

Jerzy Kisiel

KONCEPCJA METODY KOMBINATORYCZNEJ ROZWIĄZYWANIA UKŁADÓW RÓWNAŃ LINIOWYCH

W niniejszym artykule autor podejmuje próbę zasygnalizowania nowych możliwości teoretycznych, jakie kryją jeszcze w sobie metody rozwiązywania układów równań liniowych. Proponowana tutaj autorska metoda kombinatoryczna może być z powodzeniem stosowana w wielu rozwiązaniach praktycznych.

Istniejące metody rozwiązywania układów równań liniowych nie dają jednoznacznej recepty na wybór metody najlepszej, szczególnie jeżeli chodzi o zastosowanie tej czy innej metody do rozwiązania konkretnego zadania praktycznego (np. z dziedziny zarządzania).

Nawiasem mówiąc, problem tak postawiony (a mianowicie: która metoda jest najlepsza) ma charakter akademicki, dana metoda może być bowiem najlepsza dla danego, konkretnego zadania, nie będzie natomiast najlepsza dla innego.

Bardziej racjonalne wydaje się postawienie pytania następującego: w jaki sposób, wychodząc od analizy danych wejściowych układu równań liniowych, wyznaczyć najbardziej adekwatną doń metodę jego rozwiązania. Takie pytanie jest uzasadnione tym bardziej, że – jak wskazuje przykład metody Jacobiego i metody Seidela – jedna metoda może dać rozwiązanie, podczas gdy inna stwierdzić, że rozwiązanie nie istnieje (czyli jest rozbieżna).

Może być również tak, że obliczenia są kończone ze względu na spełnienie pewnego kryterium ich zatrzymania (np. osiągnięto zadaną dokładność obliczeń lub wykonano zadaną liczbę iteracji), ale w rzeczywistości nie musi to być równoznaczne z osiągnięciem rozwiązania. Co więcej, w takich wypadkach nawet nie możemy stwierdzić, czy osiągnęliśmy rozwiązanie, czy też jeszcze jesteśmy bardzo od niego daleko.

Należy także zwrócić uwagę na bardzo istotny problem nakładania się na siebie błędów zaokrągleń w kolejnych iteracjach: nie można jednoznacznie stwierdzić, czy błędy te będą się wzajemnie kompensować, czy też na odwrót, coraz bardziej potęgować przy przejściu od iteracji bieżącej do następnej. Całości obrazu dopełnia

fakt, iż dane wejściowe nie zawsze są określone w sposób dostatecznie jednoznaczny. W takiej sytuacji stosowanie skomplikowanych matematycznie procedur przekształcających może tę niejednoznaczność danych wejściowych przenieść na jeszcze większą niejednoznaczność danych wynikowych.

Wydaje się, że pewną alternatywą może być odejście od przedstawionych w innym artykule autora¹ metod rozwiązywania układów równań liniowych i zastąpienie ich przez pewien algorytm kombinatoryczny, którego zaletą jest radykalne odejście od skomplikowanych obliczeń matematycznych, z reguły prowadzących do niejednoznacznych wyników (błędy zaokrągleń, problem dzielenia przez liczby bliskie zera, różnice w rzędach wielkości poszczególnych parametrów wejściowych itp.). Pozostanie jedynie ewentualny problem z niejednoznacznością danych wejściowych.

Niech będzie dany układ postaci:

$$\begin{aligned} c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_sx_s &= D, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1s}x_s &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2s}x_s &= b_2, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{ms}x_s &= b_m, \text{ gdzie } s \geq m+1. \end{aligned} \quad (1)$$

Poniżej przedstawiamy szkic² idei algorytmu kombinatorycznego rozwiązywania układu równań liniowych (1). Będziemy rozpatrywać układ dany wzorami (1), w którym z lewej strony znajdują się *niektóre* zmienne podstawowe, z prawej zaś pozostałe zmienne podstawowe i pomocnicze. Zachodzi oczywista równość $m+1 \leq s$, tj. ogólna liczba zmiennych jest większa lub równa liczbie równań układu (1), przy tym interesuje nas głównie przypadek $m+1 < s$.

Poszukujemy rozwiązań całkowitoliczbowych i nieujemnych.

Warunek nieujemności rozwiązania układu (1) można sprowadzić do tego, że prawe strony równań układu zmodyfikowanego muszą być nieujemne, tj.:

$$\begin{aligned} D - c_{s+1}x_{s+1} - \dots - c_nx_n + x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+m} &\geq 0, \\ b_1 - a_{1,s+1}x_{s+1} - \dots - a_{1n}x_n + x_{n+1} &\geq 0, \\ b_2 - a_{2,s+1}x_{s+1} - \dots - a_{2n}x_n + x_{n+2} &\geq 0, \\ &\dots\dots\dots \\ b_m - a_{m,s+1}x_{s+1} - \dots - a_{mn}x_n + x_{n+m} &\geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

¹ J. Kisiel. *Przegląd współczesnych trendów rozwiązywania układów równań liniowych* (w druku).

² Autor artykułu zdaje sobie sprawę z pewnej lakoniczności narracji niniejszego artykułu. Jest to spowodowane tym, że pełny opis metody znajduje się w kończonym obecnie maszynopisie jego pracy doktorskiej. Autor nie chciałby przed ostateczną obroną pracy publikować jej najistotniejszych elementów.

Ponieważ zmienne $x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ możemy traktować jako parametry, więc można założyć, że każda z nich przyjmuje ściśle określony zakres wartości. Ten zakres praktycznie możliwych wartości każdej z tych zmiennych można określić na podstawie analizy głównych czynników, które wpływają w rzeczywistości na wielkość tych zmiennych. Na przykład, jeśli dana zmienna określa liczbę sklepów w danej miejscowości, to uwzględniając liczbę mieszkańców, istniejącą już liczbę sklepów itp. czynniki, można określić minimalną i maksymalną wartość tej zmiennej. Będzie to więc np. wartość przyjęta jako maksymalna z punktu widzenia praktyki czy też z punktu widzenia tzw. zdrowego rozsądku (zwiększenie liczby sklepów powyżej tej wartości maksymalnej może być bowiem praktycznie niemożliwe oraz niecelowe ekonomicznie).

Niech więc $x_j \in \{0, 1, 2, \dots, x_j^{\max}\}$, $j = s+1, s+2, \dots, n, n+1, \dots, n+m$. Każda z tych zmiennych może przyjmować zatem ściśle określony skończony zbiór wartości, które są liczbami całkowitymi. Dla uproszczenia przyjmijmy, że minimalną wartością każdej z tych zmiennych jest liczba zero. Możliwych jest tutaj

$$N = (x_{s+1}^{\max} + 1)(x_{s+2}^{\max} + 1) \dots (x_n^{\max} + 1)(x_{n+1}^{\max} + 1) \dots (x_{n+m}^{\max} + 1) \quad (3)$$

różnych kombinacji tych zmiennych. Spośród tych N kombinacji wybieramy te, które spełniają układ nierówności (2). Istnieje przynajmniej jedna taka kombinacja, a mianowicie $\{x_{s+1}^{\min}, x_{s+2}^{\min}, \dots, x_n^{\min}, x_{n+1}^{\min}, \dots, x_{n+m}^{\min}\}$ zawierająca same zera; jest to początkowy wektor $\mathbf{b}$ prawych stron układu równań. Proces wyboru kombinacji polega na wprowadzeniu kolejnej kombinacji do układu (2) i sprawdzeniu, czy układ ten jest spełniony. Zauważmy, że mamy tutaj do czynienia tylko z operacjami dodawania i mnożenia, dzięki czemu eliminuje się negatywny wpływ operacji dzielenia na wynik obliczeń (w każdej z przedstawionych metod operacja dzielenia stanowiła ich nieodłączną część).

Podobne założenie co do zakresu możliwych wartości można poczynić również wobec zmiennych stojących z lewej strony zmodyfikowanego układu (1).

Po wybraniu tych kombinacji, które spełniają układ (2), można wstawić znalezione wartości zmiennych do układu (1) i sprawdzić, czy układ (1) jest spełniony. Ponieważ mamy tutaj do czynienia z układem, który opisuje pewną złożoną rzeczywistość gospodarczą, więc jest bezsporne, że jest to układ w dużym stopniu przybliżony (co wynika chociażby z tego, iż jego współczynniki zazwyczaj nie są możliwe do ustalenia w sposób jednoznaczny, zawsze bowiem oddziałują na nie jakieś inne czynniki, których nie daje się do końca w sposób jednoznaczny oraz ostateczny określić). Wynika stąd, że jeżeli pewne równania układu (1) nie będą spełnione dla pewnego układu wartości zmiennych, to mimo wszystko może to być rozwiązanie, które nas będzie zadowalać z punktu widzenia naszego zadania praktycznego.

Otrzymane rozwiązanie jest jednak rozwiązaniem całkowitoliczbowym, co wynika z tego, że braliśmy pod uwagę jedynie całkowite wartości poszczególnych zmiennych. W odróżnieniu od klasycznej metody simplex, czy też przedstawionych metod rozwiązywania układów równań liniowych, w których kolejne rozwiązanie było otrzymywane z poprzedniego przez odpowiednie przejście od jednego wierzchołka wielościanu wypukłego do wierzchołka następnego, w naszym przypadku proces ten można zilustrować następująco:

Z ciągłego wielościanu wypukłego (zbudowanego na ograniczeniach początkowych) pozostawia się jedynie te jego punkty, których współrzędne są liczbami całkowitymi. Ten zbiór punktów ogranicza się następnie jedynie do tych punktów, które spełniają ograniczenia nałożone na możliwe wartości zmiennych. Następnie dla tych punktów całkowitoliczbowych sprawdza się spełnienie równań układu (1). Spośród otrzymanych rozwiązań (punktów) wybiera się taki punkt (lub takie punkty), które najbardziej nam odpowiadają z praktycznego punktu widzenia. Nawiasem mówiąc, z powodu zazwyczaj niepełnej informacji, która jest wykorzystywana podczas określania wartości poszczególnych współczynników układu równań (1), można przyjąć, że niektóre z punktów, które należy sprawdzić pod względem spełnienia tych równań (1), mogą nie należeć do początkowego wielościanu wypukłego; konieczne jest jednak, aby leżały w jego dostatecznie bliskim sąsiedztwie. Również takie rozwiązanie, nie należące do wielościanu ograniczeń, może być przyjęte jako jedno z rozwiązań końcowych zadania praktycznego.

Z przedstawionych rozważań wynika, że dla celów praktycznych układ równań liniowych stanowi wygodny sposób opisu zadania o charakterze gospodarczym, które chcemy rozwiązać. Pozwala bowiem na pewne uporządkowanie tych niepełnych danych, którymi początkowo dysponujemy. Na podstawie skonstruowanego układu równań liniowych możemy następnie dokonać próby znalezienia rozwiązania naszego problemu.

Pojawia się więc tutaj problem ustalenia, co tak naprawdę chcemy uzyskać w wyniku rozwiązania początkowego układu liniowego. Inaczej: czy interesuje nas rozwiązanie dokładne, czy też wystarczy nam pewne rozwiązanie przybliżone, ale za to będące rozwiązaniem całkowitoliczbowym.

Jak już pokazaliśmy, otrzymane rozwiązanie z całą pewnością będzie rozwiązaniem całkowitoliczbowym. Rozwiązanie to otrzymujemy nie przez zastosowanie którejś z dokładnych bądź iteracyjnych metod rozwiązywania układu równań (1), lecz przez zastosowanie prostego sprawdzenia, czy wybrane punkty całkowitoliczbowe spełniają ten układ.

Jak widać, istotne jest nie samo rozwiązanie skonstruowanego układu liniowego, lecz stwierdzenie, czy pewne punkty całkowitoliczbowe należące do opisywanego przez ten układ wielościanu wypukłego lub należące do jego bezpośredniego otoczenia są do przyjęcia z punktu widzenia praktycznego celu naszego zadania.

Zadanie sprawdzenia, czy określony skończony zbiór punktów całkowitoliczbowych spełnia układ (1), w aspekcie złożoności obliczeniowej jest zadaniem o wiele prostszym niż którakolwiek z klasycznych metod rozwiązywania tego układu. Mamy tutaj bowiem do czynienia jedynie z operacjami mnożenia oraz dodawania; operacje dzielenia, których dokładność w sposób istotny wpływa na otrzymywany wynik, zostają wyeliminowane.

Literatura

- [1] Agmon S., *The relaxation method for linear inequalities*, Can. J. Math 6(1954): 382-392.
- [2] Barrett R., Berry M., Chan T., Demmel J., Donato J., Dongarra J., Eijkhout V., Pozo V., Romine C., Vorst van der H., *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*, SIAM, Philadelphia 1994.
- [3] Demmel J.W., *Applied Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia 1997.
- [4] Dongarra J.J., Duff I.S., Sorensen D.C., Vorst van der H., *Numerical Linear Algebra for High-Performance Computers*, SIAM, Philadelphia 1998.
- [5] Kielbasiński A., Schwertlick A., *Numeryczna algebra liniowa*, WNT, Warszawa 1992.
- [6] Meyer C.D., *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia 2000.
- [7] Stoer J., Bulirsch R., *Wstęp do analizy numerycznej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1987.
- [8] Trefethen L.N., Bau D., *Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia 1997.
- [9] Varga R., *Matrix Iterative Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1962.

THE CONCEPTION OF THE COMBINATION METHOD FOR SOLUTION OF LINEAR SYSTEMS EQUATIONS

Summary

In this paper a conception of the combination method for resolving linear systems in space of wholes numbers is described. This method can be successfully used for resolving a lot of tasks in the management of economics systems, e.g. real estate managing.

Mgr inż. Jerzy Kisiel jest pracownikiem Katedry Ekonometrii i Informatyki w Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.