Stosujemy metodę logiczno-algebraiczną [6], zgodnie z którą rozwiązanie ZA sprowadza się do wyznaczenia rozwiązania w algebrze logiki dwuwartościowej równania algebraicznego

$$F_x^*(a_x) \wedge F(a_x, a_w, a_y) = 1 \quad (1.12)$$

względem a_y . Zbiór wszystkich rozwiązań (1.12) oznaczany S_y^* jako możemy przedstawić w postaci

$$S_y^* = \left\{ a_y : \bigvee_{a_x \in S_x^*} \bigvee_{a_w} F(a_x, a_w, a_y) = 1 \right\},$$

gdzie

$$S_x^* = \left\{ a_x : F_x^*(a_x) = 1 \right\}.$$

Determinuje on poszukiwaną własność F_y^* .

Przykład 1.4 [20]: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10})$, $\alpha_x = (\alpha_5, \alpha_8)$,

$$\alpha_y = (\alpha_9, \alpha_{10}), \alpha_w = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7),$$

$$F_1 = (\alpha_3 \vee \neg \alpha_1) \rightarrow \alpha_4,$$

$$F_2 = (\neg \alpha_1 \wedge \alpha_7) \vee \neg \alpha_3,$$

$$F_3 = (\alpha_9 \wedge \alpha_1) \rightarrow \alpha_2,$$

$$F_4 = (\alpha_4 \wedge \neg \alpha_7) \vee \alpha_5,$$

$$F_5 = \alpha_6 \rightarrow (\alpha_4 \wedge \alpha_8),$$

$$F_6 = \alpha_2 \rightarrow (\neg \alpha_4 \wedge \alpha_6),$$

$$F_7 = (\alpha_3 \wedge \alpha_2) \vee \alpha_{10} ,$$

$$F_x^* = \alpha_5 \wedge \neg \alpha_8 .$$

Rozwiązanie:

Przyjmujemy $\bar{a}_0 = \alpha_y$ i stosując dekompozycję w metodzie logiczno-algebraicznej [6] uzyskujemy

$$\bar{a}_0 = (a_9, a_{10}),$$

$$\bar{F}_1(\bar{a}_0, \bar{a}_1) = F_3(a_1, a_2, a_9) \wedge F_7(a_2, a_3, a_{10}),$$

$$\bar{a}_1 = (a_1, a_2, a_3),$$

$$\bar{F}_2(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = F_1(a_1, a_3, a_4) \wedge F_2(a_1, a_3, a_7) \wedge F_6(a_2, a_4, a_6),$$

$$\bar{a}_2 = (a_4, a_6, a_7),$$

$$\bar{F}_3(\bar{a}_2, \bar{a}_3) = F_4(a_4, a_5, a_7) \wedge F_5(a_4, a_6, a_8),$$

$$\bar{a}_3 = (a_5, a_8),$$

$$\bar{F}_4(\bar{a}_3, \emptyset) = F_x^*(a_5, a_8).$$

$\bar{F}_i$ jest koniunkcją faktów, w skład których wchodzi formuły z ciągu $\bar{a}_{i-1}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Ciąg pozostałych formuł występujących w $\bar{F}_i$ oznaczamy przez $\bar{a}_i$. Przyjmujemy $\bar{S}_4 = \emptyset$ i zgodnie z opracowaną w metodzie logiczno-algebraicznej rekurencyjną procedurą [6]



$$\bar{S}_{i-1} = \{\bar{a}_{i-1} \in S_{i-1} : \bigvee_{\bar{a}_i \in \bar{S}_i} \bar{F}_i(\bar{a}_{i-1}, \bar{a}_i) = 1\}$$

znajdowania rozwiązania, gdzie S_i jest zbiorem wszystkich ciągów $\bar{a}_i$ dostajemy kolejno:

$$\bar{S}_3 = \{ (1, 0) \},$$

$$\bar{S}_2 = \{ (0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1) \},$$

$$\bar{S}_1 = \{ (0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0) \},$$

$$\bar{S}_0 = \{ (0, 1), (1, 1) \} = S_y^*.$$

Zbiór S_y^* jednoznacznie determinuje następującą własność wyjściową:

$$F_y^*(\alpha_y) = (\neg \alpha_9 \wedge \alpha_{10}) \vee (\alpha_9 \wedge \alpha_{10}) = \alpha_{10} .$$

Zadanie podejmowania decyzji (ZPD) formułujemy następująco:

Problem 1.5

Dane: $F, F_y = F_y^*$.

Szukane: F_x^* – własność F_x taka, że spełniona jest implikacja (1.11) i najlepsza w tym sensie, że jest implikowana przez wszystkie inne F_x spełniające tę implikację.

Algorytm rozwiązania Problemu 1.5:

Stosujemy metodę logiczno-algebraiczną, zgodnie z którą rozwiązanie ZPD sprowadza się do wyznaczenia rozwiązań układów równań algebraicznych

$$\left\{ \begin{array}{l} F(a_x, a_w, a_y) = 1 \\ F_y^*(a_y) = 1 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} F(a_x, a_w, a_y) = 1 \\ F_y^*(a_y) = 0 \end{array} \right. \quad (1.13)$$

względem a_x . Zbiór $S_x^* = S_{x1} - S_{x2}$, gdzie S_{x1}, S_{x2} są zbiorami rozwiązań odpowiednio pierwszego i drugiego układu w (1.13), determinuje poszukiwaną własność F_x^* . Tak więc zbiór rozwiązań (1.13) można zdefiniować następująco

$$S_x^* = \left\{ a_x : \bigwedge_{(a_w, a_y) : F(a_x, a_w, a_y) = 1} F_y^*(a_y) = 1 \right\}.$$

Przykład 1.5 [20]: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10})$, $\alpha_x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha_y = (\alpha_9, \alpha_{10})$, fakty jak w Przykładzie 1.4, $F_y^* = \alpha_9 \vee \alpha_{10}$.

Rozwiązanie:

Przyjmujemy $\bar{a}_0 = (\alpha_x, \alpha_y)$ i stosując dekompozycję w metodzie logiczno-algebraicznej uzyskujemy

$$\bar{a}_0 = (a_1, a_2, a_3, a_9, a_{10}),$$

$$\bar{F}_1(\bar{a}_0, \bar{a}_1) = F_1(a_1, a_3, a_4) \wedge F_2(a_1, a_3, a_7) \wedge F_3(a_1, a_2, a_9) \wedge F_6(a_2, a_4, a_6) \wedge F_7(a_2, a_3, a_{10}),$$

$$\bar{a}_1 = (a_4, a_6, a_7),$$

$$\bar{F}_2(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = F_4(a_4, a_5, a_7) \wedge F_5(a_4, a_6, a_8),$$

$$\bar{a}_2 = (a_5, a_8).$$

$\bar{F}_i$ jest koniunkcją faktów, w skład których wchodzi formuły z ciągu $\bar{a}_{i-1}$, $i = 1, 2$. Ciąg pozostałych formuł występujących w $\bar{F}_i$ oznaczamy przez $\bar{a}_i$. Zgodnie z rekurencyjną procedurą znajdowania rozwiązania dostajemy kolejno:

$$\bar{S}_2 = S_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\},$$

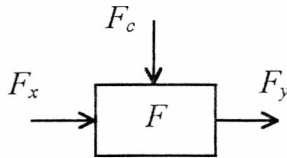
$$\bar{S}_1 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\},$$

$$\bar{S}_0 = \{(0, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0, 1)\}.$$

Stąd $S_{x1} = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)\}$, $S_{x2} = \emptyset$, $S_x^* = S_{x1}$. Zbiór S_x^* jednoznacznie determinuje następującą własność wejściową:

$$\begin{aligned} F_x^* &= (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3) \vee (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3) \vee (\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3) = \\ &= (\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2) \vee (\neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3). \end{aligned}$$

Przyjmowaliśmy dotychczas, że c jest wektorem parametrów występujących w modelu logicznym. W przypadku systemu logicznego, w przeciwieństwie do systemu funkcyjnego, rozróżnienie pomiędzy wektorem parametrów c a wektorem dodatkowych wejść c ma istotne znaczenie. Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy c jest wektorem dodatkowych wejść. Rozważamy wówczas prosty system z wektorem wejść x , wektorem wejść dodatkowych c , wektorem wyjść y oraz wektorem wielkości dodatkowych w , $x \in X$, $c \in C$, $y \in Y$, $w \in W$, a ciąg formuł elementarnych α tworzą cztery podciągi: $\alpha_x = (\alpha_{x1}, \alpha_{x2}, \dots, \alpha_{xn_1})$, $\alpha_c = (\alpha_{c1}, \alpha_{c2}, \dots, \alpha_{cn_2})$, $\alpha_y = (\alpha_{y1}, \alpha_{y2}, \dots, \alpha_{yn_3})$ oraz $\alpha_w = (\alpha_{w1}, \alpha_{w2}, \dots, \alpha_{wn_4})$, gdzie $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$. Formuły wchodzące w skład tych podciągów reprezentują własności dotyczące odpowiednio x , c , y oraz (x, c, w, y) . Jakkolwiek system logiczny można schematycznie przedstawić jak na Rys. 1.3, to jednak w modelu systemu (Rys. 1.5) musi wystąpić dodatkowa własność wejściowa $F_c(\alpha_c)$.



Rys. 1.5 Model systemu logicznego z dodatkowym wejściem.

W literaturze dotyczącej systemów z logiczną RW nie pojawiają się sformułowania ZA i ZPD dla tego typu przypadków. Odpowiednie sformułowania będą podane w dalszej części pracy.

1.4 Problemy analizy i podejmowania decyzji dla systemu z hybrydową reprezentacją wiedzy

W dalszym ciągu przyjmujemy, że system z hybrydową reprezentacją wiedzy (system hybrydowy) składa się z dwóch powiązanych ze sobą części, tzn. z **podsystemu funkcyjnego** i **podsystemu logicznego**. W konsekwencji model systemu hybrydowego składa się z modelu podsystemu funkcyjnego (model funkcyjny) i modelu podsystemu logicznego (model logiczny). Współdziałanie obu podsystemów systemu hybrydowego powoduje, że problemy analizy i podejmowania decyzji muszą być formułowane dla systemu jako całości. Specyfika wzajemnego powiązania części składowych – określająca strukturę systemu – w dużej mierze determinuje sposób formułowania odpowiednich problemów. W związku z tym, dla klarowności prezentacji, usystematyzowano rozpatrywane przypadki klasyfikując je pod względem struktury systemu najpierw do dwóch grup:

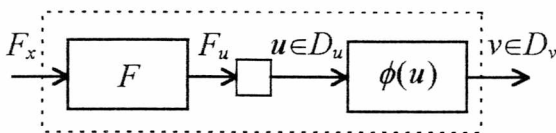
- a) systemy hybrydowe, w których wiedza o systemie jest zawarta w modelu funkcyjnym dotyczącym podsystemu funkcyjnego oraz jest uzupełniana przez wiedzę zawartą w modelu logicznym dotyczącym podsystemu logicznego,
- b) systemy hybrydowe, w których wiedza o systemie jest zawarta w modelu logicznym dotyczącym podsystemu logicznego oraz jest uzupełniana przez wiedzę zawartą w modelu funkcyjnym dotyczącym podsystemu funkcyjnego.

Podziałowi temu odpowiadają wyodrębnione w pracy rozdziały, z których Rozdz.2 poświęcony jest problemom dotyczącym systemów a), a Rozdz.3 – problemom dotyczącym systemów b). Zgodnie z bardziej szczegółowym podziałem Rozdz.2 obejmuje dwa przypadki, a Rozdz.3 trzy przypadki, dla których w tym punkcie podajemy tylko sformułowania zadania analizy i zadania podejmowania decyzji, wskazując przy tym na pojawiające się problemy, natomiast algorytmy rozwiązania wraz z przykładami ilustracyjnymi prezentowane są w p.2.1, p.2.2 oraz w p.3.1, p.3.2 i p.3.3.

W tym punkcie wykorzystujemy oznaczenia wprowadzone w punktach poprzednich.

Przypadek 1

Przypadek ten dotyczy sytuacji, w której wejściem modelu funkcyjnego jest wyjście modelu logicznego, tzn. $u \equiv y$. Wartości parametrów c i b w modelu logicznym i funkcyjnym są znane. Połączenie modelu logicznego i modelu funkcyjnego tworzy prostą strukturę szeregową (Rys. 1.6), a dodatkowy blok realizuje "dopasowanie" modeli składowych.



Rys. 1.6 Model podsystemu funkcyjnego z wejściem z modelu podsystemu logicznego.

Zachowanie systemu jest opisane zależnością

$$F_x \wedge F \wedge [v = \phi(u)] \rightarrow v \in D_v$$

lub po prostu

$$F_x \rightarrow v \in D_v. \quad (1.14)$$

Problem 1.6 (ZA):

Dane: F, ϕ, F_x^* .

Szukane: D_v^* – najmniejszy zbiór D_v , dla którego spełniona jest implikacja (1.14).

Problem 1.7 (ZPD):

Dane: F, ϕ, D_v^* .

Szukane: F_x^* – własność F_x taka, że spełniona jest implikacja (1.14) i najlepsza w sensie jak w sformułowaniu Problemu 1.5.

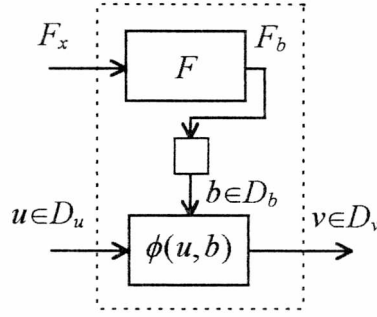
Problemy pojawiające się przy próbie rozwiązania tak sformułowanych zadań można ująć w następujących punktach:

- czy wobec braku jednolitego modelu całego systemu można zastosować, jak wydaje się naturalną, dekompozycję proceduralną,
- jak w podejściu z dekompozycją zrealizować "dopasowanie" modeli logicznego i funkcyjnego (jakkolwiek przejście z własności F_u na $u \in D_u$ zgodnie z (1.10) jest jednoznaczne, to nie ma gotowego przepisu na przejście w kierunku odwrotnym, tj. z $u \in D_u$ na F_u) – dotyczy to ZPD,
- jaka jest relacja pomiędzy rozwiązaniem uzyskanym z zastosowaniem podejścia z dekompozycją a rozwiązaniem, które można by uzyskać stosując podejście bezpośrednie.

Przypadek 2

Przypadek ten dotyczy sytuacji, w której dodatkowym wejściem (lub własnością dotyczącą parametrów) modelu funkcyjnego jest wyjście modelu logicznego, tzn. $b \equiv y$. Wartości parametrów c w modelu logicznym są znane. Połączenie modelu logicznego i modelu

funkcyjnego tworzy prostą strukturę dwupoziomową (Rys. 1.7).



Rys. 1.7 Model podsystemu funkcyjnego z dodatkowym wejściem z modelu podsystemu logicznego.

Zachowanie systemu jest opisane zależnością

$$F_x \wedge (u \in D_u) \rightarrow v \in D_v. \quad (1.15)$$

Problem 1.8 (ZA):

Dane: F, ϕ, F_x^*, D_u^* .

Szukane: D_v^* – najmniejszy zbiór D_v , dla którego spełniona jest implikacja (1.15).

Problem 1.9 (ZPD wersja 1):

Dane: F, ϕ, F_x^*, D_v^* .

Szukane: D_u^* – największy zbiór D_u , dla którego spełniona jest implikacja (1.15).

Problem 1.10 (ZPD wersja 2):

Dane: F, ϕ, F_x^* .

Szukane: wartość u oznaczona jako $u_{\min}$, która minimalizuje wyjście v dla najgorszej sytuacji wynikającej z danej własności F_x^* .

Problem 1.11 (ZPD – rozszerzone sformułowanie Problemu 1.9):

Dane: F, ϕ, D_v^* .

Szukane: F_x^*, D_u^* – własność F_x najlepsza w sensie jak w sformułowaniu Problemu 1.5 i największy zbiór D_u spełniające (1.15).

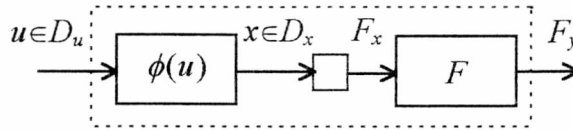
W tym przypadku do problemów, na które wskazano już w związku z Przypadkiem 1, dołączyć należy następujące:

– w problemie minimaksowym, który należy rozwiązać w Problemie 1.10 maksymalizacja (1.8) może nie doprowadzić do uzyskania rozwiązania analitycznego,

– problem istnienia najlepszej pary (D_u^*, F_x^*) będącej poszukiwanym rozwiązaniem rozszerzonego ZPD (Problem 1.11).

Przypadek 3

Przypadek ten dotyczy sytuacji, w której wejściem modelu logicznego jest wyjście modelu funkcyjnego, tzn. $x \equiv v$. Wartości parametrów b i c w modelu funkcyjnym i logicznym są znane. Połączenie modelu funkcyjnego i modelu logicznego tworzy prostą strukturę szeregową (Rys. 1.8).



Rys. 1.8 Model podsystemu logicznego z wejściem z modelu podsystemu funkcyjnego.

Zachowanie systemu jest opisane zależnością

$$u \in D_u \rightarrow F_y. \quad (1.16)$$

Problem 1.12 (ZA):

Dane: ϕ, F, D_u^* .

Szukane: F_y^* – własność F_y taka, że spełniona jest implikacja (1.16) i najlepsza w sensie jak w sformułowaniu Problemu 1.4.

Problem 1.13 (ZPD):

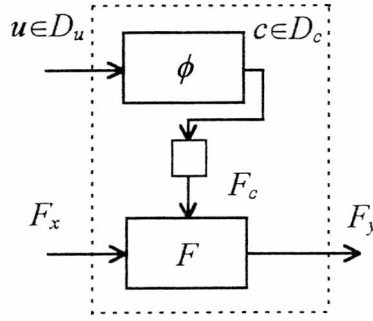
Dane: ϕ, F, F_y^* .

Szukane: D_u^* – największy zbiór D_u , dla którego spełniona jest implikacja (1.16).

W tym przypadku problem "dopasowania" pojawia się w ZA, inne problemy jak dla Przypadku 1.

Przypadek 4

Przypadek ten dotyczy sytuacji, w której dodatkowym wejściem modelu logicznego jest wyjście modelu funkcyjnego, tzn. $c \equiv v$. Wartości parametrów b w modelu funkcyjnym są znane. Połączenie modelu funkcyjnego i modelu logicznego tworzy prostą strukturę dwupoziomową (Rys. 1.9).



Rys. 1.9 Model podsystemu logicznego z dodatkowym wejściem z modelu podsystemu funkcyjnego.

Zachowanie systemu jest opisane zależnością

$$(u \in D_u) \wedge F_x \rightarrow F_y. \quad (1.17)$$

Problem 1.14 (ZA):

Dane: ϕ, F, D_u^*, F_x^* .

Szukane: F_y^* – własność F_y taka, że spełniona jest implikacja (1.17) i najlepsza w sensie jak w sformułowaniu Problemu 1.4.

Problem 1.15 (ZPD):

Dane: ϕ, F, D_u^*, F_y^* .

Szukane: F_x^* – własność F_x taka, że spełniona jest implikacja (1.17) i najlepsza w sensie jak w sformułowaniu Problemu 1.5.

Problem 1.16 (ZPD – rozszerzone):

Dane: ϕ, F, F_y^* .

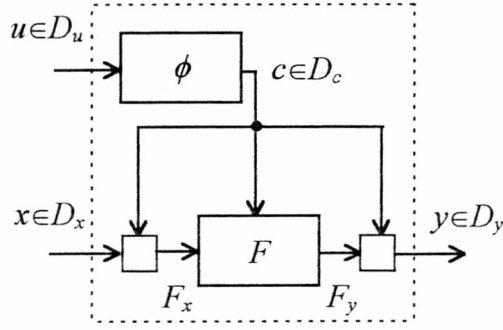
Szukane: D_u^*, F_x^* – największy zbiór D_u i własność F_x najlepsza w sensie jak w sformułowaniu Problemu 1.5 spełniające (1.17).

Analogicznie jak w Przypadku 2 pojawia się problem istnienia rozwiązania rozszerzonego ZPD.

Przypadek 5

Przypadek ten dotyczy sytuacji, w której własność dotycząca parametrów w modelu logicznym jest wyjściem modelu funkcyjnego, tzn. $c \equiv v$. Wartości parametrów b w modelu funkcyjnym są znane. Połączenie modelu funkcyjnego i modelu logicznego tworzy prostą strukturę

dwupoziomową (Rys. 1.10).



Rys. 1.10 Model podsystemu logicznego z parametrem wyznaczanym z modelu podsystemu funkcyjnego.

Zachowanie systemu jest opisane zależnością

$$(u \in D_u) \wedge (x \in D_x) \rightarrow (y \in D_y). \quad (1.18)$$

Problem 1.17 (ZA):

Dane: ϕ, F, D_u^*, D_x^* .

Szukane: D_y^* – najmniejszy zbiór D_y , dla którego spełniona jest implikacja (1.18).

Problem 1.18 (ZPD):

Dane: ϕ, F, D_u^*, D_y^* .

Szukane: D_x^* – największy zbiór D_x , dla którego spełniona jest implikacja (1.18).

Problem 1.19 (ZPD – rozszerzone):

Dane: ϕ, F, D_y^* .

Szukane: D_u^*, D_x^* – największe zbiory D_u, D_x spełniające (1.18).

Podobnie jak w Przypadku 2 i Przypadku 4 pojawia się problem istnienia rozwiązania rozszerzonego ZPD.

2. Analiza i podejmowanie decyzji dla podsystemu funkcyjnego z wykorzystaniem wiedzy z podsystemu logicznego

W rozdziale tym prezentowane są algorytmy rozwiązywania zadań sformułowanych w p.1.4, od Problemu 1.6 do Problemu 1.11. Algorytmy zostały opracowane dla podejścia z dekompozycją, zgodnie z którym rozwiązanie zadania sformułowanego dla całego systemu sprowadza się do sformułowania i rozwiązania odpowiednich zadań oddzielnie dla obu podsystemów. Podano algorytm "dopasowania" dla ZPD oraz dokonano oceny wyników uzyskanych z zastosowaniem dekompozycji.

2.1 Podsystem funkcyjny z wejściem z podsystemu logicznego

Algorytm rozwiązywania Problemu 1.6 (ZA):

1. Rozwiązujemy ZA dla podsystemu logicznego, tzn. dla faktów F i własności F_x^* rozwiązujemy (1.12) z a_u w miejsce a_y . Stosujemy metodę logiczno-algebraiczną i otrzymujemy F_u^* .
2. Wyznaczona własność F_u^* determinuje, zgodnie z (1.10), zbiór D_u^* .
3. Rozwiązujemy ZA dla podsystemu funkcyjnego: dla D_u^* wyznaczamy D_v^* zgodnie z (1.2) lub (1.4).

Nie występuje tu problem dopasowania.

Algorytm rozwiązywania Problemu 1.7 (ZPD):

1. Rozwiązujemy ZPD dla podsystemu funkcyjnego: dla D_v^* wyznaczamy D_u^* zgodnie z (1.5), (1.6) lub (1.7).
2. Zbiór D_u^* nie determinuje własności F_u^* , trzeba więc zbudować własność najlepiej do D_u^* "dopasowaną".

Problem dopasowania (ZPD-dopasowania)

Dane: D_u^* , α_u .

Szukane: $\tilde{F}_u$ – własność F_u taka, że $\tilde{D}_u$ (1.10) jest największym zbiorem zawierającym się w D_u^* .

Dowolną własność, więc także najlepiej "dopasowaną" $\tilde{F}_u$, można jednoznacznie przedstawić za pomocą alternatywy tzw. "składników jedyńki", czyli formuł postaci

$$\begin{aligned}\bar{F}_{um} &= \bar{\alpha}_{u1} \wedge \bar{\alpha}_{u2} \wedge \dots \wedge \bar{\alpha}_{un_3}, \\ m &= 1, 2, \dots, 2^{n_3},\end{aligned}\tag{2.1}$$

gdzie dla konkretnego m $\bar{\alpha}_{up}$ ($p = 1, 2, \dots, n_3$) oznacza α_{up} (formułę elementarną w afirmacji) albo oznacza $\neg\alpha_{up}$ (formułę elementarną w negacji).

Oznaczmy przez M_{ZPD} zbiór "składników jedyńki", których alternatywą jest własność "najlepiej" dopasowana $\tilde{F}_u$, czyli $\tilde{F}_u = \bigvee_{m \in M_{ZPD}} \bar{F}_{um}$. Regułę, według której należy te składniki wybrać określa następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.1

$$M_{ZPD} = \left\{ m \in \overline{1, 2^{n_3}} : \bar{D}_{um} \subseteq D_u^* \right\},\tag{2.2}$$

gdzie $\bar{D}_{um}$ wyznaczamy z (1.10) dla $\bar{F}_{um}$.

Dowód:

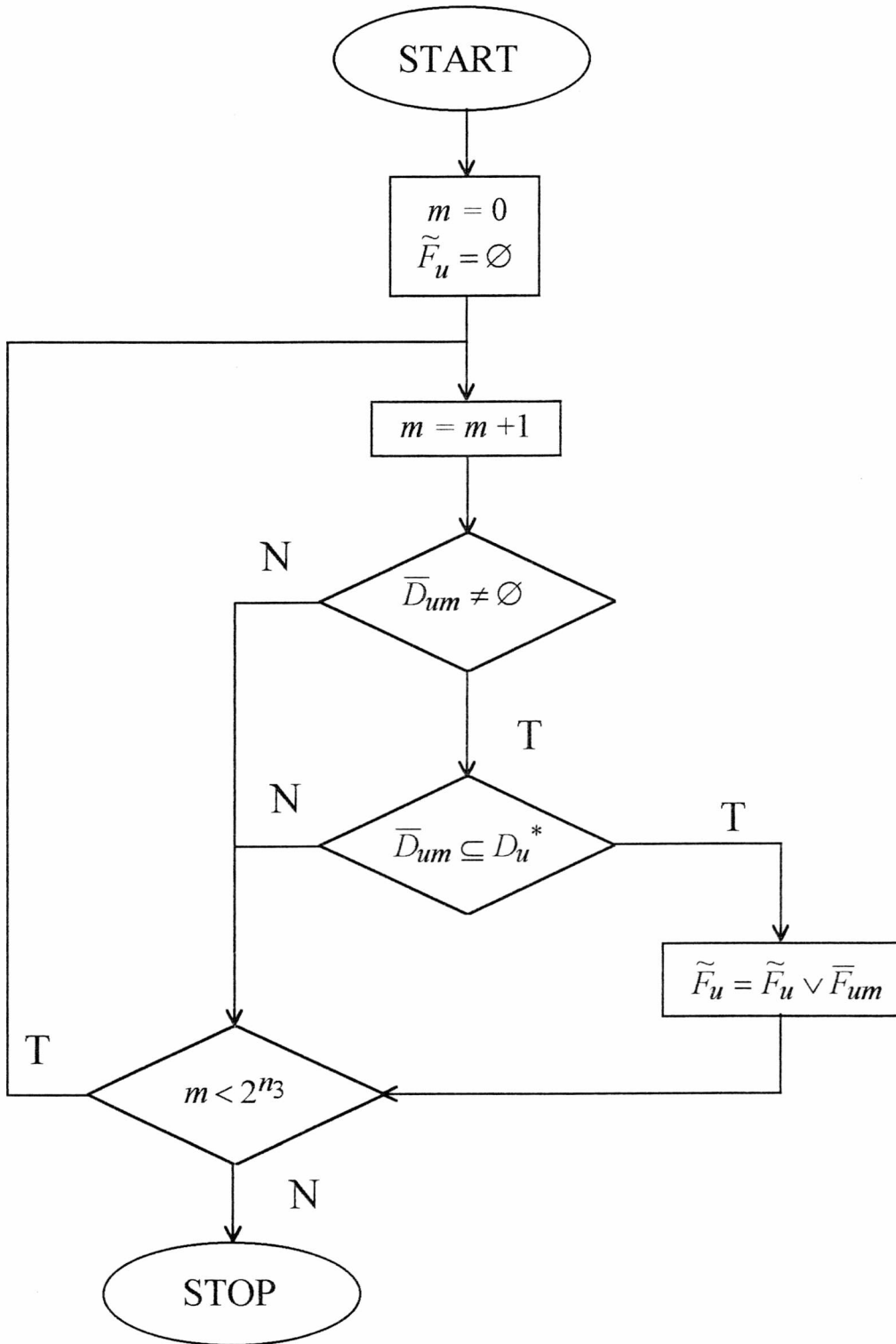
Najpierw zauważmy, że $\bigcup_{m \in M_{ZPD}} \bar{D}_{um} = \tilde{D}_u \subseteq D_u^*$. Zatem spełniony jest warunek ze

sformułowania problemu dopasowania dotyczący zawierania się odpowiednich zbiorów. Dalej przeprowadzamy dowód nie wprost. Załóżmy, że istnieje $\hat{m} \notin M_{ZPD}$ takie, że

$\hat{F}_u = \bigvee_{m \in M_{ZPD} \cup \{\hat{m}\}} \bar{F}_{um}$ jest własnością "lepiej" dopasowaną do D_u^* . Oznacza to, że $\tilde{D}_u \subseteq$

$\tilde{D}_u \cup \bar{D}_{u\hat{m}} \subseteq D_u^*$. Wynika stąd, że $\bar{D}_{u\hat{m}} \subseteq D_u^*$, więc zgodnie z (2.2) $\hat{m} \in M_{ZPD}$, co stoi w

sprzeczności z założeniem. □



Rys. 2.1 Schemat blokowy algorytmu ZPD-dopasowania.

3. Rozwiązujemy ZPD dla podsystemu logicznego: dla faktów F i własności $\tilde{F}_u$ rozwiązujemy (1.13) z a_u w miejsce a_y . Stosujemy metodę logiczno-algebraiczną otrzymując $\tilde{F}_x$.

O ważnej własności uzyskanego rozwiązania mówi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.2

Jeśli F_x^* oznacza poszukiwane "najlepsze" rozwiązanie, a $\tilde{F}_x$ rozwiązanie uzyskane z zastosowaniem podejścia z dekompozycją, to

$$F_x^* = \tilde{F}_x.$$

Dowód:

Przeprowadzamy dowód nie wprost. Przyjmijmy $F_x^* = \bigvee_{m \in M_x^*} \bar{F}_{xm}$, $\tilde{F}_x = \bigvee_{m \in \tilde{M}_x} \bar{F}_{xm}$ i

załóżmy, że $F_x^* \neq \tilde{F}_x$. Z definicji "najlepszego" rozwiązania mamy $\tilde{F}_x \rightarrow F_x^*$ ($\tilde{M}_x \subseteq M_x^*$). Dla podsystemu logicznego i własności wejściowej $\tilde{F}_x$ rozwiązaniem ZA jest własność wyjściowa $\tilde{F}_u$, a dla własności wejściowej F_x^* rozwiązaniem ZA jest własność wyjściowa F_u^* . Łatwo pokazać, że $\tilde{F}_u \rightarrow F_u^*$, czyli $\tilde{M}_u \subseteq M_u^*$. Z Tw.2.1 wynika, że musi zachodzić $M_u^* \subseteq M_{ZPD} = \tilde{M}_u$. Stąd $M_u^* = \tilde{M}_u$ oraz $F_u^* = \tilde{F}_u$. Oznacza to, że $F_x^* = \tilde{F}_x$, co prowadzi do sprzeczności z przyjętym założeniem. $\square$

Przykład 2.1: $u \in \mathbb{R}^s$, $v \in \mathbb{R}^l$.

Podsystem logiczny opisany jest zestawem faktów:

$$F_1 = (\alpha_1 \rightarrow \neg\alpha_{10}) \wedge (\alpha_2 \vee \alpha_9),$$

$$F_2 = (\alpha_6 \vee \alpha_2) \rightarrow (\neg\alpha_9 \wedge \alpha_{10}),$$

$$F_3 = (\alpha_2 \rightarrow \alpha_3) \wedge (\alpha_9 \rightarrow \alpha_{10}),$$

$$F_4 = \alpha_7 \rightarrow (\alpha_3 \vee \neg\alpha_8),$$

$$F_5 = (\neg\alpha_1 \vee \alpha_2) \wedge (\neg\alpha_8 \vee \alpha_9),$$

$$F_6 = \neg\alpha_3 \vee (\alpha_9 \rightarrow \alpha_8),$$

$$F_7 = (\alpha_4 \vee \alpha_5) \rightarrow \alpha_7,$$

$$F_8 = (\alpha_6 \wedge \alpha_7) \rightarrow \alpha_5,$$

gdzie $\alpha_x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha_u = (\alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10})$ oraz $\alpha_8 = "u^T u \leq c_1^2"$, $\alpha_9 = "u^T u \leq c_2^2"$,

$\alpha_{10} = "u^T u \leq c_3^2"$, $c_1 \leq c_2 \leq c_3$.

Podsystem funkcyjny opisany jest zależnością:

$$v = Bu ,$$

gdzie $B = [b_{ij}]$ jest macierzą o nieujemnych elementach i o rozmiarze $l \times s$, tzn. $i=1, 2, \dots, l$, $j=1, 2, \dots, s$.

Zbiór D_v^* definiowany jest zestawem nierówności

$$\underline{v}_i \leq v_i \leq \bar{v}_i \quad , \quad i=1, 2, \dots, l.$$

Rozwiązanie:

1. W pierwszym kroku rozwiązania z (1.5), (1.6) lub (1.7) uzyskujemy zbiór D_u^* dany zestawem nierówności

$$\underline{v}_i \leq b_i u \leq \bar{v}_i \quad , \quad i=1, 2, \dots, l.$$

2. W drugim kroku rozważamy 2^3 "składników jedynki" (2.1). Tylko cztery z nich:

$$\bar{F}_{u1} = \alpha_8 \wedge \alpha_9 \wedge \alpha_{10}, \quad \bar{F}_{u2} = -\alpha_8 \wedge \alpha_9 \wedge \alpha_{10}, \quad \bar{F}_{u3} = -\alpha_8 \wedge -\alpha_9 \wedge \alpha_{10},$$

$$\bar{F}_{u4} = -\alpha_8 \wedge -\alpha_9 \wedge -\alpha_{10} \quad \text{determinują niepuste zbiory: } \bar{D}_{u1} = \{u: u^T u \leq c_1^2\}, \quad \bar{D}_{u2} = \{u:$$

$$c_1^2 < u^T u \leq c_2^2\}, \quad \bar{D}_{u3} = \{u: c_2^2 < u^T u \leq c_3^2\}, \quad \bar{D}_{u4} = \{u: c_3^2 < u^T u\}, \text{ które rozpatrujemy w}$$

(2.2). Warunek w (2.2) może być spełniony tylko przy założeniu, że $\underline{v}_i < 0$ oraz $\bar{v}_i > 0$ dla

każdego i . Wówczas, przyjmując dodatkowo $c_4 = \infty$, wyznaczamy M_{ZPD} jako zbiór takich

$m \in \overline{1,4}$, że

$$c_m^2 \leq \min_i \left(\frac{\min(\underline{v}_i^2, \bar{v}_i^2)}{b_i b_i^T} \right).$$

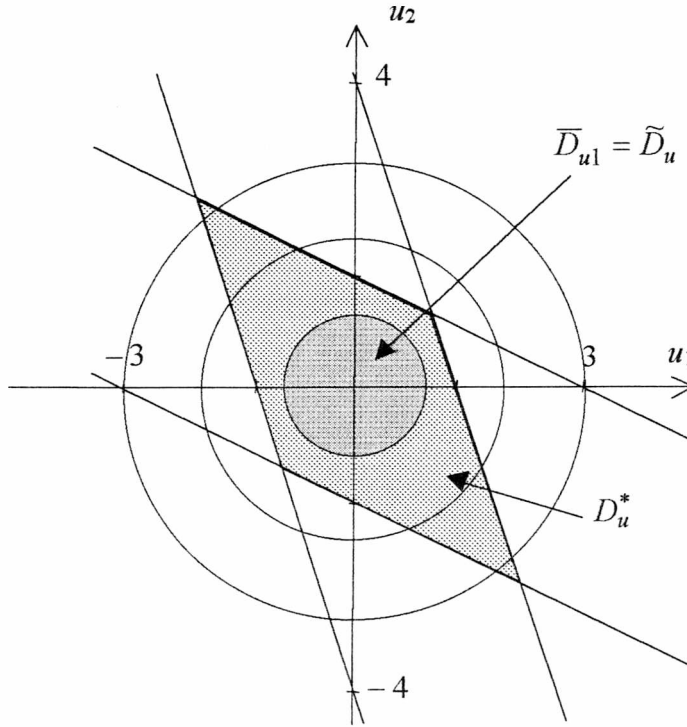
Np. dla $s=l=2$, $-3 \leq v_1 \leq 3$, $-4 \leq v_2 \leq 4$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$ dostajemy

(Rys. 2.2):

$$\frac{\min(\underline{v}_1^2, \bar{v}_1^2)}{b_1 b_1^T} = 1.8 \quad , \quad \frac{\min(\underline{v}_2^2, \bar{v}_2^2)}{b_2 b_2^T} = 1.6 \quad ,$$

$$M_{ZPD} = \{1\} \quad ,$$

$$\tilde{F}_u = \bar{F}_{u1} = \alpha_8 \wedge \alpha_9 \wedge \alpha_{10} \quad .$$



Rys. 2.2 Interpretacja graficzna rozwiązania problemu ZPD-dopasowania dla Przykładu 2.1.

Obszar D_u^* obrazuje zaciemniony równoległobok.

3. W trzecim kroku dla $\tilde{F}_u = a_8 \wedge a_9 \wedge a_{10}$ i zestawu faktów rozwiązujemy (1.13) z a_u w miejsce a_y . Stosując dekompozycję w metodzie logiczno-algebraicznej uzyskujemy:

$$\bar{a}_0 = (a_1, a_2, a_3, a_8, a_9, a_{10}),$$

$$\bar{F}_1(\bar{a}_0, \bar{a}_1) = F_1(a_1, a_2, a_9, a_{10}) \wedge F_2(a_2, a_6, a_9, a_{10}) \wedge F_3(a_2, a_3, a_9, a_{10}) \wedge \\ F_4(a_3, a_7, a_8) \wedge F_5(a_1, a_2, a_8, a_9) \wedge F_6(a_3, a_8, a_9),$$

$$\bar{a}_1 = (a_6, a_7),$$

$$\bar{F}_2(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = F_7(a_4, a_5, a_7) \wedge F_8(a_5, a_6, a_7),$$

$$\bar{a}_2 = (a_4, a_5).$$

Ponieważ również w dalszej części pracy będziemy korzystali z tej przykładowej logicznej RW, zaprezentujemy teraz rozwiązanie w sposób szczegółowy, łącznie z tabelami zawierającymi podciągi zmiennych logicznych uzyskane na poszczególnych etapach rozwiązania. Zgodnie z rekurencyjną procedurą znajdowania rozwiązania dostajemy kolejno:

$$\bar{S}_2 = S_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\},$$

Tabela 2.1

(a_4, a_5)	(a_6, a_7)
(0, 0)	(0, 0), (0, 1), (1, 0)
(0, 1)	(0, 1), (1, 1)
(1, 0)	(0, 1)
(1, 1)	(0, 1), (1, 1)

$$\bar{S}_1 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\},$$

Tabela 2.2

(a_6, a_7)	$(a_1, a_2, a_3, a_8, a_9, a_{10})$
(0, 0)	(0, 0, 0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 0, 0, 1)
(0, 1)	(0, 0, 0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 0, 0, 1)
(1, 0)	(0, 1, 1, 0, 0, 1)
(1, 1)	(0, 1, 1, 0, 0, 1)

$$\bar{S}_0 = \{(0, 0, 0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 0, 0, 1)\}.$$

Stąd $S_{x1} = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1)\}$, $S_{x2} = \{(0, 0, 0)\}$, $\tilde{S}_x = \{(0, 0, 1)\}$. Zbiór $\tilde{S}_x$ determinuje następującą własność wejściową

$$\tilde{F}_x = \neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3.$$

Zgodnie z Tw.2.2 $F_x^* = \tilde{F}_x = \neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3$.

2.2 Podsystem funkcyjny z dodatkowym wejściem z podsystemu logicznego

Algorytm rozwiązania Problemu 1.8 (ZA):

1. Rozwiązujemy ZA dla podsystemu logicznego, tzn. dla faktów F i własności F_x^* rozwiązujemy (1.12), gdzie w miejsce a_y wstawiamy a_b . Stosujemy metodę logiczno-algebraiczną otrzymując F_b^* .
2. Wyznaczona własność F_b^* zgodnie z (1.10) determinuje zbiór D_b^* .
3. Rozwiązujemy ZA dla podsystemu funkcyjnego: dla D_u^* i D_b^* wyznaczamy D_v^* zgodnie z (1.2) lub (1.4).

Nie występuje tu problem dopasowania. Rozwiązanie ZA dla systemu złożonego o modelu hybrydowym sprowadza się do rozwiązania ZA dla podsystemu funkcyjnego z modelem przekształconym do postaci relacyjnej (1.3). Trudnym i bardzo istotnym dla programowej realizacji Algorytmu 1.8 problemem jest uzyskanie opisu relacji R (1.3) w formie analitycznej. Inne trudności, jak np. brak uniwersalnej metody rozwiązywania ZA dla różnych R , przenoszą się wprost z teorii systemów relacyjnych. Poniżej podane przykładowe rozwiązania uzyskane dla typowych postaci zbiorów D_b^* otrzymanych z podsystemu logicznego oraz dla wybranych typowych funkcji ϕ stanowią ilustrację trzeciego kroku Algorytmu 1.8.

Przykład 2.2: $u, b \in \mathbb{R}^s, v \in \mathbb{R}^1$.

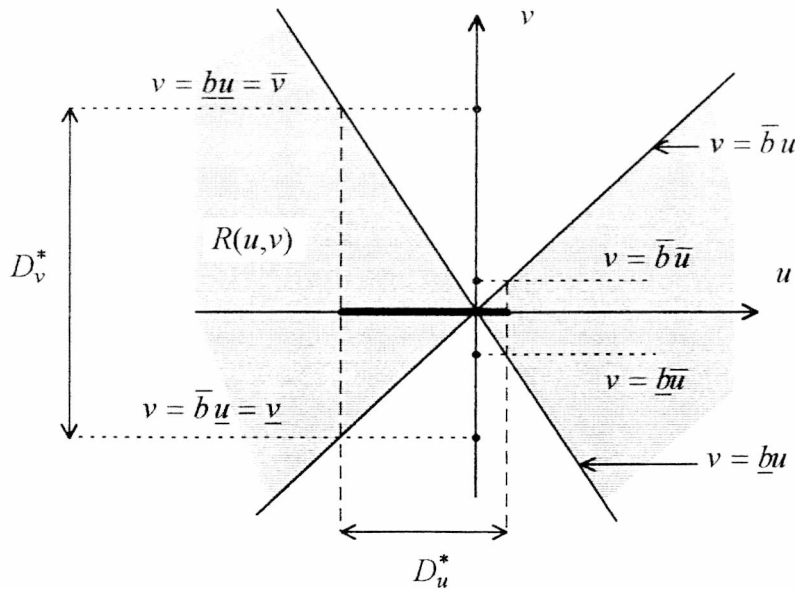
Dane: $\phi(u, b) = b^T u$, $D_u^* = \{u: \underline{u}_i \leq u_i \leq \bar{u}_i, i \in \overline{1, s}\}$,

$$D_b^* = \{b: \underline{b}_i \leq b_i \leq \bar{b}_i, i \in \overline{1, s}\}.$$

Rozwiązanie: $D_v^* = [\underline{v}, \bar{v}]$, gdzie

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^s \min \{ \underline{b}_i \underline{u}_i, \underline{b}_i \bar{u}_i, \bar{b}_i \underline{u}_i, \bar{b}_i \bar{u}_i \},$$

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^s \max \{ \underline{b}_i \underline{u}_i, \underline{b}_i \bar{u}_i, \bar{b}_i \underline{u}_i, \bar{b}_i \bar{u}_i \}.$$



Rys. 2.3 Interpretacja graficzna rozwiązania ZA z Przykładu 2.2 dla $s = 1$.

Przy dodatkowych założeniach, że $u_i \geq 0$ lub $u_i, b_i \geq 0$ otrzymujemy mniej skomplikowane rozwiązania.

Przykład 2.3: $u, b \in \mathbb{R}^s, v \in \mathbb{R}^1$.

Dane: $\phi(u, b) = b^T u$, $D_u^* = \{u: \underline{u}_i \leq u_i \leq \bar{u}_i, i \in \overline{1, s}\}$,

$$D_b^* = \{b: \underline{c} \leq c^T b \leq \bar{c}, c \in \mathbb{R}^s, \underline{c}, c_i, b_i > 0, i \in \overline{1, s}\}.$$

Rozwiązanie: $D_v^* = [\underline{v}, \bar{v}]$, gdzie

$$\underline{v} = \min_{i \in \overline{1, s}} \min \left\{ \frac{\underline{c}}{c_i} \underline{u}_i, \frac{\underline{c}}{c_i} \bar{u}_i, \frac{\bar{c}}{c_i} \underline{u}_i, \frac{\bar{c}}{c_i} \bar{u}_i \right\},$$

$$\bar{v} = \max_{i \in \overline{1, s}} \max \left\{ \frac{\underline{c}}{c_i} \underline{u}_i, \frac{\underline{c}}{c_i} \bar{u}_i, \frac{\bar{c}}{c_i} \underline{u}_i, \frac{\bar{c}}{c_i} \bar{u}_i \right\}.$$

Przy dodatkowym założeniu, że $u_i \geq 0$ otrzymujemy mniej skomplikowane rozwiązania.

Dla D_b^* danego zestawem nierówności $D_b^* = \{b: \underline{c}_j \leq c_j^T b \leq \bar{c}_j, c_j \in \mathbb{R}^s, \underline{c}_j, c_{ji}, b_i > 0, j \in \overline{1, r}, i \in \overline{1, s}\}$ musimy rozważać wartości funkcji ϕ w wierzchołkach hiperpowierzchni ograniczającej zbiór D_b^* . Rozwiązanie komplikuje się i w łatwy sposób możemy otrzymać jedynie następujące oszacowanie zbioru D_v^* :

$$\underline{v} \geq \max_{j \in \overline{1, r}} \left(\min_{i \in \overline{1, s}} \min \left\{ \frac{\underline{c}_j}{c_{ji}} \underline{u}_i, \frac{\underline{c}_j}{c_{ji}} \bar{u}_i, \frac{\bar{c}_j}{c_{ji}} \underline{u}_i, \frac{\bar{c}_j}{c_{ji}} \bar{u}_i \right\} \right),$$

$$\bar{v} \leq \min_{j \in \overline{1, r}} \left(\max_{i \in \overline{1, s}} \max \left\{ \frac{\underline{c}_j}{c_{ji}} \underline{u}_i, \frac{\underline{c}_j}{c_{ji}} \bar{u}_i, \frac{\bar{c}_j}{c_{ji}} \underline{u}_i, \frac{\bar{c}_j}{c_{ji}} \bar{u}_i \right\} \right).$$

Przykład 2.4: $u, b \in \mathbb{R}^s, v \in \mathbb{R}^1$.

Dane: $\phi(u, b) = b^T u$, $D_u^* = \{u: \underline{u}_i \leq u_i \leq \bar{u}_i, i \in \overline{1, s}\}$,

$$D_b^* = \{b: \underline{c} \leq \sum_{i=1}^s c_i b_i^2 \leq \bar{c}, c \in \mathbb{R}^s, \underline{c}, c_i, b_i > 0, i \in \overline{1, s}\}.$$

Rozwiązanie: $D_v^* = [\underline{v}, \bar{v}]$, gdzie

$$\underline{v} = \min_{u \in D_u^*} \min_{b \in D_b^*} b^T u, \quad (2.3)$$

$$\bar{v} = \max_{u \in D_u^*} \max_{b \in D_b^*} b^T u. \quad (2.4)$$

Przy dodatkowym założeniu, że $u_i \geq 0$ otrzymujemy:

$$\underline{v} = \min_{i \in \overline{1,s}} \min_{b \in D_b^*} b_i \underline{u}_i = \min_{i \in \overline{1,s}} \sqrt{\frac{c}{c_i}} \underline{u}_i ,$$

$$\bar{v} = \max_{u \in D_u^*} \bar{v}(u) , \quad \text{gdzie}$$

$$\bar{v}(u) = \max_b b^T u \quad \text{przy ograniczeniu równościowym} \quad \sum_{i=1}^s c_i b_i^2 = \bar{c} .$$

Maksymalizację $\bar{v}(u)$ względem b przeprowadzamy wykorzystując metodę mnożników Lagrange'a. Dostajemy

$$b_{\max,i} = \frac{u_i}{c_i \sqrt{\frac{1}{\bar{c}} \left(\frac{u_1^2}{c_1} + \frac{u_2^2}{c_2} + \dots + \frac{u_s^2}{c_s} \right)}}$$

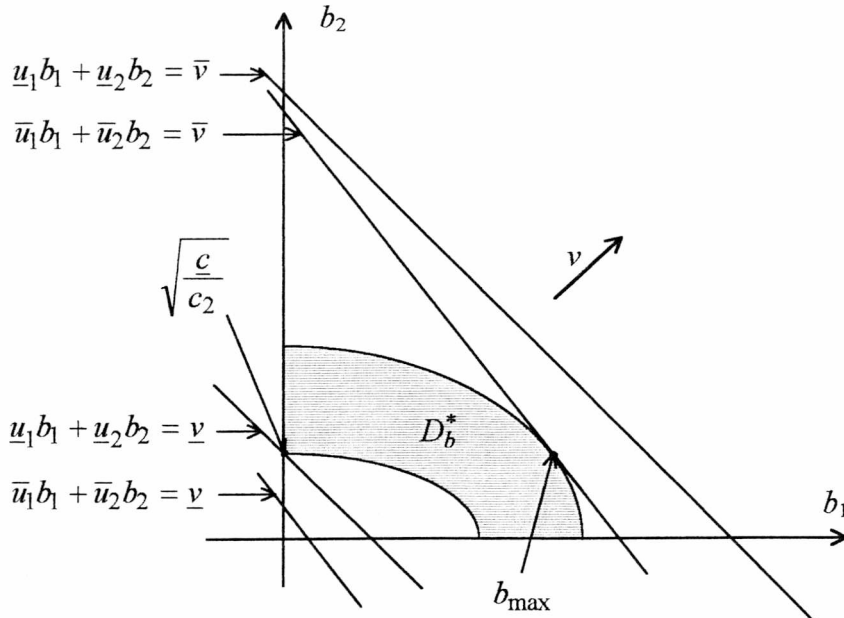
oraz

$$\bar{v}(u) = \sqrt{\bar{c} \left(\frac{u_1^2}{c_1} + \frac{u_2^2}{c_2} + \dots + \frac{u_s^2}{c_s} \right)} .$$

Stąd

$$\bar{v} = \max_{u \in D_u^*} \bar{v}(u) = \max_{u \in D_u^*} \sqrt{\bar{c} \left(\frac{u_1^2}{c_1} + \frac{u_2^2}{c_2} + \dots + \frac{u_s^2}{c_s} \right)} = \sqrt{\bar{c} \left(\frac{\bar{u}_1^2}{c_1} + \frac{\bar{u}_2^2}{c_2} + \dots + \frac{\bar{u}_s^2}{c_s} \right)} .$$

W prostych przypadkach rozwiązanie ZA można zilustrować graficznie (Rys. 2.4). Zauważmy, że możemy zamienić kolejność minimalizacji w (2.3), podobnie jak maksymalizacji w (2.4).



Rys. 2.4 Interpretacja graficzna rozwiązania ZA z Przykładu 2.4 dla $s = 2$.

Dla D_b^* danego zestawem nierówności $D_b^* = \{b: \underline{c}_j \leq \sum_{i=1}^s c_{ji} b_i^2 \leq \bar{c}_j, c_j \in \mathbb{R}^s, \underline{c}_j, c_{ji}, b_i > 0,$

$j \in \overline{1, r}, i \in \overline{1, s}\}$ musimy rozważać wartości funkcji ϕ w wierzchołkach oraz na hiperpowierzchni ograniczającej zbiór D_b^* od góry. Rozwiązanie komplikuje się i w łatwy sposób możemy otrzymać jedynie następujące oszacowanie zbioru D_v^* :

$$\underline{v} \geq \max_{j \in \overline{1, r}} \left(\min_{i \in \overline{1, s}} \sqrt{\frac{\underline{c}_j}{c_{ji}}} \underline{u}_i \right),$$

$$\bar{v} \leq \min_{j \in \overline{1, r}} \sqrt{\bar{c}_j \left(\frac{\bar{u}_1^2}{c_{j1}} + \frac{\bar{u}_2^2}{c_{j2}} + \dots + \frac{\bar{u}_s^2}{c_{js}} \right)}.$$

Przykład 2.5: $u, b \in \mathbb{R}^s, v \in \mathbb{R}^1$.

Dane: $\phi(u, b) = u^T A u \pm b^T u$, $D_u^* = \{u: \underline{u}_i \leq u_i \leq \bar{u}_i, i \in \overline{1, s}\}$,

$$D_b^* = \{b: \underline{b}_i \leq b_i \leq \bar{b}_i, \underline{b}_i > 0, i \in \overline{1, s}\}.$$

Rozwiązaniem, przy dodatkowym założeniu że $\underline{u}_i \geq 0$, jest zbiór $D_v^* = [\underline{v}, \bar{v}]$, gdzie

1° Dla $v = u^T A u \pm b^T u$ oraz dodatnio określonej macierzy A :

Do wyznaczenia $\underline{v}$ nie wystarczy rozważenie tylko wierzchołków hiperprostopadłościanu definiowanego przez D_u^* , ale trzeba rozważyć całą hiperpowierzchnię ograniczającą D_u^* . Nie da się tego zrobić analitycznie – możemy jedynie, rozważając wierzchołki hiperprostopadłościanu D_u^* , zaproponować ograniczenie od góry na $\underline{v}$:

$$\underline{v} \leq \min_{j \in \overline{1, 2^s}} \left(\tilde{u}_j^T A \tilde{u}_j + \underline{b}^T \tilde{u}_j \right)$$

lub

$$\underline{v} \leq \min_{j \in \overline{1, 2^s}} \left(\tilde{u}_j^T A \tilde{u}_j - \bar{b}^T \tilde{u}_j \right), \quad \text{gdzie} \quad \tilde{u}_{ji} = \underline{u}_i \quad \text{albo} \quad \tilde{u}_{ji} = \bar{u}_i.$$

Ograniczeniem od dołu na $\underline{v}$ może być wartość minimum globalnego funkcji ϕ :

$$0 \leq \underline{v} \quad (\text{dla } v = u^T A u + b^T u)$$

lub

$$\min_{k \in 1, 2^s} -\frac{1}{4} \tilde{b}_k^T A^{-1} \tilde{b}_k \leq \underline{v} \quad (\text{dla } v = u^T A u - b^T u), \quad \text{gdzie}$$

$$\tilde{b}_{ki} = \underline{b}_i \quad \text{albo} \quad \tilde{b}_{ki} = \bar{b}_i.$$

Natomiast do wyznaczenia $\bar{v}$ wystarczy rozważyć tylko wierzchołki hiperprostopadłościanu definiowanego przez D_u^* :

$$\bar{v} = \max_{j \in 1, 2^s} \left(\tilde{u}_j^T A \tilde{u}_j + \bar{b}^T \tilde{u}_j \right)$$

lub

$$\bar{v} = \max_{j \in 1, 2^s} \left(\tilde{u}_j^T A \tilde{u}_j - \underline{b}^T \tilde{u}_j \right).$$

W prostych przypadkach rozwiązanie ZA można zilustrować graficznie (Rys. 2.5).

2° Dla $v = u^T A u \pm b^T u$ oraz ujemnie określonej macierzy A mamy sytuację odwrotną:

$$\underline{v} = \min_{j \in 1, 2^s} \left(\tilde{u}_j^T A \tilde{u}_j + \underline{b}^T \tilde{u}_j \right)$$

lub

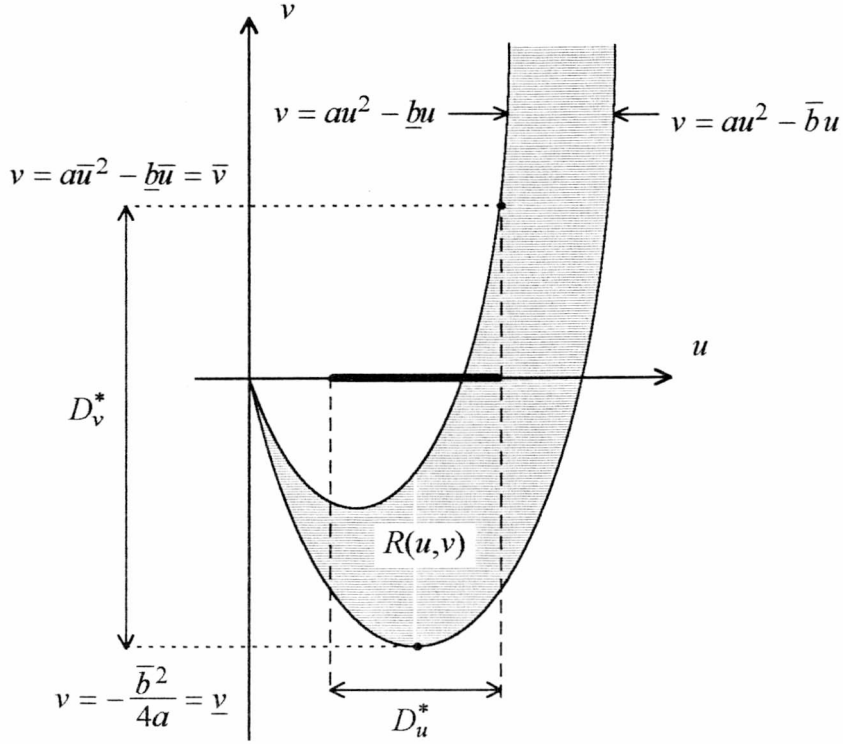
$$\underline{v} = \min_{j \in 1, 2^s} \left(\tilde{u}_j^T A \tilde{u}_j - \bar{b}^T \tilde{u}_j \right)$$

z ograniczeniem od góry na $\bar{v}$ równym wartości maksimum globalnego

$$\max_{j \in 1, 2^s} \left(\tilde{u}_j^T A \tilde{u}_j + \bar{b}^T \tilde{u}_j \right) \leq \bar{v} \leq \max_{k \in 1, 2^s} -\frac{1}{4} \tilde{b}_k^T A^{-1} \tilde{b}_k$$

lub

$$\max_{j \in 1, 2^s} \left(\tilde{u}_j^T A \tilde{u}_j - \underline{b}^T \tilde{u}_j \right) \leq \bar{v} \leq 0.$$



Rys. 2.5 Interpretacja graficzna rozwiązania ZA z Przykładu 2.5 dla $s = 1, a > 0$.

Przykład 2.6: $u, b \in \mathbb{R}^s, v \in \mathbb{R}^1$.

Dane: $\phi(u, b) = u^T A u \pm b^T u$, $D_u^* = \{u: \underline{u}_i \leq u_i \leq \bar{u}_i, i \in \overline{1, s}\}$,

$$D_b^* = \{b: \underline{c} \leq c^T b \leq \bar{c}, c \in \mathbb{R}^s, \underline{c}, c_i, b_i > 0, i \in \overline{1, s}\}.$$

Rozwiązaniem, przy dodatkowym założeniu że $\underline{u}_i \geq 0$, jest zbiór $D_v^* = [\underline{v}, \bar{v}]$, gdzie

1° Dla $v = u^T A u \pm b^T u$ oraz dodatkowo określonej macierzy A :

Nie da się analitycznie wyznaczyć $\underline{v}$. Rozważając, jak poprzednio, wierzchołki hiperprostokątności D_u^* oraz uwzględniając wartość minimum globalnego możemy zaproponować ograniczenie od góry i od dołu na $\underline{v}$:

$$0 \leq \underline{v} \leq \min_{j \in \overline{1, 2^s}} \left(\tilde{u}_j^T A \tilde{u}_j + \min_{i \in \overline{1, s}} \frac{c}{c_i} \tilde{u}_{ji} \right) \quad (\text{dla } v = u^T A u + b^T u)$$

lub

$$\min_{k \in \overline{1, s}} -\frac{1}{4} \hat{b}_k^T A^{-1} \hat{b}_k \leq \underline{v} \leq \min_{j \in \overline{1, 2^s}} \left(\tilde{u}_j^T A \tilde{u}_j - \max_{i \in \overline{1, s}} \frac{\bar{c}}{c_i} \tilde{u}_{ji} \right)$$

$$(\text{dla } v = u^T A u - b^T u), \quad \text{gdzie} \quad \hat{b}_{ki} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ \frac{\bar{c}}{c_k} & i = k \end{cases}.$$

W drugim przypadku $-\frac{1}{4} \hat{b}_k^T A^{-1} \hat{b}_k$ można uprościć do $-\frac{1}{4} \frac{\bar{c}^2}{c_k^2} \cdot A^{-1}(k, k)$.

Natomiast do wyznaczenia $\bar{v}$ wystarczy rozważyć tylko wierzchołki hiperprostopadłościanu definiowanego przez D_u^* :

$$\bar{v} = \max_{j \in \overline{1, 2^s}} \left(\tilde{u}_j^T A \tilde{u}_j + \max_{i \in \overline{1, s}} \frac{\bar{c}}{c_i} \tilde{u}_{ji} \right)$$

lub

$$\bar{v} = \max_{j \in \overline{1, 2^s}} \left(\tilde{u}_j^T A \tilde{u}_j - \min_{i \in \overline{1, s}} \frac{c}{c_i} \tilde{u}_{ji} \right).$$

2° Dla $v = u^T A u \pm b^T u$ oraz ujemnie określonej macierzy A mamy sytuację odwrotną:

$$\underline{v} = \min_{j \in \overline{1, 2^s}} \left(\tilde{u}_j^T A \tilde{u}_j + \min_{i \in \overline{1, s}} \frac{c}{c_i} \tilde{u}_{ji} \right)$$

lub

$$\underline{v} = \min_{j \in \overline{1, 2^s}} \left(\tilde{u}_j^T A \tilde{u}_j - \max_{i \in \overline{1, s}} \frac{\bar{c}}{c_i} \tilde{u}_{ji} \right)$$

z ograniczeniem od góry na $\bar{v}$ równym wartości maksimum globalnego:

$$\max_{j \in \overline{1, 2^s}} \left(\tilde{u}_j^T A \tilde{u}_j + \max_{i \in \overline{1, s}} \frac{\bar{c}}{c_i} \tilde{u}_{ji} \right) \leq \bar{v} \leq \max_{k \in \overline{1, s}} -\frac{1}{4} \frac{\bar{c}^2}{c_k^2} \cdot A^{-1}(k, k)$$

lub

$$\max_{j \in \overline{1, 2^s}} \left(\tilde{u}_j^T A \tilde{u}_j - \min_{i \in \overline{1, s}} \frac{c}{c_i} \tilde{u}_{ji} \right) \leq \bar{v} \leq 0.$$

Przykład 2.7: $u, b \in \mathbb{R}^s, v \in \mathbb{R}^1$.

Dane: $\phi(u, b) = u^T A u \pm b^T u$, $D_u^* = \{u: \underline{u}_i \leq u_i \leq \bar{u}_i, i \in \overline{1, s}\}$,

$$D_b^* = \{b: \underline{c} \leq \sum_{i=1}^s c_i b_i^2 \leq \bar{c}, c \in \mathbb{R}^s, \underline{c}, c_i, b_i > 0, i \in \overline{1, s}\}.$$

Korzystamy z wyników z Przykładu 2.4 i Przykładu 2.6. Przy dodatkowym założeniu że $\underline{u}_i \geq 0$, rozwiązaniem ZA jest zbiór $D_v^* = [\underline{v}, \bar{v}]$, gdzie

1° Dla $v = u^T A u \pm b^T u$ oraz dodatnio określonej macierzy A :

Wobec trudności związanych z analitycznym wyznaczeniem $\underline{v}$ możemy jedynie zaproponować ograniczenie od dołu i od góry na $\underline{v}$:

$$0 \leq \underline{v} \leq \min_{j \in \overline{1, 2^s}} \left(\tilde{u}_j^T A \tilde{u}_j + \min_{i \in \overline{1, s}} \sqrt{\frac{c}{c_i}} \tilde{u}_{ji} \right) \quad (\text{dla } v = u^T A u + b^T u)$$

lub

$$\min_{b \in D_b^*} -\frac{1}{4} b^T A^{-1} b \leq \underline{v} \leq \min_{j \in \overline{1, 2^s}} \left(\tilde{u}_j^T A \tilde{u}_j - \sqrt{\bar{c} \left(\frac{\tilde{u}_{j1}^2}{c_1} + \frac{\tilde{u}_{j2}^2}{c_2} + \dots + \frac{\tilde{u}_{js}^2}{c_s} \right)} \right) \quad (\text{dla } v = u^T A u - b^T u).$$

Jednak nie uzyskamy wyniku minimalizacji względem b w postaci analitycznej.

Łatwiej podać zależność na wyznaczenie $\bar{v}$:

$$\bar{v} = \max_{j \in \overline{1, 2^s}} \left(\tilde{u}_j^T A \tilde{u}_j + \sqrt{\bar{c} \left(\frac{\tilde{u}_{j1}^2}{c_1} + \frac{\tilde{u}_{j2}^2}{c_2} + \dots + \frac{\tilde{u}_{js}^2}{c_s} \right)} \right) \quad (\text{dla } v = u^T A u + b^T u)$$

lub

$$\bar{v} = \max_{j \in \overline{1, 2^s}} \left(\tilde{u}_j^T A \tilde{u}_j - \min_{i \in \overline{1, s}} \sqrt{\frac{c}{c_i}} \tilde{u}_{ji} \right) \quad (\text{dla } v = u^T A u - b^T u).$$

2° Dla $v = u^T A u \pm b^T u$ oraz ujemnie określonej macierzy A mamy sytuację odwrotną:

Pokażemy tylko wzór, z którego można wyznaczyć $\underline{v}$:

$$\underline{v} = \min_{j \in \overline{1, 2^s}} \left(\tilde{u}_j^T A \tilde{u}_j + \min_{i \in \overline{1, s}} \sqrt{\frac{c}{c_i}} \tilde{u}_{ji} \right) \quad (\text{dla } v = u^T A u + b^T u),$$

lub

$$\underline{v} = \min_{j \in \{1, 2^s\}} \left(\tilde{u}_j^T A \tilde{u}_j - \sqrt{\bar{c} \left(\frac{\tilde{u}_{j1}^2}{c_1} + \frac{\tilde{u}_{j2}^2}{c_2} + \dots + \frac{\tilde{u}_{js}^2}{c_s} \right)} \right) \quad (\text{dla } v = u^T A u - b^T u).$$

Algorytm rozwiązania Problemu 1.9 (ZPD wersja 1):

1. Rozwiązujemy ZA dla podsystemu logicznego: dla faktów F i własności F_x^* rozwiązujemy (1.12) z a_b w miejsce a_y . Stosujemy metodę logiczno-algebraiczną otrzymując F_b^* .
2. Zgodnie z (1.10) wyznaczona własność F_b^* determinuje zbiór D_b^* .
3. Rozwiązujemy ZPD dla podsystemu funkcyjnego: dla D_v^* i D_b^* wyznaczamy D_u^* zgodnie z (1.5), (1.6) lub (1.7).

Nie występuje tu problem dopasowania. Rozwiązanie ZPD dla systemu złożonego o modelu hybrydowym sprowadza się do rozwiązania ZPD dla podsystemu funkcyjnego z modelem przekształconym do postaci relacyjnej (1.3). Pojawiające się trudności wynikają z przyczyn wskazanych wcześniej dla Algorytmu 1.8.

Poniższe twierdzenie oraz uwagi dodatkowe mówią o ważnej własności rozwiązania ZPD. Odwołamy się do niej później proponując algorytm rozwiązania rozszerzonego ZPD.

Twierdzenie 2.3

Jeśli D_{u1}^*, D_{u2}^* są rozwiązaniami ZPD dla D_v^* i odpowiednio F_{x1}^*, F_{x2}^* oraz $F_{x1}^* \rightarrow F_{x2}^*$ to

$$D_{u1}^* \supseteq D_{u2}^*.$$

Dowód:

Kolejne etapy dowodu związane są z kolejnymi krokami Algorytmu 1.9. Najpierw dla $F_{x1}^* \wedge F$ i $F_{x2}^* \wedge F$ rozwiązujemy ZA otrzymując odpowiednio F_{b1}^* ($b \in D_{b1}^*$), F_{b2}^* ($b \in D_{b2}^*$). Łatwo zauważyć, że $F_{b1}^* \rightarrow F_{b2}^*$ ($D_{b1}^* \subseteq D_{b2}^*$). Następnie zgodnie z (1.1):

$$D_{u1}^* = \left\{ u \in U: \bigwedge_{b \in D_{b1}^*} \phi(u, b) \in D_v^* \right\}, \quad D_{u2}^* = \left\{ u \in U: \bigwedge_{b \in D_{b2}^*} \phi(u, b) \in D_v^* \right\}.$$

Ponieważ $D_{b1}^* \cup D_{b2}^* = D_{b2}^*$ to

$$\begin{aligned}
 D_{u2}^* &= \left\{ u \in U : \bigwedge_{b \in D_{b1}^* \cup D_{b2}^*} \phi(u, b) \in D_v^* \right\} \equiv \left\{ u \in U : \bigwedge_{b \in D_{b1}^*} \bigwedge_{b \in D_{b2}^*} \phi(u, b) \in D_v^* \right\} \equiv \\
 &\equiv \left\{ u \in U : \left(\bigwedge_{b \in D_{b1}^*} \phi(u, b) \in D_v^* \right) \wedge \left(\bigwedge_{b \in D_{b2}^*} \phi(u, b) \in D_v^* \right) \right\} \equiv \\
 &\equiv \left\{ u \in U : \bigwedge_{b \in D_{b1}^*} \phi(u, b) \in D_v^* \right\} \cap \left\{ u \in U : \bigwedge_{b \in D_{b2}^*} \phi(u, b) \in D_v^* \right\} = D_{u1}^* \cap D_{u2}^* \subseteq D_{u1}^* .
 \end{aligned}$$

□

Uwagi dodatkowe do Tw. 2.3:

1. W ten sam sposób można dowieść, że dla ZPD z własnością wejściową $F_x^* = F_{x1}^* \vee F_{x2}^*$, tzn. z F_x^* w postaci alternatywy dowolnych dwóch własności F_{x1}^* , F_{x2}^* , otrzymujemy $D_u^* = D_{u1}^* \cap D_{u2}^*$.
2. Nie można w ten sposób dowieść podobnego twierdzenia dla ZPD z własnością wejściową F_x^* w postaci koniunkcji $F_x^* = F_{x1}^* \wedge F_{x2}^*$.
3. W związku z faktem, że w podsystemie funkcyjnym rozróżnienie pomiędzy wejściem a parametrem jest umowne można pokazać, że dla ZPD z D_v^* oraz dla danego zbioru $D_u^* = D_{u1}^* \cup D_{u2}^*$ otrzymamy $D_b^* = D_{b1}^* \cap D_{b2}^*$.

Poniżej podane są przykładowe rozwiązania ZPD uzyskane dla typowych zbiorów D_b^* mogących wynikać z podsystemu logicznego oraz dla liniowej i kwadratowej funkcji ϕ . Wykorzystujemy zależności wyprowadzone dla ZA w poprzednich przykładach.

Przykład 2.8: $u, b \in \mathbb{R}^s, v \in \mathbb{R}^1$.

Dane: $\phi(u, b) = b^T u$, $D_v^* = [\underline{v}, \bar{v}]$,

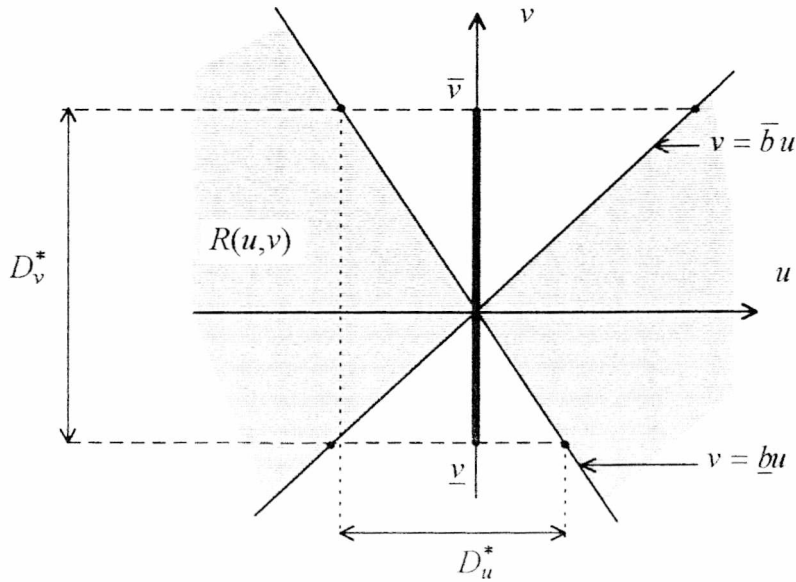
$$D_b^* = \{ b : \underline{b}_i \leq b_i \leq \bar{b}_i, \quad i \in \overline{1, s} \} .$$

Rozwiązanie:

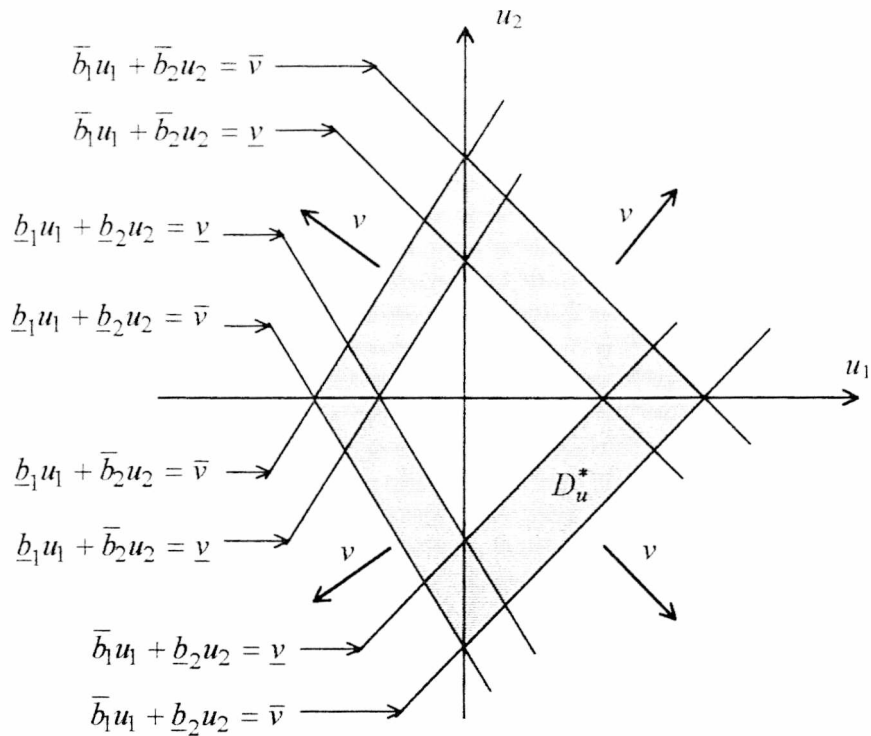
$$D_u^* = \{ u : \underline{v} \leq \widetilde{b}_j^T u \leq \bar{v}, \quad j \in \overline{1, 2^s} \} , \quad \text{gdzie} \quad \widetilde{b}_{ji} = \underline{b}_i \quad \text{albo} \quad \widetilde{b}_{ji} = \bar{b}_i .$$

Uzyskany wynik jest mało konstruktywny. Dla $s = 1$, $\underline{b} < 0$, $\bar{b} > 0$ (Rys. 2.6) zbiór D_u^* można

dość łatwo wyznaczyć. Ale dla $s = 2$, $\underline{b}_i < 0$, $\bar{b}_i > 0$ oraz $\underline{v} > 0$ (Rys. 2.7), trudno w prosty sposób opisać zbiór D_u^* analitycznie.



Rys. 2.6 Interpretacja graficzna rozwiązania ZPD z Przykładu 2.8 dla $s = 1$.



Rys. 2.7 Interpretacja graficzna rozwiązania ZPD z Przykładu 2.8 dla $s = 2$.

Rozwiązanie znacznie upraszcza się przy dodatkowym założeniu, że $\underline{b}_i, u_i \geq 0$. Wówczas

$$D_u^* = \{u: \underline{v} \leq \underline{b}^T u, \quad \bar{b}^T u \leq \bar{v} \}.$$

Przykład 2.9: $u, b \in \mathbb{R}^s, v \in \mathbb{R}^1$.

Dane: $\phi(u, b) = b^T u, D_v^* = [\underline{v}, \bar{v}]$,

$$D_b^* = \{b: \underline{c} \leq c^T b \leq \bar{c}, \quad c \in \mathbb{R}^s, \quad \underline{c}, c_i, b_i > 0, \quad i \in \overline{1, s} \}.$$

Rozwiązanie, przy dodatkowym założeniu że $u_i \geq 0$, jest następujące:

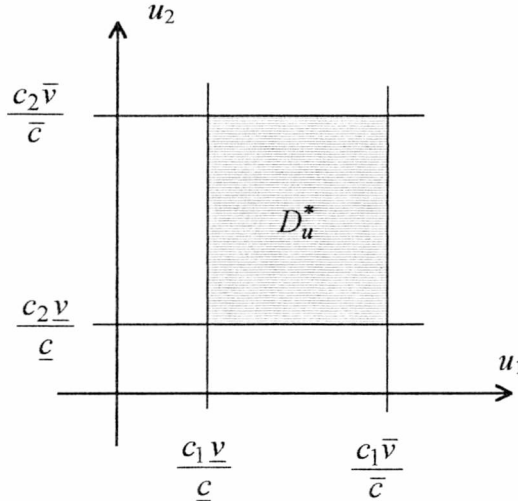
$$D_u^* = \{u: \underline{v} \leq \frac{\underline{c}}{c_i} u_i \quad \text{ i } \quad \frac{\bar{c}}{c_i} u_i \leq \bar{v}, \quad i \in \overline{1, s} \}$$

czyli

$$D_u^* = \{u: \frac{c_i \underline{v}}{\underline{c}} \leq u_i \leq \frac{c_i \bar{v}}{\bar{c}}, \quad i \in \overline{1, s} \}.$$

Wynika stąd nieskomplikowany warunek sterowalności: $\frac{\underline{v}}{\underline{c}} \leq \frac{\bar{v}}{\bar{c}}$.

W prostych przypadkach rozwiązanie ZPD można zilustrować graficznie (Rys. 2.8).



Rys. 2.8 Interpretacja graficzna rozwiązania ZPD z Przykładu 2.9 dla $s = 2$.

Dla D_b^* danego zestawem nierówności $D_b^* = \{b: \underline{c}_j \leq c_j^T b \leq \bar{c}_j, \quad c_j \in \mathbb{R}^s, \quad \underline{c}_j, c_{ji}, b_i > 0, \quad j \in \overline{1, r}, \quad i \in \overline{1, s} \}$ musimy wyznaczyć zbiory $D_{uj}^*, \quad j \in \overline{1, r}$, a rozwiązanie otrzymujemy jako $D_u^* = \bigcap_{j \in \overline{1, r}} D_{uj}^*$. Wówczas

$$D_u^* = \{u: \max_{j \in \overline{1, r}} \frac{c_{ji} \underline{v}}{\underline{c}_j} \leq u_i \leq \min_{j \in \overline{1, r}} \frac{c_{ji} \bar{v}}{\bar{c}_j}, \quad j \in \overline{1, r}, \quad i \in \overline{1, s} \}.$$

Przykład 2.10: $u, b \in \mathbb{R}^s, v \in \mathbb{R}^1$.

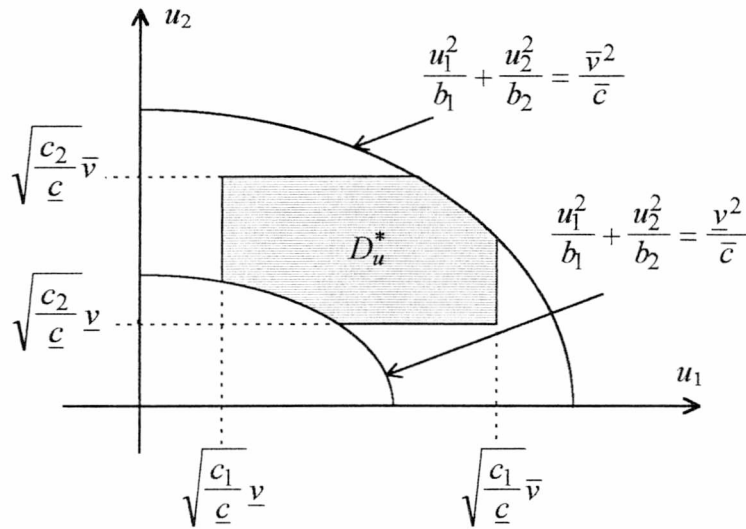
Dane: $\phi(u, b) = b^T u$, $D_v^* = [\underline{v}, \bar{v}]$,

$$D_b^* = \{b: \underline{c} \leq \sum_{i=1}^s c_i b_i^2 \leq \bar{c}, \quad c \in \mathbb{R}^s, \quad \underline{c}, c_i, b_i > 0, \quad i \in \overline{1, s}\}.$$

Rozwiązanie:

$$D_u^* = \{u: \underline{v} \leq \sqrt{\bar{c} \left(\frac{u_1^2}{c_1} + \frac{u_2^2}{c_2} + \dots + \frac{u_s^2}{c_s} \right)} \leq \bar{v}, \quad \underline{v} \leq u_i \sqrt{\frac{c}{c_i}} \leq \bar{v}, \quad i \in \overline{1, s}\}.$$

W prostych przypadkach rozwiązanie ZPD można zilustrować graficznie (Rys. 2.9).



Rys. 2.9 Interpretacja graficzna rozwiązania ZPD z Przykładu 2.10 dla $s = 2, u_1, u_2 \geq 0$.

Przykład 2.11: $u, b \in \mathbb{R}^s, v \in \mathbb{R}^1$.

Dane: $\phi(u, b) = u^T A u \pm b^T u$, $D_v^* = [\underline{v}, \bar{v}]$,

$$D_b^* = \{b: \underline{b}_i \leq b_i \leq \bar{b}_i, \quad i \in \overline{1, s}\}.$$

Przy dodatkowym założeniu że $\underline{b}_i, u_i \geq 0$ otrzymujemy:

1° Dla $v = u^T A u \pm b^T u$ oraz dodatnio określonej macierzy A :

$$D_u^* = \{u: \underline{v} \leq u^T A u + \underline{b}^T u, \quad u^T A u + \bar{b}^T u \leq \bar{v}\} \quad (\text{dla } v = u^T A u + b^T u)$$

lub

$$D_u^* = \{u: \underline{v} \leq u^T A u - \bar{b}^T u, \quad u^T A u - \underline{b}^T u \leq \bar{v}\} \quad (\text{dla } v = u^T A u - b^T u).$$

2° Dla ujemnie określonej macierzy A rozwiązanie jest tej samej postaci co w 1°.

Przykład 2.12: $u, b \in \mathbb{R}^s, v \in \mathbb{R}^1$.

Dane: $\phi(u, b) = u^T A u \pm b^T u$, $D_v^* = [\underline{v}, \bar{v}]$,

$$D_b^* = \{b: \underline{c} \leq c^T b \leq \bar{c}, c \in \mathbb{R}^s, \underline{c}, c_i, b_i > 0, i \in \overline{1, s}\}.$$

Przy dodatkowym założeniu że $\underline{b}_i, u_i \geq 0$ otrzymujemy:

1° Dla $v = u^T A u \pm b^T u$ oraz dodatnio określonej macierzy A :

$$D_u^* = \{u: \underline{v} \leq u^T A u + \frac{\underline{c}}{c_i} u_i, u^T A u + \frac{\bar{c}}{c_i} u_i \leq \bar{v}, i \in \overline{1, s}\}$$

lub

$$D_u^* = \{u: \underline{v} \leq u^T A u - \frac{\bar{c}}{c_i} u_i, u^T A u - \frac{\underline{c}}{c_i} u_i \leq \bar{v}, i \in \overline{1, s}\}.$$

2° Dla ujemnie określonej macierzy A rozwiązanie jest tej samej postaci co w 1°.

Przykład 2.13: $u, b \in \mathbb{R}^s, v \in \mathbb{R}^1$.

Dane: $\phi(u, b) = u^T A u \pm b^T u$, $D_v^* = [\underline{v}, \bar{v}]$,

$$D_b^* = \{b: \underline{c} \leq \sum_{i=1}^s c_i b_i^2 \leq \bar{c}, c \in \mathbb{R}^s, \underline{c}, c_i, b_i > 0, i \in \overline{1, s}\}.$$

Przy dodatkowym założeniu że $\underline{b}_i, u_i \geq 0$ otrzymujemy:

1° Dla $v = u^T A u \pm b^T u$ oraz dodatnio określonej macierzy A :

$$D_u^* = \{u: \underline{v} \leq u^T A u + \sqrt{\frac{\underline{c}}{c_i}} u_i, u^T A u + \sqrt{\bar{c} \left(\frac{u_1^2}{c_1} + \frac{u_2^2}{c_2} + \dots + \frac{u_s^2}{c_s} \right)} \leq \bar{v}, i \in \overline{1, s}\},$$

(dla $v = u^T A u + b^T u$)

lub

$$D_u^* = \{u: \underline{v} \leq u^T A u - \sqrt{\bar{c} \left(\frac{u_1^2}{c_1} + \frac{u_2^2}{c_2} + \dots + \frac{u_s^2}{c_s} \right)}, u^T A u - \sqrt{\frac{\underline{c}}{c_i}} u_i \leq \bar{v}, i \in \overline{1, s}\}$$

(dla $v = u^T A u - b^T u$).

2° Dla ujemnie określonej macierzy A rozwiązanie jest tej samej postaci co w 1°.

Wyniki uzyskane w przykładach 2.11 ÷ 2.13 są mało konstruktywne, tzn. z podanych zależności trudno wyznaczyć D_u^* . Natomiast łatwo można dla danego u sprawdzić czy

$u \in D_u^*$.

Algorytm rozwiązania Problemu 1.10 (ZPD wersja 2):

1. Rozwiązujemy ZA dla podsystemu logicznego, tzn. dla faktów F i własności F_x^* rozwiązujemy (1.12), gdzie za a_y podstawiamy a_b . Stosujemy metodę logiczno-algebraiczną i otrzymujemy F_b^* .
2. Wyznaczona własność F_b^* determinuje, zgodnie z (1.10), zbiór D_b^* .
3. Rozwiązujemy ZPD dla podsystemu funkcyjnego: dla D_b^* wyznaczamy $u_{\min}$ zgodnie z (1.8).

Nie występuje tu problem dopasowania. Pojawiające się trudności związane są z koniecznością wykonania maksymalizacji (1.8) funkcji ϕ względem b przy ograniczeniu danym zbiorem D_b^* , który może być zdefiniowany za pomocą skomplikowanych zależności. Często niemożliwe jest wyznaczenie formuły analitycznej opisującej b maksymalizującą ϕ . Co więcej, nawet jeśli taki wzór można wyprowadzić, to często opisuje on skomplikowaną funkcję zmiennej u . Kolejną trudność stanowi wówczas przeprowadzenie minimalizacji $\bar{\phi}$ (1.8). Poniżej podane są przykładowe rozwiązania ZPD uzyskane dla typowych zbiorów D_b^* mogących wynikać z podsystemu logicznego oraz dla typowych postaci funkcji ϕ . Wykorzystujemy zależności wyprowadzone w poprzednich przykładach.

Przykład 2.14: $u, b \in \mathbb{R}^s, v \in \mathbb{R}^1$.

Dane: $\phi(u, b) = b^T u$, $D_b^* = \{b: \underline{b}_i \leq b_i \leq \bar{b}_i, i \in \overline{1, s}\}$.

Rozwiązanie łatwo uzyskać przy dodatkowym założeniu, że $\underline{b}_i, u_i \geq 0$:

$$\begin{aligned}\bar{\phi}(u) &= \max_{b \in D_b^*} b^T u = \bar{b}^T u, \\ \min_u \bar{\phi}(u) &= \min_u \bar{b}^T u = 0 \quad \rightarrow \quad u_{\min} = \bar{0}.\end{aligned}$$

Przy dodatkowym ograniczeniu $u_i \geq \underline{u}_i$, gdzie $\underline{u}_i \geq 0, i \in \overline{1, s}$ dostajemy $u_{\min} = \underline{u} = [\underline{u}_1 \dots \underline{u}_s]^T$.

Przykład 2.15: $u, b \in \mathbb{R}^s, v \in \mathbb{R}^1$.

Dane: $\phi(u, b) = b^T u$, $D_b^* = \{b: \underline{c} \leq c^T b \leq \bar{c}, c \in \mathbb{R}^s, \underline{c}, c_i, b_i > 0, i \in \overline{1, s}\}$.

Rozwiązanie – przy dodatkowym założeniu, że $u_i \geq 0$:

$$\begin{aligned}\bar{\phi}(u) &= \max_{b \in D_b^*} b^T u = \max_{i \in \overline{1, s}} \frac{\bar{c}}{c_i} u_i, \\ \min_u \bar{\phi}(u) &= \min_u \max_{i \in \overline{1, s}} \frac{\bar{c}}{c_i} u_i = 0 \quad \rightarrow \quad u_{\min} = \bar{0}.\end{aligned}$$

Przy dodatkowym ograniczeniu $u_i \geq \underline{u}_i$, gdzie $\underline{u}_i \geq 0$, $i \in \overline{1, s}$ dostajemy $u_{\min} = \underline{u} = [\underline{u}_1 \dots \underline{u}_s]^T$.

Dla D_b^* danego zestawem nierówności $D_b^* = \{b: \underline{c}_j \leq c_j^T b \leq \bar{c}_j, c_j \in \mathbb{R}^s, \underline{c}_j, c_{ji}, b_i > 0, j \in \overline{1, r}, i \in \overline{1, s}\}$ musimy rozważać wartości funkcji ϕ w wierzchołkach hiperpowierzchni ograniczającej zbiór D_b^* . Pierwszy etap rozwiązania komplikuje się i w łatwy sposób możemy otrzymać jedynie ograniczenie od dołu na $\bar{\phi}(u)$:

$$\bar{\phi}(u) \geq \min_{j \in \overline{1, r}} \max_{i \in \overline{1, s}} \frac{\bar{c}_j}{c_{ji}} u_i.$$

Jednak niezależnie od takiego utrudnienia w drugim etapie otrzymujemy.

$$\min_u \bar{\phi}(u) = 0 \quad \rightarrow \quad u_{\min} = \bar{0}.$$

Przy dodatkowym ograniczeniu $u_i \geq \underline{u}_i$, gdzie $\underline{u}_i \geq 0$, $i \in \overline{1, s}$ dostajemy $u_{\min} = \underline{u} = [\underline{u}_1 \dots \underline{u}_s]^T$.

Przykład 2.16: $u, b \in \mathbb{R}^s, v \in \mathbb{R}^1$.

Dane: $\phi(u, b) = b^T u$, $D_b^* = \{b: \underline{c} \leq \sum_{i=1}^s c_i b_i^2 \leq \bar{c}, c \in \mathbb{R}^s, \underline{c}, c_i, b_i > 0, i \in \overline{1, s}\}$.

Rozwiązanie – przy dodatkowym założeniu, że $u_i \geq 0$:

$$\begin{aligned}\bar{\phi}(u) &= \max_{b \in D_b^*} b^T u = \sqrt{\bar{c} \left(\frac{u_1^2}{c_1} + \frac{u_2^2}{c_2} + \dots + \frac{u_s^2}{c_s} \right)}, \\ \min_u \bar{\phi}(u) &= \min_u \sqrt{\bar{c} \left(\frac{u_1^2}{c_1} + \frac{u_2^2}{c_2} + \dots + \frac{u_s^2}{c_s} \right)} = 0 \quad \rightarrow \quad u_{\min} = \bar{0}.\end{aligned}$$

Przy dodatkowym ograniczeniu $u_i \geq \underline{u}_i$, gdzie $\underline{u}_i \geq 0$, $i \in \overline{1, s}$ dostajemy $u_{\min} = \underline{u} = [\underline{u}_1 \dots \underline{u}_s]^T$.

Przykład 2.17: $u, b \in \mathbb{R}^s, v \in \mathbb{R}^1$.

Dane: $\phi(u, b) = u^T A u \pm b^T u$, $D_b^* = \{b: \underline{b}_i \leq b_i \leq \bar{b}_i, \underline{b}_i > 0, i \in \overline{1, s}\}$.

Rozwiązanie:

1° Dla $v = u^T A u \pm b^T u$ oraz dodatnio określonej macierzy A otrzymujemy:

$$\bar{\phi}(u) = \max_{b \in D_b^*} \left(u^T A u + b^T u \right) = u^T A u + \hat{b}^T u, \quad \text{gdzie} \quad \hat{b}_i = \begin{cases} \underline{b}_i & u_i \leq 0 \\ \bar{b}_i & u_i > 0 \end{cases}$$

lub

$$\bar{\phi}(u) = \max_{b \in D_b^*} \left(u^T A u - b^T u \right) = u^T A u - \check{b}^T u, \quad \text{gdzie} \quad \check{b}_i = \begin{cases} \bar{b}_i & u_i \leq 0 \\ \underline{b}_i & u_i > 0 \end{cases}.$$

W następnym kroku należy przeprowadzić minimalizację

$$\min_u \bar{\phi}(u) \rightarrow u_{\min}.$$

Jest to trudne zadanie, ponieważ $\bar{\phi}(u)$ jest w istocie określona 2^s różnymi funkcjami, w zależności od znaku poszczególnych składowych wektora u . Minima globalne niektórych z 2^s funkcji mogą leżeć poza fragmentami przestrzeni U , w których te funkcje są rozważane. Wówczas $u_{\min}$ należy poszukiwać w zbiorze wartości u minimalizujących pozostałe funkcje, ale także na hiperpowierzchniach odgraniczających poszczególne fragmenty przestrzeni U . Jest to problem optymalizacji z ograniczeniami, którego rozwiązanie trudno w ogólności uzyskać w sposób analityczny. Można zastosować numeryczny algorytm optymalizacji, ale nie z grupy algorytmów gradientowych ponieważ nie ma pewności że $\bar{\phi}(u)$ jest unimodalna.

Od oryginalnego problemu minimaxowego (min max) często łatwiej jest rozwiązać problem pokrewny (max min). Nie zawsze jednak jego rozwiązanie jest tożsame z rozwiązaniem problemu minimaxowego. Może mieć ono określoną interpretację praktyczną, a dla konkretnych przypadków – dla których istnieją rozwiązania w formie analitycznej – można próbować wyprowadzać warunki równoważności obydwóch problemów. Problem pokrewny:

$$\phi_{\min}(b) = \min_u u^T A u \pm b^T u = -\frac{1}{4} b^T A^{-1} b, \quad u_{\min}(b) = \mp \frac{1}{2} A^{-1} b.$$

W następnym kroku należy przeprowadzić maksymalizację

$$\max_{b \in D_b^*} \phi_{\min}(b) = \max_{b \in D_b^*} -\frac{1}{4} b^T A^{-1} b.$$

Jej wynik trudno jednak uzyskać w formie analitycznej. Wiadomo, że rozwiązanie leży na hiperpowierzchni ograniczającej D_b^* . Można zastosować numeryczny algorytm optymalizacji funkcji z ograniczeniami, np. algorytm gradientowy z funkcją kary.

2° Dla $v = u^T A u \pm b^T u$ oraz ujemnie określonej macierzy A otrzymujemy $\bar{\phi}(u)$ w postaci takiej samej jak w 1°. W następnym kroku należy przeprowadzić minimalizację $\bar{\phi}(u)$. Trzeba zauważyć, że w tym przypadku $\bar{\phi}(u)$ nie jest ograniczona od dołu i bez dodatkowych ograniczeń na u rozważanie problemu minimaxowego nie ma sensu. Nawet przy dodatkowych ograniczeniach o postaci $\underline{u}_i \leq u_i \leq \bar{u}_i$, $i \in \overline{1, s}$ z powodów jak w 1° nie uzyskamy rozwiązania w formie analitycznej.

Podobnie, nie uzyskamy rozwiązania problemu pokrewnego w formie analitycznej.

Przykład 2.18: $u, b \in \mathbb{R}^s$, $v \in \mathbb{R}^1$.

Dane: $\phi(u, b) = u^T A u \pm b^T u$, $D_b^* = \{b: \underline{c} \leq c^T b \leq \bar{c}, c \in \mathbb{R}^s, \underline{c}, c_i, b_i > 0, i \in \overline{1, s}\}$.

Rozwiązanie:

1° Dla $v = u^T A u \pm b^T u$ oraz dodatnio określonej macierzy A otrzymujemy:

$$\bar{\phi}(u) = \max_{b \in D_b^*} \left(u^T A u + b^T u \right) = \max_{i \in \overline{1, s}} \left(u^T A u + \hat{b}_i u_i \right), \quad \text{gdzie}$$

$$\hat{b}_i = \begin{cases} \frac{\underline{c}}{c_i} & u_i \leq 0 \\ \frac{\bar{c}}{c_i} & u_i > 0 \end{cases}$$

lub

$$\bar{\phi}(u) = \max_{b \in D_b^*} \left(u^T A u - b^T u \right) = \max_{i \in \overline{1, s}} \left(u^T A u - \tilde{b}_i u_i \right), \quad \text{gdzie}$$

$$\tilde{b}_i = \begin{cases} \frac{\bar{c}}{c_i} & u_i \leq 0 \\ \frac{\underline{c}}{c_i} & u_i > 0 \end{cases}.$$

W następnym kroku należy przeprowadzić minimalizację tak zdefiniowanej funkcji $\bar{\phi}(u)$. Z powodów wskazanych wcześniej nie uzyskamy rozwiązania w formie analitycznej. Można zastosować bezgradientowy numeryczny algorytm optymalizacji.

Dalej spróbujemy rozwiązać problem pokrewny:

$$\phi_{\min}(b) = \min_u \left(u^T A u \pm b^T u \right) = -\frac{1}{4} b^T A^{-1} b, \quad u_{\min}(b) = \mp \frac{1}{2} A^{-1} b.$$

W następnym kroku należy przeprowadzić maksymalizację $\phi_{\min}(b)$ przy ograniczeniu równościowym $c^T b = \underline{c}$. Rozwiązanie możemy uzyskać stosując metodę mnożników Lagrange'a. Dostajemy

$$b_{\max} = \frac{\underline{c}}{c^T A c} A c$$

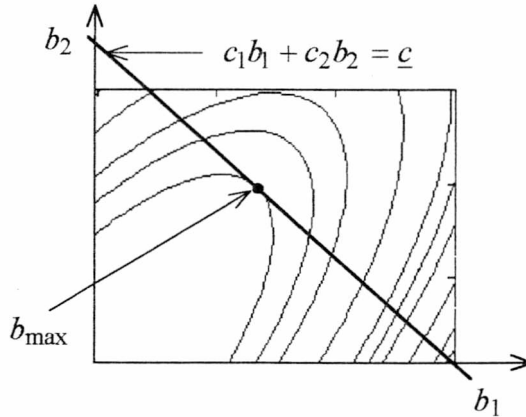
oraz

$$\bar{\phi}_{\min} = -\frac{1}{4} \frac{\underline{c}^2}{c^T A c},$$

$$\bar{u}_{\min} = \mp \frac{1}{2} \frac{\underline{c}}{c^T A c} c.$$

Otrzymamy wynik będzie poprawny, jeśli wszystkie składowe wyliczonego w ten sposób wektora $b_{\max}$ będą nieujemne. W przeciwnym wypadku należy rozwiązać zadanie maksymalizacji $\phi_{\min}(b)$ z ograniczeniem równościowym $c^T b = \underline{c}$ oraz z ograniczeniami nierównościami $b_i \geq 0, i \in \overline{1, s}$.

W prostych przypadkach rozwiązanie ZPD można zilustrować graficznie (Rys. 2.10).



Rys. 2.10 Ilustracja rozwiązania problemu pokrewnego w Przykładzie 2.18 dla $s = 2$.
Poziomice reprezentują $\phi_{\min}(b)$.

2° Dla $v = u^T A u \pm b^T u$ oraz ujemnie określonej macierzy A otrzymujemy $\bar{\phi}(u)$ jak w 1°, ale bez dodatkowych ograniczeń na u rozwiązanie problemu minimaksowego nie ma sensu.

Przykład 2.19: $u, b \in \mathbb{R}^s, v \in \mathbb{R}^1$.

Dane: $\phi(u, b) = u^T A u \pm b^T u$, $D_b^* = \{b: \underline{c} \leq \sum_{i=1}^s c_i b_i^2 \leq \bar{c}, c \in \mathbb{R}^s, \underline{c}, c_i, b_i > 0, i \in \overline{1, s}\}$.

Rozwiązanie:

1° Dla $v = u^T A u \pm b^T u$ oraz dodatnio określonej macierzy A otrzymujemy:

$$\bar{\phi}(u) = \max_{b \in D_b^*} \left(u^T A u + b^T u \right) = u^T A u + r(u),$$

gdzie $r(u)$ jest wynikiem maksymalizacji $b^T u$ względem $b \in D_b^*$ dla $u \in \mathbb{R}^s$. W zależności od znaku składowych wektora u musimy rozwiązać 2^s zadań maksymalizacji z inną dla każdego zadania postacią ograniczenia dotyczącego b . Np. dla $u_i \geq 0, i \in \overline{1, s}$

dostajemy $r(u) = \sqrt{\bar{c} \left(\frac{u_1^2}{c_1} + \frac{u_2^2}{c_2} + \dots + \frac{u_s^2}{c_s} \right)}$, a dla $u_i < 0, i \in \overline{1, s}$ mamy

$$r(u) = \max_{i \in \overline{1, s}} \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_i}} u_i.$$

Dla $v = u^T A u - b^T u$ wynik jest podobny.

W następnym kroku należy przeprowadzić minimalizację tak zdefiniowanej funkcji $\bar{\phi}(u)$.

W porównaniu z poprzednimi przykładami tym razem $\bar{\phi}(u)$ wyraża się bardziej skomplikowanymi wzorami. Z powodów wskazanych wcześniej nie uzyskamy rozwiązania w formie analitycznej. Można zastosować bezgradientowy numeryczny algorytm optymalizacji.

Dalej spróbujemy rozwiązać problem pokrewny:

$$\phi_{\min}(b) = \min_u \left(u^T A u \pm b^T u \right) = -\frac{1}{4} b^T A^{-1} b, \quad u_{\min}(b) = \mp \frac{1}{2} A^{-1} b.$$

W następnym kroku należy przeprowadzić maksymalizację $\phi_{\min}(b)$ przy ograniczeniu

równościowym $\sum_{i=1}^s c_i b_i^2 = \underline{c}$. Zastosowanie metody mnożników Lagrange'a prowadzi do

zawiłych obliczeń – trzeba rozwiązać ze względu na $b_{\max}$ układ równań nieliniowych

$\frac{\underline{c}}{b_{\max}^T A^{-1} b_{\max}} A^{-1} b_{\max} - C b_{\max} = \bar{0}$, gdzie C jest macierzą diagonalną z $c_1, \dots, c_s$ na

głównej przekątnej. Otrzymamy wynik będzie poprawny, jeśli wszystkie składowe

wyliczonego w ten sposób wektora $b_{\max}$ będą nieujemne.

Zamiast metody Lagrange'a można wykorzystać numeryczny algorytm optymalizacji funkcji z ograniczeniami.

2° Dla $v = u^T A u \pm b^T u$ oraz ujemnie określonej macierzy A otrzymujemy $\bar{\phi}(u)$ jak w 1°, ale bez dodatkowych ograniczeń na u rozwiązanie problemu minimaxowego nie ma sensu.

Po serii przykładów dotyczących podsystemu funkcyjnego opisanego za pomocą wybranych typowych funkcji oraz typowych zbiorów wartości parametrów mogących wynikać z podsystemu logicznego zaprezentowane zostaną przykłady o charakterze praktycznym.

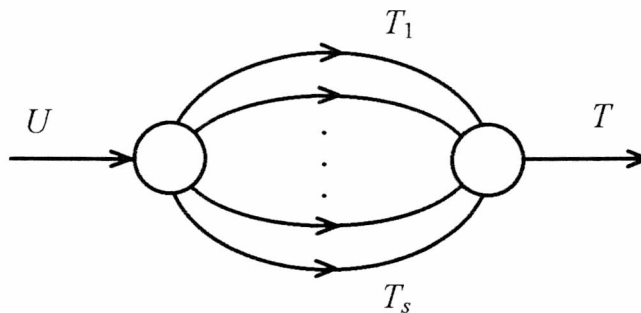
Przykład 2.20. W tym przykładzie jako podsystem funkcyjny rozważamy kompleks operacji równoległych (Rys. 2.11). Operacja i -ta, $i \in \overline{1, s}$ polega na wykonaniu zadania o rozmiarze u_i z wykorzystaniem zasobu o wielkości proporcjonalnej do parametru k_i . Czas realizacji i -tej operacji oznaczamy przez T_i . W typowym przypadku wyraża się on następującym wzorem:

$$T_i = k_i u_i^{\lambda_i}, \quad k_i, \lambda_i > 0, \quad i \in \overline{1, s}. \quad (2.5)$$

Przy założeniu $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = \lambda$ czas realizacji kompleksu operacji jest wyrażony zależnością

$$T = \max_{i \in \overline{1, s}} T_i = \phi(k, u). \quad (2.6)$$

Zadanie podejmowania decyzji polega na wyborze $u_{\min,1}, u_{\min,2}, \dots, u_{\min,s}$, czyli takiego rozdziału zadania o całkowitym rozmiarze $U = \sum_{i=1}^s u_i$ pomiędzy poszczególne operacje, który minimalizuje czas realizacji kompleksu (2.6).



Rys. 2.11 Schemat systemu typu kompleks operacji równoległych.

Dla założonych modeli operacji przeprowadzamy minimalizację $\min_u \phi(u, k)$ i dostajemy

następujące rozwiązanie [5]

$$u_{\min,i} = \frac{U}{k_i^{\frac{1}{\lambda}} \left(k_1^{-\frac{1}{\lambda}} + \dots + k_s^{-\frac{1}{\lambda}} \right)}, \quad (2.7)$$

$$T_{\min} = \left(k_1^{-\frac{1}{\lambda}} + \dots + k_s^{-\frac{1}{\lambda}} \right)^{-\lambda} U^\lambda = \phi_{\min}(k). \quad (2.8)$$

Podstawiając do (2.7) konkretne wartości parametrów k wyznaczamy optymalny rozdział zadania. Jeśli z jakichś powodów konkretne wartości parametrów k nie są znane, a znana jest własność $k \in D_k^*$ otrzymana z podsystemu logicznego, to dla danego D_k^* będziemy wyznaczać $u_{\min}$ rozwiązując problem minimaksowy. Rozwiązania problemu minimaksowego a także problemu pokrewnego dla typowych postaci zbioru D_k^* podane są poniżej.

1° Dla $D_k^* = \{k: \underline{k}_i \leq k_i \leq \bar{k}_i, \underline{k}_i > 0, i \in \overline{1,s}\}$ dostajemy

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(u) &= \max_{k \in D_k^*} \max_{i \in \overline{1,s}} k_i u_i^\lambda = \max_{i \in \overline{1,s}} \bar{k}_i u_i^\lambda, \\ \min_u \bar{\phi}(u) &= \left(\bar{k}_1^{-\frac{1}{\lambda}} + \dots + \bar{k}_s^{-\frac{1}{\lambda}} \right)^{-\lambda} U^\lambda, \quad u_{\min,i} = \frac{U}{\bar{k}_i^{\frac{1}{\lambda}} \left(\bar{k}_1^{-\frac{1}{\lambda}} + \dots + \bar{k}_s^{-\frac{1}{\lambda}} \right)}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie problemu pokrewnego uzyskamy przeprowadzając maksymalizację $\phi_{\min}(k)$

(2.8) względem $k \in D_k^*$:

$$\bar{\phi}_{\min} = \left(\bar{k}_1^{-\frac{1}{\lambda}} + \dots + \bar{k}_s^{-\frac{1}{\lambda}} \right)^{-\lambda} U^\lambda, \quad \bar{u}_{\min,i} = \frac{U}{\bar{k}_i^{\frac{1}{\lambda}} \left(\bar{k}_1^{-\frac{1}{\lambda}} + \dots + \bar{k}_s^{-\frac{1}{\lambda}} \right)}.$$

Łatwo zauważyć, że w tym przypadku problem pokrewny jest równoważny problemowi minimaksowemu.

2° Dla $D_k^* = \{k: \underline{c} \leq c^T k \leq \bar{c}, c \in \mathbb{R}^s, \underline{c}, c_i, k_i > 0, i \in \overline{1,s}\}$ dostajemy

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(u) &= \max_{k \in D_k^*} \max_{i \in \overline{1,s}} k_i u_i^\lambda = \max_{i \in \overline{1,s}} \frac{\bar{c}}{c_i} u_i^\lambda, \\ \min_u \bar{\phi}(u) &= \left(c_1^{\frac{1}{\lambda}} + \dots + c_s^{\frac{1}{\lambda}} \right)^{-\lambda} \bar{c} U^\lambda, \quad u_{\min,i} = \frac{c_i^{\frac{1}{\lambda}} U}{c_1^{\frac{1}{\lambda}} + \dots + c_s^{\frac{1}{\lambda}}}. \end{aligned}$$

Natomiast rozwiązanie problemu pokrewnego jest następujące

$$\bar{\phi}_{\min} = \left(c_1^{\frac{1}{\lambda+1}} + \dots + c_s^{\frac{1}{\lambda+1}} \right)^{-(\lambda+1)} \bar{c} U^\lambda, \quad \bar{u}_{\min,i} = \frac{c_i^{\frac{1}{\lambda+1}} U}{c_1^{\frac{1}{\lambda+1}} + \dots + c_s^{\frac{1}{\lambda+1}}}.$$

Łatwo zauważyć, że w tym przypadku problem pokrewny nie jest równoważny problemowi minimaksowemu.

3° Dla $D_k^* = \{k: \underline{c} \leq \sum_{i=1}^s c_i k_i^2 \leq \bar{c}, c \in \mathbb{R}^s, \underline{c}, c_i, k_i > 0, i \in \overline{1, s}\}$ dostajemy

$$\bar{\phi}(u) = \max_{k \in D_k^*} \max_{i \in \overline{1, s}} k_i u_i^\lambda = \max_{i \in \overline{1, s}} \sqrt{\frac{\bar{c}}{c_i}} u_i^\lambda,$$

$$\min_u \bar{\phi}(u) = \left(c_1^{\frac{1}{2\lambda}} + \dots + c_s^{\frac{1}{2\lambda}} \right)^{-\lambda} \sqrt{\bar{c}} U^\lambda, \quad u_{\min,i} = \frac{c_i^{\frac{1}{2\lambda}} U}{c_1^{\frac{1}{2\lambda}} + \dots + c_s^{\frac{1}{2\lambda}}}.$$

Natomiast rozwiązanie problemu pokrewnego jest następujące

$$\bar{\phi}_{\min} = \left(c_1^{\frac{1}{2\lambda+1}} + \dots + c_s^{\frac{1}{2\lambda+1}} \right)^{-\frac{2\lambda+1}{2}} \sqrt{\bar{c}} U^\lambda, \quad \bar{u}_{\min,i} = \frac{c_i^{\frac{1}{2\lambda+1}} U}{c_1^{\frac{1}{2\lambda+1}} + \dots + c_s^{\frac{1}{2\lambda+1}}}.$$

Łatwo zauważyć, że w tym przypadku problem pokrewny nie jest równoważny problemowi minimaksowemu.

Postaci zbiorów D_k^* w przykładzie mogą mieć następujące interpretacje praktyczne: Mogą wiązać się z ograniczeniami technologicznymi na wielkości zasobów typu surowiec przydzielane do poszczególnych operacji (1°), z ograniczeniami na proporcje w jakich zasoby typu surowiec są przydzielane do poszczególnych operacji (2°) lub z ograniczeniami na proporcje w jakich do poszczególnych operacji przydzielane są zasoby typu energia (3°). Warto ponadto zauważyć, że tylko w przypadku zasobów przydzielanych do operacji w sposób niezależny (przypadek 1°) problem pokrewny równoważny jest problemowi minimaksowemu.

Przykład 2.21. W tym przykładzie jako podsystem funkcyjny rozważamy prosty system sterowania kompleksem operacji transportowych, w którym występuje s dostawców (hurtowni) surowca i l jego odbiorców (sklepów). Poszczególni dostawcy dysponują surowcem w ilościach $H_1, H_2, \dots, H_s$, natomiast poszczególni odbiorcy zgłaszają

zapotrzebowanie na surowiec w wysokości $S_1, S_2, \dots, S_l$ ($\sum_{i=1}^s H_i = \sum_{j=1}^l S_j$). Jednostkowy koszt

transportu surowca od i -tego dostawcy do j -tego odbiorcy wynosi k_{ij} , a jeśli ilość przewożonego na tej trasie surowca oznaczmy przez u_{ij} (Rys. 2.12), to całkowity koszt transportu wyraża się wzorem

$$Q = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^l k_{ij} u_{ij} = \phi(u, k) \quad (2.9)$$

Zadanie podejmowania decyzji polega na wyborze $u_{\min, ij}$, $i \in \overline{1, s}$, $j \in \overline{1, l}$ – takich ilości przewożonego surowca, dla których całkowity koszt transportu (2.9) jest najmniejszy. Należy przy tym uwzględnić ograniczenia

$$\sum_{j=1}^l u_{ij} = H_i, \quad i \in \overline{1, s}, \quad \sum_{i=1}^s u_{ij} = S_j, \quad j \in \overline{1, l}. \quad (2.10)$$

	S_1	S_2	...	S_l
H_1	k_{11} u_{11}	k_{12} u_{12}	...	k_{1l} u_{1l}
H_2	k_{21} u_{21}	k_{22} u_{22}	...	k_{2l} u_{2l}
...	...	...	...	...
H_s	k_{s1} u_{s1}	k_{s2} u_{s2}	...	k_{sl} u_{sl}

Rys. 2.12 Rozkład zapotrzebowań i kosztów dla systemu sterowania kompleksem operacji transportowych.

Jest to problem programowania liniowego, dla którego istnieją numeryczne algorytmy rozwiązania go dla danych konkretnych wartości H_i , S_j oraz k_{ij} , $i \in \overline{1, s}$, $j \in \overline{1, l}$. Jeśli konkretne wartości parametrów k nie są znane, a znana jest własność $k \in D_k^*$ otrzymana z podsystemu logicznego, to dla danego D_k^* będziemy wyznaczać $u_{\min}$ rozwiązując problem minimaxowy. Wyniki uzyskane dla typowych postaci zbioru D_k^* pokazane są poniżej.

1° Dla $D_k^* = \{k: \underline{k}_{ij} \leq k_{ij} \leq \bar{k}_{ij}, \underline{k}_{ij} > 0, i \in \overline{1, s}, j \in \overline{1, l}\}$ dostajemy

$$\bar{\phi}(u) = \max_{k \in D_k^*} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^l k_{ij} u_{ij} = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^l \bar{k}_{ij} u_{ij}.$$

Teraz należy przeprowadzić minimalizację $\bar{\phi}(u)$ względem u . Rozwiązania nie uzyskamy w formie analitycznej, ale możemy zastosować algorytm numeryczny.

Do rozwiązania problemu pokrewnego należałoby najpierw wyznaczyć wynik minimalizacji (2.9) względem u w formie analitycznej.

2° Dla $D_k^* = \{k: \underline{c} \leq \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^l c_{ij} k_{ij} \leq \bar{c}, c \in \mathbb{R}^{s \times l}, \underline{c}, c_{ij}, k_{ij} > 0, i \in \overline{1, s}, j \in \overline{1, l}\}$ dostajemy

(patrz Przykład 2.15)

$$\bar{\phi}(u) = \max_{k \in D_k^*} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^l k_{ij} u_{ij} = \max_i \max_j \frac{\bar{c}}{c_{ij}} u_{ij}.$$

Teraz jednak nie wiadomo jak przeprowadzić minimalizację tak zdefiniowanej funkcji $\bar{\phi}(u)$. Łatwo zauważyć, że bez uwzględnienia (2.10) rozwiązanie spełnia równości

$$\frac{u_{11}}{c_{11}} = \frac{u_{12}}{c_{12}} = \dots = \frac{u_{ij}}{c_{ij}} = \dots = \frac{u_{sl}}{c_{sl}}.$$

Po uwzględnieniu ograniczeń równości te w ogólności nie mogą być spełnione dla poszukiwanego rozwiązania. Zamiast oryginalnego można postawić wymaganie, aby poszczególne ilorazy przyjmowały wartości jak najbardziej do siebie

zbliżone i minimalizować $\frac{1}{s \cdot l} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^l \left(\frac{u_{ij}}{c_{ij}} - \frac{1}{s \cdot l} \sum_{p=1}^s \sum_{q=1}^l \frac{u_{pq}}{c_{pq}} \right)^2$ (wariancję z próby liczoną

dla ilorazów $\frac{u_{ij}}{c_{ij}}$) z uwzględnieniem (2.10). Zastosowanie metody mnożników Lagrange'a

proceedzi do układu $s \cdot l + s + l$ równań liniowych z $s \cdot l + s + l$ niewiadomymi, który przy spełnieniu pewnych warunków ma jednoznaczne rozwiązanie. Można je traktować jako przybliżenie poszukiwanego rozwiązania problemu oryginalnego.

3° Dla $D_k^* = \{k: \underline{c} \leq \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^l c_{ij} k_{ij}^2 \leq \bar{c}, c \in \mathbb{R}^{s \times l}, \underline{c}, c_{ij}, k_{ij} > 0, i \in \overline{1, s}, j \in \overline{1, l}\}$ dostajemy

(patrz Przykład 2.16)

$$\bar{\phi}(u) = \max_{k \in D_k^*} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^l k_{ij} u_{ij} = \sqrt{\bar{c} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^l \frac{u_{ij}^2}{c_{ij}}}.$$

Następnie przeprowadzamy minimalizację $\bar{\phi}(u)$ względem u przy ograniczeniach (2.10) stosując metodę mnożników Lagrange'a. Otrzymujemy

$$u_{\min,ij} = c_{ij}(\lambda_{H,i} + \lambda_{S,j}) ,$$

gdzie

$$\lambda_H = [M_H - CM_S^{-1}C^T]^{-1}[H - CM_S^{-1}S] ,$$

$$\lambda_S = [M_S - C^T M_H^{-1}C]^{-1}[S - C^T M_H^{-1}H] ,$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} & c_{s2} & \dots & c_{sl} \end{bmatrix} , \quad H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \dots \\ H_s \end{bmatrix} , \quad S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \dots \\ S_l \end{bmatrix} ,$$

$$M_S = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^s c_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^s c_{i2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{i=1}^s c_{il} \end{bmatrix} , \quad M_H = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^l c_{1j} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^l c_{2j} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{j=1}^l c_{sj} \end{bmatrix} .$$

Uzyskane rozwiązanie opisuje dość skomplikowana formuła, a warunkiem jego istnienia jest nieosobliwość odpowiednich macierzy.

Postacie zbiorów D_k^* w przykładzie mogą mieć następujące interpretacje praktyczne: Mogą wiązać się z ograniczeniami na koszt przewozu na poszczególnych trasach (1°), z ograniczeniami na koszt całkowity i proporcje w jakich koszt może być rozłożony pomiędzy poszczególne trasy (2°) lub z ograniczeniami na proporcje w jakich pomiędzy poszczególne trasy może być rozłożony koszt wynikający z wydatku energii (3°). Łatwo zauważyć, że nie można rozwiązać problemu pokrewnego ze względu na trudność z wyznaczeniem rozwiązania odpowiedniego zadania minimalizacji w formie analitycznej.

Algorytm rozwiązania Problemu 1.11 (ZPD – rozszerzone):

Zgodnie z treścią sformułowania Problemu 1.11 dla rozszerzonego ZPD chcemy dla D_v^* znaleźć parę F_x^*, D_u^* , czyli najlepszą własność i największy zbiór, dla których wymagane jest

spełnione. Łatwo zauważyć, że wymaganie może być spełnione dla wielu różnych par F_x, D_u . Zgodnie z Tw.2.3 dla "lepszej" własności F_x uzyskujemy mniejszy zbiór D_u^* , a dla większego zbioru D_u uzyskujemy "gorszą" własność F_x^* (Tw.2.3, Uwaga 3 oraz Tw.2.1, Tw.2.2). Nie istnieje zatem para F_x, D_u najlepsza w sensie jak w sformułowaniu Problemu 1.11. Odwołując się do definicji rozwiązania ZPD jako największego zbioru wartości wejść, dla których wymaganie dotyczące wyjścia jest spełnione możemy zaproponować rozwiązanie rozszerzonego ZPD jako D_{F_x, D_u}^* – największy zbiór par F_x, D_u , dla których zachodzi (1.15). Na podstawie Uwagi 1 do Tw.2.3 wystarczy wyznaczyć $D_{\bar{F}_x, D_u}^*$, tzn. zbiór par $\bar{F}_{xm}, D_{um}^*$ – składników jedynek i uzyskanych dla nich największych zbiorów D_{um} spełniających (1.15). Wówczas dowolną własność F_x można zbudować jako alternatywę wybranych składników jedynek, a iloczyn zbiorów D_{um}^* uzyskanych dla tych składników utworzy zbiór D_u^* . Teraz rozszerzone ZPD sformułujemy na nowo w następujący sposób:

Problem 1.11a (ZPD – rozszerzone):

Dane: $F, \phi, D_v^*, (\alpha_b, \alpha_x)$.

Szukane: $D_{\bar{F}_x, D_u}^*$ (lub D_{F_x, D_u}^*), czyli zbiór par $\bar{F}_{xm}, D_{um}^*$ – składników jedynek i uzyskanych dla nich największych zbiorów D_{um} spełniających (1.15).

Algorytm rozwiązania Problemu 1.11a (ZPD – rozszerzone):

1. Przyjmujemy $D_{\bar{F}_x, D_u}^* = \emptyset$. Generujemy zbiór wszystkich składników jedynek $\bar{F}_{xm}$, $m \in \overline{1, 2^{n_x}}$. Następnie dla kolejnych m :
 2. Rozwiązujemy ZA dla podsystemu logicznego, tzn. dla faktów F i własności $\bar{F}_{xm}$ rozwiązujemy (1.12) podstawiając a_b w miejsce α_y . Stosujemy metodę logiczno-algebraiczną i otrzymujemy F_{bm} .
 3. Wyznaczona własność F_{bm} determinuje, zgodnie z (1.10), zbiór D_{bm} .
 4. Rozwiązujemy ZPD dla podsystemu funkcyjnego: dla D_v^* i D_{bm} wyznaczamy D_{um}^* zgodnie z (1.5), (1.6) lub (1.7).
 5. Parę $\bar{F}_{xm}, D_{um}^*$ (może być $D_{um}^* = \emptyset$) dołączamy do $D_{\bar{F}_x, D_u}^*$.

Nie występuje tu problem dopasowania. Złożoność obliczeniowa algorytmu rozwiązania rośnie wykładniczo wraz ze wzrostem n_1 – liczby formuł elementarnych α_x – co jest jego niewątpliwym mankamentem. Algorytm rozwiązania rozszerzonego ZPD sprowadza się do 2^m -krotnego rozwiązania prostego ZPD z zastosowaniem Algorytmu 1.9. Poniżej przedstawiony jest przykład ilustracyjny, w którym wykorzystujemy zależności wyprowadzone w poprzednich przykładach.

Przykład 2.22: $u, b \in \mathbb{R}^s, v \in \mathbb{R}^1$.

Podsystem logiczny opisany jest zestawem faktów:

$$F_1 = (\alpha_1 \rightarrow \neg\alpha_{10}) \wedge (\alpha_8 \vee \alpha_3),$$

$$F_2 = (\alpha_6 \vee \alpha_8) \rightarrow (\neg\alpha_3 \wedge \alpha_{10}),$$

$$F_3 = (\alpha_8 \rightarrow \alpha_9) \wedge (\alpha_3 \rightarrow \alpha_{10}),$$

$$F_4 = \alpha_7 \rightarrow (\alpha_9 \vee \neg\alpha_2),$$

$$F_5 = (\neg\alpha_1 \vee \alpha_8) \wedge (\neg\alpha_2 \vee \alpha_3),$$

$$F_6 = \neg\alpha_9 \vee (\alpha_3 \rightarrow \alpha_2),$$

$$F_7 = (\alpha_4 \vee \alpha_5) \rightarrow \alpha_7,$$

$$F_8 = (\alpha_6 \wedge \alpha_7) \rightarrow \alpha_5,$$

gdzie $\alpha_x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha_b = (\alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10})$ oraz $\alpha_8 = "c^T b \leq d_1"$, $\alpha_9 = "c^T b \leq d_2"$, $\alpha_{10} = "c^T b \leq d_3"$, $c_i, b_i > 0$, $d_1 \leq d_2 \leq d_3$.

Podsystem funkcyjny opisany jest zależnością liniową:

$$\phi(u, b) = b^T u.$$

Wymaganie dotyczące wyjścia dane jest zbiorem $D_v^* = [\underline{v}, \bar{v}]$.

Rozwiązanie:

1. W pierwszym kroku rozwiązania przyjmujemy $D_{\bar{F}_x, D_u}^* = \emptyset$ i generujemy $2^3 = 8$ składników jedynek: $\bar{F}_{x1} = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$, $\bar{F}_{x2} = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3$, $\bar{F}_{x3} = \alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3$, $\bar{F}_{x4} = \alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3$, $\bar{F}_{x5} = \neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$, $\bar{F}_{x6} = \neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3$, $\bar{F}_{x7} = \neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3$, $\bar{F}_{x8} = \neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3$. Dla kolejnych składników jedynek wykonujemy kroki 2÷5. Nie podajemy szczegółów rozwiązania ZA dla podsystemu logicznego z zastosowaniem metody logiczno-algebraicznej (korzystamy z Tabeli 2.2, uwzględniając fakt

że w porównaniu z rozważaną tam RW zamienione miejscami są formuły druga z ósmą oraz trzecia z dziewiątą):

2. Dla F i $\bar{F}_{x1}$ rozwiązujemy ZA dla podsystemu logicznego uzyskując $F_{b1} = \emptyset$.
3. $F_{b1} = \emptyset \Rightarrow D_{b1} = \emptyset$.
4. Dla D_{b1} rozwiązujemy ZPD dla podsystemu funkcyjnego otrzymując $D_{u1}^* = \emptyset$.
5. $D_{\bar{F}_x, D_u}^* = \{ (\bar{F}_{x1}, \emptyset) \}$.

2. Dla $\bar{F}_{x2}$ uzyskujemy $F_{b2} = \emptyset$.
3. $D_{b2} = \emptyset$.
4. Dla D_{b2} otrzymujemy $D_{u2}^* = \emptyset$.
5. $D_{\bar{F}_x, D_u}^* = \{ (\bar{F}_{x1}, \emptyset), (\bar{F}_{x2}, \emptyset) \}$.

2. Dla $\bar{F}_{x3}$ uzyskujemy $F_{b3} = \emptyset$.
3. $D_{b3} = \emptyset$.
4. Dla D_{b3} otrzymujemy $D_{u3}^* = \emptyset$.
5. $D_{\bar{F}_x, D_u}^* = \{ (\bar{F}_{x1}, \emptyset), (\bar{F}_{x2}, \emptyset), (\bar{F}_{x3}, \emptyset) \}$.

2. Dla $\bar{F}_{x4}$ uzyskujemy $F_{b4} = \emptyset$.
3. $D_{b4} = \emptyset$.
4. Dla D_{b4} otrzymujemy $D_{u4}^* = \emptyset$.
5. $D_{\bar{F}_x, D_u}^* = \{ (\bar{F}_{x1}, \emptyset), (\bar{F}_{x2}, \emptyset), (\bar{F}_{x3}, \emptyset), (\bar{F}_{x4}, \emptyset) \}$.

2. Dla $\bar{F}_{x5}$ uzyskujemy $F_{b5} = (-\alpha_8 \wedge -\alpha_9 \wedge \alpha_{10}) \vee (-\alpha_8 \wedge \alpha_9 \wedge \alpha_{10})$.
3. $D_{b5} = \{ b: d_1 < c^T b \leq d_3 \}$.
4. Dla D_{b5} otrzymujemy $D_{u5}^* = \{ u: \frac{c_i v}{d_1} < u_i \leq \frac{c_i \bar{v}}{d_3}, \quad i \in \overline{1, s} \}$ (Przykład 2.9).
5. $D_{\bar{F}_x, D_u}^* = \{ (\bar{F}_{x1}, \emptyset), (\bar{F}_{x2}, \emptyset), (\bar{F}_{x3}, \emptyset), (\bar{F}_{x4}, \emptyset), (\bar{F}_{x5}, u_i \in (\frac{c_i v}{d_1}, \frac{c_i \bar{v}}{d_3}]) \}$.

2. Dla $\bar{F}_{x6}$ uzyskujemy $F_{b6} = \emptyset$.

3. $D_{b6} = \emptyset$.

4. Dla D_{b6} otrzymujemy $D_{u6}^* = \emptyset$.

5. $D_{\bar{F}_x, D_u}^* = \{ (\bar{F}_{x1}, \emptyset), (\bar{F}_{x2}, \emptyset), (\bar{F}_{x3}, \emptyset), (\bar{F}_{x4}, \emptyset), (\bar{F}_{x5}, u_i \in [\frac{c_i \underline{v}}{d_1}, \frac{c_i \bar{v}}{d_3}]),$
 $(\bar{F}_{x6}, \emptyset) \}.$

2. Dla $\bar{F}_{x7}$ uzyskujemy $F_{b7} = \neg \alpha_8 \wedge \neg \alpha_9 \wedge \alpha_{10}$.

3. $D_{b7} = \{ b: d_2 < c^T b \leq d_3 \}.$

4. Dla D_{b7} otrzymujemy $D_{u7}^* = \{ u: \frac{c_i \underline{v}}{d_2} < u_i \leq \frac{c_i \bar{v}}{d_3}, \quad i \in \overline{1, s} \} = \emptyset.$

5. $D_{\bar{F}_x, D_u}^* = \{ (\bar{F}_{x1}, \emptyset), (\bar{F}_{x2}, \emptyset), (\bar{F}_{x3}, \emptyset), (\bar{F}_{x4}, \emptyset), (\bar{F}_{x5}, u_i \in [\frac{c_i \underline{v}}{d_1}, \frac{c_i \bar{v}}{d_3}]),$
 $(\bar{F}_{x6}, \emptyset), (\bar{F}_{x7}, u_i \in [\frac{c_i \underline{v}}{d_2}, \frac{c_i \bar{v}}{d_3}]) \}.$

2. Dla $\bar{F}_{x8}$ uzyskujemy $F_{b8} = \alpha_8 \wedge \alpha_9 \wedge \alpha_{10}$.

3. $D_{b8} = \{ b: 0 < c^T b \leq d_1 \}.$

4. Dla D_{b8} otrzymujemy $D_{u8}^* = \{ u: \infty < u_i \leq \frac{c_i \bar{v}}{d_1}, \quad i \in \overline{1, s} \}.$

5. $D_{\bar{F}_x, D_u}^* = \{ (\bar{F}_{x1}, \emptyset), (\bar{F}_{x2}, \emptyset), (\bar{F}_{x3}, \emptyset), (\bar{F}_{x4}, \emptyset), (\bar{F}_{x5}, u_i \in [\frac{c_i \underline{v}}{d_1}, \frac{c_i \bar{v}}{d_3}]),$
 $(\bar{F}_{x6}, \emptyset), (\bar{F}_{x7}, u_i \in [\frac{c_i \underline{v}}{d_2}, \frac{c_i \bar{v}}{d_3}]), (\bar{F}_{x8}, \emptyset) \}.$

Dla takiego $D_{\bar{F}_x, D_u}^*$ dostajemy zbiór $D_{F_x, D_u}^* = \{ (\bar{F}_{x5}, u_i \in [\frac{c_i \underline{v}}{d_1}, \frac{c_i \bar{v}}{d_3}]), (\bar{F}_{x7},$

$u_i \in [\frac{c_i \underline{v}}{d_2}, \frac{c_i \bar{v}}{d_3}]), (\bar{F}_{x5} \vee \bar{F}_{x7}, u_i \in [\frac{c_i \underline{v}}{d_2}, \frac{c_i \bar{v}}{d_3}]) \}.$

3. Analiza i podejmowanie decyzji dla podsystemu logicznego z wykorzystaniem wiedzy z podsystemu funkcyjnego

W rozdziale tym prezentowane są algorytmy rozwiązania zadań sformułowanych w p.1.4, od Problemu 1.12 do Problemu 1.19. Algorytmy zostały opracowane dla podejścia z dekompozycją, zgodnie z którym rozwiązanie zadania sformułowanego dla całego systemu sprowadza się do sformułowania i rozwiązania odpowiednich zadań oddzielnie dla obydwóch podsystemów składowych. Podano algorytm "dopasowania" dla ZA, dokonano oceny wyników uzyskanych z zastosowaniem dekompozycji.

3.1 Podsystem logiczny z wejściem z podsystemu funkcyjnego

Algorytm rozwiązania Problemu 1.12 (ZA):

1. Rozwiązujemy ZA dla podsystemu funkcyjnego, tzn. dla D_u^* wyznaczamy D_x^* zgodnie z (1.2) lub (1.4).
2. Zbiór D_x^* nie determinuje własności F_x^* , trzeba więc zbudować własność najlepiej do D_x^* "dopasowaną".

Problem dopasowania (ZA-dopasowania)

Dane: D_x^* , α_x .

Szukane: $\tilde{F}_x$, czyli taka własność F_x , że $\tilde{D}_x$ (1.10) jest najmniejszym zbiorem zawierającym D_x^* .

Własność najlepiej "dopasowaną" $\tilde{F}_x$ można jednoznacznie przedstawić za pomocą alternatywy składników jedynek, czyli formuł postaci

$$\bar{F}_{xm} = \bar{\alpha}_{x1} \wedge \bar{\alpha}_{x2} \wedge \dots \wedge \bar{\alpha}_{xm1}, \quad (3.1)$$

$$m = 1, 2, \dots, 2^{n_1},$$

gdzie dla konkretnego m $\bar{\alpha}_{xp}$ ($p = 1, 2, \dots, n_1$) oznacza α_{xp} (formułę elementarną w afirmacji) albo oznacza $\neg\alpha_{xp}$ (formułę elementarną w negacji).

Oznaczmy przez M_{ZA} zbiór "składników jedynki", których alternatywą jest własność "najlepiej" dopasowana $\tilde{F}_x$, czyli $\tilde{F}_x = \bigvee_{m \in M_{ZA}} \bar{F}_{xm}$. Regułę, według której należy te składniki jedynki wybrać określa następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.1

$$M_{ZA} = \left\{ m \in \overline{1,2^{n_1}} : \bar{D}_{xm} \cap D_x^* \neq \emptyset \right\}, \quad (3.2)$$

gdzie $\bar{D}_{xm}$ wyznaczamy z (1.10) dla $\bar{F}_{xm}$.

Dowód:

Najpierw zauważmy, że zbiory $\bar{D}_{xm}$ (1.10) są rozłączne oraz $\bigcup_{m \in 1,2^{n_1}} \bar{D}_{xm} = X$. Wobec tego

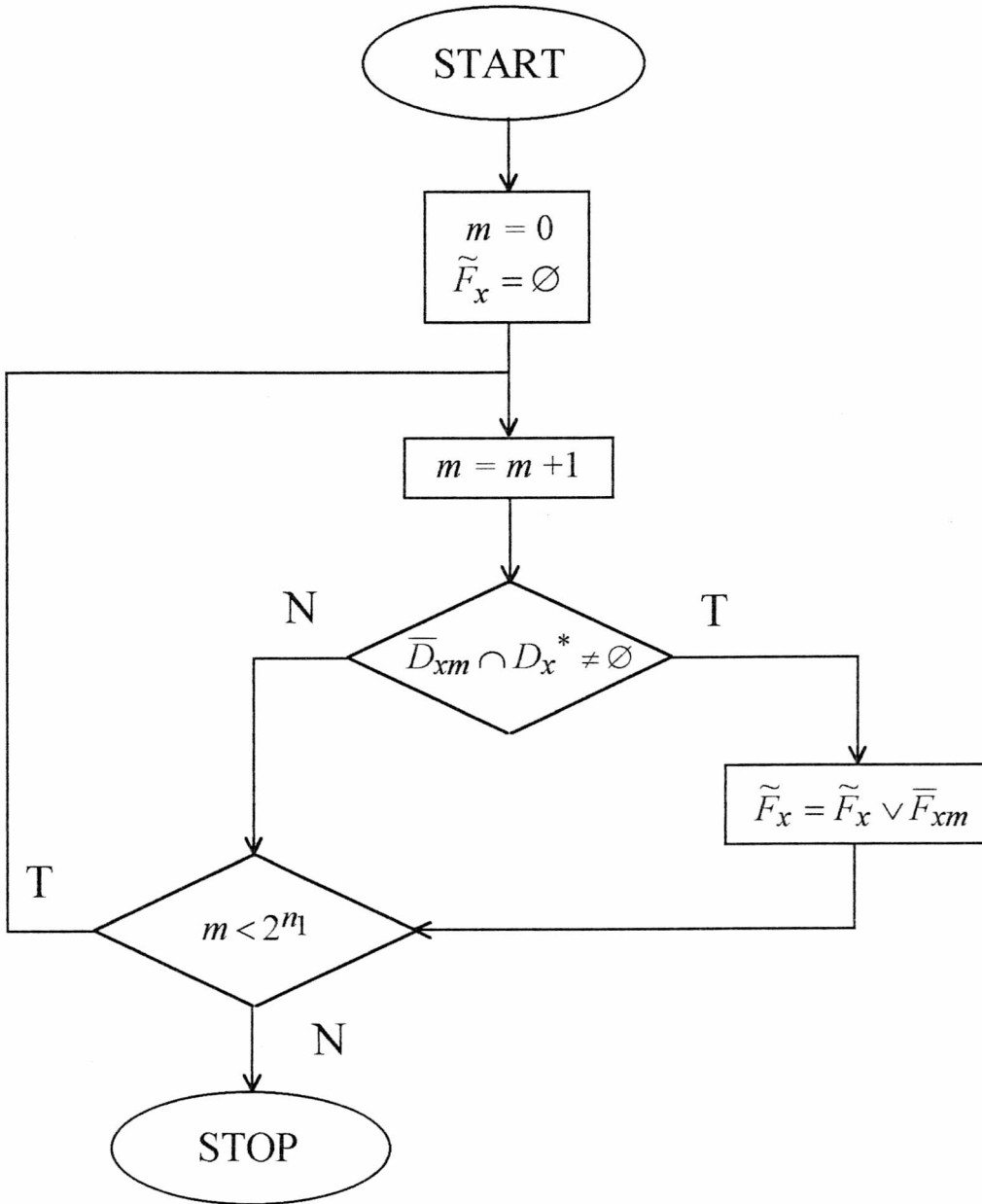
$$\bigwedge_{x \in D_x^*} \bigvee_{m \in M_{ZA}} x \in \bar{D}_{xm} \text{ i } D_x^* \subseteq \bigcup_{m \in M_{ZA}} \bar{D}_{xm} = \tilde{D}_x. \text{ Zatem spełniony jest warunek ze}$$

sformułowania problemu dopasowania dotyczący zawierania się odpowiednich zbiorów. Dalej przeprowadzamy dowód nie wprost. Załóżmy, że istnieje $\hat{m} \in M_{ZA}$ takie, że $\hat{F}_x =$

$\bigvee_{m \in M_{ZA} - \{\hat{m}\}} \bar{F}_{xm}$ jest własnością "lepiej" dopasowaną do D_x^* . Oznacza to, że $D_x^* \subseteq \hat{D}_x$. W

związku z rozłącznością zbiorów $\bar{D}_{xm}$ mamy $\hat{D}_x \cap \bar{D}_{x\hat{m}} = \emptyset$, zatem $\bar{D}_{x\hat{m}} \cap D_x^* = \emptyset$.

Zgodnie z (3.2) wynika stąd, że $\hat{m} \notin M_{ZA}$, co stoi w sprzeczności z założeniem. $\square$



Rys. 3.1 Schemat blokowy algorytmu ZA-dopasowania

3. Rozwiązujemy ZA dla podsystemu logicznego: dla faktów F i własności $\tilde{F}_x$ rozwiązujemy (1.12). Stosujemy metodę logiczno-algebraiczną otrzymując $\tilde{F}_y$.

O ważnej własności uzyskanego rozwiązania mówi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.2

Jeśli F_y^* oznacza poszukiwane "najlepsze" rozwiązanie, a $\tilde{F}_y$ rozwiązanie uzyskane z zastosowaniem podejścia z dekompozycją, to

$$F_y^* = \tilde{F}_y.$$

Dowód:

Przeprowadzamy dowód nie wprost. Przyjmijmy $F_y^* = \bigvee_{m \in M_y^*} \bar{F}_{ym}$, $\tilde{F}_y = \bigvee_{m \in \tilde{M}_y} \bar{F}_{ym}$ i

załóżmy, że $F_y^* \neq \tilde{F}_y$. Z definicji "najlepszego" rozwiązania mamy $F_y^* \rightarrow \tilde{F}_y$ ($M_y^* \subseteq \tilde{M}_y$). Dla

podsystemu logicznego i własności wyjściowej $\tilde{F}_y$ rozwiązaniem ZPD jest własność

wejściowa $\tilde{F}_x$, a dla własności wyjściowej F_y^* rozwiązaniem ZPD jest własność wejściowa

F_x^* . Łatwo pokazać, że $F_x^* \rightarrow \tilde{F}_x$ oraz $M_x^* \subseteq \tilde{M}_x$. Z Tw.3.1 wynika, że musi zachodzić

$M_x^* \supseteq M_{ZA} = \tilde{M}_x$. Stąd $M_x^* = \tilde{M}_x$ oraz $F_x^* = \tilde{F}_x$. Oznacza to, że $F_y^* = \tilde{F}_y$, co prowadzi do

sprzeczności z przyjętym założeniem. □

Przykład 3.1: $u \in \mathbb{R}^s$, $x \in \mathbb{R}^l$.

Podsystem logiczny opisany jest zestawem faktów jak w Przykładzie 2.1.

Przyjmujemy $\alpha_x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha_y = (\alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10})$ oraz $\alpha_1 = "x^T x \leq c_1^2"$, $\alpha_2 = "x^T x \leq c_2^2"$,

$\alpha_3 = "x^T x \leq c_3^2"$, $c_1 \leq c_2 \leq c_3$.

Podsystem funkcyjny opisany jest zależnością:

$$v = Bu,$$

gdzie $B = [b_{ij}]$ jest macierzą o nieujemnych elementach i o rozmiarze $l \times s$, tzn. $i = 1, 2, \dots, l$,

$j = 1, 2, \dots, s$.

Zbiór D_u^* definiowany jest zestawem nierówności

$$0 \leq \underline{u}_j \leq u_j \leq \bar{u}_j, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

1. W pierwszym kroku rozwiązania z (1.2) uzyskujemy D_x^* dany zestawem nierówności

$$b_i \underline{u} \leq x_i \leq b_i \bar{u}, \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

2. W drugim kroku rozważamy 2^3 "składników jedynek" (3.1). Tylko cztery z nich:

$$\bar{F}_{x1} = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3, \quad \bar{F}_{x2} = -\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3, \quad \bar{F}_{x3} = -\alpha_1 \wedge -\alpha_2 \wedge \alpha_3,$$

$$\bar{F}_{x4} = -\alpha_1 \wedge -\alpha_2 \wedge -\alpha_3 \quad \text{determinują niepuste zbiory: } \bar{D}_{x1} = \{x: x^T x \leq c_1^2\}, \quad \bar{D}_{x2} = \{x:$$

$$c_1^2 < x^T x \leq c_2^2\}, \quad \bar{D}_{x3} = \{x: c_2^2 < x^T x \leq c_3^2\}, \quad \bar{D}_{x4} = \{x: c_3^2 < x^T x\}, \text{ które rozpatrujemy w}$$

(3.2). Przyjmując dodatkowo $c_0 = 0$, $c_4 = \infty$ otrzymujemy

$$M_{ZA} = \left\{ m \in \overline{1,4}: [c_{m-1}^2 < \bar{x}^T \bar{x}] \wedge [\underline{x}^T \underline{x} \leq c_m^2] \right\},$$

gdzie $\bar{x} = B\bar{u}$, $\underline{x} = B\underline{u}$.

Np. dla $s=l=2$, $0.4 \leq u_1 \leq 0.5$, $0.3 \leq u_2 \leq 0.4$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$

uzyskujemy D_x^* (Rys. 3.2) dany zestawem nierówności

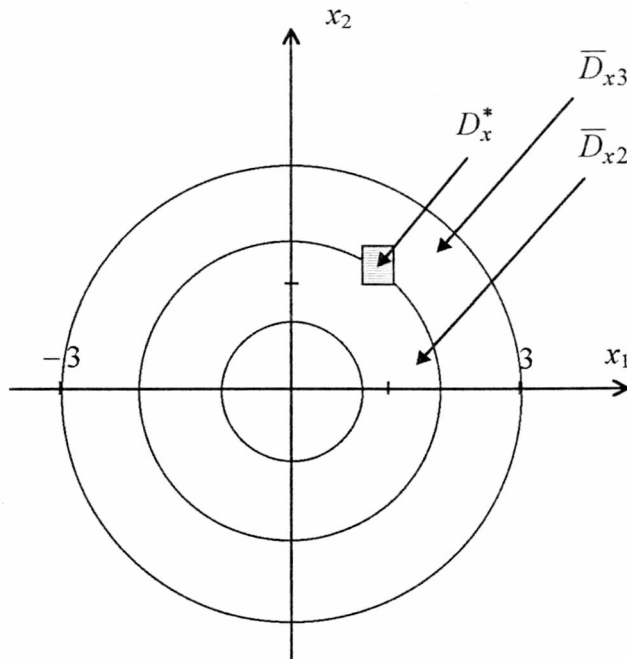
$$1 \leq x_1 \leq 1.3, \quad 1.5 \leq x_2 \leq 1.9,$$

a następnie otrzymujemy

$$\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 = 5.3, \quad \underline{x}_1^2 + \underline{x}_2^2 = 3.25,$$

$$M_{ZA} = \{2,3\},$$

$$\tilde{F}_x = \bar{F}_{x2} \vee \bar{F}_{x3} = -\alpha_1 \wedge \alpha_3.$$



Rys. 3.2 Interpretacja graficzna rozwiązania problemu ZA-dopasowania.

3. W trzecim kroku dla $\widetilde{F}_x = \neg a_1 \wedge a_3$ i zestawu faktów rozwiązujemy (1.12). Jeszcze raz pokażemy szczegółowo kolejne kroki rozwiązania. Stosując dekompozycję w metodzie logiczno-algebraicznej uzyskujemy:

$$\bar{a}_0 = (a_8, a_9, a_{10}),$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_1(\bar{a}_0, \bar{a}_1) = & F_1(a_1, a_2, a_9, a_{10}) \wedge F_2(a_2, a_6, a_9, a_{10}) \wedge F_3(a_2, a_3, a_9, a_{10}) \wedge \\ & F_4(a_3, a_7, a_8) \wedge F_5(a_1, a_2, a_8, a_9) \wedge F_6(a_3, a_8, a_9), \end{aligned}$$

$$\bar{a}_1 = (a_1, a_2, a_3, a_6, a_7),$$

$$\bar{F}_2(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = F_7(a_4, a_5, a_7) \wedge F_8(a_5, a_6, a_7) \wedge \widetilde{F}_x(a_1, a_3),$$

$$\bar{a}_2 = (a_4, a_5).$$

Zgodnie z rekurencyjną procedurą znajdowania rozwiązania dostajemy kolejno:

$$\bar{S}_2 = S_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\},$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 = \{(0, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1, 0), (0, 1, 1, \\ 1, 0), (0, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1, 1)\}, \end{aligned}$$

$$\bar{S}_0 = \{(0, 0, 1), (1, 1, 1)\} = \widetilde{S}_y.$$

Zbiór $\widetilde{S}_y$ determinuje następującą własność wyjściową:

$$\widetilde{F}_y = (\neg \alpha_8 \wedge \neg \alpha_9 \wedge \alpha_{10}) \vee (\alpha_8 \wedge \alpha_9 \wedge \alpha_{10}).$$

Zgodnie z Tw.3.2 $F_y^* = \widetilde{F}_y = (\neg \alpha_8 \wedge \neg \alpha_9 \wedge \alpha_{10}) \vee (\alpha_8 \wedge \alpha_9 \wedge \alpha_{10})$.

Algorytm rozwiązania Problemu 1.13 (ZPD):

1. Rozwiązujemy ZPD dla podsystemu logicznego, tzn. dla faktów F i własności F_y^* rozwiązujemy (1.13). Stosujemy metodę logiczno-algebraiczną otrzymując F_x^* .
2. Wyznaczona własność F_x^* determinuje, zgodnie z (1.10), zbiór D_x^* .
3. Rozwiązujemy ZPD dla podsystemu funkcyjnego: dla D_x^* wyznaczamy D_u^* zgodnie z (1.5), (1.6) lub (1.7), z x w miejsce v .
Nie występuje tu problem dopasowania.

3.2 Podsystem logiczny z dodatkowym wejściem z podsystemu funkcyjnego

Algorytm rozwiązania Problemu 1.14 (ZA):

1. Rozwiązujemy ZA dla podsystemu funkcyjnego: dla D_u^* wyznaczamy D_c^* zgodnie z (1.2) lub (1.4).
2. Zbiór D_c^* nie determinuje własności F_c^* , trzeba więc zbudować własność najlepiej do D_c^* "dopasowaną". Stosując przedstawiony w poprzednim punkcie algorytm dopasowania dla ZA wyznaczamy $\tilde{F}_c$.
3. Rozwiązujemy ZA dla podsystemu logicznego: dla faktów F i własności wejściowych $\tilde{F}_c$, F_x^* rozwiązujemy (1.12) z koniunkcją $\tilde{F}_c \wedge F_x^*$ w miejsce F_x^* . Stosujemy metodę logiczno-algebraiczną otrzymując $\tilde{F}_y$. Zgodnie z Tw.3.2 jest to poszukiwane rozwiązanie, tzn. $F_y^* = \tilde{F}_y$.

Przykład 3.2: $u \in \mathbb{R}^s, c \in \mathbb{R}^l$.

Podsystem logiczny opisany jest zestawem faktów jak w Przykładzie 2.1.

Przyjmujemy $\alpha_x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha_c = (\alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10})$, $\alpha_y = (\alpha_6, \alpha_7)$ oraz $\alpha_8 = "c^T c \leq d_1^2"$, $\alpha_9 = "c^T c \leq d_2^2"$, $\alpha_{10} = "c^T c \leq d_3^2"$, $d_1 \leq d_2 \leq d_3$.

Podsystem funkcyjny opisany jest zależnością:

$$v = Bu,$$

gdzie $B = [b_{ij}]$ jest macierzą o nieujemnych elementach i o rozmiarze $l \times s$, tzn. $i = 1, 2, \dots, l$, $j = 1, 2, \dots, s$.

Zbiór D_u^* definiowany jest zestawem nierówności

$$0 \leq \underline{u}_j \leq u_j \leq \bar{u}_j, \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

a dana własność wejściowa F_x^* jest następująca

$$F_x^* = \neg \alpha_1 \wedge \neg \alpha_2.$$

1. W pierwszym kroku rozwiązania z (1.2) uzyskujemy D_c^* dany zestawem nierówności

$$b_i \underline{u} \leq c_i \leq b_i \bar{u} \quad , \quad i=1, 2, \dots, l.$$

2. W drugim kroku rozważamy 2^3 "składników jedynek" (3.1). Tylko cztery z nich:

$$\bar{F}_{c1} = \alpha_8 \wedge \alpha_9 \wedge \alpha_{10} \quad , \quad \bar{F}_{c2} = \neg\alpha_8 \wedge \alpha_9 \wedge \alpha_{10} \quad , \quad \bar{F}_{c3} = \neg\alpha_8 \wedge \neg\alpha_9 \wedge \alpha_{10} \quad ,$$

$$\bar{F}_{c4} = \neg\alpha_8 \wedge \neg\alpha_9 \wedge \neg\alpha_{10} \quad \text{determinują niepuste zbiory: } \bar{D}_{c1} = \{c: c^T c \leq d_1^2\}, \quad \bar{D}_{c2} = \{c: d_1^2 < c^T c \leq d_2^2\},$$

$$\bar{D}_{c3} = \{c: d_2^2 < c^T c \leq d_3^2\}, \quad \bar{D}_{c4} = \{c: d_3^2 < c^T c\}, \text{ które rozpatrujemy w}$$

(3.2). Przyjmując dodatkowo $d_0 = 0, d_4 = \infty$ otrzymujemy

$$M_{ZA} = \left\{ m \in \overline{1,4}: [d_{m-1}^2 < \bar{c}^T \bar{c}] \wedge [\underline{c}^T \underline{c} \leq d_m^2] \right\},$$

gdzie $\bar{c} = B\bar{u}$, $\underline{c} = B\underline{u}$.

Np. dla danych jak w Przykładzie 3.1, tzn. dla $s=l=2$, $0.4 \leq u_1 \leq 0.5$, $0.3 \leq u_2 \leq 0.4$,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 3 \text{ uzyskujemy } D_c^* \text{ dany zestawem nierówności}$$

$$1 \leq c_1 \leq 1.3 \quad , \quad 1.5 \leq c_2 \leq 1.9 \quad ,$$

a po wyliczeniach analogicznych do tych w Przykładzie 3.1 dostajemy

$$\tilde{F}_c = \bar{F}_{c2} \vee \bar{F}_{c3} = \neg\alpha_8 \wedge \alpha_{10}.$$

3. W trzecim kroku dla $F_x^* = \neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2$, $\tilde{F}_c = \neg\alpha_8 \wedge \alpha_{10}$ i zestawu faktów rozwiązujemy odpowiednie równanie algebraiczne. Nie podajemy szczegółów rozwiązania ZA dla podsystemu logicznego z zastosowaniem metody logiczno-algebraicznej (korzystamy z Tabeli 2.2). Otrzymujemy

$$\tilde{F}_y = (\neg\alpha_6 \wedge \neg\alpha_7) \vee (\neg\alpha_6 \wedge \alpha_7) = \neg\alpha_6 \quad ,$$

a zatem $F_y^* = \neg\alpha_6$.

Algorytm rozwiązania Problemu 1.15 (ZPD):

1. Rozwiązujemy ZA dla podsystemu funkcyjnego: dla D_u^* wyznaczamy D_c^* zgodnie z (1.2) lub (1.4).

2. Zbiór D_c^* nie determinuje własności F_c^* , trzeba więc zbudować własność najlepiej do D_c^* "dopasowaną". Stosując przedstawiony w poprzednim punkcie algorytm dopasowania dla ZA

wyznaczamy $\tilde{F}_c$.

3. Rozwiązujemy ZPD dla podsystemu logicznego: dla faktów F i własności $\tilde{F}_c, F_y^*$ rozwiązujemy układy równań (1.13) z koniunkcją $\tilde{F}_c \wedge F$ w miejsce F . Stosujemy metodę logiczno-algebraiczną otrzymując $\tilde{F}_x$. Zgodnie z Tw.3.1 (o najlepszym dopasowaniu dla ZA) i Tw.2.2 (o rozwiązaniu ZPD dla własności najlepiej dopasowanej) jest to poszukiwane rozwiązanie, tzn. $F_x^* = \tilde{F}_x$.

Poniższe twierdzenie oraz uwagi dodatkowe mówią o ważnej własności rozwiązania ZPD. Odwołam się do niej później proponując algorytm rozwiązania rozszerzonego ZPD.

Twierdzenie 3.3

Jeśli F_{x1}^*, F_{x2}^* są rozwiązaniami ZPD dla F_y^* i odpowiednio D_{u1}^*, D_{u2}^* oraz $D_{u1}^* \subseteq D_{u2}^*$ to

$$F_{x2}^* \rightarrow F_{x1}^*.$$

Dowód:

Kolejne etapy dowodu związane są z kolejnymi krokami Algorytmu 1.15. Najpierw dla D_{u1}^* i D_{u2}^* rozwiązujemy ZA dla podsystemu funkcyjnego otrzymując odpowiednio D_{c1}^* i D_{c2}^* , $D_{c1}^* \subseteq D_{c2}^*$. Stosując algorytm dopasowania wyznaczamy $\tilde{F}_{c1}$ i $\tilde{F}_{c2}$; łatwo pokazać że $\tilde{F}_{c1} \rightarrow \tilde{F}_{c2}$. Następnie dla F_y^* i odpowiednio $\tilde{F}_{c1} \wedge F$, $\tilde{F}_{c2} \wedge F$ rozwiązujemy ZPD dla podsystemu logicznego otrzymując $\tilde{F}_{x1} = F_{x1}^*$, $\tilde{F}_{x2} = F_{x2}^*$. W związku z równoważnością zbiorów S_c, S_x (zbiorów 0-1 ciągów a_c, a_x) i formuł logicznych F_c, F_x wystarczy pokazać, że dla $\tilde{F}_{c1} \rightarrow \tilde{F}_{c2}$ czyli dla $\tilde{S}_{c1} \subseteq \tilde{S}_{c2}$ otrzymujemy $S_{x1}^* \supseteq S_{x2}^*$. Mamy

$$S_{x1}^* = \left\{ a_x : \bigwedge_{a_c \in \tilde{S}_{c1}} \bigwedge_{(a_w, a_y) : F(a) = 1} F_y^*(a_y) = 1 \right\},$$

$$S_{x2}^* = \left\{ a_x : \bigwedge_{a_c \in \tilde{S}_{c2}} \bigwedge_{(a_w, a_y) : F(a) = 1} F_y^*(a_y) = 1 \right\}.$$

Ponieważ $\tilde{S}_{c1} \cup \tilde{S}_{c2} = \tilde{S}_{c2}$ to

$$\begin{aligned}
 S_{x2}^* &= \left\{ a_x : \bigwedge_{a_c \in \tilde{S}_{c1} \cup \tilde{S}_{c2}} \bigwedge_{(a_w, a_y) : F(a) = 1} F_y^*(a_y) = 1 \right\} \equiv \\
 &\equiv \left\{ a_x : \bigwedge_{a_c \in \tilde{S}_{c1}} \bigwedge_{a_c \in \tilde{S}_{c2}} \bigwedge_{(a_w, a_y) : F(a) = 1} F_y^*(a_y) = 1 \right\} \equiv \\
 &\equiv \left\{ a_x : \left(\bigwedge_{a_c \in \tilde{S}_{c1}} \bigwedge_{(a_w, a_y) : F(a) = 1} F_y^*(a_y) = 1 \right) \wedge \left(\bigwedge_{a_c \in \tilde{S}_{c2}} \bigwedge_{(a_w, a_y) : F(a) = 1} F_y^*(a_y) = 1 \right) \right\} \equiv \\
 &\equiv \left\{ a_x : \bigwedge_{a_c \in \tilde{S}_{c1}} \bigwedge_{(a_w, a_y) : F(a) = 1} F_y^*(a_y) = 1 \right\} \cap \left\{ a_x : \bigwedge_{a_c \in \tilde{S}_{c2}} \bigwedge_{(a_w, a_y) : F(a) = 1} F_y^*(a_y) = 1 \right\} = \\
 &= S_{x1}^* \cap S_{x2}^* \subseteq S_{x1}^*.
 \end{aligned}$$

Zatem $F_{x2}^* \rightarrow F_{x1}^*$. □

Uwagi dodatkowe do Tw. 3.3:

1. W ten sam sposób można dowieść, że dla ZPD ze zbiorem D_u^* w postaci sumy dowolnych dwóch zbiorów D_{u1}^*, D_{u2}^* , czyli dla $D_u^* = D_{u1}^* \cup D_{u2}^*$, otrzymujemy $F_x^* = F_{x1}^* \vee F_{x2}^*$.
2. Nie można w ten sposób dowieść podobnego twierdzenia dla ZPD ze zbiorem D_u^* w postaci iloczynu $D_u^* = D_{u1}^* \cap D_{u2}^*$.
3. W związku z faktem, że w podsystemie logicznym wejścia są od siebie niezależne można pokazać, że dla ZPD dla podsystemu logicznego z F_y^* oraz danej własności wejściowej $F_x^* = F_{x1}^* \vee F_{x2}^*$ otrzymamy $F_c^* = F_{c1}^* \wedge F_{c2}^*$.

Przykład 3.3: $u \in \mathbb{R}^s, c \in \mathbb{R}^l$.

Podsystem logiczny opisany jest zestawem faktów jak w Przykładzie 2.1. Ciąg formuł elementarnych dzielimy na podciągi w ten sam sposób jak w Przykładzie 3.2, także zależność opisującą podsystem funkcyjny i zbiór D_u^* przyjmujemy takie same jak w Przykładzie 3.2.

Dana własność wyjściowa F_y^* jest następująca

$$F_y^* = \neg \alpha_6.$$

1. W pierwszym kroku rozwiązania z (1.2) uzyskujemy D_c^* dany zestawem nierówności

$$b_i \underline{u} \leq c_i \leq b_i \bar{u} \quad , \quad i=1, 2, \dots, l.$$

2. W drugim kroku rozważamy 2^3 "składników jedynki" (3.1). Przyjmując dodatkowo $d_0 = 0$, $d_4 = \infty$ otrzymujemy

$$M_{ZA} = \left\{ m \in \overline{1,4}: [d_{m-1}^2 < \bar{c}^T \bar{c}] \wedge [\underline{c}^T \underline{c} \leq d_m^2] \right\} ,$$

gdzie $\bar{c} = B\bar{u}$, $\underline{c} = Bu$.

Np. dla danych jak w Przykładzie 3.2 uzyskujemy D_c^* dany zestawem nierówności

$$1 \leq c_1 \leq 1.3 \quad , \quad 1.5 \leq c_2 \leq 1.9 \quad ,$$

a po dalszych wyliczeniach

$$\widetilde{F}_c = \bar{F}_{c2} \vee \bar{F}_{c3} = \neg\alpha_8 \wedge \alpha_{10} .$$

3. W trzecim kroku dla $\widetilde{F}_c = \neg\alpha_8 \wedge \alpha_{10}$, $F_y^* = \neg\alpha_6$ i zestawu faktów rozwiązujemy odpowiednie układy równań. Nie podajemy szczegółów rozwiązania ZPD dla podsystemu logicznego z zastosowaniem metody logiczno-algebraicznej (korzystamy z Tabeli 2.2). Otrzymujemy

$$\widetilde{F}_x = \neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \quad ,$$

a zatem $F_x^* = \neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3$.

Algorytm rozwiązania Problemu 1.16 (ZPD – rozszerzone):

Zgodnie z treścią Sformułowania 1.16 w rozszerzonym ZPD chcemy dla F_y^* znaleźć parę D_u^*, F_x^* – największy zbiór i najlepszą własność, dla których wymaganie jest spełnione. Łatwo zauważyć, że wymaganie może być spełnione dla wielu różnych par D_u, F_x . Zgodnie z Tw.3.3 dla większego zbioru D_u uzyskujemy "gorszą" własność F_x^* , a dla "lepszej" własności F_x uzyskujemy mniejszy zbiór D_u^* (Tw.3.3, Uwaga 3). Nie istnieje zatem para D_u, F_x najlepsza w sensie jak w sformułowaniu Problemu 1.16. Odwołując się do definicji

rozwiązania ZPD jako największego zbioru wartości wejść, dla których wymaganie dotyczące wyjścia jest spełnione możemy zaproponować rozwiązanie rozszerzonego ZPD jako D_{D_u, F_x}^* – największy zbiór par D_u, F_x , dla których zachodzi (1.17). Na podstawie Uwagi 1 i Uwagi 3 do Tw.3.3 wystarczy wyznaczyć $D_{\bar{F}_x, D_u}^*$, tzn. zbiór par $\bar{F}_{xm}, D_{um}^*$ – składników jedyinki i uzyskanych dla nich największych zbiorów D_{um} spełniających (1.17). Wówczas dowolną własność F_x można zbudować jako alternatywę wybranych składników jedyinki, a iloczyn zbiorów D_{um}^* uzyskanych dla tych składników utworzy zbiór D_u^* . Jest to oczywista analogia z rozszerzonym ZPD omówionym w p.2.2.

Teraz rozszerzone ZPD sformułujemy na nowo w następujący sposób:

Problem 1.16a (ZPD – rozszerzone):

Dane: ϕ, F, F_y^* .

Szukane: $D_{\bar{F}_x, D_u}^*$ (lub D_{D_u, F_x}^*), czyli zbiór par $\bar{F}_{xm}, D_{um}^*$ – składników jedyinki i uzyskanych dla nich największych zbiorów D_{um} spełniających (1.17).

Algorytm rozwiązania Problemu 1.16a (ZPD – rozszerzone):

1. Przyjmujemy $D_{\bar{F}_x, D_u}^* = \emptyset$. Generujemy zbiór wszystkich składników jedyinki $\bar{F}_{xm}$, $m \in \overline{1, 2^{n_x}}$. Dla kolejnych m :
2. Rozwiązujemy ZPD dla podsystemu logicznego: dla F_y^* , faktów F i własności $\bar{F}_{xm}$ rozwiązujemy (1.13) z koniunkcją $\bar{F}_{xm} \wedge F$ w miejsce F oraz z a_c w miejsce a_x . Stosujemy metodę logiczno-algebraiczną otrzymując F_{cm} .
3. Wyznaczona własność F_{cm} determinuje, zgodnie z (1.10), zbiór D_{cm} .
4. Rozwiązujemy ZPD dla podsystemu funkcyjnego: dla D_{cm} wyznaczamy D_{um}^* zgodnie z (1.5), (1.6) lub (1.7).
5. Parę $\bar{F}_{xm}, D_{um}^*$ (może być $D_{um}^* = \emptyset$) dołączamy do $D_{\bar{F}_x, D_u}^*$.

Nie występuje tu problem dopasowania. Złożoność obliczeniowa algorytmu rozwiązania rośnie wykładniczo wraz ze wzrostem n_x – liczby formuł elementarnych α_x – co jest jego niewątpliwym mankamentem. Algorytm rozwiązania rozszerzonego ZPD sprowadza się do

2^{n_x} -krotnego rozwiązania prostego ZPD (Problem 1.13). Poniżej przedstawiony jest przykład ilustracyjny, w którym wykorzystujemy zależności wyprowadzone w poprzednich przykładach.

Przykład 3.4: $u \in \mathbb{R}^s, c \in \mathbb{R}^l$.

Podsystem logiczny opisany jest zestawem faktów jak w Przykładzie 2.1. Ciąg formuł elementarnych dzielimy na podciągi w ten sam sposób jak w Przykładzie 3.2, także zależność opisującą podsystem funkcyjny przyjmujemy taką samą jak w Przykładzie 3.2.

Dana własność wyjściowa F_y^* jest następująca

$$F_y^* = \neg\alpha_6.$$

Rozwiązanie:

1. W pierwszym kroku rozwiązania przyjmujemy $D_{\bar{F}_x, D_u}^* = \emptyset$ i generujemy $2^3 = 8$ składników jedynek: $\bar{F}_{x1} = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$, $\bar{F}_{x2} = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3$, $\bar{F}_{x3} = \alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3$, $\bar{F}_{x4} = \alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3$, $\bar{F}_{x5} = \neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$, $\bar{F}_{x6} = \neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3$, $\bar{F}_{x7} = \neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3$, $\bar{F}_{x8} = \neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3$. Dla kolejnych składników jedynek wykonujemy kroki 2÷5:

2. Dla $\bar{F}_{x1} \wedge F$ i F_y^* rozwiązujemy ZPD dla podsystemu logicznego uzyskując $F_{c1} = \emptyset$.

3. $F_{c1} = \emptyset \Rightarrow D_{c1} = \emptyset$.

4. Dla D_{c1} rozwiązujemy ZPD dla podsystemu funkcyjnego otrzymując $D_{u1}^* = \emptyset$.

5. $D_{\bar{F}_x, D_u}^* = \{ (\bar{F}_{x1}, \emptyset) \}$.

2. Dla $\bar{F}_{x2}$ uzyskujemy $F_{c2} = \emptyset$.

3. $D_{c2} = \emptyset$.

4. Dla D_{c2} otrzymujemy $D_{u2}^* = \emptyset$.

5. $D_{\bar{F}_x, D_u}^* = \{ (\bar{F}_{x1}, \emptyset), (\bar{F}_{x2}, \emptyset) \}$.

2. Dla $\bar{F}_{x3}$ uzyskujemy $F_{c3} = \emptyset$.

3. $D_{c3} = \emptyset$.

4. Dla D_{c3} otrzymujemy $D_{u3}^* = \emptyset$.

5. $D_{\bar{F}_x, D_u}^* = \{ (\bar{F}_{x1}, \emptyset), (\bar{F}_{x2}, \emptyset), (\bar{F}_{x3}, \emptyset) \}$.

2. Dla $\bar{F}_{x4}$ uzyskujemy $F_{c4} = \emptyset$.

3. $D_{c4} = \emptyset$.

4. Dla D_{c4} otrzymujemy $D_{u4}^* = \emptyset$.

5. $D_{\bar{F}_x, D_u}^* = \{ (\bar{F}_{x1}, \emptyset), (\bar{F}_{x2}, \emptyset), (\bar{F}_{x3}, \emptyset), (\bar{F}_{x4}, \emptyset) \}$.

2. Dla $\bar{F}_{x5}$ uzyskujemy $F_{c5} = \emptyset$.

3. $D_{c5} = \emptyset$.

4. Dla D_{c5} otrzymujemy $D_{u5}^* = \emptyset$.

5. $D_{\bar{F}_x, D_u}^* = \{ (\bar{F}_{x1}, \emptyset), (\bar{F}_{x2}, \emptyset), (\bar{F}_{x3}, \emptyset), (\bar{F}_{x4}, \emptyset), (\bar{F}_{x5}, \emptyset) \}$.

2. Dla $\bar{F}_{x6}$ uzyskujemy $F_{c6} = \emptyset$.

3. $D_{c6} = \emptyset$.

4. Dla D_{c6} otrzymujemy $D_{u6}^* = \emptyset$.

5. $D_{\bar{F}_x, D_u}^* = \{ (\bar{F}_{x1}, \emptyset), (\bar{F}_{x2}, \emptyset), (\bar{F}_{x3}, \emptyset), (\bar{F}_{x4}, \emptyset), (\bar{F}_{x5}, \emptyset), (\bar{F}_{x6}, \emptyset) \}$.

2. Dla $\bar{F}_{x7}$ uzyskujemy $F_{c7} = \alpha_8 \wedge \alpha_9 \wedge \alpha_{10}$.

3. $D_{c7} = \{ c: 0 < c^T c \leq d_1^2 \}$.

4. Dla D_{c7} otrzymujemy $D_{u7}^* = \{ u: 0 < u^T B^T B u \leq d_1^2 \}$.

5. $D_{\bar{F}_x, D_u}^* = \{ (\bar{F}_{x1}, \emptyset), (\bar{F}_{x2}, \emptyset), (\bar{F}_{x3}, \emptyset), (\bar{F}_{x4}, \emptyset), (\bar{F}_{x5}, \emptyset), (\bar{F}_{x6}, \emptyset),$
 $(\bar{F}_{x7}, \{ u: 0 < u^T B^T B u \leq d_1^2 \}) \}$.

2. Dla $\bar{F}_{x8}$ uzyskujemy $F_{c8} = (\neg \alpha_8 \wedge \alpha_9 \wedge \alpha_{10}) \vee (\alpha_8 \wedge \alpha_9 \wedge \alpha_{10})$.

3. $D_{c8} = \{ b: 0 < c^T c \leq d_2^2 \}$.

4. Dla D_{c8} otrzymujemy $D_{u8}^* = \{ u: 0 < u^T B^T B u \leq d_2^2 \}$.

5. $D_{\bar{F}_x, D_u}^* = \{ (\bar{F}_{x1}, \emptyset), (\bar{F}_{x2}, \emptyset), (\bar{F}_{x3}, \emptyset), (\bar{F}_{x4}, \emptyset), (\bar{F}_{x5}, \emptyset), (\bar{F}_{x6}, \emptyset),$
 $(\bar{F}_{x7}, \{ u: 0 < u^T B^T B u \leq d_1^2 \}), (\bar{F}_{x8}, \{ u: 0 < u^T B^T B u \leq d_2^2 \}) \}$.

Dla takiego $D_{\bar{F}_x, D_u}^*$ dostajemy zbiór $D_{D_u, F_x}^* = \{ (\{u: 0 < u^T B^T B u \leq d_1^2\}, \bar{F}_{x7}), (\{u: 0 < u^T B^T B u \leq d_2^2\}, \bar{F}_{x8}), (\{u: 0 < u^T B^T B u \leq d_1^2\}, \bar{F}_{x7} \vee \bar{F}_{x8}) \}$.

3.3 Podsystem logiczny z parametrem wyznaczanym w podsystemie funkcyjnym

Algorytm rozwiązania Problemu 1.17 (ZA):

1. Rozwiązujemy ZA dla podsystemu funkcyjnego: dla D_u^* wyznaczamy D_c^* zgodnie z (1.2) lub (1.4).

2. Zbiór $R_x^* = D_x^* \times D_c^*$ możliwych par (x, c) nie determinuje własności F_x^* , trzeba więc zbudować własność najlepiej do R_x^* "dopasowaną". Rozważamy składniki jedynek $\bar{F}_{xm}$ i odpowiadające im zbiory $\bar{R}_{xm}$ (1.9). Stosujemy algorytm ZA-dopasowania otrzymując

$$\tilde{F}_x = \bigvee_{m \in M_{ZA}} \bar{F}_{xm},$$

gdzie

$$M_{ZA} = \{ m \in \overline{1, 2^m}: \bar{R}_{xm} \cap R_x^* \neq \emptyset \}. \quad (3.3)$$

3. Rozwiązujemy ZA dla podsystemu logicznego: dla faktów F i własności $\tilde{F}_x$ rozwiązujemy (1.12). Stosujemy metodę logiczno-algebraiczną otrzymując własność $\tilde{F}_y$, która determinuje zbiór $\tilde{R}_y$ (1.9).

4. Dla D_c^* i $\tilde{R}_y$ zbiór $\tilde{D}_y$ wyznaczamy ze wzoru

$$\tilde{D}_y = \{ y: \bigvee_{c \in D_c^*} (y, c) \in \tilde{R}_y \}.$$

Zgodnie z Tw.3.1 i Tw.3.2 mamy $F_y^* = \tilde{F}_y$ (rozwiązanie ZA dla własności najlepiej dopasowanej), a zatem $\tilde{D}_y$ determinowane przez D_c^* i $\tilde{F}_y$ jest poszukiwanym rozwiązaniem ZA, tzn. $D_y^* = \tilde{D}_y$.

Przykład 3.5: $u \in \mathbb{R}^s$, $x, c, y \in \mathbb{R}^l$.

Podsystem logiczny opisany jest zestawem faktów jak w Przykładzie 2.1.

Przyjmujemy $\alpha_x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha_y = (\alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10})$ oraz

$$\alpha_1 = "c^T x \leq d_1" , \quad \alpha_2 = "c^T x \leq d_2" , \quad \alpha_3 = "c^T x \leq d_3" , \quad d_1 \leq d_2 \leq d_3 ,$$

$$\alpha_8 = " \sum_{i=1}^l c_i y_i^2 \leq d_4^2 " , \quad \alpha_9 = " \sum_{i=1}^l c_i y_i^2 \leq d_5^2 " , \quad \alpha_{10} = " \sum_{i=1}^l c_i y_i^2 \leq d_6^2 " , \quad d_4 \leq d_5 \leq d_6 .$$

Podsystem funkcyjny opisany jest zależnością:

$$v = Bu ,$$

gdzie $B = [b_{ij}]$ jest macierzą o nieujemnych elementach i o rozmiarze $l \times s$, tzn. $i = 1, 2, \dots, l$, $j = 1, 2, \dots, s$.

Zbiory D_u^* , D_x^* definiowane są następującymi zestawami nierówności

$$0 \leq \underline{u}_j \leq u_j \leq \bar{u}_j , \quad j = 1, 2, \dots, s ,$$

$$\underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i , \quad i = 1, 2, \dots, l .$$

1. W pierwszym kroku rozwiązania z (1.2) uzyskujemy D_c^* dany zestawem nierówności

$$b_i \underline{u} \leq c_i \leq b_i \bar{u} , \quad i = 1, 2, \dots, l .$$

2. W drugim kroku wyznaczamy zbiór $R_x^* = D_x^* \times D_c^*$

$$R_x^* = \{ (x, c) : \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i , \quad b_i \underline{u} \leq c_i \leq b_i \bar{u} , \quad i \in \overline{1, l} \} .$$

Następnie rozważamy 2^3 "składników jedynek" (3.1). Tylko cztery z nich: $\bar{F}_{x1} = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$,

$$\bar{F}_{x2} = \neg \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 , \quad \bar{F}_{x3} = \neg \alpha_1 \wedge \neg \alpha_2 \wedge \alpha_3 , \quad \bar{F}_{x4} = \neg \alpha_1 \wedge \neg \alpha_2 \wedge \neg \alpha_3 \quad \text{determinują}$$

niepuste zbiory: $\bar{R}_{x1} = \{ (x, c) : c^T x \leq d_1 \}$, $\bar{R}_{x2} = \{ (x, c) : d_1 < c^T x \leq d_2 \}$,

$$\bar{R}_{x3} = \{ (x, c) : d_2 < c^T x \leq d_3 \}$$
, $\bar{R}_{x4} = \{ (x, c) : d_3 < c^T x \}$, które rozpatrujemy w (3.3).

Przyjmując dodatkowo $d_0 = 0$, $d_4 = \infty$ otrzymujemy

$$M_{ZA} = \left\{ m \in \overline{1, 4} : [d_{m-1} < (\sum_{i=1}^l \bar{x}_i b_i) \bar{u}] \wedge [(\sum_{i=1}^l \underline{x}_i b_i) \underline{u} \leq d_m] \right\} .$$

Np. dla $s=l=2$,

$$0.25 \leq u_1, u_2 \leq 0.5 ,$$

$$0.5 \leq x_1 \leq 0.6 , \quad 0.75 \leq x_2 \leq 0.8 ,$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} , \quad d_1 = d_4 = 1, \quad d_2 = d_5 = 2, \quad d_3 = d_6 = 3 \quad \text{uzyskujemy } D_c^* \text{ dany zestawem}$$

nierówności

$$1 \leq c_1, c_2 \leq 2.$$

Stąd (Rys. 3.3)

$$R_x^* = \{ (x, c) : 0.5 \leq x_1 \leq 0.6, 0.75 \leq x_2 \leq 0.8, 1 \leq c_1, c_2 \leq 2 \}.$$

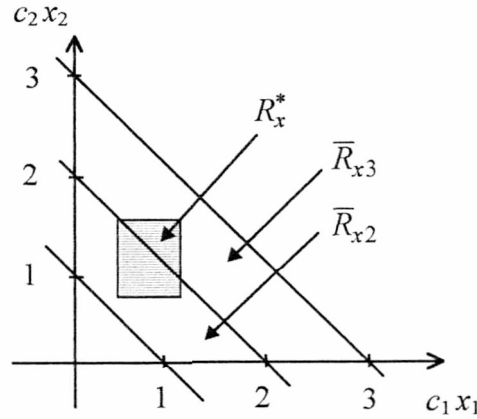
Następnie wyliczamy

$$\left(\sum_{i=1}^2 \bar{x}_i b_i \right) \bar{u} = (2 + 3.6) \cdot 0.5 = 2.8, \quad \left(\sum_{i=1}^2 x_i b_i \right) \underline{u} = (1.75 + 3.25) \cdot 0.25 = 1.25$$

otrzymując

$$M_{ZA} = \{2, 3\},$$

$$\tilde{F}_x = \bar{F}_{x2} \vee \bar{F}_{x3} = \neg \alpha_1 \wedge \alpha_3.$$



Rys. 3.3 Interpretacja graficzna rozwiązania problemu ZA-dopasowania.

3. W trzecim kroku dla $\tilde{F}_x = \neg \alpha_1 \wedge \alpha_3$ i zestawu faktów rozwiązujemy (1.12). Uzyskujemy własność

$$\tilde{F}_y = (\alpha_8 \wedge \alpha_9 \wedge \alpha_{10}) \vee (\neg \alpha_8 \wedge \neg \alpha_9 \wedge \alpha_{10}),$$

która determinuje zbiór

$$\tilde{R}_y = \{ (y, c) : c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 \leq d_4^2 \quad \text{lub} \quad d_5^2 < c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 \leq d_6^2 \}.$$

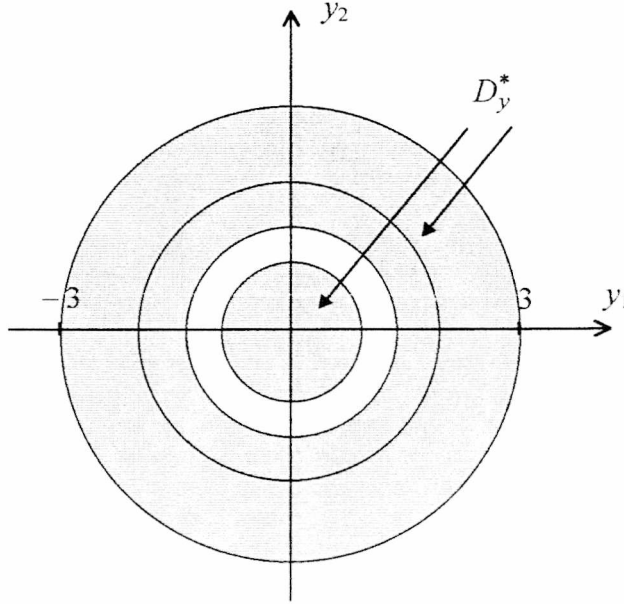
4. W czwartym kroku dla D_c^* i $\tilde{R}_y$ otrzymujemy

$$\tilde{D}_y = \{ y : c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 \leq d_4^2 \quad \text{lub}$$

$$d_5^2 < c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 \leq d_6^2 \quad \text{lub} \quad d_5^2 < \bar{c}_1 y_1^2 + \bar{c}_2 y_2^2 \leq d_6^2 \}$$

czyli (Rys. 3.4)

$$\begin{aligned}\tilde{D}_y &= \{ y : y_1^2 + y_2^2 \leq 1 \text{ lub } 4 < y_1^2 + y_2^2 \leq 9 \text{ lub } 4 < 2y_1^2 + 2y_2^2 \leq 9 \} = \\ &= \{ y : y_1^2 + y_2^2 \leq 1 \text{ lub } 2 < y_1^2 + y_2^2 \leq 9 \} = D_y^*.\end{aligned}$$



Rys. 3.4 Interpretacja graficzna rozwiązania ZA w Przykładzie 3.5

Algorytm rozwiązania Problemu 1.18 (ZPD):

1. Rozwiązujemy ZA dla podsystemu funkcyjnego: dla D_u^* wyznaczamy D_c^* zgodnie z (1.2) lub (1.4).

2. Zbiór D_y^* (pożądanych wartości y) oraz zbiór D_c^* (możliwych wartości c) nie determinują własności F_y^* , trzeba więc zbudować własność najlepiej do D_y^* "dopasowaną".

Rozważamy składniki jedynek $\bar{F}_{ym}$ i odpowiadające im zbiory $\bar{R}_{ym}$ (1.9). Stosujemy algorytm ZPD-dopasowania otrzymując

$$\tilde{F}_y = \bigvee_{m \in M_{\text{ZPD}}} \bar{F}_{ym},$$

gdzie

$$M_{\text{ZPD}} = \left\{ m \in \overline{1, 2^{n_3}} : \bigwedge_{c \in D_c^*} \bar{D}_{ym}(c) \subseteq D_y^* \right\} \quad (3.4)$$

oraz

$$\bar{D}_{ym}(c) = \{ y : (y, c) \in \bar{R}_{ym} \}.$$

3. Rozwiązujemy ZPD dla podsystemu logicznego: dla faktów F i własności $\tilde{F}_y$ rozwiązujemy (1.13). Stosujemy metodę logiczno-algebraiczną otrzymując własność $\tilde{F}_x$, która determinuje zbiór $\tilde{R}_x$ (1.9).

4. Dla D_c^* i $\tilde{R}_x$ zbiór $\tilde{D}_x$ wyznaczamy ze wzoru

$$\tilde{D}_x = \{ x : \bigwedge_{c \in D_c^*} (x, c) \in \tilde{R}_x \} .$$

Zgodnie z Tw.2.1 i Tw.2.2 mamy $F_x^* = \tilde{F}_x$ (rozwiązanie ZPD dla własności najlepiej dopasowanej), a zatem $\tilde{D}_x$ determinowane przez D_c^* i $\tilde{F}_x$ jest poszukiwanym rozwiązaniem ZPD, tzn. $D_x^* = \tilde{D}_x$.

Poniższe twierdzenie oraz uwagi dodatkowe mówią o ważnej własności rozwiązania ZPD.

Twierdzenie 3.4

Jeśli D_{x1}^*, D_{x2}^* są rozwiązaniami ZPD dla D_y^* i odpowiednio D_{u1}^*, D_{u2}^* oraz $D_{u1}^* \subseteq D_{u2}^*$ to

$$D_{x1}^* \supseteq D_{x2}^* .$$

Dowód:

Kolejne etapy dowodu związane są z kolejnymi krokami Algorytmu 1.18. Najpierw dla D_{u1}^* i D_{u2}^* rozwiązujemy ZA dla podsystemu funkcyjnego otrzymując odpowiednio D_{c1}^* i D_{c2}^* , $D_{c1}^* \subseteq D_{c2}^*$. Stosując algorytm dopasowania wyznaczamy

$$M_{ZPD,1} = \left\{ m \in \overline{1, 2^{n_3}} : \bigwedge_{c \in D_{c1}^*} \overline{D}_{ym}(c) \subseteq D_y^* \right\} ,$$

$$M_{ZPD,2} = \left\{ m \in \overline{1, 2^{n_3}} : \bigwedge_{c \in D_{c2}^*} \overline{D}_{ym}(c) \subseteq D_y^* \right\} .$$

Ponieważ $D_{c1}^* \subseteq D_{c2}^*$, to $D_{c2}^* = D_{c1}^* \cup D_{c2}^*$ i dostajemy

$$\begin{aligned}
 M_{\text{ZPD},2} &= \left\{ m \in \overline{1,2^{n_3}} : \bigwedge_{c \in D_{c1}^* \cup D_{c2}^*} \overline{D}_{ym}(c) \subseteq D_y^* \right\} \equiv \\
 &\equiv \left\{ m \in \overline{1,2^{n_3}} : \bigwedge_{c \in D_{c1}^*} \bigwedge_{c \in D_{c2}^*} \overline{D}_{ym}(c) \subseteq D_y^* \right\} \equiv \\
 &\equiv \left\{ m \in \overline{1,2^{n_3}} : \left(\bigwedge_{c \in D_{c1}^*} \overline{D}_{ym}(c) \subseteq D_y^* \right) \wedge \left(\bigwedge_{c \in D_{c2}^*} \overline{D}_{ym}(c) \subseteq D_y^* \right) \right\} \equiv \\
 &\equiv \left\{ m \in \overline{1,2^{n_3}} : \bigwedge_{c \in D_{c1}^*} \overline{D}_{ym}(c) \subseteq D_y^* \right\} \cap \left\{ m \in \overline{1,2^{n_3}} : \bigwedge_{c \in D_{c2}^*} \overline{D}_{ym}(c) \subseteq D_y^* \right\} \equiv \\
 &\equiv M_{\text{ZPD},1} \cap M_{\text{ZPD},2} \subseteq M_{\text{ZPD},1}
 \end{aligned}$$

Zatem $\tilde{F}_{y2} \rightarrow \tilde{F}_{y1}$ (ściślej mówiąc $\tilde{F}_{y2} = \tilde{F}_{y1} \wedge \tilde{F}_{y2}$). Łatwo pokazać, że $\tilde{F}_{x2} \rightarrow \tilde{F}_{x1}$ (rozwiązania ZPD dla podsystemu logicznego z własnościami wyjściowymi $\tilde{F}_{y1}, \tilde{F}_{y2}$ spełniają równość $\tilde{F}_{x2} = \tilde{F}_{x1} \wedge \tilde{F}_{x2}$), a w konsekwencji $\tilde{R}_{x2} \subseteq \tilde{R}_{x1}$ ($\tilde{R}_{x2} = \tilde{R}_{x1} \cap \tilde{R}_{x2}$).

Następnie wyznaczamy

$$\tilde{D}_{x1} = \left\{ x : \bigwedge_{c \in D_{c1}^*} (x, c) \in \tilde{R}_{x1} \right\}, \quad \tilde{D}_{x2} = \left\{ x : \bigwedge_{c \in D_{c2}^*} (x, c) \in \tilde{R}_{x2} \right\}.$$

Ponieważ $D_{c2}^* = D_{c1}^* \cup D_{c2}^*$ i $\tilde{R}_{x2} = \tilde{R}_{x1} \cap \tilde{R}_{x2}$ to dostajemy

$$\begin{aligned}
 \tilde{D}_{x2} &= \left\{ x : \bigwedge_{c \in D_{c1}^* \cup D_{c2}^*} (x, c) \in \tilde{R}_{x2} \right\} \equiv \left\{ x : \bigwedge_{c \in D_{c1}^*} \bigwedge_{c \in D_{c2}^*} (x, c) \in \tilde{R}_{x2} \right\} \equiv \\
 &\equiv \left\{ x : \bigwedge_{c \in D_{c1}^*} (x, c) \in \tilde{R}_{x2} \right\} \cap D_{x2}^* \equiv \left\{ x : \bigwedge_{c \in D_{c1}^*} (x, c) \in \tilde{R}_{x1} \cap \tilde{R}_{x2} \right\} \cap D_{x2}^* \equiv \\
 &\equiv \left\{ x : \bigwedge_{c \in D_{c1}^*} (x, c) \in \tilde{R}_{x2} \right\} \cap D_{x1}^* \cap D_{x2}^* = D_{x1,2}^* \cap D_{x1}^* \cap D_{x2}^* \subseteq D_{x1}^*. \quad \square
 \end{aligned}$$

Uwagi dodatkowe do Tw. 3.4:

1. W ten sam sposób można dowieść, że dla ZPD ze zbiorem D_u^* w postaci sumy dowolnych dwóch zbiorów D_{u1}^*, D_{u2}^* , czyli dla $D_u^* = D_{u1}^* \cup D_{u2}^*$, otrzymujemy $D_x^* \subseteq D_{x1}^* \cap D_{x2}^*$

(bo $D_x^* = D_{x1,2}^* \cap D_{x1}^* \cap D_{x2}^*$ i $D_{x1,2}^* \subseteq D_{x1}^*$).

2. Nie można w ten sposób dowieść podobnego twierdzenia dla ZPD oraz dla zbioru D_u^* w postaci iloczynu $D_u^* = D_{u1}^* \cap D_{u2}^*$.

3. W podobny sposób można łatwo pokazać, że dla ZPD dla podsystemu logicznego z D_y^* oraz dla zbioru wejść danego w postaci sumy dowolnych dwóch zbiorów $D_x^* = D_{x1}^* \cup D_{x2}^*$ otrzymamy $D_c^* = D_{c1}^* \cap D_{c2}^*$.

Przykład 3.6: $u \in \mathbb{R}^s$, $x, c, y \in \mathbb{R}^l$.

Podsystem logiczny opisany jest zestawem faktów jak w Przykładzie 2.1. Poszczególnym formułom elementarnym przypisujemy znaczenie jak w Przykładzie 3.5, również podsystem funkcyjny opisany jest zależnością podaną w poprzednim przykładzie.

Zbiory D_u^* , D_y^* definiowane są następującymi zestawami nierówności

$$\begin{aligned} 0 \leq \underline{u}_j \leq u_j \leq \bar{u}_j, \quad j=1, 2, \dots, s, \\ \underline{y}_i \leq y_i \leq \bar{y}_i, \quad i=1, 2, \dots, l. \end{aligned}$$

1. W pierwszym kroku rozwiązania z (1.2) uzyskujemy D_c^* dany zestawem nierówności

$$b_i \underline{u} \leq c_i \leq b_i \bar{u}, \quad i=1, 2, \dots, l.$$

2. W drugim kroku rozważamy 2^3 "składników jedynek" (3.1). Tylko cztery z nich:

$$\bar{F}_{y1} = \alpha_8 \wedge \alpha_9 \wedge \alpha_{10}, \quad \bar{F}_{y2} = \neg \alpha_8 \wedge \alpha_9 \wedge \alpha_{10}, \quad \bar{F}_{y3} = \neg \alpha_8 \wedge \neg \alpha_9 \wedge \alpha_{10},$$

$$\bar{F}_{y4} = \neg \alpha_8 \wedge \neg \alpha_9 \wedge \neg \alpha_{10} \quad \text{determinują niepuste zbiory: } \bar{R}_{y1} = \{ (y, c) : \sum_{i=1}^l c_i y_i^2 \leq d_4^2 \},$$

$$\bar{R}_{y2} = \{ (y, c) : d_4^2 < \sum_{i=1}^l c_i y_i^2 \leq d_5^2 \}, \quad \bar{R}_{y3} = \{ (y, c) : d_5^2 < \sum_{i=1}^l c_i y_i^2 \leq d_6^2 \},$$

$$\bar{R}_{y4} = \{ (y, c) : d_6^2 < \sum_{i=1}^l c_i y_i^2 \}. \text{ Wyznaczone dla } D_c^* \text{ odpowiadające im zbiory } \bar{D}_{y1}(c),$$

$\bar{D}_{y2}(c)$, $\bar{D}_{y3}(c)$, $\bar{D}_{y4}(c)$ rozpatrujemy w (3.4). Przyjmując dodatkowo $d_7 = \infty$ otrzymujemy

$$M_{ZPD} = \left\{ m \in \overline{1,4}: \bigwedge_{i \in \overline{1,l}} [y_{-i} \leq \frac{-d_{m+3}}{\sqrt{b_i u}}] \wedge [\frac{d_{m+3}}{\sqrt{b_i u}} \leq \bar{y}_i] \right\}.$$

Np. dla $s=l=2$,

$$0.25 \leq u_1, u_2 \leq 0.5 ,$$

$$-2 \leq y_1 \leq 3 \quad , \quad -2 \leq y_2 \leq 2 \quad ,$$

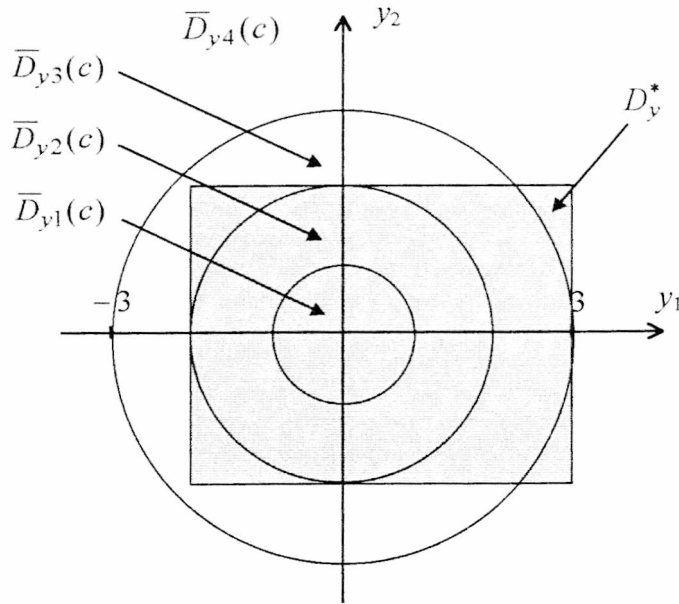
$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $d_1 = d_4 = 1$, $d_2 = d_5 = 2$, $d_3 = d_6 = 3$ uzyskujemy D_c^* dany zestawem nierówności

$$1 \leq c_1, c_2 \leq 2 .$$

Następnie rozpatrujemy zbiory $\bar{R}_{ym}$ i sprawdzamy warunek (3.4) otrzymując (Rys. 3.5)

$$M_{ZPD} = \{1,2\} ,$$

$$\tilde{F}_y = \bar{F}_{y1} \vee \bar{F}_{y2} = \alpha_9 \wedge \alpha_{10} .$$



Rys. 3.5 Interpretacja graficzna rozwiązania problemu ZPD-dopasowania.

3. W trzecim kroku dla $\tilde{F}_y = \alpha_9 \wedge \alpha_{10}$ i zestawu faktów F rozwiązujemy układy równań (1.13). Stosujemy metodę logiczno-algebraiczną otrzymując

$$\tilde{F}_x = (\neg \alpha_1 \wedge \neg \alpha_2 \wedge \alpha_3) \vee (\neg \alpha_1 \wedge \neg \alpha_2 \wedge \neg \alpha_3) .$$

Własność $\tilde{F}_x$ determinuje zbiór

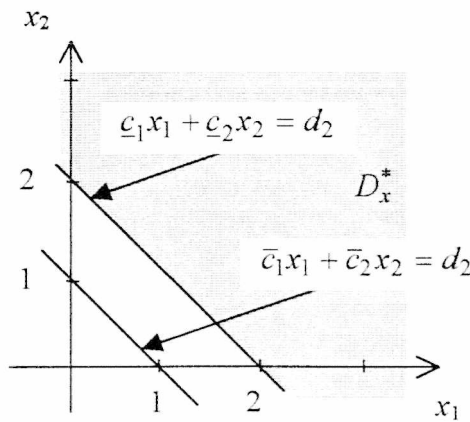
$$\begin{aligned}\tilde{R}_x &= \{ (x, c) : d_2 < c_1 x_1 + c_2 x_2 \leq d_3 \quad \text{lub} \quad d_3 < c_1 x_1 + c_2 x_2 \} = \\ &= \{ (x, c) : d_2 < c_1 x_1 + c_2 x_2 \}.\end{aligned}$$

4. W czwartym kroku dla D_c^* i $\tilde{R}_x$ otrzymujemy (Rys. 3.6)

$$\tilde{D}_x = \{ x : d_2 < c_1 x_1 + c_2 x_2 \}$$

czyli

$$\tilde{D}_x = \{ x : 2 < x_1 + x_2 \} = D_x^*.$$



Rys. 3.6 Interpretacja graficzna rozwiązania ZA w Przykładzie 3.6.

Algorytm rozwiązania Problemu 1.19 (ZPD – rozszerzone):

Zgodnie z treścią sformułowania Problemu 1.19 w rozszerzonym ZPD chcemy dla D_y^* znaleźć parę D_u^*, D_x^* – największe zbiory, dla których wymaganie jest spełnione. Łatwo zauważyć, że wymaganie może być spełnione dla wielu różnych par D_u, D_x . Zgodnie z Tw.3.3 dla większego zbioru D_u uzyskujemy mniejszy zbiór D_x^* , a dla większego zbioru D_x uzyskujemy mniejszy zbiór D_u^* (Tw.3.4, Uwaga 3). Nie istnieje zatem para D_u, D_x najlepsza w sensie jak w sformułowaniu Problemu 1.19. Tym razem (w porównaniu z poprzednimi rozszerzonymi ZPD) odwołując się do definicji rozwiązania ZPD jako największego zbioru wartości wejść, dla których wymaganie dotyczące wyjścia jest spełnione nie możemy zaproponować rozwiązania rozszerzonego ZPD w postaci D_{D_u, D_x}^* – największego zbioru par D_u, D_x , dla których zachodzi (1.18), ponieważ takich par jest nieskończenie wiele.

4. Zastosowanie sieci neuronalnej do podejmowania decyzji w kompleksie operacji z hybrydową reprezentacją wiedzy

W rozdziale tym w p.4.1 sformułowany jest problem podejmowania decyzji dla systemu, w którym jako podsystem funkcyjny rozważa się kompleks operacji równoległych (Rys.2.11). Parametry modeli poszczególnych operacji nie są znane, ale zbiory ich możliwych wartości można wyznaczyć z podsystemu logicznego. Nie prowadzi to jednak do rozwiązania problemu podejmowania decyzji w formie analitycznej (w przeciwieństwie do przykładu 2.20 z Rozdz.2 wykorzystującego upraszczające założenia). W konsekwencji, do wyznaczenia rozdziału zadań w kompleksie operacji stosuje się algorytm strojony w postaci sieci neuronalnej, dla której przebieg procesu uczenia (strojenia) zależy od wiedzy uzyskanej z podsystemu logicznego. Dla wybranego przypadku kompleksu operacji równoległych, z parametrami o wartościach generowanych losowo ze zbiorów mogących wynikać z podsystemu logicznego, przeprowadzono badania symulacyjne procesu uczenia oraz podejmowania decyzji po nauczaniu. Założenia ogólne dla tych badań przedstawione zostały w p.4.2, a wybrane wyniki prezentowane są, odpowiednio, w p.4.3 i w p.4.4.

4.1 Sformułowanie problemu i algorytm rozwiązania

Przypadek ogólny

Rozważamy kompleks operacji o modelu

$$T = \phi(u, k, \lambda) \quad (4.1)$$

gdzie T jest czasem realizacji kompleksu operacji, u jest wektorem wejść reprezentującym rozdział zadań o całkowitym rozmiarze U pomiędzy poszczególne operacje. Niech $u^T = [u_1, u_2, \dots, u_s]$, $k^T = [k_1, k_2, \dots, k_s]$ jest wektorem mierzonych parametrów, a λ jest wektorem nieznanych parametrów, $\lambda^T = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s]$, o których wiemy że $\lambda \in D_\lambda$. Zbiór D_λ uzyskujemy z podsystemu logicznego. Zgodnie ze sformułowaniem z Przykładu 2.20 (p.2.2) chcemy znaleźć $u_{\min}$ tj. wartość u minimalizującą, dla zmierzonych wartości parametrów k , czas realizacji kompleksu operacji dla najgorszej sytuacji wynikającej ze znajomości zbioru D_λ wyznaczonego dla danej własności wejściowej F_x . Zgodnie z algorytmem rozwiązania z Przykładu 2.20 $u_{\min}$ wyznaczamy w dwóch krokach, rozwiązując problem minimaksowy. W pierwszym kroku dla zbioru D_λ otrzymanego z podsystemu logicznego przeprowadzamy

maksymalizację

$$\max_{\lambda \in D_\lambda} \phi(u, k, \lambda) = \bar{\phi}(u, k) \quad (4.2)$$

wyznaczając w następującej ogólnej postaci λ maksymalizujące ϕ :

$$\bar{\lambda} = h(u, k) . \quad (4.3)$$

W drugim kroku, przy ograniczeniu równościowym $u_1 + u_2 + \dots + u_s = U$, przeprowadzamy minimalizację

$$\min_u \bar{\phi}(u, k) = T_{\min}(k) \quad (4.4)$$

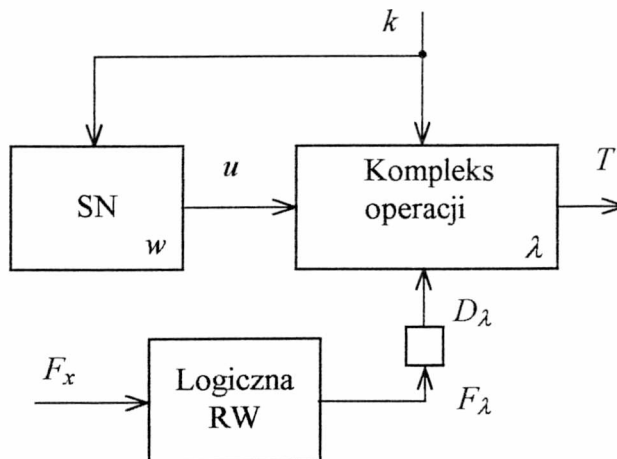
otrzymując

$$u_{\min} = g(k) . \quad (4.5)$$

Ponieważ w ogólnym przypadku funkcji g (4.5) nie można wyznaczyć w formie analitycznej, do minimalizacji (4.4) stosujemy sieć neuronalną (SN) (Rys. 4.1) realizującą sparametryzowany algorytm f [86], za pomocą którego chcemy przybliżać dokładny, ale nie znany algorytm g .

$$u = f(k; w) , \quad (4.6)$$

gdzie w jest wektorem parametrów algorytmu f , o wartościach zmienianych w trakcie procesu uczenia. Rozpatrujemy sytuację, gdy do uczenia nie jest dostępny rzeczywisty obiekt, lecz jego model.



Rys. 4.1 Schemat systemu sterowania rozdziałem zadań w kompleksie operacji z wykorzystaniem sieci neuronalnej.

Z takim podejściem wiążą się następujące trudności:

1. Maksymalizacja (4.2) z uwzględnieniem D_λ często wymaga znajomości u , chyba że $\bar{\lambda}$ (4.3) nie zależy od u i chyba że da się przestawić operatory minimalizacji i maksymalizacji.

2. Mogą być kłopoty, jeśli D_λ nie jest zbiorem ograniczonym.

Dlatego dalej zawężamy rozważania do typowej klasy modeli operacji i do określonego poniżej przypadku.

Przyjmujemy modele operacji postaci

$$T_i = k_i u_i^{\lambda_i}, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (4.7)$$

Łatwo wykazać, że (4.1) czyli

$$T = \max (k_1 u_1^{\lambda_1}, k_2 u_2^{\lambda_2}, \dots, k_s u_s^{\lambda_s}) \quad (4.8)$$

jest funkcją rosnącą względem każdego λ_i . Jeśli D_λ będzie postaci

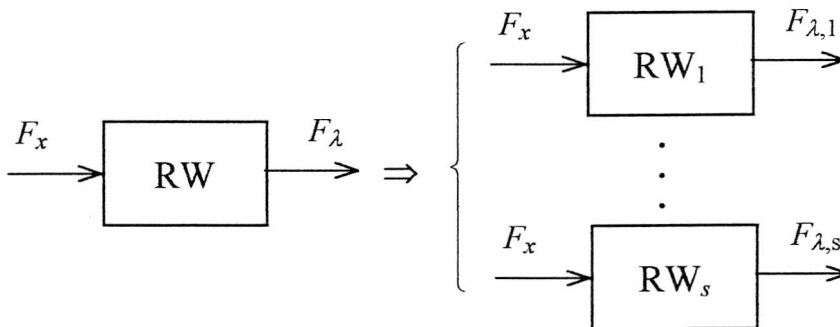
$$D_\lambda = \{ \lambda : \bigwedge_i \lambda_i < \bar{\lambda}_i \}$$

dla danych $\bar{\lambda}_i$, to wówczas do otrzymania $\bar{\phi}$ należy wstawić $\bar{\lambda}$ do (4.1). Dalej przyjmujemy założenie o dyskretnym zbiorze wartości λ , czyli

$$\lambda_i \in \{ \lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{il_i} \} \triangleq D_i \quad (4.9)$$

oznaczające, że λ_i może przyjmować tylko wartości ze zbioru D_i . W podsystemie logicznym rozpatrujemy tylko takie RW, że D_i ma postać (4.9). Oznacza to, że RW da się zdekomponować na s części (Rys. 4.2): RW_i ($i = 1, 2, \dots, s$) zawiera tylko formuły elementarne dotyczące λ_i (oraz wszystkie inne dotyczące x i wielkości pośrednich). Są one postaci

$$\alpha_{\lambda_i, p} = " \lambda_i = \lambda_{ip} " , \quad p = 1, 2, \dots, l_i.$$



Rys. 4.2 Dekompozycja RW w podsystemie logicznym.

Dla sterowania rozdziałem zadań w kompleksie składającym się z s operacji równoległych została zaproponowana [12], [18] jednowarstwowa sieć neuronalna, w której każdej z $s-1$ spośród s operacji odpowiada jeden element neuropodobny. W oparciu o rozwiązanie analityczne problemu rozdziału zadań w kompleksie operacji równoległych o modelach (4.7), uzyskanego po uwzględnieniu założeń upraszczających [12], [18], [75], zaproponowano przybliżanie optymalnych wartości decyzji sterujących $u_{\min,i}$ za pomocą wartości $u_i = y_i^{-1}$, gdzie

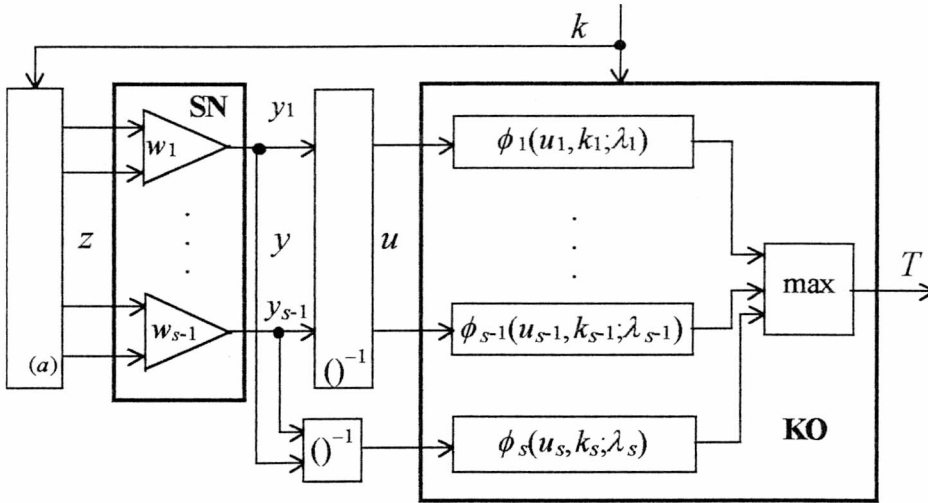
$$y_i = |w_{i1} z_{i1} + w_{i2} z_{i2} + \dots + w_{i,s-1} z_{i,s-1} + 1| \triangleq [f_i(k; w)]^{-1} \quad \text{dla } i \in \overline{1, s-1}, \quad (4.10)$$

$$y_i = \frac{1}{|U - (y_1^{-1} + y_2^{-1} + \dots + y_{s-1}^{-1})|} \quad \text{dla } i = s$$

oraz

$$z_{i1} = \frac{k_i}{k_1}, z_{i2} = \frac{k_i}{k_2}, \dots, z_{i,i-1} = \frac{k_i}{k_{i-1}}, z_{i,i} = \frac{k_i}{k_{i+1}}, \dots, z_{i,s-1} = \frac{k_i}{k_s}, \quad (4.11)$$

przy czym y_i jest skalarnym wyjściem, $z_i = [z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{i,s-1}]^T$ jest wektorem wejść, a $w_i = [w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{ik}]^T$ – wektorem parametrów i -tego algorytmu neuropodobnego (Rys. 4.3).



Rys. 4.3 System sterowania. SN – sieć neuronalna, KO – kompleks operacji, blok (a) realizuje przekształcenie (4.11).

Inna od pozostałych postać y_s została zaproponowana dla zagwarantowania spełnienia ograniczenia obowiązującego dla sumy rozmiarów zadań, jeśli $y_1^{-1} + y_2^{-1} + \dots + y_{s-1}^{-1} \leq U$. Z dwóch wersji algorytmu uczenia zaprezentowanych w [12], [18] dla systemów typu kompleks operacji, do wykorzystania w naszym przypadku została wybrana wersja uczenia *bez*

nauczyciela z zastosowaniem algorytmu z krokami próbnymi. Ta wersja dotyczy sytuacji, w której nie możemy skorzystać z pomocy nauczyciela i nie znamy dokładnego algorytmu sterowania g . Nie możemy zatem wyznaczyć optymalnych decyzji sterujących. W tym przypadku model systemu sterowania (4.8) jest zaangażowany w proces uczenia, który można rozumieć jako korekcję w adaptacyjnym systemie sterowania. Wartości parametrów w_i są modyfikowane w trakcie procesu "szukania" tak, aby minimalizowały czas realizacji T dla danych wartości λ_i . Algorytm uczenia jest postaci

$$w_i(n+1) = w_i(n) - \gamma_i(n) d_i(n) , \quad (4.12)$$

gdzie j -ta składowa wektora d_i w n -tym cyklu uczenia jest następująca

$$d_{ij}(n) = \frac{Q[w_i(n) + \bar{w}_i(n)] - Q[w_i(n)]}{\delta_{ij}} , \quad j=1, 2, \dots, s-1, \quad (4.13)$$

oraz $\bar{w}_i(n)$ jest wektorem o składowych zerowych oprócz j -tej składowej, która jest równa δ_{ij} (długość kroku próbnego). Dla zapewnienia zbieżności algorytmu uczenia współczynniki wzmocnienia $\gamma_i(n)$ powinny w ogólności spełniać warunki [4]

$$\bigwedge_n \gamma_i(n) \geq 0 , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_i(n) = \infty , \quad \sum_{n=0}^{\infty} [\gamma_i(n)]^2 < \infty . \quad (4.14)$$

Wskaźnik jakości

$$Q[w_i(n)] = T(n) ,$$

gdzie

$$T(n) = \max_i \phi_i[u_i(n) , k_i(n); \lambda_i]$$

oraz $u_i(n) = [y_i(n)]^{-1}$, $y_i(n)$ jest wyznaczane dla $w_i(n)$ i $z_i(n)$ otrzymanych z (4.11).

Dla uzyskania algorytmu sterowania dla całego systemu, proponujemy uczenie SN według następującego schematu:

1. Dla określonego F_x wyznaczamy $F_{\lambda,i}$ dotyczące λ_i . Faktycznie jest to zadanie rozpoznawania i stosujemy metodę logiczno-algebraiczną tak, jak dla zadania rozpoznawania [7], [13], tzn. wyznaczamy podzbiór $D_{\lambda,i}$ zbioru (4.9).

2. W $D_{\lambda,i}$ wyznaczamy największe $\lambda_{ip} = \bar{\lambda}_{ip}$ i wstawiamy do (4.7)

$$\bar{T}_i = k_i u_i \bar{\lambda}_{ip} . \quad (4.15)$$

3. Uruchamiamy uczenie SN (Rys. 4.4) z algorytmem uczenia określonym zależnością (4.12).

Do uczenia zamiast rzeczywistego obiektu wykorzystujemy model (4.15), tzn. $\bar{T} = \max_i \bar{T}_i$.

W czasie uczenia k zmieniamy losowo – typowa sytuacja: niezależne losowania k_i według równomiernego rozkładu z określonego przedziału odpowiadającego znanym warunkom pracy. W wyniku uzyskujemy $f(k)$ dla rozpatrywanego F_x .

4. Powtórzenie kroków 1÷3 dla wszystkich możliwych F_x prowadzi do uzyskania algorytmu sterowania, który może być wykorzystany do wyznaczania rozdziału zadań po uczeniu.

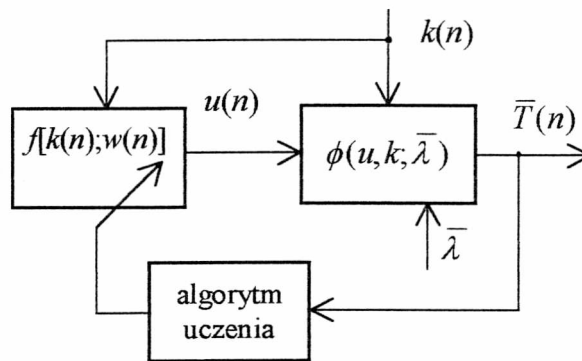
Algorytm roboczy ma postać "tabeli":

Tabela 4.1 Algorytm roboczy

$F_{x,1}$	f_1
$F_{x,2}$	f_2
$\vdots$	$\vdots$
$F_{x,\beta}$	f_β

gdzie $\beta = \sum_{i=1}^{2^{n_1}} C_{2^{n_1}}^i = \binom{2^{n_1}}{0} + \binom{2^{n_1}}{1} + \binom{2^{n_1}}{2} + \dots + \binom{2^{n_1}}{2^{n_1}} - 1 = (1+1)^{2^{n_1}} - 1 = 2^{2^{n_1}} - 1$ jest liczbą

wszystkich możliwych własności F_x , a n_1 – liczbą formuł elementarnych α_x .



Rys. 4.4 Schemat blokowy systemu uczenia dla parametrów $\bar{\lambda}$ wyznaczonych z podsystemu logicznego.

To podejście nadaje się do realnych sytuacji, w których n_1 jest niewielkie lub z góry wiadomo jaki jest zbiór możliwych własności F_x (ograniczenie na zbiór własności F_x).

4.2 Realizacja programowa

Badania symulacyjne zostały opracowane dla podsystemu funkcyjnego składającego się z s operacji równoległych o modelach (4.7), dla algorytmów neuropodobnych o modelach (4.10) i dla algorytmu uczenia (4.12). Badania symulacyjne przeprowadzono przy użyciu specjalnie w tym celu napisanego programu komputerowego. Jest to aplikacja napisana w języku C, działająca w środowisku systemu operacyjnego DOS na komputerach klasy PC z procesorem typu 80386 lub z procesorami wyższych typów. Dane wejściowe do programu znajdują się w pliku tekstowym, w którym określone są zakresy zmienności dla parametrów kompleksu operacji oraz dla parametrów algorytmu uczenia, a także odpowiadające poszczególnym parametrom stałe wartości (stałe kroki), o które w podanych zakresach będą zmieniane. Dla każdego punktu tak określonej dyskretnej przestrzeni wartości parametrów wejściowych program wykonuje obliczenia składające się z dwóch etapów. W pierwszym etapie przeprowadzana jest symulacja procesu uczenia sieci neuronalnej. W etapie drugim, dla ustalonych po pierwszym etapie wartości wag sieci neuronalnej, przeprowadzana jest symulacja sterowania rozdziałem zadań. Wyniki, w postaci wartości odpowiednich wskaźników jakości związanych z etapem pierwszym i etapem drugim, są zapisywane do pliku tekstowego w formacie umożliwiającym zaimportowanie ich do arkusza kalkulacyjnego. Możliwe jest także wykorzystanie ich jako danych wejściowych dla innego programu. W programie przyjęto następujące parametry wejściowe:

Parametry modeli operacji

1. Ponieważ nie rozważano podsystemu logicznego, przyjęto że wartości $\bar{\lambda}_{ip}$ parametrów λ_i będą generowane niezależnie w sposób losowy według rozkładu równomiernego dla zadanej

$$\text{wartości średniej } \lambda_{sr} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \bar{\lambda}_{ip} \text{ i zadanej wariancji } \sigma_{\lambda}^2 = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (\bar{\lambda}_{ip} - \lambda_{sr})^2.$$

2. Co do parametrów k_i przyjęto założenie, że ich wartości $k_i(n)$ w n -tym cyklu uczenia są generowane niezależnie w sposób losowy według rozkładu równomiernego z przedziału $[k_i - \Delta_k, k_i + \Delta_k]$, gdzie Δ_k jest zadany maksymalnym rozrzutem wartości wokół k_i – środka i -tego przedziału generowanego losowo według rozkładu równomiernego dla zadanej

$$\text{wartości średniej } k_{sr} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s k_i \text{ i zadanej wariancji } \sigma_k^2 = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (k_i - k_{sr})^2.$$

3. Przyjęto znormalizowany rozmiar zadania (tj. $U = 1$).

Parametry algorytmów neuropodobnych

1. Przyjęto początkowe wartości współczynników wagowych $w_{ij}(0) = 1$ ($i = 1, 2, \dots, s - 1$; $j = 1, 2, \dots, s - 1$).

Parametry algorytmu uczenia

1. Dla współczynników wzmocnienia przyjęto następującą postać ogólną $\gamma_i(n) = \frac{c}{n^a}$, $c > 0$, $a > 0$, która dla odpowiednich zakresów wartości parametrów a i c zapewnia spełnienie ogólnych warunków zbieżności (4.14).

2. Przyjęto stałą długość kroku próbnego $\delta_{ij} = \delta$.

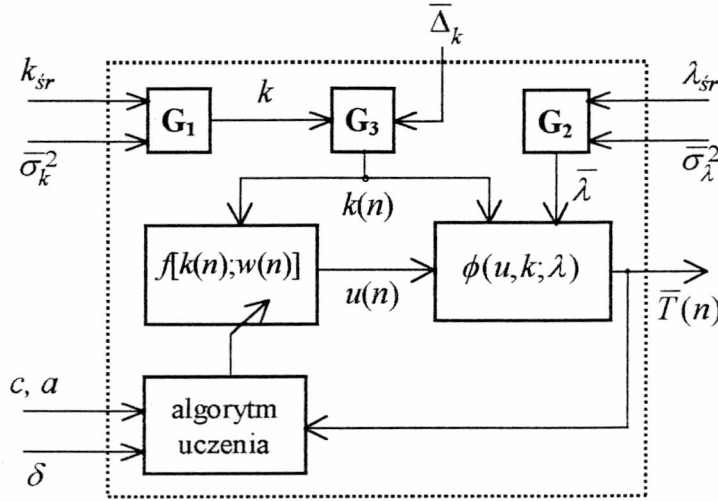
W badaniach symulacyjnych zamiast wariancji σ_{λ}^2 , σ_k^2 i rozrzutu Δ_k rozważano

znormalizowane wariancje $\bar{\sigma}_{\lambda}^2 = \frac{\sigma_{\lambda}^2}{\sigma_{\lambda, \max}^2}$, $\bar{\sigma}_k^2 = \frac{\sigma_k^2}{\sigma_{k, \max}^2}$ i znormalizowany rozrzut

$\bar{\Delta}_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k, \max}}$, przy czym $\sigma_{\lambda, \max}^2 = \frac{1}{s-1} \lambda_{sr}^2$, $\sigma_{k, \max}^2 = \frac{1}{s-1} k_{sr}^2$ i $\Delta_{k, \max} = k_{sr} (1 - \sqrt{\bar{\sigma}_k^2})$

są wartościami ograniczającymi od góry odpowiednie parametry, wynikającymi z konieczności spełnienia ograniczeń $\bar{\lambda}_{ip} > 0$ oraz $k_i(n) > 0$. Takie przeskalowanie umożliwia wygodniejsze posługiwanie się tymi parametrami, ponieważ po normalizacji ich wartości mieszczą się w przedziale $[0, 1)$. Wartości parametrów λ_{sr} były zmieniane w zakresie od 1 do 7, a parametrów k_{sr} – w zakresie od 1 do 10. Przyjęto $c \in \{1, 2, 3, 4\}$, $a \in \{1, 1.5, 2, 2.5\}$, $\delta = 0.01$.

Rezultaty badań, przedstawione w następnych punktach, są wynikiem uśrednienia rezultatów uzyskanych w 10000 prób dla danych generowanych z tymi samymi parametrami rozkładów prawdopodobieństwa. Na Rys. 4.5 przedstawiono schemat blokowy układu symulacji, w którym generatory wartości losowych G_1 i G_2 są wykorzystywane do generowania wartości, odpowiednio, $\bar{\lambda}_{ip}$ i k_i przed każdym procesem uczenia, natomiast generator G_3 generuje wartości $k_i(n)$ w każdym cyklu każdego procesu uczenia.



Rys. 4.5 Schemat blokowy układu symulacji.

4.3 Badanie procesu uczenia sieci neuronalnej

Badano wpływ parametrów modeli operacji i parametrów algorytmu uczenia na przebieg procesu uczenia. W części dotyczącej badania wpływu parametrów modeli operacji, badano wpływ parametrów charakteryzujących zestawu parametrów λ oraz k , tj. wpływ λ_{sr} , $\bar{\sigma}_{\lambda}^2$ oraz k_{sr} , $\bar{\sigma}_k^2$ i $\bar{\Delta}_k$, a w części dotyczącej parametrów algorytmu uczenia – wpływ c i a na kryterium jakości

$$Q_1 = N,$$

gdzie N jest długością procesu uczenia wyrażoną liczbą cykli uczących. Proces uczenia zatrzymywano, gdy po n -tym cyklu uczącym spełniony był następujący warunek stopu

$$\sum_{l=n-\tau+1}^n \xi^{n-l} \bar{\Delta}_w(l) < \varepsilon.$$

Oznacza on, że ważona suma średnich zmian parametrów wagowych liczona dla τ ostatnich cykli uczących musi być mniejsza od zadanej stałej ε , gdzie ξ^{n-l} jest współczynnikiem wagowym a średnia zmiana wag w l -tym cyklu uczącym zdefiniowana jest następująco

$$\bar{\Delta}_w(l) = \frac{1}{(s-1)^2} \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{s-1} |w_{ij}(l) - w_{ij}(l-1)|.$$

Dla odpowiednio dużego τ i odpowiednio małego ε przyjęty warunek stopu dobrze określa moment, w którym należy przerwać uczenie, bo parametry wagowe już praktycznie się nie zmieniają. Wszystkie badania symulacyjne zostały przeprowadzone dla $\tau = 10$, $\xi = 0.5$,

$\varepsilon = 0.001$.

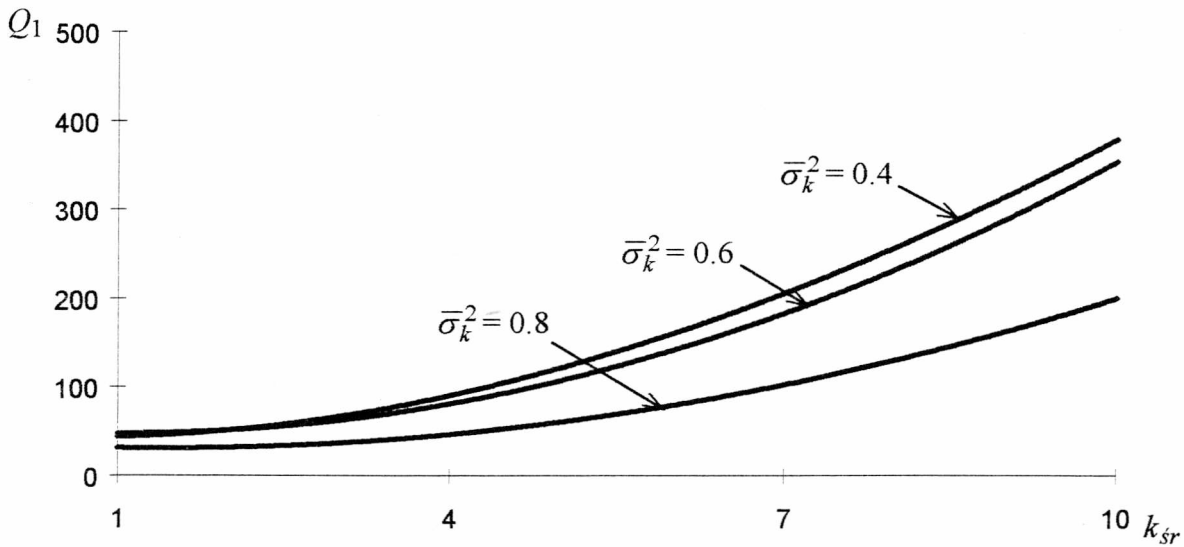
Wykresy przedstawione na Rys. 4.6, Rys. 4.7, Rys. 4.8 prezentują wybrane wyniki symulacyjnych badań wpływu parametrów modeli operacji na długość procesu uczenia. Sporządzono je na podstawie wyników badań zawartych w Tabeli 4.2, Tabeli 4.3 (dla parametrów k) oraz w Tabeli 4.4 (dla parametrów λ). Ponieważ badania symulacyjne przeprowadzano w warunkach losowych to, mimo zastosowanego uśrednienia wyników, wykresy wykazywałyby pewne nieregularności. Dlatego, na podstawie znajomości charakteru zależności (łatwego do zauważenia w odpowiednich tabelach), zaproponowano aproksymację tych zależności przy pomocy funkcji kwadratowej. Przyjęto liczbę operacji $s = 3$ i parametry algorytmu uczenia $c = 1$, $\alpha = 1$, $\delta = 0.01$.

Dla $\bar{\Delta}_k = 0.05$ (mały rozrzut wartości parametrów $k(n)$ w przedziałach określających "zadane warunki pracy") oraz dla $\lambda_{sr} = 1$ i $\bar{\sigma}_\lambda^2 = 0.05$ otrzymano wyniki prezentowane w Tabeli 4.2.

Tabela 4.2 Wartości Q_1 dla różnych k_{sr} i $\bar{\sigma}_k^2$

$\bar{\sigma}_k^2$	k_{sr}			
	1	4	7	10
0	56	127	220	363
0.2	50	108	201	406
0.4	47	113	210	421
0.6	41	100	166	349
0.8	28	38	113	210

Ilustruje je wykres przedstawiony na Rys. 4.6.



Rys. 4.6 Wpływ k_{sr} na długość procesu uczenia dla różnych wartości $\bar{\sigma}_k^2$.

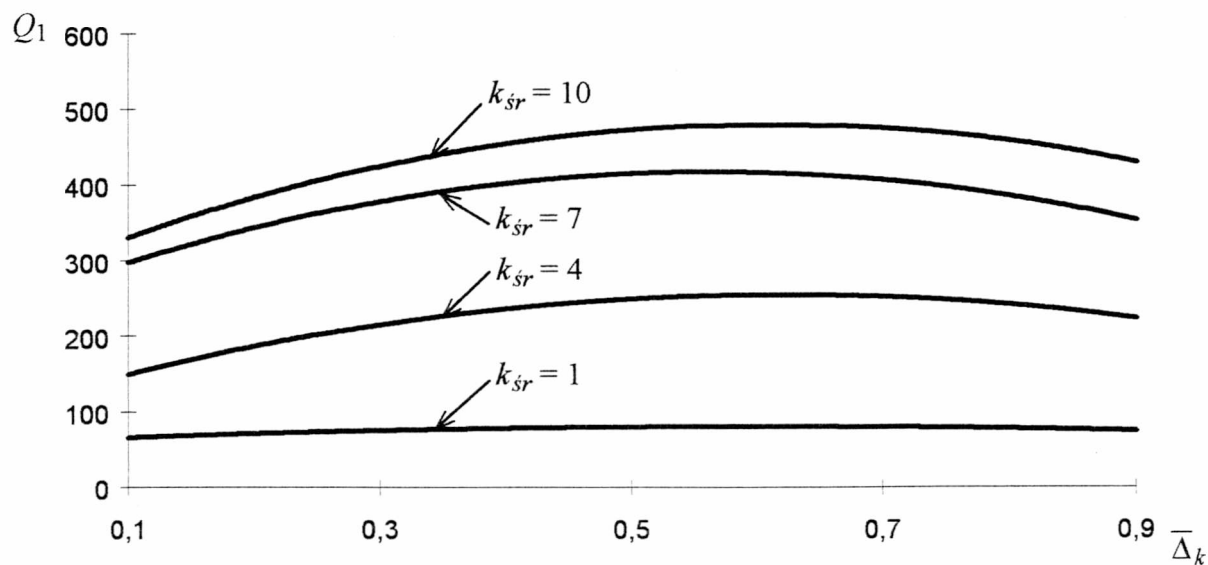
Wartości pozostałych parametrów: $\bar{\Delta}_k = 0.05$, $\lambda_{sr} = 1$, $\bar{\sigma}_\lambda^2 = 0.05$ oraz $c = 1$, $a = 1$, $\delta = 0.01$.

Tabela 4.3 prezentuje wyniki otrzymane dla różnych wartości k_{sr} i różnych wartości rozrzutu parametrów k przy $\bar{\sigma}_k^2 = 0.05$ oraz $\lambda_{sr} = 1$ i $\bar{\sigma}_\lambda^2 = 0.05$.

Tabela 4.3 Wartości Q_1 dla różnych k_{sr} i $\bar{\Delta}_k$

$\bar{\Delta}_k$	k_{sr}			
	1	4	7	10
0.1	64	147	303	330
0.3	77	220	365	412
0.5	78	249	414	510
0.7	78	246	419	435
0.9	74	225	346	442

Kolejny wykres (Rys. 4.7) ilustruje wpływ rozrzutu wartości parametrów k na długość procesu uczenia.



Rys. 4.7 Wpływ $\bar{\Delta}_k$ na długość procesu uczenia dla różnych wartości k_{sr} .

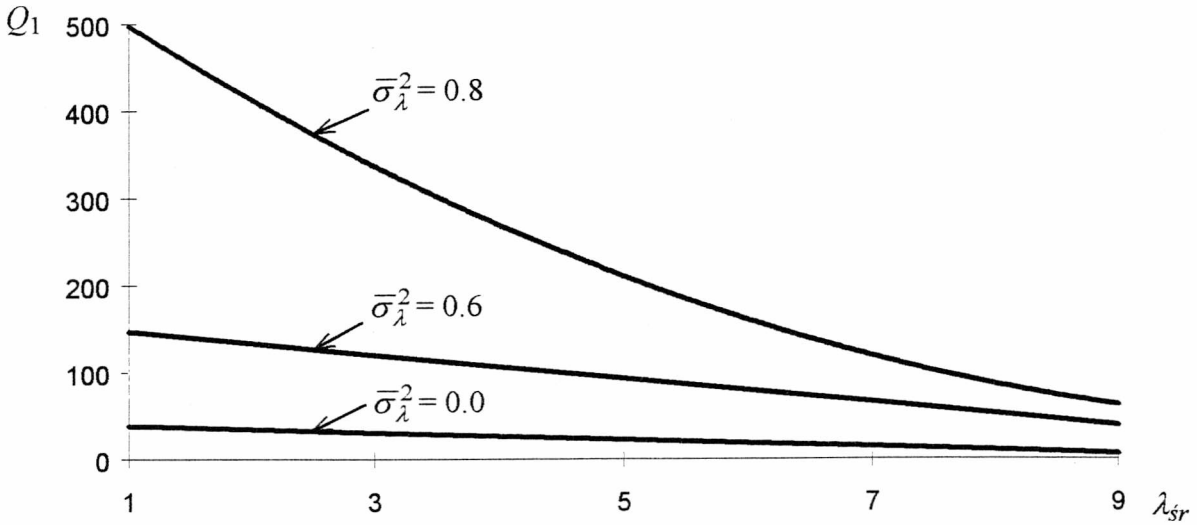
Wartości pozostałych parametrów: $\bar{\sigma}_k^2 = 0.05$, $\lambda_{sr} = 1$, $\bar{\sigma}_\lambda^2 = 0.05$ oraz $c = 1$, $a = 1$, $\delta = 0.01$.

Dla $k_{sr} = 2$, $\bar{\sigma}_k^2 = 0.05$ oraz $\bar{\Delta}_k = 0.05$ otrzymano wyniki prezentowane w Tabeli 4.4.

Tabela 4.4 Wartości Q_1 dla różnych λ_{sr} i $\bar{\sigma}_\lambda^2$

$\bar{\sigma}_\lambda^2$	λ_{sr}			
	1	3	5	7
0	34	35	26	9
0.2	100	82	43	25
0.4	106	98	55	41
0.6	155	114	86	60
0.8	486	357	211	96

Ilustruje je wykres przedstawiony na Rys. 4.8.



Rys. 4.8 Wpływ λ_{sr} na długość procesu uczenia dla różnych wartości $\overline{\sigma}_\lambda^2$.

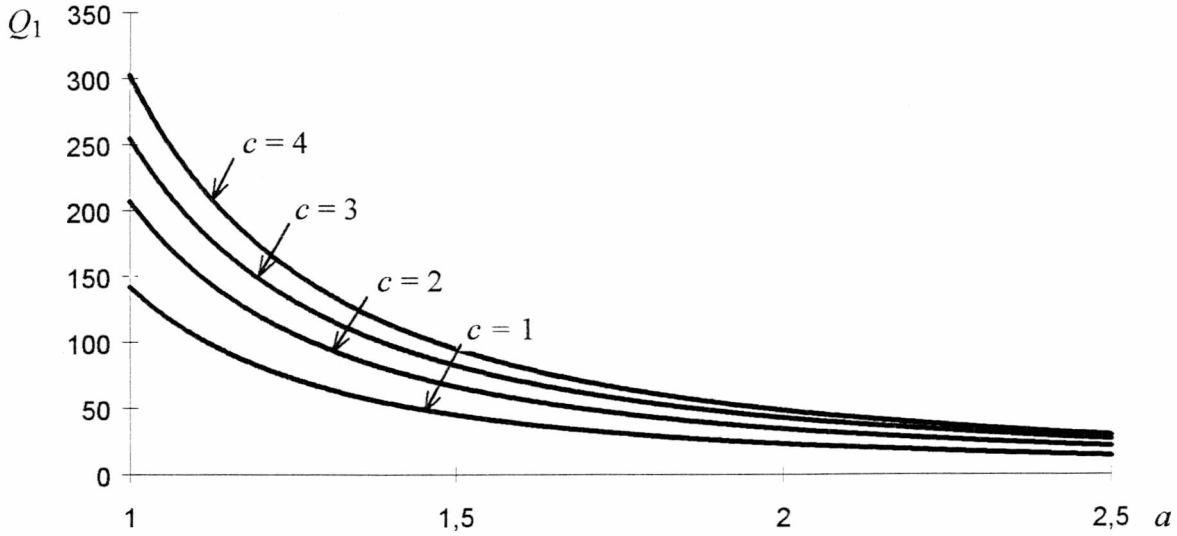
Wartości pozostałych parametrów: $k_{sr} = 2$, $\overline{\sigma}_k^2 = 0.05$, $\overline{\Delta}_k = 0.05$ oraz $c = 1$, $a = 1$, $\delta = 0.01$.

Na podstawie przedstawionych na wykresach wyników badań symulacyjnych można stwierdzić, że liczba cykli uczenia wzrasta wraz ze zwiększaniem k_{sr} , przy czym wzrost ten jest szybszy dla mniejszego odchylenia wartości k od średniej. Długość procesu uczenia w zasadzie nie zależy od rozrzutu $\overline{\Delta}_k$ wartości k . Zaobserwowano też silny wpływ wartości parametrów λ na liczbę cykli uczących. Zależność ta jest przeciwna do zależności zaobserwowanej dla parametrów k , tzn. długość procesu uczenia maleje wraz ze wzrostem λ_{sr} i szybkość z jaką maleje jest najmniejsza dla zerowego odchylenia od średniej. Należy podkreślić, że zmiana długości procesu uczenia w zaobserwowanych granicach nie była zauważalna pod względem czasu obliczeń dla pojedynczych procesów uczenia. Wydaje się, że wskaźnik Q_1 trzeba raczej rozpatrywać w powiązaniu z wprowadzonym w następnym punkcie wskaźnikiem jakości sterowania Q_2 .

Poniższa tabela i wykres na Rys. 4.9 prezentują wybrane wyniki symulacyjnych badań wpływu parametrów algorytmu uczenia na długość procesu uczenia.

Tabela 4.5 Wartości Q_1 dla różnych c i a

a	c			
	1	2	3	4
1	150	209	245	293
1.5	38	67	94	106
2	25	31	37	43
2.5	14	22	28	31



Rys. 4.9 Wpływ a na długość procesu uczenia dla różnych wartości c .

Wartości pozostałych parametrów: $k_{sr} = 2$, $\bar{\sigma}_k^2 = 0.05$, $\bar{\Delta}_k = 0.05$, $\lambda_{sr} = 1$, $\bar{\sigma}_\lambda^2 = 0.05$ oraz $\delta = 0.01$.

Długość procesu uczenia bardzo silnie zależy od parametrów algorytmu uczenia. W miarę zwiększania wartości parametru a malała ona do liczby ok. 20 cykli (z początkowej liczby 150 – 300 cykli). Wpływ wartości parametru c jest równie łatwy do zauważenia, choć nie jest on równie silny – im mniejsze c , tym mniejsza długość procesu uczenia.

4.4 Badanie efektu uczenia sieci neuronalnej

W punkcie tym badano wpływ parametrów modeli operacji na jakość sterowania po nauczaniu. Badano wpływ parametrów charakteryzujących zestawy parametrów λ oraz k , tj. wpływ λ_{sr} , $\bar{\sigma}_\lambda^2$ oraz k_{sr} , $\bar{\sigma}_k^2$ i $\bar{\Delta}_k$ na kryterium jakości

$$Q_2 = \frac{1}{N_T} \sum_{n=1}^{N_T} \tilde{e}(n),$$

gdzie N_T było liczbą cykli testujących dla danych generowanych według rozkładów prawdopodobieństwa charakteryzowanych wartościami parametrów przyjętymi w procesie uczenia, a

$$\tilde{e}(n) = \frac{\bar{T}(n) - \tilde{T}(n)}{\tilde{T}(n)}$$

jest względnym błędem liczonym w n -tym cyklu testowania dla przybliżonego rozwiązania optymalnego $\tilde{T}(n)$ otrzymanego przy pomocy procedury numerycznej. Zastosowano tu zaproponowaną w pracy [39] metodę analityczno-numeryczną, polegającą na analitycznym sprowadzeniu problemu pierwotnego do problemu znalezienia miejsca zerowego funkcji jednej zmiennej, a następnie na wyznaczeniu wartości tego miejsca zerowego przy użyciu wybranego algorytmu numerycznego. W wykorzystywanym w niniejszej pracy programie komputerowym zaimplementowano numeryczny algorytm podziału na pół.

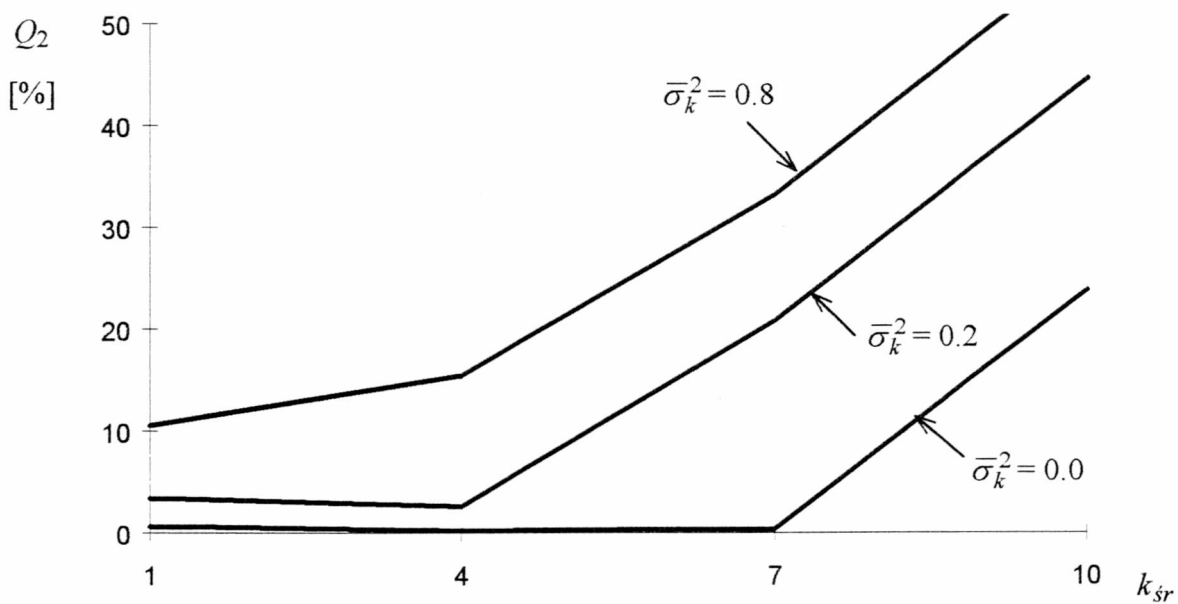
Wykresy przedstawione na Rys. 4.10, Rys. 4.11 i Rys. 4.12 prezentują wybrane wyniki symulacyjnych badań wpływu parametrów modeli operacji na jakość sterowania po nauczaniu. Sporządzono je na podstawie wyników badań zawartych w Tabeli 4.5, Tabeli 4.6 (dla parametrów k) oraz w Tabeli 4.7 (dla parametrów λ). Ponieważ badania symulacyjne przeprowadzano w warunkach losowych to, nie licząc wykresu na Rys. 4.10, prezentowaną zależność aproksymowano przy pomocy funkcji kwadratowej. Przyjęto liczbę operacji $s = 3$, parametry algorytmu uczenia $c = 1$, $\alpha = 1$, $\delta = 0.01$.

Dla $\bar{\Delta}_k = 0.05$ (mały rozrzut wartości parametrów $k(n)$ w przedziałach określających "zadane warunki pracy") oraz dla $\lambda_{sr} = 1$ i $\bar{\sigma}_\lambda^2 = 0.05$ otrzymano wyniki prezentowane w Tabeli 4.6.

Tabela 4.6 Wartości Q_2 dla różnych k_{sr} i $\bar{\sigma}_k^2$

$\bar{\sigma}_k^2$	k_{sr}			
	1	4	7	10
0	0.6	0.2	0.4	23.8
0.2	3.4	2.6	20.8	44.5
0.4	5	5.4	24.6	47.6
0.6	7.6	10.5	28.4	50
0.8	10.5	15.4	33.2	57

Ilustruje je poniższy wykres.



Rys. 4.10 Wpływ k_{sr} na jakość sterowania dla różnych wartości $\bar{\sigma}_k^2$.

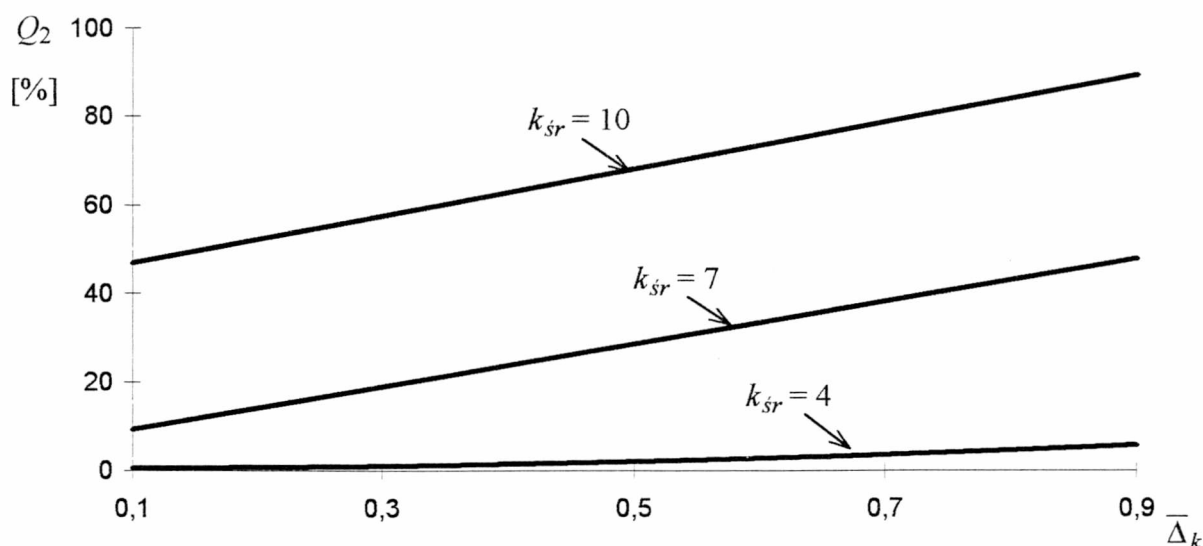
Wartości pozostałych parametrów: $\bar{\Delta}_k = 0.05$, $\lambda_{sr} = 1$, $\bar{\sigma}_\lambda^2 = 0.05$ oraz $c = 1$, $a = 1$, $\delta = 0.01$.

Tabela 4.7 prezentuje wyniki otrzymane dla różnych wartości k_{sr} i różnych wartości rozrzutu parametrów k przy $\bar{\sigma}_k^2 = 0.05$ oraz $\lambda_{sr} = 1$ i $\bar{\sigma}_\lambda^2 = 0.05$.

Tabela 4.7 Wartości Q_2 dla różnych k_{sr} i $\bar{\Delta}_k$

$\bar{\Delta}_k$	k_{sr}			
	1	4	7	10
0.1	2.6	0.4	15.5	50
0.3	4.4	1.1	15.3	58.7
0.5	3.6	2.1	27.5	54.3
0.7	5.2	3.1	26.3	90
0.9	7.4	5.8	58.1	87.2

Kolejny wykres (Rys. 4.11) ilustruje wpływ rozrzutu wartości parametrów k na jakość sterowania.



Rys. 4.11 Wpływ $\bar{\Delta}_k$ na jakość sterowania dla różnych wartości k_{sr} .

Wartości pozostałych parametrów: $\bar{\sigma}_k^2 = 0.05$, $\lambda_{sr} = 1$, $\bar{\sigma}_\lambda^2 = 0.05$ oraz $c = 1$, $a = 1$, $\delta = 0.01$.

Łatwo zauważyć istotną zależność jakości sterowania po nauczaniu od wartości parametrów k . Można powiedzieć, że jest ona akceptowalna dla wartości $k_{sr} < 7$ – błąd względny w stosunku do wartości optymalnej nie przekracza wówczas 10% dla odpowiednio małego odchylenia od średniej i odpowiednio małej wielkości rozrzutu. Jakość sterowania pogarsza się jednak szybko wraz ze wzrostem wartości każdego z trzech parametrów charakteryzujących wektor parametrów k , przy czym szybkość ta jest największa dla zmiany k_{sr} , a najmniejsza

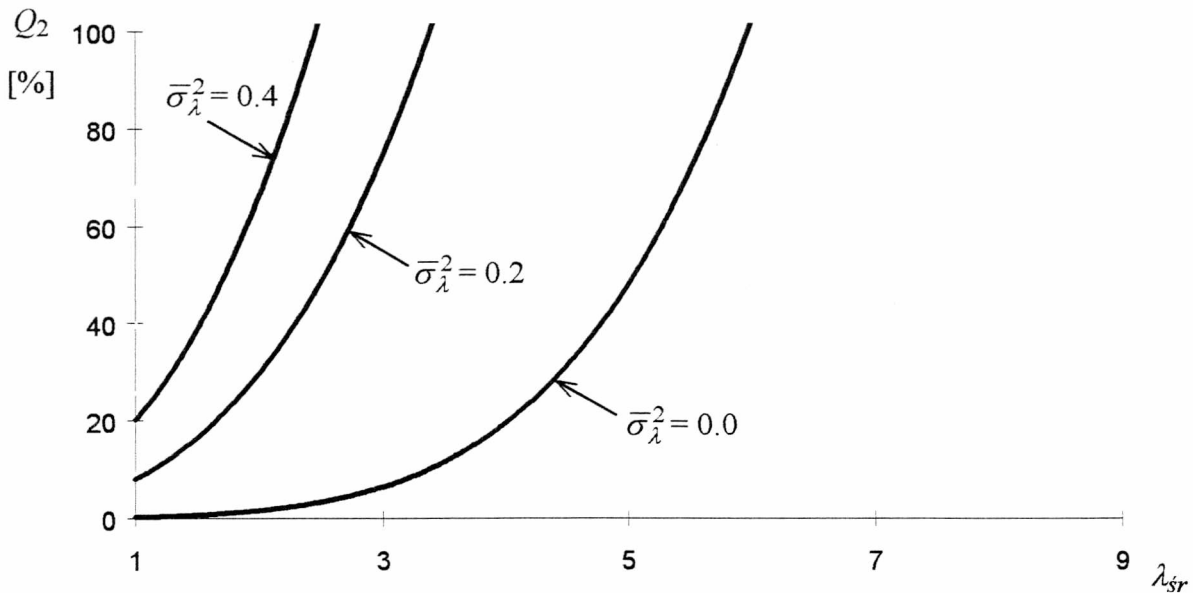
dla zmiany $\bar{\Delta}_k$.

Dla $k_{sr} = 2$, $\bar{\sigma}_k^2 = 0.05$ oraz $\bar{\Delta}_k = 0.05$ otrzymano wyniki prezentowane w Tabeli 4.8.

Tabela 4.8 Wartości Q_2 dla różnych λ_{sr} i $\bar{\sigma}_\lambda^2$

$\bar{\sigma}_\lambda^2$	λ_{sr}			
	1	3	5	7
0	0.2	6.7	54.9	175.4
0.2	9	63.5	242.8	828.2
0.4	25.5	105.1	406.1	1702.3
0.6	39.1	207.5	822.3	
0.8	65.8	468	1803.9	

Ilustruje je wykres przedstawiony na Rys. 4.12.



Rys. 4.12 Wpływ λ_{sr} na jakość sterowania dla różnych wartości $\bar{\sigma}_\lambda^2$.

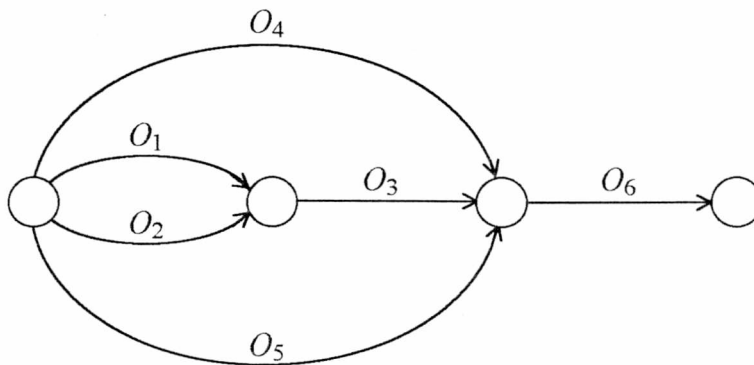
Wartości pozostałych parametrów: $k_{sr} = 2$, $\bar{\sigma}_k^2 = 0.05$, $\bar{\Delta}_k = 0.05$ oraz $c = 1$, $a = 1$, $\delta = 0.01$.

Wskazuje on na bardzo silną zależność jakości sterowania od wartości parametrów λ . Jakość zmniejsza się proporcjonalnie do kwadratu λ_{sr} . W podobny sposób wpływa na nią wzrost

wariancji $\bar{\sigma}_\lambda^2$. Powoduje to, że krytycznym parametrem ograniczającym możliwości zastosowania sieci neuronalnej do sterowania rozdziałem zadań w kompleksie operacji równoległych jest wektor λ parametrów modelu operacji. Można przyjąć, że dla $\lambda_{sr} > 3$ i dla $\bar{\sigma}_\lambda^2 \geq 0.2$ nie ma sensu stosować sieci neuronalnej o zaproponowanej strukturze. Pewnym rozwiązaniem tej trudności może być przeprowadzanie w trakcie procesu uczenia adaptacji nie tylko współczynników wagowych, ale także wartości progu dla poszczególnych algorytmów neuropodobnych; obecnie przyjmowaliśmy że jest ona stała i równa 1 (4.10). Inną możliwość stanowi wybór innej, bardziej złożonej struktury sieci neuronalnej.

5. Produkcja kompletów foteli przednich do samochodu jako przykład praktyczny systemu z hybrydową reprezentacją wiedzy

W procesie produkcji kompletów foteli przednich do samochodu można wyróżnić cztery etapy, na które składa się sześć operacji produkcyjnych $O_1, \dots, O_6$. Kolejność ich wykonywania jest przedstawiona na Rys. 5.1.



Rys. 5.1 Struktura operacji w procesie produkcji foteli

Operacje wykonywane są przez pracowników z wykorzystaniem narzędzi i urządzeń produkcyjnych, przy czym stopień zmechanizowania/zautomatyzowania poszczególnych operacji produkcyjnych jest zróżnicowany. Związane z każdą operacją zestawy czynności wykonywanych przy pomocy narzędzi i urządzeń można opisać następująco:

O_1 – montaż szkieletów fotela przedniego lewego na stanowiskach produkcyjnych wyposażonych w odpowiednie narzędzia elektryczne,

O_2 – montaż szkieletów fotela przedniego prawego na stanowiskach produkcyjnych wyposażonych w odpowiednie narzędzia elektryczne,

O_3 – zgrzewanie elementów aluminiowych i ich montaż na szkieletach foteli przy użyciu narzędzi do zgrzewania i montażu,

O_4 – wycinanie według odpowiednich wykrojów elementów tapicerki foteli i zszywanie kompletnych zestawów tapicerki foteli z wykorzystaniem maszyn do cięcia i szycia,

O_5 – produkcja pianek elastycznych z zastosowaniem wtryskarek,

O_6 – ręczne nakładanie tapicerki na szkielety foteli i wypełnianie ich piankami elastycznymi.

Dla tak opisanego systemu produkcyjnego można dla poszczególnych operacji zaproponować modele wiążące czas realizacji operacji z wielkością produkcji dla tej operacji. Wówczas czas T_i realizacji operacji O_i można wyrazić przy pomocy funkcji

$$T_i = \frac{P_i}{Z_i}, \quad i=1, 2, \dots, 6,$$

gdzie P_i jest wielkością produkcji dla operacji O_i określoną liczbą zestawów komponentów foteli wyprodukowanych/zmontowanych w tej operacji, a Z_i oznacza zdolności produkcyjne dla operacji O_i rozumiane jako maksymalne tempo produkcji – wyrażone stosunkiem maksymalnej liczby zestawów komponentów foteli, które można wyprodukować/zmontować w tej operacji, do czasu ich wykonania. Zdolności produkcyjne Z_i najczęściej podaje się w liczbie zestawów na 1 godzinę, wobec czego czas T_i wyrażony jest w godzinach. Czas realizacji produkcji w całym systemie, w którym produkcja ma charakter taśmowy i dotyczy ilości większych niż pojedyncze komplety, jest w przybliżeniu równy czasowi realizacji najdłuższej operacji

$$T = \max (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6),$$

czyli

$$T = \max \left(\frac{P_1}{Z_1}, \frac{P_2}{Z_2}, \frac{P_3}{Z_3}, \frac{P_4}{Z_4}, \frac{P_5}{Z_5}, \frac{P_6}{Z_6} \right). \quad (5.1)$$

Biorąc pod uwagę zależności z Rys. 5.1 i sens poszczególnych operacji, całkowita wielkość produkcji netto (tzn. po odrzuceniu kompletów z wadami produkcyjnymi) wynosi

$$P = \rho_6 P_6, \quad (5.2)$$

gdzie $\rho_6 \in (0, 1]$ jest współczynnikiem sprawności wykonania operacji O_6 ($1-\rho_6$ jest względną wielkością odrzutu z produkcji dla operacji O_6). W podobny sposób można uwzględnić wartości współczynników $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$, przy czym

$$P_6 = \min (\rho_3 P_3, \rho_4 P_4, \rho_5 P_5), \quad (5.3)$$

$$P_3 = \min (\rho_1 P_1, \rho_2 P_2). \quad (5.4)$$

Zgodnie z (5.1), (5.2), (5.3), (5.4) wyprodukowanie P kompletów foteli bez zbędnych nadwyżek w produkcji netto dla poszczególnych operacji wymaga spełnienia następujących równości

$$P_1 = \frac{P}{\rho_1 \rho_3 \rho_6}, \quad P_2 = \frac{P}{\rho_2 \rho_3 \rho_6}, \quad P_3 = \frac{P}{\rho_3 \rho_6},$$

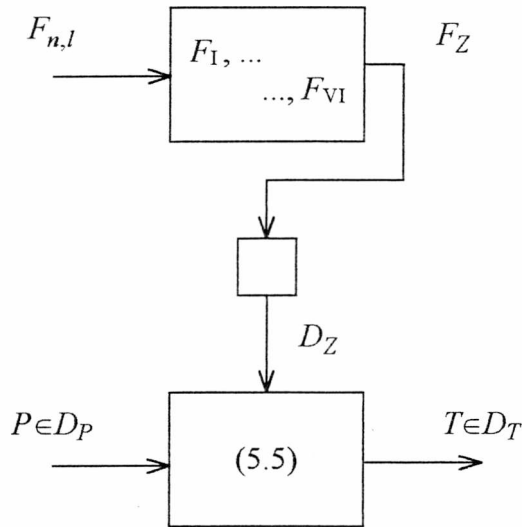
$$P_4 = \frac{P}{\rho_4 \rho_6}, \quad P_5 = \frac{P}{\rho_5 \rho_6}, \quad P_6 = \frac{P}{\rho_6}.$$

Uwzględnienie tych zależności sprowadza (5.1) do postaci

$$T = P \cdot \max \left(\frac{1}{\rho_1 \rho_3 \rho_6 Z_1}, \frac{1}{\rho_2 \rho_3 \rho_6 Z_2}, \frac{1}{\rho_3 \rho_6 Z_3}, \frac{1}{\rho_4 \rho_6 Z_4}, \frac{1}{\rho_5 \rho_6 Z_5}, \frac{1}{\rho_6 Z_6} \right). \quad (5.5)$$

Występujące w modelu (5.5) współczynniki związane z wielkością odrzutu z produkcji są zazwyczaj stałe dla poszczególnych operacji. Można je wyliczyć na podstawie statystycznych danych produkcyjnych. Z kolei zdolności produkcyjne zależą od liczby pracowników oraz liczby narzędzi/urządzeń przydzielonych do operacji. Generalnie, im więcej pracowników i środków produkcji jest przydzielonych do operacji, tym większe są zdolności produkcyjne. Często przyjmuje się konkretne postacie takich zależności. Mogą być to funkcje, które zwane są funkcjami produkcji (np. funkcja Cobba-Douglasa, funkcja CES) [40], [56]. Występuje w nich wiele dodatkowych parametrów zależnych, na przykład, od stopnia zmechanizowania czynności wykonywanych w ramach operacji. Dokładne wartości tych parametrów są trudne do ustalenia. Poza tym funkcje produkcji nie uwzględniają w wystarczającym stopniu efektu nasycenia (polega on na braku dalszego wzrostu zdolności produkcyjnych pomimo zwiększania liczby pracowników lub środków produkcji), nie uwzględniają zależności pomiędzy liczbą pracowników a liczbą zestawów narzędzi/liczbą urządzeń i są funkcjami ciągłymi, podczas gdy faktycznie zmienne wejściowe przyjmują wartości ze zbioru dyskretnego. Z tych powodów w niniejszej pracy proponuje się dla zdolności produkcyjnych model w postaci logicznej reprezentacji wiedzy. Elementarne własności dotyczące liczby narzędzi $n = [n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6]^T$ oraz elementarne własności dotyczące liczby ludzi (pracowników) $l = [l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6]^T$ są reprezentowane przez formuły tworzące ciągi formuł $\alpha_n = (\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \alpha_{n_3}, \alpha_{n_4}, \alpha_{n_5}, \alpha_{n_6})$ i $\alpha_l = (\alpha_{l_1}, \alpha_{l_2}, \alpha_{l_3}, \alpha_{l_4}, \alpha_{l_5}, \alpha_{l_6})$, a elementarne własności dotyczące zdolności produkcyjnych $Z = [Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6]^T$ są reprezentowane przez formuły wchodzące w skład ciągów $\alpha_Z = (\alpha_{Z_1}, \alpha_{Z_2}, \alpha_{Z_3}, \alpha_{Z_4}, \alpha_{Z_5}, \alpha_{Z_6})$, gdzie α_{n_i} , α_{l_i} , α_{Z_i} są ciągami formuł elementarnych dotyczących, odpowiednio, n_i , l_i oraz Z_i , $i = 1, 2, \dots, 6$. Ponieważ logiczną RW można podać niezależnie dla każdej operacji, to dla potrzeb formułowania problemów analizy i podejmowania decyzji dla modelu hybrydowego wprowadza się w modelu logicznym własności wejściowe $F_{n_i, l_i}(\alpha_{n_i}, \alpha_{l_i})$ oraz własności wyjściowe $F_{Z_i}(\alpha_{Z_i})$, $i = 1, 2, \dots, 6$. W

modelu funkcyjnym rozważa się własność wejściową $P \in D_P$ oraz własność wyjściową $T \in D_T$. Łatwo zauważyć, że rozpatrywany model o schemacie blokowym jak na Rys. 5.2 odpowiada Przypadkowi 2 z punktu 1.4, przy czym występują następujące analogie z oznaczeniami z punktu 1.4: $u = P$, $v = T$, $b = Z$, funkcja $\phi(u, b)$ dana jest wzorem (5.5), $\alpha_b = \alpha_Z$, $F_b(\alpha_b) = F_Z(\alpha_Z) = F_{Z_1}(\alpha_{Z_1}) \wedge \dots \wedge F_{Z_6}(\alpha_{Z_6})$, $x = [n, l]^T$, $\alpha_x = (\alpha_n, \alpha_l) = [(\alpha_{n_1}, \alpha_{l_1}), \dots, (\alpha_{n_6}, \alpha_{l_6})]$ oraz $F_x(\alpha_x) = F_{n,l}(\alpha_n, \alpha_l) = F_{n_1, l_1}(\alpha_{n_1}, \alpha_{l_1}) \wedge \dots \wedge F_{n_6, l_6}(\alpha_{n_6}, \alpha_{l_6})$. Na reprezentację wiedzy w podsystemie logicznym składają się zestawy faktów F_I , F_{II} , F_{III} , F_{IV} , F_V , F_{VI} dla poszczególnych operacji, czyli $F = F_I \wedge F_{II} \wedge \dots \wedge F_{VI}$.



Rys. 5.2 Schemat blokowy modelu systemu produkcji kompletów foteli.

Podanie formalnego opisu reprezentacji wiedzy w postaci zestawów faktów F_I , F_{II} , ..., F_{VI} rozpoczniemy od zdefiniowania występujących w nich formuł elementarnych. Definicje formuł elementarnych dotyczących wejścia zależą od zakresów zmienności wielkości wejściowych, które dla poszczególnych operacji przyjęto następująco:

$$O_1: n_1 \in \{1, 2, \dots, 25\}, \quad l_1 \in \{1, 2, \dots, 25\},$$

$$O_2: n_2 \in \{1, 2, \dots, 25\}, \quad l_2 \in \{1, 2, \dots, 25\},$$

$$O_3: n_3 \in \{1, 2, \dots, 20\}, \quad l_3 \in \{1, 2, \dots, 20\},$$

$$O_4: n_4 \in \{1, 2, \dots, 10\}, \quad l_4 \in \{1, 2, \dots, 20\},$$

$$O_5: n_5 \in \{1,2,\dots,10\}, \quad l_5 \in \{1,2,3,4,5\},$$

$$O_6: n_6 \in \{1,2,\dots,25\}, \quad l_6 \in \{1,2,\dots,25\}.$$

Na ich podstawie wyodrębniono formuły elementarne wchodzące w skład ciągów α_{n_i} i α_{l_i} , $i = 1,2, \dots, 6$ oraz przypisano im znaczenie. Dla $i \in \{1,2,6\}$ formuły mają jednakową postać wynikającą z jednakowego zakresu zmienności wartości wejść dla operacji O_1 , O_2 , O_6 (Tabela 5.1):

Tabela 5.1

α_{n_i} ($\alpha_{n_i,1}, \alpha_{n_i,2}, \alpha_{n_i,3}, \alpha_{n_i,4}, \alpha_{n_i,5}, \alpha_{n_i,6}, \alpha_{n_i,7}$)	α_{l_i} ($\alpha_{l_i,1}, \alpha_{l_i,2}, \alpha_{l_i,3}, \alpha_{l_i,4}, \alpha_{l_i,5}, \alpha_{l_i,6}, \alpha_{l_i,7}$)
$\alpha_{n_i,1} = "n_i \in \{1,2,3,4\}"$	$\alpha_{l_i,1} = "l_i \in \{1,2,3,4\}"$
$\alpha_{n_i,2} = "n_i \in \{3,4,5,6,7,8\}"$	$\alpha_{l_i,2} = "l_i \in \{3,4,5,6,7,8\}"$
$\alpha_{n_i,3} = "n_i \in \{7,8,9,10,11,12\}"$	$\alpha_{l_i,3} = "l_i \in \{7,8,9,10,11,12\}"$
$\alpha_{n_i,4} = "n_i \in \{11,12,13,14,15,16\}"$	$\alpha_{l_i,4} = "l_i \in \{11,12,13,14,15,16\}"$
$\alpha_{n_i,5} = "n_i \in \{15,16,17,18,19,20\}"$	$\alpha_{l_i,5} = "l_i \in \{15,16,17,18,19,20\}"$
$\alpha_{n_i,6} = "n_i \in \{19,20,21,22,23,24\}"$	$\alpha_{l_i,6} = "l_i \in \{19,20,21,22,23,24\}"$
$\alpha_{n_i,7} = "n_i \in \{23,24,25\}"$	$\alpha_{l_i,7} = "l_i \in \{23,24,25\}"$

Przypisanie formułom elementarnym znaczenia w sposób podany powyżej umożliwia formułowanie przy pomocy jak najmniejszej ich liczby (tzn. przy pomocy tylko 7 formuł dotyczących n_i i 7 formuł dotyczących l_i) dowolnych własności wejściowych $F_{n_i, l_i}(\alpha_{n_i}, \alpha_{l_i})$ determinujących dwuelementowe zbiory wartości n_i oraz l_i (np. własność " $n_i \in \{13,14\}$ i $l_i \in \{17,18\}$ " możemy zapisać jako $F_{n_i, l_i}(\alpha_{n_i}, \alpha_{l_i}) = \neg \alpha_{n_i,3} \wedge \alpha_{n_i,4} \wedge \neg \alpha_{n_i,5} \wedge \neg \alpha_{l_i,4} \wedge \alpha_{l_i,5} \wedge \neg \alpha_{l_i,6}$).

Dla $i = 3$ zaproponowano następujące formuły elementarne (Tabela 5.2):

Tabela 5.2

α_{n_3} ($\alpha_{n_3,1}, \alpha_{n_3,2}, \alpha_{n_3,3}, \alpha_{n_3,4}, \alpha_{n_3,5}, \alpha_{n_3,6}$)	α_{l_3} ($\alpha_{l_3,1}, \alpha_{l_3,2}, \alpha_{l_3,3}, \alpha_{l_3,4}, \alpha_{l_3,5}, \alpha_{l_3,6}$)
$\alpha_{n_3,1} = "n_3 \in \{1,2,3,4\}"$	$\alpha_{l_3,1} = "l_3 \in \{1,2,3,4\}"$
$\alpha_{n_3,2} = "n_3 \in \{3,4,5,6,7,8\}"$	$\alpha_{l_3,2} = "l_3 \in \{3,4,5,6,7,8\}"$
$\alpha_{n_3,3} = "n_3 \in \{7,8,9,10,11,12\}"$	$\alpha_{l_3,3} = "l_3 \in \{7,8,9,10,11,12\}"$
$\alpha_{n_3,4} = "n_3 \in \{11,12,13,14,15,16\}"$	$\alpha_{l_3,4} = "l_3 \in \{11,12,13,14,15,16\}"$
$\alpha_{n_3,5} = "n_3 \in \{15,16,17,18,19,20\}"$	$\alpha_{l_3,5} = "l_3 \in \{15,16,17,18,19,20\}"$
$\alpha_{n_3,6} = "n_3 \in \{19,20\}"$	$\alpha_{l_3,6} = "l_3 \in \{19,20\}"$

Ciagi α_{n_3} i α_{l_3} są najkrótszymi ciągami formuł dotyczących n_3 i l_3 , umożliwiającymi formułowanie własności wejściowych pozwalające na formułowanie dowolnych własności wejściowych $F_{n_3, l_3}(\alpha_{n_3}, \alpha_{l_3})$ determinujących dwuelementowe zbiory wartości n_3 oraz l_3 .

Dla $i = 4$ zaproponowano następujące formuły elementarne (Tabela 5.3):

Tabela 5.3

α_{n_4} ($\alpha_{n_4,1}, \alpha_{n_4,2}, \alpha_{n_4,3}, \alpha_{n_4,4}, \alpha_{n_4,5}, \alpha_{n_4,6}, \alpha_{n_4,7}$)	α_{l_4} ($\alpha_{l_4,1}, \alpha_{l_4,2}, \alpha_{l_4,3}, \alpha_{l_4,4}, \alpha_{l_4,5}, \alpha_{l_4,6}$)
$\alpha_{n_4,1} = "n_4 \in \{1,2\}"$	$\alpha_{l_4,1} = "l_4 \in \{1,2,3,4\}"$
$\alpha_{n_4,2} = "n_4 \in \{2,3,4\}"$	$\alpha_{l_4,2} = "l_4 \in \{3,4,5,6,7,8\}"$
$\alpha_{n_4,3} = "n_4 \in \{4,5\}"$	$\alpha_{l_4,3} = "l_4 \in \{7,8,9,10,11,12\}"$
$\alpha_{n_4,4} = "n_4 \in \{5,6,7\}"$	$\alpha_{l_4,4} = "l_4 \in \{11,12,13,14,15,16\}"$
$\alpha_{n_4,5} = "n_4 \in \{7,8\}"$	$\alpha_{l_4,5} = "l_4 \in \{15,16,17,18,19,20\}"$
$\alpha_{n_4,6} = "n_4 \in \{8,9,10\}"$	$\alpha_{l_4,6} = "l_4 \in \{19,20\}"$
$\alpha_{n_4,7} = "n_4 \in \{9,10\}"$	

Ciagi α_{n_4} i α_{l_4} są najkrótszymi ciągami formuł dotyczących n_4 i l_4 , umożliwiającymi

formułowanie własności wejściowych dotyczących każdej możliwej wartości n_4 i dwuelementowych zbiorów wartości l_4 (np. własność „ $n_4=7$ i $l_4 \in \{17,18\}$ ” możemy zapisać jako $F_{n_4,l_4}(\alpha_{n_4}, \alpha_{l_4}) = \alpha_{n_4,4} \wedge \alpha_{n_4,5} \wedge \neg \alpha_{l_4,4} \wedge \alpha_{l_4,5} \wedge \neg \alpha_{l_4,6}$). W tym przypadku zdecydowano się na większą „precyzyjność” znaczenia formuł α_{n_4} , ponieważ dodanie jednej maszyny do cięcia i szycia tapicerki powoduje znaczne zwiększenie zdolności produkcyjnych. Dla $i = 5$ zaproponowano następujące formuły elementarne (Tabela 5.4):

Tabela 5.4

α_{n_5} ($\alpha_{n_5,1}, \alpha_{n_5,2}, \alpha_{n_5,3}, \alpha_{n_5,4}, \alpha_{n_5,5}, \alpha_{n_5,6}, \alpha_{n_5,7}$)	α_{l_5} ($\alpha_{l_5,1}, \alpha_{l_5,2}, \alpha_{l_5,3}$)
$\alpha_{n_5,1} = "n_5 \in \{1,2\}"$	$\alpha_{l_5,1} = "l_5 \in \{1,2\}"$
$\alpha_{n_5,2} = "n_5 \in \{2,3,4\}"$	$\alpha_{l_5,2} = "l_5 \in \{2,3,4\}"$
$\alpha_{n_5,3} = "n_5 \in \{4,5\}"$	$\alpha_{l_5,3} = "l_5 \in \{4,5\}"$
$\alpha_{n_5,4} = "n_5 \in \{5,6,7\}"$	
$\alpha_{n_5,5} = "n_5 \in \{7,8\}"$	
$\alpha_{n_5,6} = "n_5 \in \{8,9,10\}"$	
$\alpha_{n_5,7} = "n_5 \in \{9,10\}"$	

Ciągi α_{n_5} i α_{l_5} są najkrótszymi ciągami formuł dotyczących n_5 i l_5 , pozwalającymi na formułowanie własności wejściowych $F_{n_5,l_5}(\alpha_{n_5}, \alpha_{l_5})$ dotyczących każdej możliwej wartości n_5 i l_5 .

W skład poszczególnych zestawów faktów opisujących zdolności produkcyjne wchodzi, oprócz wymienionych formuł, także formuły dotyczące wyjścia, które tworzą ciągi α_{Z_i} ($i = 1, 2, \dots, 6$). Mają one postać podobną do formuł z ciągów α_{n_i} i α_{l_i} , ale nie powstają przez równomierny podział przedziałów zmienności dla $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6$, lecz w wyniku oceny przez eksperta wpływu na Z_i wartości n_i i l_i , tzn. wynikają z podanych przez eksperta faktów. Każdy z ciągów α_{Z_1} i α_{Z_2} składa się z 19 formuł elementarnych. Ponieważ możliwe zakresy wartości zdolności produkcyjnych Z_1, Z_2 (podane przez eksperta dla

zbiorów wartości wejściowych) były takie same, przyjęto dla formuł z ciągów α_{Z_1} i α_{Z_2} takie same definicje. W związku z tym podajemy tylko definicje formuł elementarnych $\alpha_{Z_1,1}$, $\alpha_{Z_1,2}$, ..., $\alpha_{Z_1,19}$ dotyczących wyjścia Z_1 :

$\alpha_{Z_1,1} = "Z_1 \in [2, 7]"$	$\alpha_{Z_1,8} = "Z_1 \in [24, 31]"$	$\alpha_{Z_1,15} = "Z_1 \in [37, 46]"$
$\alpha_{Z_1,2} = "Z_1 \in [4, 11]"$	$\alpha_{Z_1,9} = "Z_1 \in [29, 36]"$	$\alpha_{Z_1,16} = "Z_1 \in [42, 48]"$
$\alpha_{Z_1,3} = "Z_1 \in [8, 15]"$	$\alpha_{Z_1,10} = "Z_1 \in [26, 33]"$	$\alpha_{Z_1,17} = "Z_1 \in [43, 50]"$
$\alpha_{Z_1,4} = "Z_1 \in [12, 20]"$	$\alpha_{Z_1,11} = "Z_1 \in [28, 36]"$	$\alpha_{Z_1,18} = "Z_1 \in [45, 52]"$
$\alpha_{Z_1,5} = "Z_1 \in [17, 25]"$	$\alpha_{Z_1,12} = "Z_1 \in [34, 42]"$	$\alpha_{Z_1,19} = "Z_1 \in [49, 53]"$
$\alpha_{Z_1,6} = "Z_1 \in [16, 23]"$	$\alpha_{Z_1,13} = "Z_1 \in [38, 43]"$	
$\alpha_{Z_1,7} = "Z_1 \in [20, 27]"$	$\alpha_{Z_1,14} = "Z_1 \in [32, 40]"$	

W skład ciągu α_{Z_3} wchodzi 15 formuł elementarnych. Definicje formuł $\alpha_{Z_3,1}$, $\alpha_{Z_3,2}$, ..., $\alpha_{Z_3,15}$ dotyczących wyjścia Z_3 są następujące:

$\alpha_{Z_3,1} = "Z_3 \in [4, 10]"$	$\alpha_{Z_3,6} = "Z_3 \in [20, 29]"$	$\alpha_{Z_3,11} = "Z_3 \in [38, 53]"$
$\alpha_{Z_3,2} = "Z_3 \in [6, 14]"$	$\alpha_{Z_3,7} = "Z_3 \in [26, 38]"$	$\alpha_{Z_3,12} = "Z_3 \in [44, 53]"$
$\alpha_{Z_3,3} = "Z_3 \in [9, 18]"$	$\alpha_{Z_3,8} = "Z_3 \in [32, 45]"$	$\alpha_{Z_3,13} = "Z_3 \in [47, 60]"$
$\alpha_{Z_3,4} = "Z_3 \in [13, 22]"$	$\alpha_{Z_3,9} = "Z_3 \in [41, 45]"$	$\alpha_{Z_3,14} = "Z_3 \in [50, 60]"$
$\alpha_{Z_3,5} = "Z_3 \in [20, 30]"$	$\alpha_{Z_3,10} = "Z_3 \in [32, 43]"$	$\alpha_{Z_3,15} = "Z_3 \in [57, 60]"$

Przyjęto następujące definicje 23 formuł $\alpha_{Z_4,1}$, $\alpha_{Z_4,2}$, ..., $\alpha_{Z_4,23}$ dotyczących wyjścia Z_4 :

$\alpha_{Z_4,1} = "Z_4 \in [4, 9]"$	$\alpha_{Z_4,9} = "Z_4 \in [20, 30]"$	$\alpha_{Z_4,17} = "Z_4 \in [35, 45]"$
$\alpha_{Z_4,2} = "Z_4 \in [6, 12]"$	$\alpha_{Z_4,10} = "Z_4 \in [24, 34]"$	$\alpha_{Z_4,18} = "Z_4 \in [41, 51]"$
$\alpha_{Z_4,3} = "Z_4 \in [8, 15]"$	$\alpha_{Z_4,11} = "Z_4 \in [30, 37]"$	$\alpha_{Z_4,19} = "Z_4 \in [46, 55]"$
$\alpha_{Z_4,4} = "Z_4 \in [11, 18]"$	$\alpha_{Z_4,12} = "Z_4 \in [35, 42]"$	$\alpha_{Z_4,20} = "Z_4 \in [49, 55]"$
$\alpha_{Z_4,5} = "Z_4 \in [17, 23]"$	$\alpha_{Z_4,13} = "Z_4 \in [29, 39]"$	$\alpha_{Z_4,21} = "Z_4 \in [44, 51]"$
$\alpha_{Z_4,6} = "Z_4 \in [15, 23]"$	$\alpha_{Z_4,14} = "Z_4 \in [35, 43]"$	$\alpha_{Z_4,22} = "Z_4 \in [49, 55]"$

$$\begin{array}{lll} \alpha_{Z_4,7} = "Z_4 \in [20, 28]" & \alpha_{Z_4,15} = "Z_4 \in [41, 49]" & \alpha_{Z_4,23} = "Z_4 \in [52, 55]" \\ \alpha_{Z_4,8} = "Z_4 \in [25, 31]" & \alpha_{Z_4,16} = "Z_4 \in [46, 49]" & \end{array}$$

W skład ciągu α_{Z_5} wchodzi 15 formuł elementarnych. Definicje formuł $\alpha_{Z_5,1}, \alpha_{Z_5,2}, \dots, \alpha_{Z_5,15}$ dotyczących wyjścia Z_5 są następujące:

$$\begin{array}{lll} \alpha_{Z_5,1} = "Z_5 \in [10, 20]" & \alpha_{Z_5,6} = "Z_5 \in [40, 50]" & \alpha_{Z_5,11} = "Z_5 \in [61, 71]" \\ \alpha_{Z_5,2} = "Z_5 \in [17, 34]" & \alpha_{Z_5,7} = "Z_5 \in [34, 52]" & \alpha_{Z_5,12} = "Z_5 \in [58, 80]" \\ \alpha_{Z_5,3} = "Z_5 \in [20, 40]" & \alpha_{Z_5,8} = "Z_5 \in [40, 61]" & \alpha_{Z_5,13} = "Z_5 \in [68, 85]" \\ \alpha_{Z_5,4} = "Z_5 \in [29, 40]" & \alpha_{Z_5,9} = "Z_5 \in [47, 64]" & \alpha_{Z_5,14} = "Z_5 \in [63, 80]" \\ \alpha_{Z_5,5} = "Z_5 \in [34, 47]" & \alpha_{Z_5,10} = "Z_5 \in [52, 68]" & \alpha_{Z_5,15} = "Z_5 \in [74, 85]" \end{array}$$

Definicje 19 formuł elementarnych $\alpha_{Z_6,1}, \alpha_{Z_6,2}, \dots, \alpha_{Z_6,19}$ dotyczących wyjścia Z_6 przyjęto na podstawie podanych przez eksperta możliwych zakresów wartości zdolności produkcyjnych dla zbiorów wartości wejściowych i są one następujące:

$$\begin{array}{lll} \alpha_{Z_6,1} = "Z_6 \in [3, 13]" & \alpha_{Z_6,8} = "Z_6 \in [41, 56]" & \alpha_{Z_6,15} = "Z_6 \in [56, 70]" \\ \alpha_{Z_6,2} = "Z_6 \in [8, 23]" & \alpha_{Z_6,9} = "Z_6 \in [50, 65]" & \alpha_{Z_6,16} = "Z_6 \in [65, 72]" \\ \alpha_{Z_6,3} = "Z_6 \in [10, 25]" & \alpha_{Z_6,10} = "Z_6 \in [34, 48]" & \alpha_{Z_6,17} = "Z_6 \in [57, 71]" \\ \alpha_{Z_6,4} = "Z_6 \in [19, 35]" & \alpha_{Z_6,11} = "Z_6 \in [44, 58]" & \alpha_{Z_6,18} = "Z_6 \in [67, 73]" \\ \alpha_{Z_6,5} = "Z_6 \in [28, 44]" & \alpha_{Z_6,12} = "Z_6 \in [53, 67]" & \alpha_{Z_6,19} = "Z_6 \in [69, 74]" \\ \alpha_{Z_6,6} = "Z_6 \in [22, 37]" & \alpha_{Z_6,13} = "Z_6 \in [62, 70]" & \\ \alpha_{Z_6,7} = "Z_6 \in [32, 46]" & \alpha_{Z_6,14} = "Z_6 \in [46, 60]" & \end{array}$$

Fakty tworzące logiczną reprezentację wiedzy dla zdolności produkcyjnych w i -tej operacji zbudowane są z formuł elementarnych z podciągów $\alpha_{n_i}, \alpha_{l_i}$ i α_{Z_i} . Dla poszczególnych operacji mają one zróżnicowaną postać, zależną m.in. od tego czy czynności produkcyjne wykonywane w ramach operacji są wykonywane przez pracowników ręcznie przy użyciu odpowiednich narzędzi (jak w przypadku O_1, O_2, O_3, O_6), czy są zautomatyzowane i rola

człowieka ogranicza się do roli operatora (jak w przypadku O_5).

Poniżej pokażemy struktury zestawów faktów F_I , F_{II} , F_{III} , F_{IV} , F_V i F_{VI} , wraz z wyjaśnieniem sensu poszczególnych grup faktów.

Reprezentacja wiedzy F_I , reprezentacja wiedzy F_{II} oraz reprezentacja wiedzy F_{VI} są tej samej postaci, wobec czego ograniczamy się do podania tylko struktury faktów F_{VI} .

Reprezentacja wiedzy F_{VI} .

Pierwszy i drugi fakt oznaczają, że do operacji musi być przydzielona określona liczba pracowników i określona liczba narzędzi mieszczące się w przedziałach wcześniej zdefiniowanych:

$$F_{VI,1} = \alpha_{l_6,1} \vee \alpha_{l_6,2} \vee \alpha_{l_6,3} \vee \alpha_{l_6,4} \vee \alpha_{l_6,5} \vee \alpha_{l_6,6} \vee \alpha_{l_6,7} ,$$

$$F_{VI,2} = \alpha_{n_6,1} \vee \alpha_{n_6,2} \vee \alpha_{n_6,3} \vee \alpha_{n_6,4} \vee \alpha_{n_6,5} \vee \alpha_{n_6,6} \vee \alpha_{n_6,7} .$$

Kolejna grupa 19 faktów dotyczy osiąganych zdolności produkcyjnych. Poprzedniki implikacji w faktach składają się z dwóch części: z części definiującej warunki wydajnej pracy (w nawiasie okrągłym) i z części definiującej warunki pracy, w których występuje efekt nasycenia (w nawiasie kwadratowym). Przyjęto, że warunki wydajnej pracy występują, gdy na każdy zestaw narzędzi przypada średnio od 1 do 2 pracowników. Gdy na każdy zestaw narzędzi przypada średnio mniej niż 1 pracownik, wówczas występuje niepotrzebny, niewykorzystany nadmiar narzędzi nie powodujący zwiększenia zdolności produkcyjnych. Podobnie, gdy na każdy zestaw narzędzi przypada średnio więcej niż 2 pracowników, to występuje niepotrzebny nadmiar pracowników nie mogących wykonywać pracy z powodu braku odpowiednich narzędzi. Zatem zwiększenie liczby pracowników przy niedoborze narzędzi nie powoduje zwiększenia zdolności produkcyjnych. W obydwu tych sytuacjach mamy do czynienia z efektem nasycenia.

$$F_{VI,3} = (\alpha_{n_6,1} \wedge \alpha_{l_6,1}) \vee [(\alpha_{n_6,2} \vee \alpha_{n_6,3} \vee \alpha_{n_6,4} \vee \alpha_{n_6,5} \vee \alpha_{n_6,6} \vee \alpha_{n_6,7}) \wedge \alpha_{l_6,1}] \rightarrow \alpha_{Z_6,1} ,$$

$$F_{VI,4} = (\alpha_{n_6,1} \wedge \alpha_{l_6,2}) \vee [\alpha_{n_6,1} \wedge (\alpha_{l_6,3} \vee \alpha_{l_6,4} \vee \alpha_{l_6,5} \vee \alpha_{l_6,6} \vee \alpha_{l_6,7})] \rightarrow \alpha_{Z_6,2} ,$$

$$F_{VI,5} = (\alpha_{n_6,2} \wedge \alpha_{l_6,2}) \vee [(\alpha_{n_6,3} \vee \alpha_{n_6,4} \vee \alpha_{n_6,5} \vee \alpha_{n_6,6} \vee \alpha_{n_6,7}) \wedge \alpha_{l_6,2}] \rightarrow \alpha_{Z_6,3} ,$$

$$F_{VI,6} = (\alpha_{n_6,2} \wedge \alpha_{l_6,3}) \rightarrow \alpha_{Z_6,4} ,$$

$$F_{VI,7} = (\alpha_{n_6,2} \wedge \alpha_{l_6,4}) \vee [\alpha_{n_6,2} \wedge (\alpha_{l_6,5} \vee \alpha_{l_6,6} \vee \alpha_{l_6,7})] \rightarrow \alpha_{Z_6,5} ,$$

$$F_{VI,8} = (\alpha_{n_6,3} \wedge \alpha_{l_6,3}) \vee [(\alpha_{n_6,4} \vee \alpha_{n_6,5} \vee \alpha_{n_6,6} \vee \alpha_{n_6,7}) \wedge \alpha_{l_6,3}] \rightarrow \alpha_{Z_6,6} ,$$

$$F_{VI,9} = (\alpha_{n_6,3} \wedge \alpha_{l_6,4}) \rightarrow \alpha_{Z_6,7} ,$$

$$F_{VI,10} = (\alpha_{n_6,3} \wedge \alpha_{l_6,5}) \rightarrow \alpha_{Z_6,8} ,$$

$$F_{VI,11} = (\alpha_{n_6,3} \wedge \alpha_{l_6,6}) \vee [\alpha_{n_6,3} \wedge \alpha_{l_6,7}] \rightarrow \alpha_{Z_6,9} ,$$

$$F_{VI,12} = (\alpha_{n_6,4} \wedge \alpha_{l_6,4}) \vee [(\alpha_{n_6,5} \vee \alpha_{n_6,6} \vee \alpha_{n_6,7}) \wedge \alpha_{l_6,4}] \rightarrow \alpha_{Z_6,10} ,$$

$$F_{VI,13} = (\alpha_{n_6,4} \wedge \alpha_{l_6,5}) \rightarrow \alpha_{Z_6,11} ,$$

$$F_{VI,14} = (\alpha_{n_6,4} \wedge \alpha_{l_6,6}) \rightarrow \alpha_{Z_6,12} ,$$

$$F_{VI,15} = (\alpha_{n_6,4} \wedge \alpha_{l_6,7}) \rightarrow \alpha_{Z_6,13} ,$$

$$F_{VI,16} = (\alpha_{n_6,5} \wedge \alpha_{l_6,5}) \vee [(\alpha_{n_6,6} \vee \alpha_{n_6,7}) \wedge \alpha_{l_6,5}] \rightarrow \alpha_{Z_6,14} .$$

$$F_{VI,17} = (\alpha_{n_6,5} \wedge \alpha_{l_6,6}) \rightarrow \alpha_{Z_6,15} ,$$

$$F_{VI,18} = (\alpha_{n_6,5} \wedge \alpha_{l_6,7}) \rightarrow \alpha_{Z_6,16} ,$$

$$F_{VI,19} = (\alpha_{n_6,6} \wedge \alpha_{l_6,6}) \vee [\alpha_{n_6,7} \wedge \alpha_{l_6,6}] \rightarrow \alpha_{Z_6,17} ,$$

$$F_{VI,20} = (\alpha_{n_6,6} \wedge \alpha_{l_6,7}) \rightarrow \alpha_{Z_6,18} ,$$

$$F_{VI,21} = (\alpha_{n_6,7} \wedge \alpha_{l_6,7}) \rightarrow \alpha_{Z_6,19} .$$

Ze względu na sens faktów $F_{VI,3}, \dots, F_{VI,21}$, bardziej poprawne byłoby użycie operatora równoważności $\leftrightarrow$ w miejsce operatora implikacji $\rightarrow$. W związku z tym, dla zapewnienia tak rozumianej poprawności wiedzy, należy uzupełnić reprezentację wiedzy o dalsze 19 faktów. Są to fakty komplementarne do ostatnich 19 faktów, powstałe przez zamianę w poszczególnych implikacjach poprzednika z następnikiem:

$$F_{VI,22} = \alpha_{Z_6,1} \rightarrow (\alpha_{n_6,1} \wedge \alpha_{l_6,1}) \vee [(\alpha_{n_6,2} \vee \alpha_{n_6,3} \vee \alpha_{n_6,4} \vee \alpha_{n_6,5} \vee \alpha_{n_6,6} \vee \alpha_{n_6,7}) \wedge \alpha_{l_6,1}] ,$$

$$F_{VI,23} = \alpha_{Z_6,2} \rightarrow \alpha_{n_6,1} \wedge (\alpha_{l_6,3} \vee \alpha_{l_6,4} \vee \alpha_{l_6,5} \vee \alpha_{l_6,6} \vee \alpha_{l_6,7}) ,$$

$$F_{VI,24} = \alpha_{Z_6,3} \rightarrow (\alpha_{n_6,2} \wedge \alpha_{l_6,2}) \vee [(\alpha_{n_6,3} \vee \alpha_{n_6,4} \vee \alpha_{n_6,5} \vee \alpha_{n_6,6} \vee \alpha_{n_6,7}) \wedge \alpha_{l_6,2}] ,$$

...

$$F_{VI,39} = \alpha_{Z_6,18} \rightarrow (\alpha_{n_6,6} \wedge \alpha_{l_6,7}) ,$$

$$F_{VI,40} = \alpha_{Z_6,19} \rightarrow (\alpha_{n_6,7} \wedge \alpha_{l_6,7}) .$$

Bardzo podobna jest struktura faktów F_{III} , ponieważ wyprowadzona jest z tych samych założeń, co struktura faktów F_I, F_{II}, F_{VI} .

Reprezentacja wiedzy F_{III} .

Dwa pierwsze fakty przybierają postać:

$$F_{III,1} = \alpha_{I_3,1} \vee \alpha_{I_3,2} \vee \alpha_{I_3,3} \vee \alpha_{I_3,4} \vee \alpha_{I_3,5} \vee \alpha_{I_3,6} ,$$

$$F_{III,2} = \alpha_{n_3,1} \vee \alpha_{n_3,2} \vee \alpha_{n_3,3} \vee \alpha_{n_3,4} \vee \alpha_{n_3,5} \vee \alpha_{n_3,6} .$$

Kolejna grupa 15 faktów dotyczy osiąganych zdolności produkcyjnych. warunków wydajnej pracy i osiąganych w nich zdolności produkcyjnych. Poprzedniki implikacji w faktach składają się z dwóch części: z części definiującej warunki wydajnej pracy (w nawiasie okrągłym) i z części definiującej warunki pracy, w których występuje efekt nasycenia (w nawiasie kwadratowym). Przyjęto, że warunki wydajnej pracy występują, gdy na każdy zestaw narzędzi przypada średnio od 1 do 2 pracowników. Gdy na każdy zestaw narzędzi przypada średnio mniej niż 1 pracownik, wówczas występuje nadmiar narzędzi nie powodujący zwiększenia zdolności produkcyjnych. Podobnie, gdy na każdy zestaw narzędzi przypada średnio więcej niż 2 pracowników, to występuje nadmiar pracowników nie mogących wykonywać pracy z powodu braku odpowiednich narzędzi. W obydwu tych sytuacjach mamy do czynienia z efektem nasycenia.

$$F_{III,3} = (\alpha_{n_3,1} \wedge \alpha_{I_3,1}) \vee [(\alpha_{n_3,2} \vee \alpha_{n_3,3} \vee \alpha_{n_3,4} \vee \alpha_{n_3,5} \vee \alpha_{n_3,6}) \wedge \alpha_{I_3,1}] \rightarrow \alpha_{Z_3,1} ,$$

$$F_{III,4} = (\alpha_{n_3,1} \wedge \alpha_{I_3,2}) \vee [\alpha_{n_3,1} \wedge (\alpha_{I_3,3} \vee \alpha_{I_3,4} \vee \alpha_{I_3,5} \vee \alpha_{I_3,6})] \rightarrow \alpha_{Z_3,2} ,$$

$$F_{III,5} = (\alpha_{n_3,2} \wedge \alpha_{I_3,2}) \vee [(\alpha_{n_3,3} \vee \alpha_{n_3,4} \vee \alpha_{n_3,5} \vee \alpha_{n_3,6}) \wedge \alpha_{I_3,2}] \rightarrow \alpha_{Z_3,3} ,$$

$$F_{III,6} = (\alpha_{n_3,2} \wedge \alpha_{I_3,3}) \rightarrow \alpha_{Z_3,4} ,$$

$$F_{III,7} = (\alpha_{n_3,2} \wedge \alpha_{I_3,4}) \vee [\alpha_{n_3,2} \wedge (\alpha_{I_3,4} \vee \alpha_{I_3,5} \vee \alpha_{I_3,6})] \rightarrow \alpha_{Z_3,5} ,$$

$$F_{III,8} = (\alpha_{n_3,3} \wedge \alpha_{I_3,3}) \vee [(\alpha_{n_3,4} \vee \alpha_{n_3,5} \vee \alpha_{n_3,6}) \wedge \alpha_{I_3,3}] \rightarrow \alpha_{Z_3,6} ,$$

$$F_{III,9} = (\alpha_{n_3,3} \wedge \alpha_{I_3,4}) \rightarrow \alpha_{Z_3,7} ,$$

$$F_{III,10} = (\alpha_{n_3,3} \wedge \alpha_{I_3,5}) \rightarrow \alpha_{Z_3,8} ,$$

$$F_{III,11} = (\alpha_{n_3,3} \wedge \alpha_{I_3,6}) \rightarrow \alpha_{Z_3,9} ,$$

$$F_{III,12} = (\alpha_{n_3,4} \wedge \alpha_{I_3,4}) \vee [(\alpha_{n_3,5} \vee \alpha_{n_3,6}) \wedge \alpha_{I_3,4}] \rightarrow \alpha_{Z_3,10} ,$$

$$F_{III,13} = (\alpha_{n_3,4} \wedge \alpha_{I_3,5}) \rightarrow \alpha_{Z_3,11} ,$$

$$F_{III,14} = (\alpha_{n_3,4} \wedge \alpha_{I_3,6}) \rightarrow \alpha_{Z_3,12} ,$$

$$F_{III,15} = (\alpha_{n_3,5} \wedge \alpha_{I_3,5}) \vee [\alpha_{n_3,6} \wedge \alpha_{I_3,5}] \rightarrow \alpha_{Z_3,13} ,$$

$$F_{III,16} = (\alpha_{n_3,5} \wedge \alpha_{l_3,6}) \rightarrow \alpha_{Z_3,14} ,$$

$$F_{III,17} = (\alpha_{n_3,6} \wedge \alpha_{l_3,6}) \rightarrow \alpha_{Z_3,15} ,$$

Podobnie jak poprzednio, należy dopisać 15 faktów komplementarnych do faktów $F_{III,3}, \dots,$

$$F_{III,17} :$$

$$F_{III,18} = \alpha_{Z_3,1} \rightarrow (\alpha_{n_3,1} \wedge \alpha_{l_3,1}) \vee [(\alpha_{n_3,2} \vee \alpha_{n_3,3} \vee \alpha_{n_3,4} \vee \alpha_{n_3,5} \vee \alpha_{n_3,6}) \wedge \alpha_{l_3,1}] ,$$

...

$$F_{III,32} = \alpha_{Z_3,15} \rightarrow (\alpha_{n_3,6} \wedge \alpha_{l_3,6}) .$$

Reprezentacja wiedzy F_{IV} .

Dwa pierwsze fakty przybierają postać:

$$F_{IV,1} = \alpha_{l_4,1} \vee \alpha_{l_4,2} \vee \alpha_{l_4,3} \vee \alpha_{l_4,4} \vee \alpha_{l_4,5} \vee \alpha_{l_4,6} ,$$

$$F_{IV,2} = \alpha_{n_4,1} \vee \alpha_{n_4,2} \vee \alpha_{n_4,3} \vee \alpha_{n_4,4} \vee \alpha_{n_4,5} \vee \alpha_{n_4,6} \vee \alpha_{n_4,7} .$$

Kolejna grupa 23 faktów dotyczy zdolności produkcyjnych osiąganych w warunkach wydajnej pracy i w warunkach pracy, w których występuje efekt nasycenia. Przyjęto, że warunki wydajnej pracy występują, gdy na każdą maszynę przypada średnio od 1 do 3 pracowników.

$$F_{IV,3} = (\alpha_{n_4,1} \wedge \alpha_{l_4,1}) \rightarrow \alpha_{Z_4,1} ,$$

$$F_{IV,4} = (\alpha_{n_4,1} \wedge \alpha_{l_4,2}) \vee [\alpha_{n_4,1} \wedge (\alpha_{l_4,3} \vee \alpha_{l_4,4} \vee \alpha_{l_4,5} \vee \alpha_{l_4,6})] \rightarrow \alpha_{Z_4,2} ,$$

$$F_{IV,5} = (\alpha_{n_4,2} \wedge \alpha_{l_4,1}) \vee [(\alpha_{n_4,3} \vee \alpha_{n_4,4} \vee \alpha_{n_4,5} \vee \alpha_{n_4,6} \vee \alpha_{n_4,7}) \wedge \alpha_{l_4,1}] \rightarrow \alpha_{Z_4,3} ,$$

$$F_{IV,6} = (\alpha_{n_4,2} \wedge \alpha_{l_4,2}) \rightarrow \alpha_{Z_4,4} ,$$

$$F_{IV,7} = (\alpha_{n_4,2} \wedge \alpha_{l_4,3}) \vee [\alpha_{n_4,2} \wedge (\alpha_{l_4,4} \vee \alpha_{l_4,5} \vee \alpha_{l_4,6})] \rightarrow \alpha_{Z_4,5} ,$$

$$F_{IV,8} = (\alpha_{n_4,3} \wedge \alpha_{l_4,2}) \rightarrow \alpha_{Z_4,6} ,$$

$$F_{IV,9} = (\alpha_{n_4,3} \wedge \alpha_{l_4,3}) \rightarrow \alpha_{Z_4,7} ,$$

$$F_{IV,10} = (\alpha_{n_4,3} \wedge \alpha_{l_4,4}) \vee [\alpha_{n_4,3} \wedge (\alpha_{l_4,5} \vee \alpha_{l_4,6})] \rightarrow \alpha_{Z_4,8} ,$$

$$F_{IV,11} = (\alpha_{n_4,4} \wedge \alpha_{l_4,2}) \vee [(\alpha_{n_4,5} \vee \alpha_{n_4,6} \vee \alpha_{n_4,7}) \wedge \alpha_{l_4,2}] \rightarrow \alpha_{Z_4,9} ,$$

$$F_{IV,12} = (\alpha_{n_4,4} \wedge \alpha_{l_4,3}) \rightarrow \alpha_{Z_4,10} ,$$

$$F_{IV,13} = (\alpha_{n_4,4} \wedge \alpha_{l_4,4}) \rightarrow \alpha_{Z_4,11} ,$$

$$F_{IV,14} = (\alpha_{n_4,4} \wedge \alpha_{l_4,5}) \vee [\alpha_{n_4,4} \wedge \alpha_{l_4,6}] \rightarrow \alpha_{Z_4,12} ,$$

$$F_{IV,15} = (\alpha_{n_4,5} \wedge \alpha_{l_4,3}) \rightarrow \alpha_{Z_4,13} ,$$

$$F_{IV,16} = (\alpha_{n_4,5} \wedge \alpha_{l_4,4}) \rightarrow \alpha_{Z_4,14} ,$$

$$F_{IV,17} = (\alpha_{n_4,5} \wedge \alpha_{l_4,5}) \rightarrow \alpha_{Z_4,15} ,$$

$$F_{IV,18} = (\alpha_{n_4,5} \wedge \alpha_{l_4,6}) \rightarrow \alpha_{Z_4,16} ,$$

$$F_{IV,19} = (\alpha_{n_4,6} \wedge \alpha_{l_4,3}) \vee [\alpha_{n_4,7} \wedge \alpha_{l_4,3}] \rightarrow \alpha_{Z_4,17} ,$$

$$F_{IV,20} = (\alpha_{n_4,6} \wedge \alpha_{l_4,4}) \rightarrow \alpha_{Z_4,18} ,$$

$$F_{IV,21} = (\alpha_{n_4,6} \wedge \alpha_{l_4,5}) \rightarrow \alpha_{Z_4,19} ,$$

$$F_{IV,22} = (\alpha_{n_4,6} \wedge \alpha_{l_4,6}) \rightarrow \alpha_{Z_4,20} ,$$

$$F_{IV,23} = (\alpha_{n_4,7} \wedge \alpha_{l_4,4}) \rightarrow \alpha_{Z_4,21} ,$$

$$F_{IV,24} = (\alpha_{n_4,7} \wedge \alpha_{l_4,5}) \rightarrow \alpha_{Z_4,22} ,$$

$$F_{IV,25} = (\alpha_{n_4,7} \wedge \alpha_{l_4,6}) \rightarrow \alpha_{Z_4,23} .$$

Następne 23 fakty są faktami komplementarnymi do faktów $F_{IV,3}, \dots, F_{IV,25}$:

$$F_{IV,26} = \alpha_{Z_4,1} \rightarrow (\alpha_{n_4,1} \wedge \alpha_{l_4,1}) ,$$

...

$$F_{IV,48} = \alpha_{Z_4,23} \rightarrow (\alpha_{n_4,7} \wedge \alpha_{l_4,6}) .$$

Reprezentacja wiedzy F_V .

Dwa pierwsze fakty przybierają postać:

$$F_{V,1} = \alpha_{l_5,1} \vee \alpha_{l_5,2} \vee \alpha_{l_5,3} ,$$

$$F_{V,2} = \alpha_{n_5,1} \vee \alpha_{n_5,2} \vee \alpha_{n_5,3} \vee \alpha_{n_5,4} \vee \alpha_{n_5,5} \vee \alpha_{n_5,6} \vee \alpha_{n_5,7} .$$

Zestaw następnych 15 faktów dotyczy zdolności produkcyjnych osiąganych w warunkach wydajnej pracy i w warunkach pracy, w których występuje efekt nasycenia. Przyjęto, że warunki wydajnej pracy występują, gdy liczba pracowników nie przekracza liczby maszyn.

$$F_{V,3} = (\alpha_{n_5,1} \wedge \alpha_{l_5,1}) \vee [\alpha_{n_5,1} \wedge (\alpha_{l_5,2} \vee \alpha_{l_5,3})] \rightarrow \alpha_{Z_5,1} ,$$

$$F_{V,4} = (\alpha_{n_5,2} \wedge \alpha_{l_5,1}) \rightarrow \alpha_{Z_5,2} ,$$

$$F_{V,5} = (\alpha_{n_5,2} \wedge \alpha_{l_5,2}) \vee [\alpha_{n_5,2} \wedge \alpha_{l_5,3}] \rightarrow \alpha_{Z_5,3} ,$$

$$F_{V,6} = (\alpha_{n_5,3} \wedge \alpha_{l_5,1}) \rightarrow \alpha_{Z_5,4} ,$$

$$F_{V,7} = (\alpha_{n_5,3} \wedge \alpha_{l_5,2}) \rightarrow \alpha_{Z_5,5} ,$$

$$F_{V,8} = (\alpha_{n_5,3} \wedge \alpha_{l_5,3}) \rightarrow \alpha_{Z_5,6} ,$$

$$F_{V,9} = (\alpha_{n_5,4} \wedge \alpha_{l_5,1}) \vee [(\alpha_{n_5,5} \vee \alpha_{n_5,6} \vee \alpha_{n_5,7}) \wedge \alpha_{l_5,1}] \rightarrow \alpha_{Z_5,7} ,$$

$$F_{V,10} = (\alpha_{n_5,4} \wedge \alpha_{l_5,2}) \rightarrow \alpha_{Z_5,8} ,$$

$$F_{V,11} = (\alpha_{n_5,4} \wedge \alpha_{l_5,3}) \rightarrow \alpha_{Z_5,9} ,$$

$$F_{V,12} = (\alpha_{n_5,5} \wedge \alpha_{l_5,2}) \rightarrow \alpha_{Z_5,10} ,$$

$$F_{V,13} = (\alpha_{n_5,5} \wedge \alpha_{l_5,3}) \rightarrow \alpha_{Z_5,11} ,$$

$$F_{V,14} = (\alpha_{n_5,6} \wedge \alpha_{l_5,2}) \rightarrow \alpha_{Z_5,12} ,$$

$$F_{V,15} = (\alpha_{n_5,6} \wedge \alpha_{l_5,3}) \rightarrow \alpha_{Z_5,13} ,$$

$$F_{V,16} = (\alpha_{n_5,7} \wedge \alpha_{l_5,2}) \rightarrow \alpha_{Z_5,14} ,$$

$$F_{V,17} = (\alpha_{n_5,7} \wedge \alpha_{l_5,3}) \rightarrow \alpha_{Z_5,15} .$$

Następne 15 faktów jest faktami komplementarnymi do faktów $F_{V,3}, \dots, F_{V,17}$:

$$F_{V,18} = \alpha_{Z_5,1} \rightarrow (\alpha_{n_5,1} \wedge \alpha_{l_5,1}) \vee [\alpha_{n_5,1} \wedge (\alpha_{l_5,2} \vee \alpha_{l_5,3})] ,$$

...

$$F_{V,32} = \alpha_{Z_5,15} \rightarrow (\alpha_{n_5,7} \wedge \alpha_{l_5,3}) .$$

Zgodnie z podanym modelem, zachowanie systemu opisane jest zależnością

$$F_{n,l} \wedge (P \in D_P) \rightarrow T \in D_T$$

lub równoważną zależnością

$$F_{n_1,l_1} \wedge F_{n_2,l_2} \wedge F_{n_3,l_3} \wedge F_{n_4,l_4} \wedge F_{n_5,l_5} \wedge F_{n_6,l_6} \wedge (P \in D_P) \rightarrow T \in D_T . \quad (5.6)$$

Dla systemu produkcji kompletów foteli samochodowych opisanego hybrydową reprezentacją wiedzy możemy w następujący sposób sformułować problemy zdefiniowane w części ogólnej:

1. Zadanie analizy (ZA).

$$\text{Dane: } F_{n_1,l_1} = F_{n_1,l_1}^* , \quad F_{n_2,l_2} = F_{n_2,l_2}^* , \quad F_{n_3,l_3} = F_{n_3,l_3}^* , \quad F_{n_4,l_4} = F_{n_4,l_4}^* , \quad F_{n_5,l_5} = F_{n_5,l_5}^* ,$$

$$F_{n_6,l_6} = F_{n_6,l_6}^* , \quad D_P = D_P^* .$$

Szukane: D_T^* – najmniejszy zbiór D_T spełniający (5.6).

Zadanie to ma oczywistą interpretację praktyczną: dla danych, np. bieżących, zdolności produkcyjnych determinowanych liczbą zatrudnionych pracowników i narzędzi/urządzeń przydzielonych do poszczególnych operacji oraz dla przybliżonej wielkości zapotrzebowania D_P^* (w szczególności może być $D_P^* = \{P: P \leq P^*\}$ lub może być dana konkretna wielkość zapotrzebowania/zamówienia, tzn. $D_P^* = \{P^*\}$) chcemy uzyskać odpowiedź na pytanie "ile czasu, przy bieżących możliwościach firmy, zajmie wyprodukowanie liczby kompletów foteli przednich pokrywającej w całości zapotrzebowanie?". Odpowiedź na to pytanie mogłaby być podstawą do ustalenia terminu realizacji zamówienia i udzielenia gwarancji jego dotrzymania.

Na przykład, dla danych własności wejściowych

$$F_{n_1, l_1}^* = (\neg \alpha_{n_1, 3} \wedge \alpha_{n_1, 4} \wedge \neg \alpha_{n_1, 5}) \wedge \alpha_{l_1, 5} ,$$

$$F_{n_2, l_2}^* = (\neg \alpha_{n_2, 3} \wedge \alpha_{n_2, 4} \wedge \neg \alpha_{n_2, 5}) \wedge \alpha_{l_2, 5} ,$$

$$F_{n_3, l_3}^* = \alpha_{n_3, 3} \wedge \alpha_{l_3, 3} ,$$

$$F_{n_4, l_4}^* = \alpha_{n_4, 3} \wedge (\neg \alpha_{l_4, 3} \wedge \alpha_{l_4, 4}) ,$$

$$F_{n_5, l_5}^* = (\alpha_{n_5, 2} \wedge \alpha_{n_5, 3}) \wedge (\alpha_{l_5, 1} \wedge \alpha_{l_5, 2}) ,$$

$$F_{n_6, l_6}^* = \alpha_{n_6, 2} \wedge (\neg \alpha_{l_6, 2} \wedge \alpha_{l_6, 3} \wedge \neg \alpha_{l_6, 4}) ,$$

wielkości zapotrzebowania danej w postaci zbioru $D_P^* = \{P: P \leq 500\}$ oraz następujących wartości współczynników dotyczących wielkości odrzutu z produkcji: $\rho_1 = 0.95$, $\rho_2 = 0.96$, $\rho_3 = 0.96$, $\rho_4 = 0.94$, $\rho_5 = 0.99$, $\rho_6 = 0.97$ otrzymujemy

$$F_{Z_1}^* = \neg \alpha_{Z_1, 8} \wedge \alpha_{Z_1, 11} \wedge \neg \alpha_{Z_1, 14} , \quad \text{czyli } Z_1 \in (31, 32) ,$$

$$F_{Z_2}^* = \neg \alpha_{Z_2, 8} \wedge \alpha_{Z_2, 11} \wedge \neg \alpha_{Z_2, 14} , \quad \text{czyli } Z_2 \in (31, 32) ,$$

$$F_{Z_3}^* = \alpha_{Z_3, 6} , \quad \text{czyli } Z_3 \in [20, 29] ,$$

$$F_{Z_4}^* = \neg \alpha_{Z_4, 7} \wedge \alpha_{Z_4, 8} , \quad \text{czyli } Z_4 \in (28, 31] ,$$

$$F_{Z_5}^* = \alpha_{Z_5, 2} \wedge \alpha_{Z_5, 3} \wedge \alpha_{Z_5, 4} \wedge \alpha_{Z_5, 5} , \quad \text{czyli } Z_5 = 34 ,$$

$$F_{Z_6}^* = \neg \alpha_{Z_6, 3} \wedge \alpha_{Z_6, 4} \wedge \neg \alpha_{Z_6, 5} , \quad \text{czyli } Z_6 \in (25, 28)$$

oraz na podstawie (5.5)

$$T \leq 500 \cdot \max (0.036, 0.036, 0.037, 0.035, 0.031, 0.042) ,$$

czyli

$$D_T^* = \{T: T \leq 27\}.$$

Podobnie łatwo sprawdzić, że dla wielkości zapotrzebowania danej w postaci pojedynczej wartości $D_P^* = \{500\}$ otrzymamy

$$500 \cdot \max (0.035, 0.035, 0.037, 0.039, 0.031, 0.037)$$

$$\leq T \leq$$

$$500 \cdot \max (0.036, 0.036, 0.054, 0.039, 0.031, 0.042) ,$$

czyli

$$D_T^* = \{T: 19.5 \leq T \leq 27\}.$$

2. Zadanie podejmowania decyzji (ZPD).

$$\text{Dane: } F_{n_1, l_1} = F_{n_1, l_1}^*, F_{n_2, l_2} = F_{n_2, l_2}^*, F_{n_3, l_3} = F_{n_3, l_3}^*, F_{n_4, l_4} = F_{n_4, l_4}^*, F_{n_5, l_5} = F_{n_5, l_5}^*, \\ F_{n_6, l_6} = F_{n_6, l_6}^*, D_T = D_T^*.$$

Szukane: D_P^* – największy zbiór D_P spełniający (5.6).

Interpretacja praktyczna tego zadania jest podobna do interpretacji podanej wcześniej dla ZA: dla bieżących zdolności produkcyjnych determinowanych liczbą zatrudnionych pracowników i narzędzi/urządzeń przydzielonych do poszczególnych operacji oraz dla przybliżonego czasu realizacji D_T^* (w typowej sytuacji może być $D_T^* = \{T: T \leq T^*\}$) chcemy uzyskać odpowiedź na pytanie “ile kompletów foteli przednich firma jest w stanie wyprodukować w podanym czasie przy bieżących możliwościach produkcyjnych?”. Odpowiedź na to pytanie mogłaby być podstawą do określenia gwarantowanej wielkości produkcji dla odbiorcy, dla którego ważny jest czas realizacji zamówienia. Taki odbiorca może korzystać z usług różnych firm produkujących komplety foteli przednich i jest dla niego istotna informacja na jaką wielkość dostawy od każdej z firm może liczyć w ciągu np. 5 dni.

Dla faktów i własności wejściowych w podsystemie logicznym oraz dla wartości współczynników związanych z wielkością odrzutu z produkcji w podsystemie funkcyjnym takich, jak w przykładzie poprzednim (ZA) rozważamy ZPD z wymaganiem dotyczącym wyjścia podsystemu funkcyjnego w postaci zbioru

$$D_T^* = \{T: T \leq 40\}.$$

Otrzymujemy następujące ograniczenie na wielkość produkcji:

$$D_P^* = \{P: P \leq 740\}.$$

3. Zadanie podejmowania decyzji (rozszerzone ZPD).

Dane: $D_T = D_T^*$.

Szukane: $D_{\bar{F}_{n,l}, D_P}^*$ – największy zbiór par $(\bar{F}_{n,l}, D_P)$ spełniających (5.6), gdzie formuły

$$\bar{F}_{n,l} = \bar{F}_{n_1,l_1} \wedge \bar{F}_{n_2,l_2} \wedge \bar{F}_{n_3,l_3} \wedge \bar{F}_{n_4,l_4} \wedge \bar{F}_{n_5,l_5} \wedge \bar{F}_{n_6,l_6}$$
 są składnikami jedynki.

Dla tak sformułowanego ZPD trudno znaleźć praktyczną interpretację jego rozwiązania. Możemy jednak sformułować uproszczoną wersję rozszerzonego ZPD, w której oprócz danego zbiorem D_T^* wymagania na czas realizacji produkcji wprowadzimy wymaganie dotyczące wielkości produkcji – określone zbiorem D_P^* . Wówczas rozwiązaniem ZPD byłaby własność wejściowa $F_{n,l}^* = F_{n_1,l_1}^* \wedge F_{n_2,l_2}^* \wedge F_{n_3,l_3}^* \wedge F_{n_4,l_4}^* \wedge F_{n_5,l_5}^* \wedge F_{n_6,l_6}^*$ spełniająca (5.6) i implikowana przez wszystkie inne własności wejściowe spełniające (5.6). Sens praktyczny takiego zadania jest oczywisty: znając wymagania odbiorców dotyczące zarówno wielkości dostaw jak i czasu produkcji chcemy odpowiedzieć na pytanie “jaka liczba zatrudnionych pracowników i zakupionych narzędzi/urządzeń zapewni spełnienie tych wymagań?”. Odpowiedź na to pytanie może być podstawą planowania zatrudnienia i polityki inwestycyjnej firmy już w trakcie działania firmy, bądź podstawą do określenia struktury zatrudnienia i uzbrojenia produkcji (wyposażenia w narzędzia i urządzenia) w fazie projektowania działalności firmy – przed powołaniem firmy do istnienia.

Przykładowo, dla firmy planującej dzienną (w ciągu 8 godzin) produkcję na poziomie 300 kompletów foteli przednich mamy

$$D_T^* = \{T: T \leq 8\}, \quad D_P^* = \{300\}.$$

Rozwiązując ZPD dla podsystemu funkcyjnego otrzymujemy wymaganie na zdolności produkcyjne w postaci zbioru

$$D_Z^* = \{Z: Z_i \geq 38, i=1,2,\dots,6\}.$$

Rozwiązanie w następnej kolejności problemu dopasowania wymagałoby przetestowania, odpowiednio, 2^{19} , 2^{19} , 2^{15} , 2^{23} , 2^{15} i 2^{19} formuł logicznych w postaci składników jedynki dla poszczególnych składowych wektora Z . Można jednak zauważyć, że dla formuł elementarnych dotyczących Z_i takich jak w rozważanym przykładzie własność najlepiej

dopasowana jest następującą formułą logiczną

$$F_{Z_i}^* = \neg \hat{F}_{Z_i}^* \wedge \check{F}_{Z_i}^* , \quad i = 1, 2, \dots, 6 ,$$

gdzie $\hat{F}_{Z_i}^*$ jest alternatywą formuł elementarnych α_{Z_i} determinujących zbiory wartości Z_i mniejszych od 38, a $\check{F}_{Z_i}^*$ jest alternatywą formuł elementarnych α_{Z_i} determinujących zbiory wartości Z_i większych lub równych 38. Np. dla pierwszej operacji

$$\hat{F}_{Z_1}^* = \alpha_{Z_1,1} \vee \alpha_{Z_1,2} \vee \alpha_{Z_1,3} \vee \alpha_{Z_1,4} \vee \alpha_{Z_1,5} \vee \alpha_{Z_1,6} \vee \alpha_{Z_1,7} \vee \alpha_{Z_1,8} \vee \alpha_{Z_1,9} \vee \alpha_{Z_1,10} \vee \alpha_{Z_1,11} ,$$

$$\check{F}_{Z_1}^* = \alpha_{Z_1,13} \vee \alpha_{Z_1,16} \vee \alpha_{Z_1,17} \vee \alpha_{Z_1,18} \vee \alpha_{Z_1,19} .$$

Łatwo zauważyć, że własności $F_{Z_i}^*$ determinują zbiory $D_{Z_i}^* = (Z - \hat{D}_{Z_i}^*) \cap \check{D}_{Z_i}^*$, które można zapisać prościej w równoważnej postaci $D_{Z_i}^* = \check{D}_{Z_i}^*$ (ponieważ $\check{D}_{Z_i}^* \subset Z - \hat{D}_{Z_i}^*$).

Wobec tego za własności najlepiej dopasowane można przyjąć formuły $\check{F}_{Z_i}^*$. Otrzymujemy

$$F_{Z_1}^* = \alpha_{Z_1,13} \vee \alpha_{Z_1,16} \vee \alpha_{Z_1,17} \vee \alpha_{Z_1,18} \vee \alpha_{Z_1,19} ,$$

$$F_{Z_2}^* = \alpha_{Z_2,13} \vee \alpha_{Z_2,16} \vee \alpha_{Z_2,17} \vee \alpha_{Z_2,18} \vee \alpha_{Z_2,19} ,$$

$$F_{Z_3}^* = \alpha_{Z_3,9} \vee \alpha_{Z_3,11} \vee \alpha_{Z_3,12} \vee \alpha_{Z_3,13} \vee \alpha_{Z_3,14} \vee \alpha_{Z_3,15} ,$$

$$F_{Z_4}^* = \alpha_{Z_4,15} \vee \alpha_{Z_4,16} \vee \alpha_{Z_4,18} \vee \alpha_{Z_4,19} \vee \alpha_{Z_4,20} \vee \alpha_{Z_4,21} \vee \alpha_{Z_4,22} \vee \alpha_{Z_4,23} ,$$

$$F_{Z_5}^* = \alpha_{Z_5,6} \vee \alpha_{Z_5,8} \vee \alpha_{Z_5,9} \vee \alpha_{Z_5,10} \vee \alpha_{Z_5,11} \vee \alpha_{Z_5,12} \vee \alpha_{Z_5,13} \vee \alpha_{Z_5,14} \vee \alpha_{Z_5,15} ,$$

$$F_{Z_6}^* = \alpha_{Z_6,8} \vee \alpha_{Z_6,9} \vee \alpha_{Z_6,11} \vee \alpha_{Z_6,12} \vee \alpha_{Z_6,13} \vee \alpha_{Z_6,14} \vee \alpha_{Z_6,15} \vee \alpha_{Z_6,16} \vee \alpha_{Z_6,17} \\ \vee \alpha_{Z_6,18} \vee \alpha_{Z_6,19} .$$

Następnie rozwiązujemy ZPD dla podsystemu logicznego otrzymując

$$F_{n_1,l_1}^* = (\alpha_{n_1,4} \wedge \alpha_{l_1,7}) \vee (\alpha_{n_1,5} \wedge \alpha_{l_1,7}) \vee (\alpha_{n_1,6} \wedge \alpha_{l_1,6}) \vee [\alpha_{n_1,7} \wedge \alpha_{l_1,6}] \vee (\alpha_{n_1,6} \wedge \alpha_{l_1,7}) \\ \vee (\alpha_{n_1,7} \wedge \alpha_{l_1,7}) ,$$

$$F_{n_2,l_2}^* = (\alpha_{n_2,4} \wedge \alpha_{l_2,7}) \vee (\alpha_{n_2,5} \wedge \alpha_{l_2,7}) \vee (\alpha_{n_2,6} \wedge \alpha_{l_2,6}) \vee [\alpha_{n_2,7} \wedge \alpha_{l_2,6}] \\ \vee (\alpha_{n_2,6} \wedge \alpha_{l_2,7}) \vee (\alpha_{n_2,7} \wedge \alpha_{l_2,7}) ,$$

$$F_{n_3,l_3}^* = (\alpha_{n_3,3} \wedge \alpha_{l_3,6}) \vee (\alpha_{n_3,4} \wedge \alpha_{l_3,5}) \vee (\alpha_{n_3,4} \wedge \alpha_{l_3,6}) \vee (\alpha_{n_3,5} \wedge \alpha_{l_3,5}) \vee [\alpha_{n_3,6} \wedge \alpha_{l_3,5}] \\ \vee (\alpha_{n_3,5} \wedge \alpha_{l_3,6}) \vee (\alpha_{n_3,6} \wedge \alpha_{l_3,6}) ,$$

$$F_{n_4,l_4}^* = (\alpha_{n_4,5} \wedge \alpha_{l_4,5}) \vee (\alpha_{n_4,5} \wedge \alpha_{l_4,6}) \vee (\alpha_{n_4,6} \wedge \alpha_{l_4,4}) \vee (\alpha_{n_4,6} \wedge \alpha_{l_4,5})$$

$$\vee (\alpha_{n_4,6} \wedge \alpha_{l_4,6}) \vee (\alpha_{n_4,7} \wedge \alpha_{l_4,4}) \vee (\alpha_{n_4,7} \wedge \alpha_{l_4,5}) \vee (\alpha_{n_4,7} \wedge \alpha_{l_4,6}),$$

$$\begin{aligned} F_{n_5,l_5}^* &= (\alpha_{n_5,3} \wedge \alpha_{l_5,3}) \vee (\alpha_{n_5,4} \wedge \alpha_{l_5,2}) \vee (\alpha_{n_5,4} \wedge \alpha_{l_5,3}) \vee (\alpha_{n_5,5} \wedge \alpha_{l_5,2}) \vee (\alpha_{n_5,5} \wedge \alpha_{l_5,3}) \\ &\vee (\alpha_{n_5,6} \wedge \alpha_{l_5,2}) \vee (\alpha_{n_5,6} \wedge \alpha_{l_5,3}) \vee (\alpha_{n_5,7} \wedge \alpha_{l_5,2}) \vee (\alpha_{n_5,7} \wedge \alpha_{l_5,3}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{n_6,l_6}^* &= (\alpha_{n_6,3} \wedge \alpha_{l_6,5}) \vee (\alpha_{n_6,3} \wedge \alpha_{l_6,6}) \vee [\alpha_{n_6,3} \wedge \alpha_{l_6,7}] \vee (\alpha_{n_6,4} \wedge \alpha_{l_6,5}) \\ &\vee (\alpha_{n_6,4} \wedge \alpha_{l_6,6}) \vee (\alpha_{n_6,4} \wedge \alpha_{l_6,7}) \vee (\alpha_{n_6,5} \wedge \alpha_{l_6,5}) \vee [(\alpha_{n_6,6} \vee \alpha_{n_6,7}) \wedge \alpha_{l_6,5}] \\ &\vee (\alpha_{n_6,5} \wedge \alpha_{l_6,6}) \vee (\alpha_{n_6,5} \wedge \alpha_{l_6,7}) \vee (\alpha_{n_6,6} \wedge \alpha_{l_6,6}) \vee [\alpha_{n_6,7} \wedge \alpha_{l_6,6}] \\ &\vee (\alpha_{n_6,6} \wedge \alpha_{l_6,7}) \vee (\alpha_{n_6,7} \wedge \alpha_{l_6,7}). \end{aligned}$$

6. Uwagi końcowe

Podstawowym celem pracy było opracowanie podstaw metodologicznych rozwiązywania problemów analizy i podejmowania decyzji w systemie z hybrydową tzn. logiczną i funkcyjną reprezentacją wiedzy oraz opracowanie algorytmów przydatnych do komputerowej realizacji odpowiedniego systemu ekspertowego. Cel ten realizowano prezentując w sposób systematyczny: sformułowania podstawowych problemów analizy i podejmowania decyzji dla systemu złożonego, algorytmy ich rozwiązania wraz z twierdzeniami dotyczącymi pewnych własności tych algorytmów i wyników przez nie generowanych oraz liczne przykłady obliczeniowe o charakterze ilustracyjnym. Przeprowadzono też badania symulacyjne możliwości zastosowania sieci neuronalnej do podejmowania decyzji w kompleksie operacji równoległych z hybrydową reprezentacją wiedzy. Spowodowało to konieczność rozszerzenia modelu systemu hybrydowego o model sieci neuronalnej i prowadziło w konsekwencji do integracji odpowiedniego, przedstawionego w części ogólnej, algorytmu dla systemu hybrydowego z algorytmem uczenia sieci neuronalnej. Praktyczny charakter formułowanych w pracy problemów i uzyskanych rezultatów został podkreślony poprzez wskazanie możliwości wykorzystania ich na przykładzie konkretnego systemu produkcyjnego.

Na podstawie prezentowanych w pracy rozważań można przedstawić kilka następujących uwag o bardziej szczegółowym charakterze:

1. Hybrydowa postać modeli implikuje hybrydowe metody rozwiązania sformułowanych problemów. Prezentowane algorytmy rozwiązania problemów analizy i podejmowania decyzji składają się z dwóch części odpowiadających poszczególnym modelom składowym: w podsystemie logicznym są to rekurencyjne algorytmy opracowane w metodzie logiczno-algebraicznej, a w podsystemie funkcyjnym – metody analityczne i/lub numeryczne, np. analityczne i/lub numeryczne metody optymalizacji.
2. Z proponowanymi w pracy algorytmami dopasowania modelu logicznego i funkcyjnego wiążą się trudności związane z implementacją polegające na tym, że:
 - a) nie ma uniwersalnej metody wyznaczania zbiorów wartości determinowanych przez formuły logiczne oraz uniwersalnej metody sprawdzania własności zawierania lub rozłączności tak wyznaczonych zbiorów wartości,
 - b) złożoność obliczeniowa algorytmów dopasowania zależy wykładniczo od liczby

branych pod uwagę formuł elementarnych.

3. Badania symulacyjne algorytmu sterowania rozdziałem zadań w kompleksie operacji z wykorzystaniem sieci neuronalnej wskazały na to, że możliwość zastosowania proponowanego podejścia jest silnie ograniczona zakresem zmienności parametrów modelu kompleksu operacji.

Zakres rozważań został zawężony do przedstawionych w pracy problemów i nie wyczerpuje problematyki systemów hybrydowych z logiczną i funkcyjną reprezentacją wiedzy. Dalsze prace prowadzone w tym kierunku mogłyby dotyczyć:

1. Opracowania sposobu wyznaczania zbiorów wartości na podstawie formuł logicznych dla pewnych wybranych typowych przypadków oraz modyfikacji algorytmów dopasowania w celu zmniejszenia ich złożoności obliczeniowej.
2. Zbadania możliwości zastosowania do sterowania rozdziałem zadań w kompleksie operacji równoległych sieci neuronalnej o innej strukturze lub algorytmu sterowania w innej postaci.
3. Zagadnień związanych z identyfikacją systemu złożonego opisanego rozpatrywaną hybrydową reprezentacją wiedzy w sytuacji, gdy w modelu logicznym i/lub funkcyjnym występują nieznane parametry.
4. Wykorzystania koncepcji zmiennych niepewnych [27], [28] w odniesieniu do parametrów modelu logicznego i/lub funkcyjnego oraz opracowania algorytmów dopasowania dla takiego przypadku.
5. Uwzględnienia możliwości walidacji i uaktualniania wiedzy [25], [31], [32], [33] dotyczącej parametrów występujących w modelu logicznym i/lub funkcyjnym w uczącym się ekspertowym systemie z hybrydową reprezentacją wiedzy.



Literatura

- [1] Bartnik G., Kusz A., Marciniak W., 1997, Model hybrydowego systemu reprezentacji wiedzy w systemie ekspertowym w zakresie eksploatacji maszyn, W: Z. Bubnicki i A. Grzech (red.) *Inżynieria Wiedzy i Systemy Ekspertowe*, Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, t.2, str. 151-155.
- [2] Basztura Cz., Bielecki R., 1997, System ekspertowy wspomagający diagnostykę narządu mowy, W: Z. Bubnicki i A. Grzech (red.) *Inżynieria Wiedzy i Systemy Ekspertowe*, Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, t.2, str. 315-324.
- [3] Borzowski L., Fraś M., Gajewski D., Józefczyk J., Nowak Z. i Szczypiński M., 1996, Systemy ekspertowe CONTROL-LOG/S i CLASS-LOG/S 1.0. Podręcznik użytkownika. *Raport Instytutu Sterowania i Techniki Systemów Politechniki Wrocławskiej*, SPR 2/96.
- [4] Bubnicki Z., 1974, *Identyfikacja obiektów sterowania* (Warszawa: PWN).
- [5] Bubnicki Z., 1984, Optimal models of complex operation systems, *Proceedings of VI International Congress of Cybernetics and Systems*, AFCET, Paris.
- [6] Bubnicki Z., 1990, *Wstęp do systemów ekspertowych*, Warszawa: PWN.
- [7] Bubnicki Z., 1993, Knowledge-based approach as a generalization of pattern recognition problems and methods. *Systems Science*, **19**, no. 2, 5-21.
- [8] Bubnicki Z., 1993, *Podstawy informatycznych systemów zarządzania*, Wrocław: Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej.
- [9] Bubnicki Z., 1993, Logic-algebraic foundations of knowledge based operation systems. *Proceedings of the 9th International Conference on Systems Engineering*, Las Vegas, 14-16 July, str. 360-364.
- [10] Bubnicki Z., 1993, Inżynieria wiedzy i systemy ekspertowe. Podstawy logiczno-algebraiczne. *Inżynieria Wiedzy i Systemy Ekspertowe. Materiały II Krajowej Konferencji Naukowej Inżynieria Wiedzy i Systemy Ekspertowe*, Wrocław, 15-17 czerwca, t.1, str. 11-19.
- [11] Bubnicki Z., 1993, New problems and directions in the area of control and identification for knowledge-based systems. W: M. H. Hamza (red.) *Modelling, Identification and Control*, Zurich: Acta Press, str. 1-4.
- [12] Bubnicki Z., 1994, Application of neural networks to complex operation systems. W: M. H. Hamza (red.) *Modelling, Identification and Control*, Zurich: Acta Press, str. 264-267.
- [13] Bubnicki Z., 1994, Logic-algebraic methods of knowledge-based pattern recognition. *Proceedings of the 10th International Conference on Systems Engineering*, Coventry, 6-8 September, vol. 2, str. 1467-1474.
- [14] Bubnicki Z., 1994, Logic-algebraic method for knowledge-based systems. *1st International Symposium on Mathematical Models in Automation and Robotics*, Miedzyzdroje, Poland, 1-3 September, str. 1-6.
- [15] Bubnicki Z., 1995, Structures of some knowledge-based distributed expert systems.

Systems Science, **21**, no. 3, 23-34.

- [16] Bubnicki Z., 1995, Logic-algebraic method for knowledge based control systems. W: M. H. Hamza (red.) *Modelling, Identification and Control*, Zurich: Acta Press, str. 253-256.
- [17] Bubnicki Z., 1996, Logic-algebraic foundations of a class of knowledge based control systems. W: M. Jamshidi, J. Yuh i P. Dauchez (red.) *Intelligent Automation and Control. Recent trends in development and applications. Proceedings of the World Automation Congress*, Montpellier, France, 28-30 May, Albuquerque: TSI Press, vol. 4, str. 89-94.
- [18] Bubnicki Z., 1996, Adaptive control of operation systems using neural networks. *Proceedings of the 11th International Conference on Systems Engineering*, Las Vegas, 9-11 July, str. 945-950.
- [19] Bubnicki Z., 1996, Simulation of an industrial transport system. *Simulation in Industry. 8th European Simulation Symposium*, Genoa, Italy, 24-26 October, vol. 1, str. 305-309.
- [20] Bubnicki Z., Orski, D., 1996, Badania symulacyjne wybranych problemów analizy i podejmowania decyzji z wykorzystaniem systemu ekspertowego CONTROL-LOG/S. *Raport Instytutu Sterowania i Techniki Systemów Politechniki Wrocławskiej*, SPR 5/96.
- [21] Bubnicki Z., Orski, D., 1996, Badania symulacyjne wybranych problemów podejmowania decyzji dla obiektów dynamicznych z wykorzystaniem systemu ekspertowego CONTROL-LOG/S. *Raport Instytutu Sterowania i Techniki Systemów Politechniki Wrocławskiej*, SPR 7/96.
- [22] Bubnicki Z., 1997, Logic-algebraic method for a class of knowledge based systems. W: F. Pichler i R. Moreno-Diaz (red.) *Computer Aided Systems Theory. Lecture Notes in Computer Science*, Berlin: Springer Verlag, vol. 1333, str. 420-428.
- [23] Bubnicki Z., 1997, Logic-algebraic method for a class of dynamical knowledge-based systems. W: A. Sydow (red.) *Proceedings of the 15th IMACS World Congress on Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics*, Berlin, 24-29 August, Berlin: Wissenschaft und Technik Verlag, vol. 4, Artificial Intelligence and Computer Science, str. 101-106.
- [24] Bubnicki Z., 1997, Metody logiczno-algebraiczne dla dynamicznych reprezentacji wiedzy. W: Z. Bubnicki i A. Grzech (red.) *Inżynieria Wiedzy i Systemy Ekspertowe*, Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, t.1, str. 133-142.
- [25] Bubnicki Z., 1997, Knowledge updating in a class of knowledge-based learning control systems. *Systems Science*, **23**, no. 4, str. 19-36.
- [26] Bubnicki Z., 1998, Logic-algebraic method for knowledge-based relation systems. *Systems Analysis Modelling Simulation*, **33**, str. 21-35.
- [27] Bubnicki Z., 1998, Uncertain variables and learning algorithms in knowledge-based control systems. *Proceedings of the 3rd International Symposium on Artificial Life and Robotics*, Oita, Japan, 19-21 January, vol. 2, str. 490-494.
- [28] Bubnicki Z., 1998, Uncertain variables and logic-algebraic method in knowledge based systems. W: M. H. Hamza (red.) *Intelligent Systems and Control. Proceedings of the IASTED International Conference*, Halifax, Canada, 1-3 June, Zurich: Acta Press, str. 135-139.

- [29] Bubnicki Z. i Józefczyk J., 1998, Intelligent and manufacturing systems – the main research activity. *Advanced Technologies in Manufacturing. Workshop on European Scientific and Industrial Collaboration on Promoting*, Girona, Spain, 10-12 June, str. 435-437.
- [30] Bubnicki Z. i Wołkowiński K., 1998, On the allocation problem in a production system with transport of materials, *Systems Science*, **24**, no. 3, 88-89.
- [31] Bubnicki Z., 1998, Learning processes and logic-algebraic method in knowledge-based control systems. W: S. G. Tzafestas i G. Schmidt (red.) *Progress in System and Robot Analysis and Control Design. Lecture Notes in Control and Information Sciences*, London: Springer Verlag, vol. 243, str. 183-194.
- [32] Bubnicki Z., 1999, Procesy uczenia i metoda logiczno-algebraiczna w systemach z reprezentacją wiedzy. W: Z. Bubnicki i J. Józefczyk (red.) *Materiały XIII Krajowej Konferencji Automatyki*, Opole, 21-24 wrzesień, Opole: Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, t.1, str. 23-30.
- [33] Bubnicki Z., 1999, Learning algorithms in a class of knowledge-based systems. *Proceedings of the 4th International Symposium on Artificial Life and Robotics*, Oita, Japan, 19-22 January, vol. 1, str. OP-34 – OP-39.
- [34] Bubnicki Z. i Wołkowiński K., 1999, Allocation algorithms for the complex of production operations with transport of materials. W: M. H. Hamza (red.) *Modelling, Identification and Control*, Zurich: Acta Press, str. 33-36.
- [35] Bubnicki Z., 1999, Uncertain variables and learning algorithms in knowledge-based control systems. *Artificial Life and Robotics*, **3**, no. 3.
- [36] Bubnicki Z., 2000, Learning algorithms for a class of knowledge-based systems with dynamical knowledge representation. *Systems Science*, **26**, no. 1.
- [37] Bubnicki Z., 2000, Identification of systems described by relational knowledge representation. W: M. H. Hamza (red.) *Modelling, Identification and Control*, Zurich: Acta Press.
- [38] Cavalli E., 1993, EXBIL: A financial statement analysis expert system. W: R. Kulikowski, K. Szkatuła, J. Kacprzyk (red.) *Proceedings of 9th Polish-Italian and 5th Polish-Finnish Symposium on Systems Analysis and Decision Support in Economics and Technology*, str. 46-55.
- [39] Czechowicz K., 1974, Algorytmy czasowo-optimalnego sterowania kompleksem operacji niezależnych, *Komunikat Instytutu Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej*, nr 112 (rozprawa doktorska).
- [40] Czerwiński Z., 1982, *Matematyczne modelowanie procesów ekonomicznych*, Warszawa: PWN.
- [41] Duan Y., Burrell P., 1996, HYMS: a hybrid marketing system, *Critical Technology: Proceedings of the Third World Congress on Expert Systems*, 5-9 February, Seoul, Korea, vol. 1, pp. 335-342.
- [42] Goonatilake S. (red.), 1996, *Intelligent Systems for Finance and Business*, Chichester: John Wiley & Sons.
- [43] Grabowski M. (red.), 1997, *Advances in Expert Systems for Management: Evaluation and Value in Knowledge-Based Systems*, Connecticut: Jai Press, vol.2.

- [44] Grudziński J., 1997, Ekspertowy system doboru metody szybkiej naprawy maszyn w sytuacjach awaryjnych, W: Z. Bubnicki i A. Grzech (red.) *Inżynieria Wiedzy i Systemy Ekspertowe*, Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, t.2, str. 156-159.
- [45] Grzegorzczak A., 1973, *Zarys logiki matematycznej*, Warszawa: PWN.
- [46] Gutenbaum J., 1987, *Modelowanie matematyczne systemów*, Warszawa – Łódź: PWN.
- [47] Harmon, King, 1985, *Expert System – Artificial Intelligence in Business*, John Wiley & Sons.
- [48] Hatzilygeroudis I., Vassilakos P.J., Tsakalidis A., 1997, XBONE: a hybrid expert system for supporting diagnosis of bone diseases, W: C. Pappas, N. Maglaveras, J.-R. Scherrer (red.) *Proceedings of International Conference Medical Informatics Europe '97*, Amsterdam: IOS Press, vol.1, str.295-299.
- [49] *IEEE Control Systems. Hybrid Control Systems*, 1999, **19**, no.4 (numer specjalny).
- [50] Józefczyk, J., 1999, Application of knowledge-based pattern recognition in the control system of a group of executors. *Proceedings of the 11th International Congress of Cybernetics and Systems*, Uxbridge, Middlesex, UK, 23-27 August, str. 330-333.
- [51] Józefczyk, J., 1999, Sterowanie jazdą z reprezentacją wiedzy grupy pojazdów autonomicznych w dwupoziomowym systemie sterowania kompleksem operacji. W: Z. Bubnicki i J. Józefczyk (red.) *Materiały XIII Krajowej Konferencji Automatyki*, Opole, 21-24 wrzesień, Opole: Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, t.2, str. 117-122.
- [52] Józefczyk, J., 1999, Knowledge-based motion control of a group of mobile executors in the two-level complex operation system. *Proceedings of 2nd World Manufacturing Congress*, Durham, UK, 27-30 September, str. 167-173.
- [53] Kaczmarek A., 1997, Inteligentna identyfikacja struktur zdaniowych i ich transformacja w systemie komputerowego tłumaczenia, W: Z. Bubnicki i A. Grzech (red.) *Inżynieria Wiedzy i Systemy Ekspertowe*, Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, t.1, str. 319-325.
- [54] Klahr P. (red.), 1986, *Expert Systems Techniques, Tools and Applications*, Reading: Addison-Wesley.
- [55] Klein M., Methlie L. B., 1990, *Expert Systems. A Decision Support Approach with Applications in Management and Finance*, Addison-Wesley.
- [56] Kulikowski R., 1977, *Analiza systemowa i jej zastosowanie*, Warszawa: PWN.
- [57] Kulpa Z. i in., 1997, Hybrydowy system ekspertowy jakościowo-ilościowej analizy układów mechanicznych, W: Z. Bubnicki i A. Grzech (red.) *Inżynieria Wiedzy i Systemy Ekspertowe*, Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, t.2, str. 135-142.
- [58] Kupraszewicz W., 1997, Szkieletowy system doradczy w diagnozowaniu silnika spalinowego, W: Z. Bubnicki i A. Grzech (red.) *Inżynieria Wiedzy i Systemy Ekspertowe*, Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, t.2, str. 181-185.
- [59] Kurzydłowska A. B., 1993, The hybrid expert system as an approach to the solution of a certain class of scheduling problems. *IFIP Transactions B (Applications in Technology)*, vol.B-11, str.177-90.

- [60] Kusz A., Marciniak W., 1997, Ekspertowy system w zakresie uprawy i zbioru rzepaku, W: Z. Bubnicki i A. Grzech (red.) *Inżynieria Wiedzy i Systemy Ekspertowe*, Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, t.2, str. 342-349.
- [61] Lambert-Torres G., *et al.*, 1993, PROCONTROL – a hybrid expert system for power system protection and control, W: T.S. Dillon (red.) *Expert System Application to Power Systems IV*, Aldershot: CRL Publishing, str.490-492.
- [62] Ławrynowicz A., 1997, Complam – ekspercki system doboru technik komputerowego wspomaganie zarządzania produkcją, W: Z. Bubnicki i A. Grzech (red.) *Inżynieria Wiedzy i Systemy Ekspertowe*, Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, t.2, str. 51-58.
- [63] Malec M., 1995, *Elementarny wstęp do teorii relacji*, Kraków: Wydawnictwa AGH.
- [64] Margarita S., Beltratti A., 1993, Credit risk and lending in an artificial adaptive banking system. W: S.W.I.F.T. (red.) *Adaptive Intelligent Systems*, Amsterdam.
- [65] Meneges G. (red.), 1987, *Expert Systems in Production Engineering*, Berlin: Springer Verlag.
- [66] Mulawka J. J., 1996, *Systemy ekspertowe*, Warszawa: WNT.
- [67] Nagataki, K., *et al.*, 1992, A scheme and operation results of road tunnel ventilation control using hybrid expert system technology. *Hitachi Review*, **41**, no.1, str.51-58.
- [68] Nikolopoulos C., Fellrath P., 1994, A hybrid expert system for investment advising, *Proceedings of IEEE World Congress on Computational Intelligence*, 27 June – 2 July, Orlando, USA, vol.3, str.1818-1820.
- [69] Nowak G., Fic G., 1997, Common Sense Builder – inteligentny system do komputerowego projektowania reakcji chemicznych, W: Z. Bubnicki i A. Grzech (red.) *Inżynieria Wiedzy i Systemy Ekspertowe*, Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, t.2, str. 189-194.
- [70] Orski, D., Szczypiński, M., 1997, Application of expert system CONTROL-LOG/S to simulation of a class of dynamical knowledge-based systems. *Proceedings of 11th European Simulation Multiconference*, Istanbul, Turkey, 1-6 June, str. 307-311.
- [71] Orski, D., 1997, Zastosowanie metody Bubnickiego w pewnych przypadkach systemu z hybrydową reprezentacją wiedzy. W: Z. Bubnicki i A. Grzech (red.) *Inżynieria Wiedzy i Systemy Ekspertowe*, Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, t.1, str. 160-167.
- [72] Orski, D., 1997, Podstawowe przypadki hybrydowego systemu z reprezentacją wiedzy. *Raport Instytutu Sterowania i Techniki Systemów Politechniki Wrocławskiej*, SPR 1/97.
- [73] Orski, D., 1998, Zastosowanie algorytmu neuropodobnego do sterowania rozdziałem zadań i zasobów w kompleksie operacji równoległych. *Raport Instytutu Sterowania i Techniki Systemów Politechniki Wrocławskiej*, SPR 3/98.
- [74] Orski, D., 1998, Bubnicki method for decision making in a system with hybrid knowledge representation. W: Z. Bubnicki i A. Grzech (red.) *Proceedings of 13th International Conference on Systems Science*, Wrocław, 15-18 wrzesień, vol. II, str. 230-237.
- [75] Orski, D., 1999, Control of complex of parallel operations using neural network. W: A. Dobnikar, N.C. Steele, D.W. Pearson i R. Albrecht (red.) *Artificial Neural Nets and*

Genetic Algorithms, Wiedeń: Springer Verlag, str.116-120.

- [76] Orski, D., 1999, Analiza i podejmowanie decyzji dla pewnej klasy systemów z hybrydową reprezentacją wiedzy. W: Z. Bubnicki i J. Józefczyk (red.) *Materiały XIII Krajowej Konferencji Automatyki*, Opole, 21-24 wrzesień, Opole: Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, t.2, str. 203-206.
- [77] Orski, D., 2000, Analiza i podejmowanie decyzji dla klasy systemów hybrydowych z relacyjną i logiczną reprezentacją wiedzy. W: Z. Bubnicki i A. Grzech (red.) *Inżynieria Wiedzy i Systemy Ekspertowe*, Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej.
- [78] Prather R. E., 1986, *Elements of Discrete Mathematics*, Boston: Houghton Mifflin Company.
- [79] Rolston D. W., 1988, *Principles of Artificial Intelligence and Expert Systems, Development*, N. York: Mc Graw-Hill.
- [80] Sas J., 1988, Some problem of expert recognition system for medical diagnosis. *Proceedings of 6th International Conference on Systems Engineering*.
- [81] Seidler J., Badach A., Molisz W., 1980, *Metody rozwiązywania zadań optymalizacji*, Warszawa: WNT.
- [82] Singh M., 1986, Hybrid knowledge based systems for the higher managerial decision making tasks, *Systems Science*, **12**, no. 3.
- [83] Szala M., 1999, Podstawy projektowania dwupoziomowego ekspertowego systemu rozpoznawania z reprezentacją wiedzy (rozprawa doktorska), *Raport Instytutu Sterowania i Techniki Systemów Politechniki Wrocławskiej*, PRE 1/99.
- [84] Szala M., 1999, Zastosowanie rozpoznawania dwupoziomowego z reprezentacją wiedzy w diagnostyce dysleksji. W: Z. Bubnicki i J. Józefczyk (red.) *Materiały XIII Krajowej Konferencji Automatyki*, Opole, 21-24 wrzesień, Opole: Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, t.2, str. 259-262.
- [85] Świątnicki Z., Wantoch-Rekowski R., 1997, Dedykowany system ekspercki do wspomagania oceny zapotrzebowania sił zbrojnych na sprzęt latający, W: Z. Bubnicki i A. Grzech (red.) *Inżynieria Wiedzy i Systemy Ekspertowe*, Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, t.2, str. 290-297.
- [86] Tadeusiewicz R., 1993, *Sieci neuronowe*, Warszawa: Akademicka Oficyna Wydawnicza.
- [87] Turban E., Aronson J., 1998, *Decision Support Systems and Intelligent Systems*, Upper Saddle River: Prentice Hall.
- [88] Valenta M. A., Zygmunt A., 1997, Zastosowanie obiektowych rozszerzeń języka CLIPS w ekspertowym systemie sterowania stanowiskiem kontroli jakości, W: Z. Bubnicki i A. Grzech (red.) *Inżynieria Wiedzy i Systemy Ekspertowe*, Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, t.2, str. 59-66.
- [89] Wall R. S. *et al.*, 1985, An evaluation of commercial expert system building tools. *Data and Knowledge Engineering*, **1**, no. 4.
- [90] Wierzbicki A., 1977, *Modele i wrażliwość układów sterowania*, Warszawa: WNT.
- [91] Yoshida T., *et al.*, 1992, A hybrid expert system combined with a mathematical model for BOF process control, *Proceedings of the IFAC Workshop on Expert Systems in*

Mineral and Metal Processing, Oxford: Pergamon, str.51-56.

- [92] Zieliński J. S., 1997, Expert systems in electrical power systems, W: Z. Bubnicki i A. Grzech (red.) *Inżynieria Wiedzy i Systemy Ekspertowe*, Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, t.2, str. 270-275.
- [93] Zyguła J., Klocek R., Piecha J., Kopicera K., 1997, Automatyczne wnioskowanie o patologiach w obrębie stopy, W: Z. Bubnicki i A. Grzech (red.) *Inżynieria Wiedzy i Systemy Ekspertowe*, Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, t.2, str. 325-330.