

Stanisław Wieteska

Uniwersytet Łódzki

ZASTOSOWANIE DEMOGRAFICZNYCH MODELI WIELOKROTNEGO UBYTKU W KALKULACJI SKŁADEK W UBEZPIECZENIACH NA ŻYCIE

1. Wstęp

W matematyce aktuarialnej odejście z danego statusu nosi nazwę dekrimentu. Przedmiotem rozważań w modelach wielokrotnego ubytku nie jest pojedyncze życie, lecz koncentrują się one na wielu wypadkach.

Zastosowanie tej problematyki obserwujemy np. w zakładzie pracy, w którym liczba pracowników zatrudnionych przez pracodawcę będzie się zmniejszać, gdy pracownik zostanie zwolniony z pracy, stanie się niezdolny do pracy, umrze lub przejdzie na emeryturę. W celach planowania zatrudnienia będzie zatem potrzebne oszacowanie liczby osób obecnie pracujących, które pozostaną aktywne przez wiele następnych lat.

Aktuariusze potrzebują również modeli dotyczących planów świadczeń pracowniczych, w których świadczenie płacone na zakończenie zatrudnienia może zależeć od przyczyny zakończenia zatrudnienia. Na przykład świadczenia emerytalne będą zazwyczaj różniły się od tych płaconych z powodu śmierci czy inwalidztwa, tak więc modele przeżycia dla systemu świadczeń pracowniczych będą zawierały dwie zmienne losowe: dla momentu zakończenia pracy i przyczyny zakończenia pracy.

Ponadto większość indywidualnych ubezpieczeń życiowych zapewnia zapłatę nie utraconych świadczeń, jeżeli składki ustaną przed końcem określonego okresu płacenia składki. Przerwanie ubezpieczenia, czyli zaprzestanie opłaty dalszych składek w okresie ubezpieczenia, może powodować częściowy zwrot kapitału i likwidację ubezpieczenia lub obniżenie sumy ubezpieczenia stosownie do proporcji wpłaconego kapitału, do tego, jaki powinien być wpłacony według planu ubezpie-

czenia. Zastosowany w tym przypadku ogólny model dla takich ubezpieczeń będzie zawierał zarówno czas zakończenia płacenia składek, jak i przyczynę zakończenia płatności składek. Będą to dwie zmienne losowe w wykorzystanym w tym celu modelu wielokrotnego ubytku.

Kolejnym przykładem zastosowania modelu wielokrotnego ubytku jest ubezpieczenie dochodów w razie niezdolności do pracy, które zapewnia okresowe płatności dla ubezpieczonych spełniających warunki niezdolności zdefiniowanej i zawartej w polisie. W tym przypadku wielkość okresowych płatności może zależeć od tego, czy niezdolność do pracy była spowodowana przez chorobę, czy wypadek.

W systemie społecznej opieki zdrowotnej istnieje zainteresowanie analizą przeżycia i śmiertelności w kategoriach przyczyny śmierci. Cele społecznej opieki zdrowotnej mogą być ustalone poprzez badanie łącznego rozkładu momentu śmierci i przyczyny śmierci. W tym przypadku przedmiotem analizy będzie śmiertelność rozpatrywana w kategoriach składowych przyczyn śmierci, z których każda traktowana jest jak oddzielny ubytek (dekriment) [1]. Zatem model matematyczny służący do przeprowadzania tego typu analiz nosi nazwę tablicy wielokrotnego ubytku.

W rozważaniach dotyczących modeli wielokrotnego ubytku wykorzystuje się dwie zmienne losowe: $T(x) = T$, która jest zmienną losową czasu, oraz $J(x) = J$, będącą zmienną losową przyczyny ubytku, gdzie x – wiek osoby. Przyjmujemy, że J jest zmienną losową dyskretną.

Zastosowania przedstawione w tym punkcie dostarczają przykładów tych zmiennych losowych. Mianowicie np. dla planu świadczeń pracowniczych zmiennej losowej J może przyjmować wartości 1, 2, 3 lub 4, w zależności od tego, czy odejście spowodowane jest odpowiednio rezygnacją, inwalidztwem, śmiercią czy przejściem na emeryturę.

Celem artykułu jest analiza rozkładu wielu zmiennych losowych, ubytku z danego statusu, w której wzięto pod uwagę życie jednej osoby. Podjęto także próbę obliczenia jednorazowej składki netto w ubezpieczeniach na życie, wykorzystując teoretyczne rozważania w zakresie teorii dekrimentów.

2. Podstawowe wzory i zależności w tablicy wielokrotnego ubytku

Symbole, które pojawiają się w problematyce dekrimentów, to:

- $d_x^{(\tau)}$ – całkowita liczba ubytków z danego statusu ze względu na wszystkie przyczyny, pomiędzy wiekiem x a $x + 1$,
- $l_x^{(\tau)}$ – liczba osób, które osiągnęły wiek x , podlegających działaniu (τ) przyczyn ubytku, gdzie: $\tau = 1, 2, \dots, m$,
- $p_x^{(\tau)}$ – prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x pozostanie w danym statusie przez przynajmniej 1 rok,

- $q_x^{(\tau)}$ – prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x opuści dany status w ciągu roku ze względu na wszystkie przyczyny,
 $\mu_x^{(\tau)}$ – całkowita intensywność ubytku ze względu na wszystkie przyczyny dla osoby w wieku x ,
 $L_x^{(\tau)}$ – średnia liczba osób dożywających wieku x , które podlegają działaniu (m) przyczyn ubytku,
 $d_x^{(j)}$ – liczba ubytków z danego statusu ze względu na przyczynę (j) pomiędzy wiekiem x a $x + 1$,
 $q_x^{(j)}$ – prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x opuści dany status w ciągu roku ze względu na przyczynę (j),
 $\mu_x^{(j)}$ – intensywność ubytku ze względu na przyczynę (j) dla osoby w wieku x .

W problematyce dekrimentów najbardziej podstawowymi formułami ze względu na wszystkie przyczyny są następujące wzory:

$$d_x^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} - l_{x+1}^{(\tau)}, \quad (1)$$

$$q_x^{(\tau)} = \frac{d_x^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}, \quad (2)$$

$$p_x^{(\tau)} = \frac{l_{x+1}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}, \quad (3)$$

$$p_x^{(\tau)} = 1 - q_x^{(\tau)}, \quad (4)$$

$${}_t p_x^{(\tau)} = \frac{l_{x+t}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}. \quad (5)$$

Intensywność ubytku zdefiniowana jest następująco:

$$\mu_x^{(\tau)} = \frac{-d \left[\ln \left(l_x^{(\tau)} \right) \right]}{dx}. \quad (6)$$

Zależność ta umożliwia skorzystanie z relacji:

$$l_x^{(\tau)} = l_0^{(\tau)} \exp \left[- \int_0^x \mu_y^{(\tau)} dy \right] \quad (7)$$

oraz:

$${}_n p_x^{(\tau)} = \exp \left[- \int_x^{x+n} \mu_y^{(\tau)} dy \right] = \exp \left[- \int_0^n \mu_{x+t}^{(\tau)} dt \right], \quad (8)$$

$$l_x^{(\tau)} - l_{x+1}^{(\tau)} = d_x^{(\tau)} = \int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(\tau)} dt, \quad (9)$$

$${}_n q_x^{(\tau)} = \int_0^{\tau} {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(\tau)} dt. \quad (10)$$

Ze względu na rodzaj ubytku zdefiniowane są następujące wzory:

$$d_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^m d_x^{(j)}, \quad (11)$$

$$q_x^{(j)} = \frac{d_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)}}, \quad (12)$$

$$q_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^m q_x^{(j)}. \quad (13)$$

Intensywność ubytku $\mu_x^{(j)}$ zdefiniujemy następująco:

$$\mu_x^{(\tau)} = -\frac{1}{l_x^{(\tau)}} \cdot \frac{dl_x^{(j)}}{dx} \quad (14)$$

Po przekształceniach wzoru (14) otrzymujemy:

$$l_x^{(j)} = \int_x^{\infty} l_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)} dy, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (15)$$

Następnie stwierdzamy, że:

$$l_x^{(j)} - l_{x+1}^{(j)} = d_x^{(j)} = \int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} dt, \quad (16)$$

a także:

$${}_n q_x^{(j)} = \int_0^{\tau} {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} dt. \quad (17)$$

Analiza wzorów (2) i (13) wyjaśnia, dlaczego teoria wielokrotnego ubytku jest również nazywana teorią konkurującego ryzyka. Prawdopodobieństwo ubytku ze względu na przyczynę (j) pomiędzy wiekiem x a $x + 1$ zależy od ${}_t p_x^{(\tau)}$, gdzie: $0 \leq t \leq 1$, tak więc od wszystkich składowych intensywności. Gdy intensywności dla innych ubytków rosną, wówczas ${}_t p_x^{(\tau)}$ się obniża.

Istnieje prosty związek pomiędzy całkowitą intensywnością ubytku a intensywnościami dotyczącymi poszczególnych przyczyn ubytku.

Podobnie jak:

$$l_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^m l_x^{(j)} \quad (18)$$

również:

$$\mu_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^m \mu_x^{(j)}. \quad (19)$$

Zatem całkowita intensywność ubytku jest równa sumie poszczególnych intensywności.

Zwróćmy uwagę na ważną różnicę pomiędzy intensywnością ubytku a prawdopodobieństwem ubytku. Funkcja prawdopodobieństwa zawiera w sobie pewien przedział czasu, podczas którego zmniejsza się liczebność danej grupy osób pod wpływem działania wszystkich przyczyn ubytku, stąd liczba osób opuszczających dany statut ze względu na przyczynę (j) nie jest niezależna od wielkości innych ubytków działających jednocześnie. Im większe jest działanie tych innych przyczyn ubytku, tym mniej będzie ubytków spowodowanych j -tą przyczyną i mniejsza będzie wartość prawdopodobieństwa ubytku ze względu na tę przyczynę. Wartości prawdopodobieństw dla różnych przyczyn zależą więc od siebie, a prawdopodobieństwa ubytku muszą być rozpatrywane jako zależne prawdopodobieństwa zawsze, kiedy działa kilka przyczyn ubytku [2].

Możemy zapisać:

$$q_x^{(j)} = \int_0^1 p_x^{(\tau)} \mu_{x+\tau}^{(j)} dt, \quad (20)$$

a zastępując $p_x^{(\tau)}$, otrzymamy:

$$q_x^{(j)} = \int_0^1 \exp \left[- \int_0^t \mu_{x+s}^{(\tau)} ds \right] \mu_{x+t}^{(j)} dt. \quad (21)$$

W tej formie oczywiste jest, że prawdopodobieństwo ubytku dla poszczególnej przyczyny zależy od intensywności ubytku ze względu na wszystkie przyczyny.

Funkcja $\mu_{x+\tau}^{(j)}$, będąca natychmiastową (chwilową) stopą ubytku, nie opiera się na żadnym przedziale czasowym i nie podlega działaniu konkurujących przyczyn. Intensywności ubytku dla poszczególnych przyczyn są więc niezależnymi funkcjami, w przeciwieństwie do prawdopodobieństw ubytku, które są zależne od siebie.

Kiedy potrzebne są wartości liczbowe $\mu_{x+\tau}^{(j)}$, można je otrzymać z tablicy wielokrotnego ubytku za pomocą aproksymacji:

$$\mu_{x+\tau}^{(j)} \cong \frac{d_{x-1}^{(j)} + d_x^{(j)}}{2l_x^{(\tau)}}. \quad (22)$$

Formuła ta wyrażona jest w kategoriach $d_x^{(j)}$, a nie $l_x^{(j)}$, ponieważ wartości $l_x^{(j)}$ zwykle nie występują w tablicy wielokrotnego ubytku.

Przykład 1

Masz dane w tab. 1. Oblicz : $q_{24}^{(1)}$, $q_{25}^{(\tau)}$, ${}_3q_{26}^{(\tau)}$, ${}_2q_{26}^{(2)}$, ${}_2q_{27}^{(1)}$.

Tabela 1. Tabela podwójnego dekrimentu

Wiek x	$l_x^{(r)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$
24	901 020	299	92 762
25	807 959	314	86 632
26	721 013	324	80 385
27	640 304	329	74 117
28	565 858	329	67 909
29	497 620	324	61 839

$$q_{24}^{(1)} = \frac{299}{901\,020},$$

$$q_{25}^{(r)} = \frac{314 + 86,632}{807\,959},$$

$${}_1q_{26}^{(r)} = \frac{497\,620}{721\,013},$$

$${}_2q_{26}^{(2)} = \frac{80\,385 + 74\,117}{721\,013},$$

$${}_2q_{27}^{(1)} = \frac{324}{640\,304}.$$

3. Centralne stopy wielokrotnego ubytku

Centralną stopę ubytku ze względu na wszystkie przyczyny można zdefiniować następująco:

$$m_x^{(r)} = \frac{\int_0^1 {}_t p_x^{(r)} \mu_{x+t}^{(r)} dt}{\int_0^1 {}_t p_x^{(r)} dt} = \frac{d_x^{(r)}}{L_x^{(r)}}, \quad (23)$$

gdzie: $L_x^{(r)} = \int_0^1 l_{x+t}^{(r)} dt$ i jest średnią ważoną $\mu_{x+t}^{(r)}$, $0 \leq t \leq 1$.

Analogicznie centralną stopę ubytku ze względu na przyczynę (j) zdefiniować można następująco:

$$m_x^{(j)} = \frac{\int_0^1 {}_t p_x^{(r)} \mu_{x+t}^{(j)} dt}{\int_0^1 {}_t p_x^{(r)} dt}. \quad (24)$$

Stopa ta jest średnią ważoną $\mu_{x+t}^{(j)}$, $0 \leq t \leq 1$.

Jest oczywiste, że:

$$m_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^m m_{x+t}^{(j)}. \quad (25)$$

Aby oszacować $m_x^{(\tau)}$, wygodnie jest przyjąć, że całkowity ubytek ma jednostajny rozkład w każdym roku. To założenie jest równoważne z aproksymacją:

$$l_{x+t}^{(\tau)} \cong l_x^{(\tau)} - t d_x^{(\tau)}, \quad \text{dla } 0 < t < 1,$$

stąd:

$$L_x^{(\tau)} = \int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)} dt \cong \int_0^1 (l_x^{(\tau)} - t d_x^{(\tau)}) dt = l_x^{(\tau)} - \frac{1}{2} d_x^{(\tau)}.$$

Następnie mamy:

$$m_x^{(j)} \cong \frac{d_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)} - \frac{1}{2} d_x^{(\tau)}}. \quad (26)$$

Możemy więc wnioskować, że $m_x^{(j)}$ może być również wyrażone w kategoriach prawdopodobieństw ubytku, mianowicie:

$$m_x^{(j)} \cong \frac{q_x^{(j)}}{1 - \frac{1}{2} q_x^{(\tau)}}. \quad (27)$$

Ważne jest, aby znać metodę umożliwiającą skonstruowanie tablicy wielokrotnego ubytku, gdy dane są centralne stopy ubytku dla każdej z przyczyn ubytku.

Mając:

$$l_x^{(\tau)} \cong L_x^{(\tau)} + \frac{1}{2} d_x^{(\tau)},$$

otrzymamy:

$$q_x^{(\tau)} \cong \frac{d_x^{(j)}}{L_x^{(\tau)} + \frac{1}{2} d_x^{(\tau)}} = \frac{m_x^{(j)}}{1 + \frac{1}{2} m_x^{(\tau)}}.$$

W analogiczny sposób wyprowadzamy wzór:

$$p_x^{(\tau)} = \frac{1 - \frac{1}{2} m_x^{(\tau)}}{1 + \frac{1}{2} m_x^{(\tau)}}.$$

Powyższa formuła może być użyta do otrzymania $l_x^{(\tau)}$, a $d_x^{(\tau)}$.

4. Przypadek stałej intensywności i jednostajnego rozkładu wielokrotnych ubytków

Zastosujmy założenie o stałej intensywności każdego ubytku w każdym roku życia. Daje nam to:

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \mu_x^{(j)} \text{ oraz } \mu_{x+t}^{(\tau)} = \mu_x^{(\tau)} \text{ gdzie } 0 \leq t \leq 1.$$

Następnie otrzymamy:

$$q_x^{(j)} = \int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)} dt = \frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(\tau)}} \int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(\tau)} dt = \frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(\tau)}} q_x^{(\tau)}. \quad (28)$$

Wzór (28) dostarcza formuły:

$$\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}} = \frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(\tau)}}, \quad (29)$$

przy założeniu, że każdy z ubytków w kontekście wielokrotnego ubytku ma jednostajny rozkład w każdym roku. Mamy więc:

$${}_t q_x^{(j)} = t q_x^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Jeśli wiemy, że:

$${}_t q_x^{(\tau)} = 1 - {}_t p_x^{(\tau)},$$

prawdziwe są wzory:

$$q_x^{(j)} = {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)}. \quad (30)$$

$$\mu_x^{(j)} = \frac{q_x^{(j)}}{{}_t p_x^{(\tau)}} = \frac{q_x^{(j)}}{1 - t q_x^{(\tau)}}. \quad (31)$$

5. Przykłady zastosowań dekrimentów w kalkulacji składek w ubezpieczeniach na życie

Do kalkulacji jednorazowej składki netto wykorzystujemy znane wzory z matematyki aktuarialnej.

Rozważmy ubezpieczenie okresowe płatne w momencie śmierci dla osoby w wieku (x) ubezpieczonej na n lat na sumę ubezpieczenia 1 zł.

Po skorzystaniu ze wzoru (17) mamy:

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{(j)} = \int_0^n v^t {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} dt,$$

gdzie: $\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{(j)}$ – jednorazowa składka netto dla ubezpieczenia na życie podlegających j -tej przyczynie ubytku.

Podobnie w odniesieniu do ubezpieczenia pełnego płacącego 1 zł dla osoby w wieku x podlegającej wszystkim przyczynom τ w roku śmierci składkę jednorazową możemy napisać jako:

$$A_x^{(\tau)} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t p_x^{(\tau)} q_{x+t}^{(\tau)}.$$

Analogicznie można wyprowadzić wzory na renty życiowe. Dla przykładu dla jednostkowej renty życiowej ciągłej (bezterminowej) płacącej 1 zł dla osoby (x) ze względu na wszystkie przyczyny τ obecną wartość możemy zapisać jako:

$$\bar{a}_{x:\infty}^{(\tau)} = \int_0^{\infty} v^t {}_t p_x^{(\tau)} dt,$$

gdzie: $\tau = 1, 2, \dots, m$.

Analogicznie dla rent życiowych dyskretnych płatnych z góry np. okresowych dla osoby w wieku x ze względu na wszystkie przyczyny τ możemy obecną wartość obliczyć następująco:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(\tau)} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_t p_x^{(\tau)}.$$

Jeśli bazuje się na wzorach z matematyki aktuarialnej, to są możliwe dalsze zastosowania i uogólnienia.

5. Zakończenie

Wprowadzone modele wielokrotnego ubytku są ważną częścią matematyki demograficznej. Są one uogólnieniem jednej zmiennej. Wprowadzone dekrimenty (przyczyny ubytku ludności) i obliczone na tej podstawie prawdopodobieństwa zgonu, przeżycia czy też intensywności wymieralności mają zastosowanie w kalkulacji składek w ubezpieczeniach na życie.

Literatura

- [1] Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbit C.J., *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, 1986.
- [2] Jordan Ch.W. Jr, *Textbook on Life Contingencies*, Society of Actuaries, Chicago, Illinois 1982.

APPLICATION OF DEMOGRAPHICAL MULTIPLE DECREMENT MODELS IN CALCULATION OF LIFE INSURANCE'S PREMIUM

Summary

Multiple decrement models of are important part of demographical mathematics. Decrements (as a cause of decrease of population) and calculated on their basis probabilities of demise, survival or intensity of dying out can be used to calculate life insurance's premium. In this paper an example of using decrements in such a way is presented.