

Magdalena Sipa

WYZNACZANIE PRAWDOPODOBIENSTWA ZMIANY STANU W PROGRAMIE EMERYTALNYM O ZDEFINIOWANYM ŚWIADCZENIU

1. Wstęp

Każdemu pracownikowi po przepracowaniu ustawowej liczby lat i osiągnięciu wieku emerytalnego przysługuje dożywotnie miesięczne świadczenie pieniężne, zwane emeryturą. Jednak, aby je uzyskać, należy w okresie aktywności zawodowej w odpowiednich instytucjach finansowych gromadzić kapitał, z którego w przyszłości będzie wypłacana emerytura. Do przeprowadzenia prawidłowych kalkulacji m.in. wysokości składki czy rezerw na podstawie wartości aktuarialnych świadczeń i kapitału niezbędne jest oszacowanie prawdopodobieństwa zmiany stanu w programie emerytalnym.

Wypłata świadczenia następuje **w momencie zmiany stanu uczestnika** programu emerytalnego (PE). Zachodzące przypadki życiowe są zdarzeniami losowymi, dlatego zmiany stanów, jakim podlegają uczestnicy PE, można zapisać za pomocą procesu stochastycznego ze skończoną przestrzenią stanów (por. [4]). Przestrzeń tę oznaczmy przez Ω . W zbiorze Ω wyróżnia się stany: ω_1 – oznaczający, że ubezpieczony jest aktywnym uczestnikiem (płacącym składki), ω_i , $i=2,3,\dots,n-1$ – oznaczające, że ubezpieczony z różnych przyczyn nie płaci składek oraz ω_n – oznaczający śmierć uczestnika.

Uczestnik programu emerytalnego może znajdować się w jednym z następujących stanów:

- a – aktywny udział w PE (opłacanie składek),
- w – rezygnacja z uczestnictwa w PE przed osiągnięciem wieku emerytalnego,
- i – niezdolność do pracy zawodowej,
- r – emerytura,
- d – śmierć ubezpieczonego.

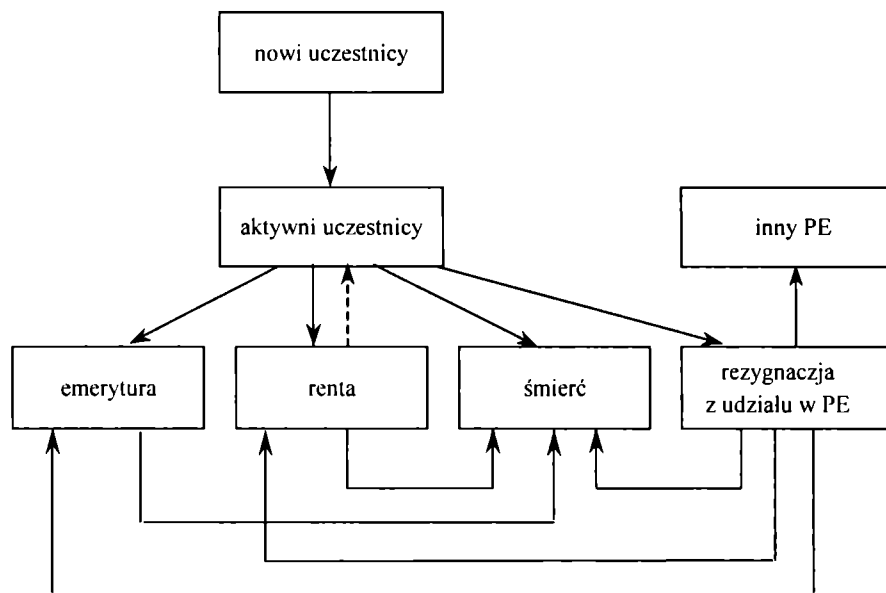
Przestrzeń stanów uczestnika w PE możemy zapisać jako $\Omega = \{a, w, i, r, d\}$.

Z programu emerytalnego uczestnik (ewentualnie osoby upoważnione) może otrzymywać następujące świadczenia:

- rentę emerytalną,
- rentę inwalidzką,
- rentę rodzinną,
- świadczenie związane z przerwaniem uczestnictwa w PE.

Emerytura jest świadczeniem płatnym od określonego wieku, zwanego wiekiem emerytalnym, np. od momentu ukończenia 65. roku życia. Renta inwalidzka wypłacana jest uczestnikowi w przypadku jego niezdolności do pracy przed osiągnięciem wieku emerytalnego. Ponadto program emerytalny uwzględnia także wypłatę dla członków rodziny zmarłego uczestnika, tzw. rentę rodzinną. Możliwa jest także wypłata świadczenia w przypadku przerwania uczestnictwa w PE, np. w momencie przejścia do innego zakładu pracy, z powodu wygaśnięcia lub rozwiązania umowy o pracę.

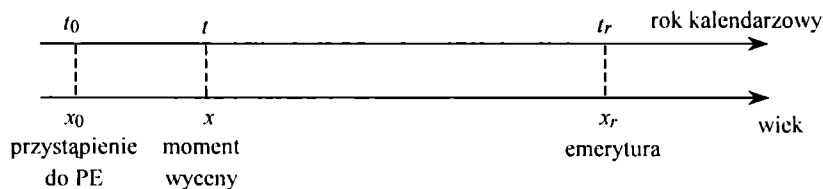
Uczestnicy programu emerytalnego nie tworzą jednorodnej grupy, można ich podzielić na podgrupy ze względu na stan, w którym się znajdują, tak, jak to zostało przedstawione na rys. 1.



Rys. 1. Możliwości zmiany stanów w PE

2. Wyznaczanie liczebności poszczególnych grup w PE

Finansowa sytuacja programu i wysokość wypłacanych świadczeń są funkcjami zależnymi od czasu. Oznaczmy czas kalendarzowy przez t , a przez x – wiek uczestnika lub grupy osób, które w jednakowym wieku i czasie wstąpiły do PE. Na rys. 2 przedstawiono punkty charakterystyczne dla programu emerytalnego. Obecny czas t stanowi moment przeprowadzenia aktuariałnej wyceny programu, na który dyskontowane są przyszłe przepływy finansowe.



Rys. 2. Charakterystyczne punkty czasowe w PE

Źródło: [3].

Wyróżniamy dwa podstawowe rodzaje programów: programy o zdefiniowanym świadczeniu (ang. *defined benefit plans*) i programy o zdefiniowanej składce (ang. *defined contribution plans*). Programy emerytalne o zdefiniowanym świadczeniu to programy, w których wysokość świadczeń definiuje się z góry (kwotowo lub jako procent ostatniego wynagrodzenia, ewentualnie średniego wynagrodzenia z ostatnich kilku lat). Poziom składek ustala się tak, aby wkłady kapitałowe zgromadzone w przyszłości zrównoważyły ustalone wypłaty. Jeśli skumulowana wartość wpłat czy też wysokość rezerwy zmienia się, np. w wyniku inflacji, wskutek działalności inwestycyjnej, znacznej zmiany zarobków, przechodzenia na emeryturę, rentę lub wycofywania się uczestników itp., w momencie okresowej wyceny programu poziom składek powinien zostać uaktualniony. W przypadku programów o zdefiniowanej składce ustalona jest wysokość składek, natomiast wysokość świadczenia wyznacza się w momencie przejścia ubezpieczonego na emeryturę, kiedy znana jest wielkość zgromadzonego kapitału. W dalszej części rozpatrywać będziemy jedynie programy emerytalne o zdefiniowanym świadczeniu.

W programach emerytalnych o zdefiniowanym świadczeniu wypłata zależy zarówno od wieku ubezpieczonego, jak i od jego stażu ubezpieczeniowego w PE.

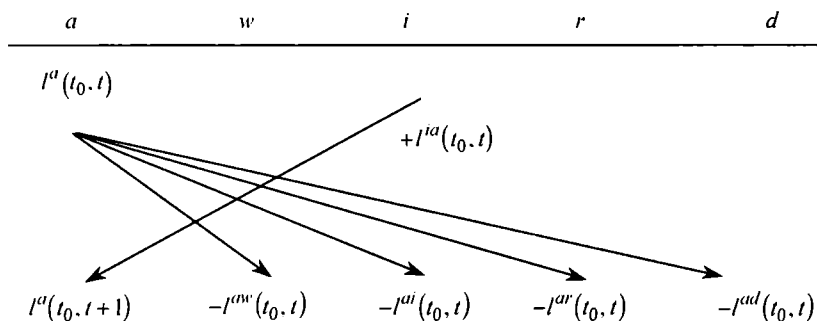
W momencie aktuariałnej wyceny programu, tzn. w roku t (por. rys. 2), liczebność grupy osób przystępujących w jednakowym wieku w momencie t_0 , oznaczmy $l^a(t_0, t)$. Na przykład $l^a(0, 4)$ oznacza liczebność grupy, która pozostawała w PE przez 4 lata, licząc od momentu $t_0 = 0$ po 4 latach uczestnictwa. Symbol $l^{jk}(t_0, t)$ oznacza natomiast liczbę osób, które w czasie $(t, t + 1)$ przeszły ze stanu j do stanu k .

Na przykład $l^{ai}(0, 10)$ oznacza liczbę aktywnych uczestników, którzy przystąpili do PE w momencie $t_0 = 0$ i w ciągu 11. roku uczestnictwa przeszli na rentę inwalidzką.

Uczestników programu emerytalnego, należących do poszczególnych grup, można policzyć. Liczba aktywnych uczestników programu emerytalnego w wieku x , którzy będą aktywnymi uczestnikami w wieku $x+1$, to: liczba aktywnych uczestników w wieku x powiększona o liczbę rencistów odzyskujących zdrowie w wieku $(x, x+1)$ oraz pomniejszona o liczbę aktywnych uczestników, którzy przeszli na rentę, emeryturę, zrezygnowali z uczestnictwa w PE lub zmarli w wieku $(x, x+1)$, stąd mamy:

$$l^a(t_0, t+1) = l^a(t_0, t) + l^{ia}(t_0, t) - \sum_{j \in \{w, i, r, d\}} l^{aj}(t_0, t), \quad (1)$$

Na rys. 3 przedstawiono graficzną ilustrację wzoru (1).



Rys. 3. Zmiana liczebności aktywnych uczestników w PE w ciągu roku

Źródło: opracowanie własne.

Analogicznie wyznaczamy pozostałe liczebności. Liczba inwalidów w czasie $t+1$ wynosi:

$$l^i(t_0, t+1) = l^i(t_0, t) + l^{ai}(t_0, t) - l^{wi}(t_0, t) - \sum_{j \in \{a, w, d\}} l^{ij}(t_0, t). \quad (2)$$

Liczba osób, które zrezygnowały z uczestnictwa w PE do czasu $t+1$ wynosi:

$$l^w(t_0, t+1) = l^w(t_0, t) + l^{aw}(t_0, t) - l^{wd}(t_0, t) - l^{wi}(t_0, t). \quad (3)$$

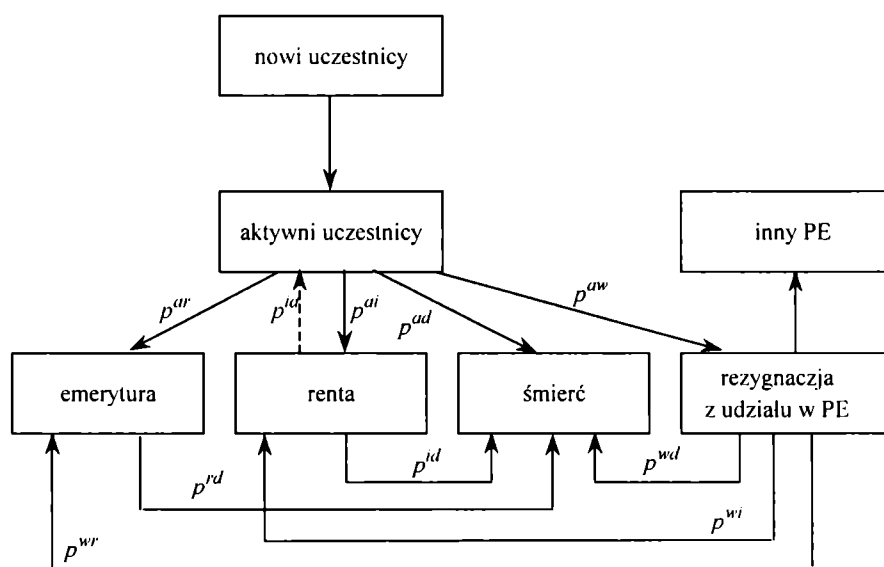
Liczba osób z danej grupy, które do czasu $t+1$ przeszły na emeryturę wynosi:

$$l^r(t_0, t+1) = l^r(t_0, t) + \sum_{j \in \{a, w, i\}} l^{jr}(t_0, t) - l^{rd}(t_0, t). \quad (4)$$

3. Prawdopodobieństwo zmiany stanu w PE

W programie emerytalnym określa się również prawdopodobieństwa zmiany stanu, inaczej nazywane prawdopodobieństwem przejścia. Prawdopodobieństwo przejścia ze stanu j do stanu k w przedziale wieku $(x, x+m)$ oznacza się ${}_m p^{jk}(x)$. W szczególności prawdopodobieństwo, że osoba w wieku $(x, x+1)$ zmieni status w programie emerytalnym, oznacza się $p^{jk}(x)$ (zamiast ${}_1 p^{jk}(x)$).

Prawdopodobieństwa zmiany stanu w programie emerytalnym przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Możliwości zmiany stanu w PE i odpowiadające im prawdopodobieństwa

Źródło: opracowanie własne na podstawie [3].

Dokładne wartości tych prawdopodobieństw są nieznane, dlatego w tablicy umieszcza się ich oceny uzyskane metodą największej wiarygodności (por. [1]).

Uprościmy nasz model do prawdopodobieństwa $p(x_i)$ pozostania w programie przez rok osoby w wieku x_i i odejścia, $q(x_i)$. Oczywiście $p(x_i) + q(x_i) = 1$. Dla każdej z osób wstępujących do PE określimy ciąg zmiennych losowych $\{E_i^j; i = x_0, x_0 + 1, \dots, x_r; j = 1, 2, \dots, l^a(t_0, t_0)\}$, gdzie $l^a(t_0, t_0)$ oznacza liczebność początkową grupy osób wstępujących w jednakowym wieku w momencie t_0 . Jest to ciąg zmiennych losowych o następującym rozkładzie:

$$E_i^j = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } j\text{-ta osoba odejdzie z programu w wieku } (x_i, x_i + 1), \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Oznacza to, że zmienne E_i^j mają następujący rozkład:

$$\begin{aligned} P(E_i^j = 1) &= x_i - x_0 p(x_0)(1 - p(x_i)), \\ P(E_i^j = 0) &= 1 - x_i - x_0 p(x_0)(1 - p(x_i)). \end{aligned} \quad (5)$$

Wówczas dla kohorty o liczebności początkowej $l^a(t_0, t_0)$ otrzymujemy macierz wektorów realizacji zmiennych losowych E_i^j .

Tabela 1. Realizacje ciągu zmiennych losowych $\{E_i^j; i = x_0, x_0 + 1, \dots, x_r; j = 1, 2, \dots, l^a(t_0, t_0)\}$

Nr osoby Zmienne losowe j	1	2		$l^a(t_0, t_0) - 1$	$l^a(t_0, t_0)$
$E_{x_0}^j$	$\varepsilon_{x_0}^1$	$\varepsilon_{x_0}^2$	...	$\varepsilon_{x_0}^{l^a(t_0, t_0)-1}$	$\varepsilon_{x_0}^{l^a(t_0, t_0)}$
$E_{x_0+1}^j$	$\varepsilon_{x_0+1}^1$	$\varepsilon_{x_0+1}^2$	...	$\varepsilon_{x_0+1}^{l^a(t_0, t_0)-1}$	$\varepsilon_{x_0+1}^{l^a(t_0, t_0)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
$E_{x_r-1}^j$	$\varepsilon_{x_r-1}^1$	$\varepsilon_{x_r-1}^2$	...	$\varepsilon_{x_r-1}^{l^a(t_0, t_0)-1}$	$\varepsilon_{x_r-1}^{l^a(t_0, t_0)}$
$E_{x_r}^j$	$\varepsilon_{x_r}^1$	$\varepsilon_{x_r}^2$	...	$\varepsilon_{x_r}^{l^a(t_0, t_0)-1}$	$\varepsilon_{x_r}^{l^a(t_0, t_0)}$

Źródło: opracowanie własne.

Realizacje ciągu zmiennych losowych zawarte w tab. 1 mają następujące właściwości (w dalszej części indeks górny d będzie oznaczał rezygnację z uczestnictwa w programie):

$$\sum_{j=1}^{l^a(t_0, t_0)} \varepsilon_i^j = l^{ad}(t_0, t_0 + i - x_0) \quad (6)$$

oraz

$$\sum_{i=x_0}^{x_r} \varepsilon_i^j = 1. \quad (7)$$

Łączny rozkład ciągu zmiennych losowych $\{E_i^j; i = x_0, x_0 + 1, \dots, x_r; j = 1, 2, \dots, l^a(t_0, t_0)\}$ ma funkcję prawdopodobieństwa (por. [1]):

$$\prod_{i=x_0}^{x_r} [x_i - x_0 p(x_0)(1 - p(x_i))]^{\varepsilon_i^j}, j = 1, 2, \dots, l^a(t_0, t_0). \quad (8)$$

Funkcja wiarygodności dla całej kohorty wygląda następująco:

$$\begin{aligned} L &= \prod_{j=1}^{l^a(t_0, t_0)} \prod_{i=x_0}^{x_r} [x_i - x_0 p(x_0)(1 - p(x_i))]^{\varepsilon_i^j} = \prod_{i=x_0}^{x_r} [x_i - x_0 p(x_0)(1 - p(x_i))]^{\sum_{j=1}^{l^a(t_0, t_0)} \varepsilon_i^j} = \\ &= \prod_{i=x_0}^{x_r} [x_i - x_0 p(x_0)(1 - p(x_i))]^{l^{ad}(t_0, t_0 + i - x_0)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Szukając estymatora metodą największej wiarygodności, szukamy maksimum funkcji wiarygodności (a dokładniej maksimum $\ln L$) ze względu na $p(x_i)$:

$$\begin{aligned} \ln L &= \sum_{i=x_0}^{x_r} l^{ad}(t_0, t_0 + i - x_0) (\ln(x_i - x_0 p(x_0)) + \ln(1 - p(x_i))), \\ \frac{\partial \ln L}{\partial p(x_i)} &= \frac{1}{p(x_i)} \sum_{j=x_i+1}^{x_r} l^{ad}(t_0, t_0 + j - x_0) - \frac{l^{ad}(t_0, t_0 + i - x_0)}{1 - p(x_i)}. \end{aligned}$$

Natomiast

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p(x_i)^2} = - \left(\frac{1}{p(x_i)} \right) \sum_{j=x_i+1}^{x_r} l^{ad}(t_0, t_0 + j - x_0) - \frac{l^{ad}(t_0, t_0 + i - x_0)}{(1 - p(x_i))^2} < 0,$$

ponieważ $0 < p(x_i) \leq 1$.

Szukamy takiej wartości $p(x_i)$, dla której $\frac{\partial \ln L}{\partial p(x_i)} = 0$ i otrzymujemy

$$p(x_i) = \frac{\sum_{j=x_i+1}^{x_r} l^{ad}(t_0, t_0 + j - x_0)}{\sum_{j=x_i}^{x_r} l^{ad}(t_0, t_0 + j - x_0)}. \quad (10)$$

Zatem otrzymujemy estymator

$$\hat{p}(x_i) = \frac{l^a(t_0, t_0 + (x_i - x_0) + 1)}{l^a(t_0, t_0 + (x_i - x_0))} = \frac{l^a(t_0, t + 1)}{l^a(t_0, t)}. \quad (11)$$

Wobec tego estymator prawdopodobieństwa odejścia z programu wyliczamy:

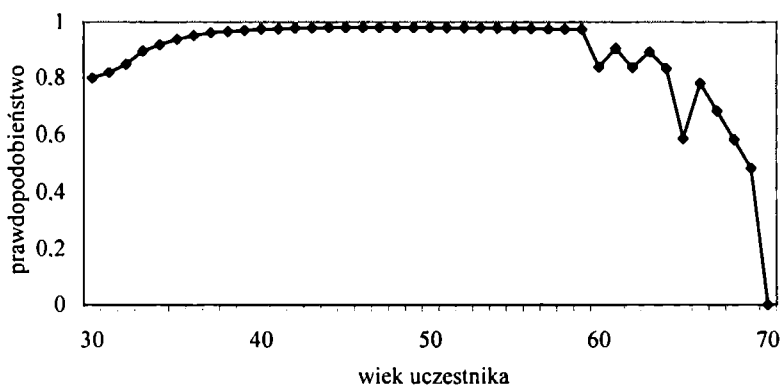
$$\hat{q}(x_i) = 1 - \frac{l^a(t_0, t+1)}{l^a(t_0, t)} = \frac{l^a(t_0, t) - l^a(t_0, t+1)}{l^a(t_0, t)} = \frac{l^{ad}(t_0, t)}{l^a(t_0, t)}. \quad (12)$$

Analogicznie wyznacza się estymatory prawdopodobieństw zmiany stanu w PE, uwzględniając pozostałe stany, zatem:

$$\hat{p}^{jk}(x) = \begin{cases} \frac{l^{jk}(t_0, t)}{l^j(t_0, t)} & \text{dla } k \neq j, \\ \frac{l^j(t_0, t+1)}{l^j(t_0, t)} & \text{dla } k = j, \end{cases} \quad \text{gdzie } j, k \in \{a, w, i, r, d\}. \quad (13)$$

4. Przykład

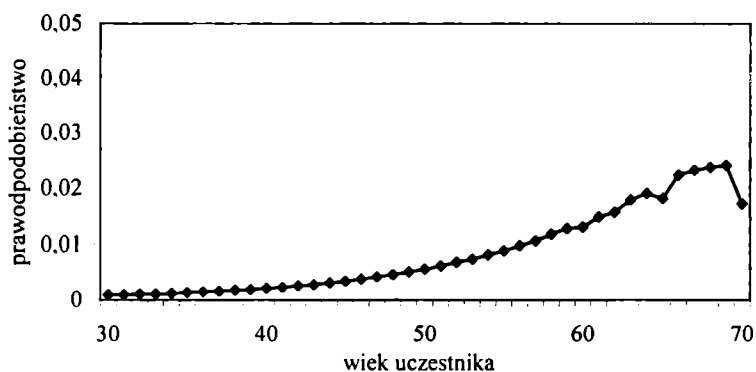
Oszacowane prawdopodobieństwa zmiany stanu dla wybranego PE obliczone z wykorzystaniem danych z tab. 2 (załącznik) zamieszczono w tab. 3 (załącznik), której ilustracją graficzną są rysunki 5-9.



Rys. 5. Prawdopodobieństwo pozostania aktywnym uczestnikiem

Źródło: opracowanie własne (dane z tab. 3).

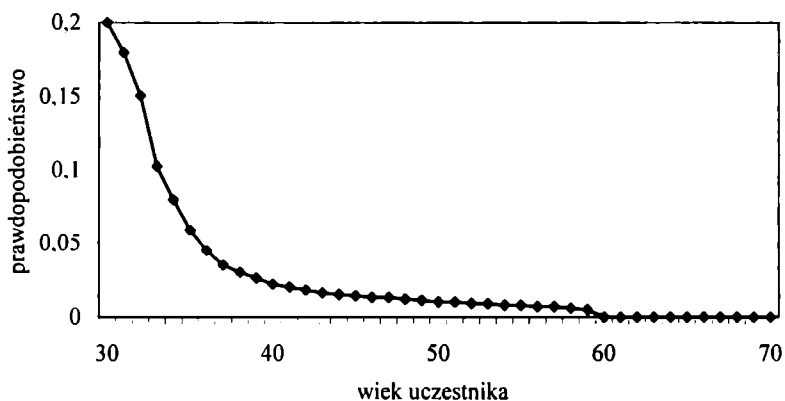
Prawdopodobieństwo pozostania aktywnym uczestnikiem programu emerytalnego wzrasta do chwili, gdy pierwsze osoby zaczynają przechodzić na emeryturę. Wówczas zaczyna spadać, by w wieku 70 lat osiągnąć 0, ponieważ w tym momencie już wszyscy ubezpieczeni z kohorty przejdą na emeryturę.



Rys. 6. Prawdopodobieństwo śmierci aktywnego uczestnika

Źródło: opracowanie własne (dane z tab. 3).

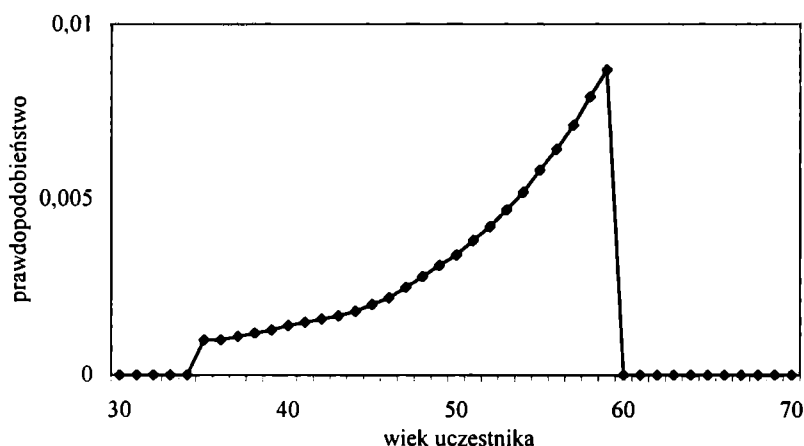
Prawdopodobieństwo śmierci aktywnego uczestnika wzrasta z wiekiem uczestnika.



Rys. 7. Prawdopodobieństwo rezygnacji z uczestnictwa w PE

Źródło: opracowanie własne (dane tab. 3).

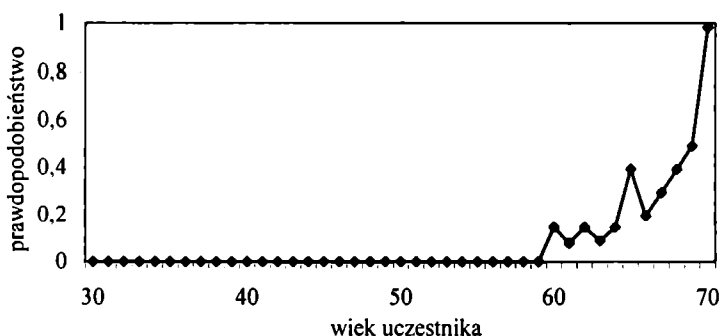
Prawdopodobieństwo rezygnacji z uczestnictwa w PE tak naprawdę obserwujemy w początkowych latach ubezpieczenia, ponieważ wtedy pracownik nie ma jeszcze wypracowanych korzyści związanych z wieloletnim uczestnictwem.



Rys. 8. Prawdopodobieństwo przejścia aktywnego uczestnika na rentę inwalidzką

Źródło: opracowanie własne (dane z tab. 3).

Prawdopodobieństwo przejścia na rentę inwalidzką aktywnego uczestnika wzrasta do momentu, gdy uczestnik osiąga wiek emerytalny i wówczas przechodzi na emeryturę.



Rys. 9. Prawdopodobieństwo przejścia aktywnego uczestnika na emeryturę

Źródło: opracowanie własne (dane z tab. 3).

Prawdopodobieństwo przejścia na emeryturę przyjmuje wartości dodatnie dla osób osiągających wiek emerytalny 60 lat, do chwili osiągnięcia górnej granicy wieku emerytalnego, czyli wieku 70 lat.

5. Zakończenie

Wyznaczanie prawdopodobieństwa zmiany stanu w programie emerytalnym jest ważnym zagadnieniem matematyki aktuarialnej, gdyż wiąże się bezpośrednio z zarządzaniem ryzykiem działalności funduszy emerytalnych. Prawdopodobieństwo to wykorzystywane jest do obliczania wysokości rezerwy matematycznej wystarczającej na pokrycie przyszłych zobowiązań oraz do ustalania odpowiedniej wysokości składki. Konsekwencją niedoszacowania tego prawdopodobieństwa może być bankructwo danego programu ewentualnie znaczne podniesienie poziomu składek lub obniżenie wysokości świadczeń.

Literatura

- [1] Bolesławski L., *Budowa tablic trwania życia*, GUS, Warszawa 1973.
- [2] Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbit C.J., *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, Itasca 1986.
- [3] Daykin C.D., Pentikäinen T., Pesonen M., *Practical Risk theory for actuaries*, Chapman & Hall, London 1996.
- [4] Ostasiewicz W. (red.), *Modele aktuarialne*, AE, Wrocław 2000.
- [5] Ustawa z dnia 22 sierpnia 1997 r. o pracowniczych programach emerytalnych (DzU Nr 139, poz. 932 z późn. zm.).

Załącznik

Tabela 2. Liczebności poszczególnych grup w programie emerytalnym

x	$I''(x, x+1)$	$I^{ad}(x, x+1)$	$I^{aw}(x, x+1)$	$I^{ai}(x, x+1)$	$I^{ar}(x, x+1)$
30	100000	100	19990		
31	79910	80	14376		
32	65454	72	9858		
33	55524	61	5702		
34	49761	60	3971		
35	45730	64	2693	46	
36	42927	64	1927	43	
37	40893	65	1431	45	
38	39352	71	1181	47	
39	38053	72	989	49	
40	36943	78	813	52	
41	36000	83	720	54	
42	35143	91	633	56	
43	34363	96	550	58	
44	33659	104	505	61	
45	32989	112	462	66	
46	32349	123	421	71	
47	31734	133	413	79	
48	31109	143	373	87	
49	30506	156	336	95	
50	29919	168	299	102	
51	29350	182	293	112	
52	28763	198	259	121	
53	28185	209	251	132	
54	27593	226	218	143	
55	27006	240	213	157	
56	26396	259	182	169	
57	25786	276	178	183	
58	25149	297	148	199	
59	24505	316	120	213	
60	23856	313			3552
61	19991	298			1587
62	18106	284			2692
63	15130	271			1350
64	13509	257			2006
65	11246	204			4448
66	6594	147			1302
67	5145	119			1522
68	3504	83			1381
69	2040	49			1004
70	987	17			970

Źródło: [2].

Tabela 3. Prawdopodobieństwo zmiany stanu w programie emerytalnym

x	$p^{aa}(x)$	$p^{ad}(x)$	$p^{aw}(x)$	$p^{ai}(x)$	$p^{ar}(x)$
30	0,799100	0,001000	0,199900	0	0
31	0,819096	0,001001	0,179902	0	0
32	0,848290	0,001100	0,150610	0	0
33	0,896207	0,001099	0,102694	0	0
34	0,918993	0,001206	0,079801	0	0
35	0,938705	0,001400	0,058889	0,001006	0
36	0,952617	0,001491	0,044890	0,001002	0
37	0,962316	0,001590	0,034994	0,001100	0
38	0,96699	0,001804	0,030011	0,001194	0
39	0,97083	0,001892	0,025990	0,001288	0
40	0,974474	0,002111	0,022007	0,001408	0
41	0,976194	0,002306	0,020000	0,001500	0
42	0,977805	0,002589	0,018012	0,001593	0
43	0,979513	0,002794	0,016006	0,001688	0
44	0,980094	0,003090	0,015003	0,001812	0
45	0,980600	0,003395	0,014005	0,002001	0
46	0,980989	0,003802	0,013014	0,002195	0
47	0,980305	0,004191	0,013014	0,002489	0
48	0,980617	0,004597	0,011990	0,002797	0
49	0,980758	0,005114	0,011014	0,003114	0
50	0,980982	0,005615	0,009994	0,003409	0
51	0,980000	0,006201	0,009983	0,003816	0
52	0,979905	0,006884	0,009005	0,004207	0
53	0,978996	0,007415	0,008905	0,004683	0
54	0,978726	0,008190	0,007901	0,005182	0
55	0,977412	0,008887	0,007887	0,005814	0
56	0,976890	0,009812	0,006895	0,006402	0
57	0,975297	0,010703	0,006903	0,007097	0
58	0,974393	0,011810	0,005885	0,007913	0
59	0,973516	0,012895	0,004897	0,008692	0
60	0,835635	0,013120	0	0	0,148893
61	0,905708	0,014907	0	0	0,079386
62	0,835635	0,015685	0	0	0,148680
63	0,892862	0,017911	0	0	0,089227
64	0,832482	0,019024	0	0	0,148494
65	0,586342	0,018140	0	0	0,395518
66	0,780255	0,022293	0	0	0,197452
67	0,681050	0,023129	0	0	0,295821
68	0,582192	0,023687	0	0	0,394121
69	0,483824	0,024020	0	0	0,492157
70	0	0,017224	0	0	0,982776

Źródło: obliczenia własne.

THE CALCULATION OF THE PROBABILITY OF CHANGING STATUS IN THE DEFINED BENEFIT PENSION PLAN

Summary

After working for an established number of years and after achieving the pension age, every employee is entitled to the pension benefits. Employers offer also a different mechanism of ensuring pension protection, namely pension plans. To calculate, among others, the premium or reserve level on the basis of the actuarial value of benefits and assets the probability of changing status has to be known. The issue of the calculation of the probability of changing status in the defined benefit pension plan is of great interest from both scientific and practical point of view.

The aim of the paper is to estimate the probability of changing status in the pension plan on the basis of the data from [2].

Mgr inż. Magdalena Sipa jest pracownikiem Katedry Inwestycji Finansowych i Ubezpieczeń w Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.