PRACE NAUKOWE AKADEMII EKONOMICZNEJ WE WROCŁAWIU
Nr 1133 — 2006
Inwestycje finansowe i ubezpieczenia
– tendencje światowe a polski rynek

Anna Rutkowska-Ziarko, Lesław Markowski
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

ZMIENNOŚĆ ROZKŁADÓW STÓP ZWROTU PORTFELI MARKOWITZA W PORÓWNANIU Z PORTFELAMI O MINIMALNEJ SEMIWARIANCJI

1.Wstęp

W klasycznym modelu Markowitza [3] ryzyko mierzone jest wariancją stóp zwrotu. Pewną wadą wariancji jako miary ryzyka jest jednakowe traktowanie ujemnych i dodatnich odchyleń od oczekiwanej stopy zwrotu. W rzeczywistości odchylenia ujemne są niepożądane, a dodatnie stwarzają możliwość większego zysku. W celu mierzenia tylko odchyleń ujemnych H. Markowitz zdefiniował semiwariancję [4]. Najważniejszą cechą semiwariancji jest to, że mierzy ona odchylenia tylko poniżej określonego poziomu. Zwolennicy stosowania semiwariancji jako miary ryzyka podkreślają, że lepiej opisuje ona faktyczne preferencje inwestorów niż wariancja [1; 5; 9].

Przeprowadzone badania w ujęciu dynamicznym pokazały, że omawiane modele nie zawsze sprawdzają się w praktyce [6; 11]. Zjawisko to może być spowodowane niestacjonarnością szeregów stóp zwrotu [8]. Opracowanie opisuje dalsze badania nad zmiennością szeregów czasowych stóp zwrotu, przy zastosowaniu analizy statystycznej. Celem artykułu było porównanie rozkładów stóp zwrotu portfeli Markowitza z portfelami o minimalnej semiwariancji, a także przeanalizowanie zmienności tych rozkładów w czasie.

2. Zastosowane modele

W artykule rozważane są dwa alternatywne modele wyboru portfela akcji. Pierwszym z nich jest klasyczny model Markowitza [3], w którym ryzyko mierzone jest wariancją stóp zwrotu portfela. Drugim modelem jest model SEM [4],

w którym miarą ryzyka jest semiwariancja od założonej stopy zwrotu (γ-semiwariancja).

Problem wyznaczenia udziałów akcji w modelu Markowitza sprowadza się do rozwiązania następującego zagadnienia optymalizacyjnego:
zminimalizować funkcję:

$$s_p^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} x_i x_j k_{ij}\,, \tag{1}$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = 1\,, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \overline{z}_i \geq \gamma\,, \tag{3}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1,\ldots,n\,, \tag{4}$$

gdzie: s_p^2 – wariancja stóp zwrotu portfela akcji; γ – określona z góry stopa zwrotu dla całego portfela, przy założeniu $\gamma \leq \max \overline{z}_i$; $\overline{z}_i$ – średnia stopa zwrotu i-tej akcji; x_i – udział wartościowy i-tej akcji w portfelu; k_{ij} – kowariancja stóp zwrotu i-tej i j-tej akcji.

Model wyboru portfela SEM jest podobny do klasycznego modelu Markowitza. Jedyna różnica polega na tym, że minimalizowana jest inna miara ryzyka, a mianowicie γ-semiwariancja stopy zwrotu portfela akcji ($ds_p^2(\gamma)$). W modelu Markowitza za ryzykowne uznaje się odchylenia zarówno poniżej średniej stopy zwrotu, jak i powyżej średniej stopy zwrotu. W modelu SEM ryzyko jest związane jedynie z wystąpieniem stóp zwrotu niższych niż stopa zwrotu (γ) założona przez inwestora. Problem wyznaczenia udziałów akcji w modelu SEM sprowadza się do rozwiązania następującego zagadnienia optymalizacyjnego:
zminimalizować γ-semiwariancję portfela:

$$ds_p^2(\gamma) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} x_i x_j d_{ij}(\gamma)\,, \tag{5}$$

przy ograniczeniach (2)-(4),
gdzie:

$$d_{ij}(\gamma) = \frac{1}{m-1}\sum_{t=1}^{m} d_{ijt}(\gamma)\,, \tag{6}$$

$$d_{ijt}(\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{dla } z_{pt} \geq \gamma \\ (z_{it}-\gamma)(z_{jt}-\gamma) & \text{dla } z_{pt} < \gamma \end{cases}\,, \tag{7}$$

$d_{ij}(\gamma)$ – semikowariancja od założonej stopy zwrotu; m – liczba jednostek czasowych, w których rejestrowane są stopy zwrotu akcji z_{it}, $t = 1,2,\cdots,m$; z_{pt} – stopa zwrotu portfela w momencie t.

Szczegółowo zagadnienie budowy portfela SEM opisano w pracy [8].

3. Wyniki badania

Badanie objęło 70 największych i najbardziej płynnych spółek giełdowych nieprzerwanie notowanych w całym okresie badawczym, tj. od 1 stycznia 2000 do 31 grudnia 2005. Analiza portfelowa ze względu na czasochłonność obliczeń oraz małą elastyczność i płynność portfela z reguły dotyczy inwestycji długookresowych [10]. Z tego względu zaproponowano wykorzystanie kwartalnych stóp zwrotu badanych walorów oraz zbudowanych z nich portfeli. Stopy zwrotu wyznaczono jako względne przyrosty cen akcji; dla uproszczenia rozważań pominięto tu wpływ dywidendy na stopy zwrotu:

$$z_{it} = \frac{n_{i,t+s} - n_{it}}{n_{it}} 100\%, \tag{8}$$

gdzie: s – długość okresu inwestycyjnego wyrażona w dniach; n_{it} – wartość notowania i-tego aktywu w momencie t,; $n_{i,t+s}$ – wartość notowania i-tego aktywu po s dniach inwestowania rozpoczętego w momencie t.

Liczba jednostek czasowych (m), w których rejestrowane są stopy zwrotu, zależy od liczby notowań i długości okresu inwestycyjnego:

$$m = n - s, \tag{9}$$

gdzie n jest liczbą notowań.

Okres badawczy został podzielony na dwie trzyletnie podpróby (2000-2002; 2003-2005), z których każda zawierała 721 kwartalnych stóp zwrotu. Na ich podstawie zbadano istotność zmian rozkładów stóp zwrotu rozważanych portfeli. W tym celu posłużono się testem zgodności Kołmogorowa-Smirnowa (K-S) dla dwóch prób, którego wyniki prezentuje tab. 1.

Dla wszystkich portfeli wartości obliczone statystyki testu K-S przekraczają znacznie wartość krytyczną (α = 0,01). Dla portfeli SEM zmienność rozkładów była większa, na co wskazują większe wartości statystyk testu K-S. Różnice te są najbardziej widoczne dla niskich założonych stóp zwrotu. Dla niskich założonych stóp zwrotu portfele SEM różniły się znacznie składem od portfeli Markowitza, natomiast w miarę wzrostu założonej stopy zwrotu portfele SEM i portfele Markowitza miały coraz bardziej zbliżone składy. Założenie wysokiej stopy zwrotu ogranicza wybór tylko do akcji najbardziej zyskownych spółek giełdowych.

Tabela 1. Test Kołmogorowa-Smirnowa istotności różnic między rozkładami stóp zwrotu portfeli w okresach 2000-2002 i 2003-2005

γ	Typ portfela	Wartość statystyki testu K-S
1	Markowitza	2,553 (p<0,001)
1	SEM	8,082 (p<0,001)
5	Markowitza	2,867 (p<0,001)
5	SEM	8,611 (p<0,001)
10	Markowitza	7,366 (p<0,001)
10	SEM	8,847 (p<0,001)
15	Markowitza	10,025 (p<0,001)
15	SEM	10,025 (p<0,001)
20	Markowitza i SEM	7,556 (p<0,001)

Źródło: obliczenia własne.

Zmienność w czasie rozkładów rozważanych portfeli wskazuje, iż portfele efektywne w jednym okresie nie będą efektywne w okresie następnym. Budowa portfeli na podstawie zaproponowanych modeli ma uzasadnienie, jeśli się przyjmie założenie o działaniu inwestora w warunkach ryzyka, czyli – że inwestorzy znają rozkłady stóp zwrotu. Zmienność rozkładu w czasie powoduje natomiast, że inwestor działa w warunkach zbliżonych bardziej do warunków niepewności niż do warunków ryzyka.

Kolejnym etapem badań było poszukiwanie przyczyn zmienności rozkładów. W tym celu porównano podstawowe parametry rozkładu dla obydwu podrób oraz dla całego okresu badawczego. Zbadano również normalność rozkładów stóp zwrotu testem Kołmogorowa-Smirnowa dla jednej próby, co zestawia tab. 2.

Średnia stopa zwrotu ($\overline{z}_p$), minimum oraz maksimum dla wszystkich portfeli są wyższe w drugiej podpróbie niż w pierwszej[1]. Różnice te rosną w miarę wzrostu założonej stopy zwrotu γ oraz przyjmują większe wartości dla portfeli SEM niż dla portfeli Markowitza. Jednoczenie portfele SEM mają wyższe średnie stopy zwrotu, minima oraz maksima od portfeli Markowitza. Ze względu na te parametry rozkładu portfele SEM należy uznać za lepsze od portfeli Markowitza.

Największe wartości rozstępu obserwowane są dla całego okresu badawczego, gdyż w nim zawierają się skrajne wartości dla obydwu podprób. W podokresie 2003-2005 rozstęp jest znacznie większy niż w okresie 2000-2002. Wartości wariancji są najwyższe dla drugiej podpróby, natomiast semiwariancje są największe dla podpróby pierwszej. Portfele SEM są bezpieczniejsze (niższa γ-semiwariancja). Portfele Markowitza z założenia mają minimalną wariancję, jednak dla pierwszej podpróby istnieją portfele SEM o mniejszej wariancji niż portfele Markowitza (γ = 1, 10, 15%). Oznacza to, że w portfelach SEM w porównaniu z portfelami Markowitza występuje większe rozproszenie stopy zwrotu wokół średniej. Jedno-

[1] Pierwszy podokres badawczy (2000-2002) charakteryzował się znacznym spadkiem głównych indeksów giełdowych, natomiast w roku 2004 rozpoczął się okres hossy na GPW w Warszawie.

Tabela 2. Wybrane charakterystyki rozkładów stóp zwrotu portfeli

γ	Typ portfela	Okres badawczy	$\overline{z}_p$	Min.	Maks.	Rozstęp	s_p^2	$ds_p^2(\gamma)$	Skośność	Test K-S
1	**Markowitza**	**2000-2005**	**4,32**	**-11,67**	**27,81**	**39,47**	**30,84**	**4,06**	**0,40**	**0,027 (p>0,20)**
		2000-2002	3,37	-11,67	21,40	33,07	27,56	5,86	0,04	0,049 (p<0,10)
		2003-2005	5,27	-8,75	27,81	36,56	32,36	2,26	0,65	0,078 (p<0,01)
1	SEM	**2000-2005**	**9,41**	**-5,46**	**46,89**	**52,35**	**96,70**	**0,71**	**1,21**	**0,134 (p<0,01)**
		2000-2002	5,11	-5,46	24,33	29,79	24,04	1,06	0,54	0,082 (p<0,01)
		2003-2005	13,72	-3,79	46,89	50,68	132,34	0,36	0,55	0,145 (p<0,01)
5	Markowitza	**2000-2005**	**5,00**	**-9,53**	**27,47**	**37,00**	**31,73**	**14,31**	**0,40**	**0,034 (p<0,10)**
		2000-2002	3,92	-9,53	20,76	30,30	26,75	18,94	0,00	0,057 (p<0,05)
		2003-2005	6,07	-8,31	27,47	35,78	34,43	9,70	0,59	0,084 (p<0,01)
5	SEM	**2000-2005**	**10,34**	**-7,31**	**44,57**	**51,88**	**101,38**	**6,49**	**1,02**	**0,122 (p<0,01)**
		2000-2002	5,51	-7,31	23,83	31,14	27,52	10,30	0,30	0,065 (p<0,01)
		2003-2005	15,17	-3,39	44,57	47,96	128,73	2,69	0,40	0,121 (p<0,01)
10	Markowitza	**2000-2005**	**10,00**	**-8,18**	**38,23**	**46,41**	**81,19**	**32,87**	**0,68**	**0,110 (p<0,01)**
		2000-2002	6,36	-8,18	20,52	28,71	37,41	45,14	-0,02	0,060 (p<0,01)
		2003-2005	13,63	-2,63	38,23	40,86	98,59	20,65	0,34	0,086 (p<0,01)
10	SEM	**2000-2005**	**11,19**	**-8,47**	**48,30**	**56,77**	**115,73**	**30,21**	**1,00**	**0,110 (p<0,01)**
		2000-2002	5,94	-8,47	21,73	30,20	32,29	44,58	0,04	0,042 (p<0,20)
		2003-2005	16,43	-1,88	48,30	50,17	144,24	15,87	0,42	0,102 (p<0,01)
15	Markowitza	**2000-2005**	**15,00**	**-20,10**	**77,34**	**97,44**	**258,54**	**93,28**	**0,97**	**0,086 (p<0,01)**
		2000-2002	6,37	-20,10	41,19	61,29	89,58	154,46	0,20	0,042 (p<0,20)
		2003-2005	23,62	-1,17	77,34	78,51	279,00	32,24	0,64	0,072 (p<0,01)
15	SEM	**2000-2005**	**15,00**	**-18,60**	**80,18**	**98,78**	**273,25**	**90,82**	**1,13**	**0,122 (p<0,01)**
		2000-2002	6,25	-18,60	37,31	55,91	75,86	146,05	0,09	0,058 (p<0,01)
		2003-2005	23,74	-2,64	80,18	82,81	318,00	35,73	0,67	0,098 (p<0,01)
20	Markowitza i SEM	**2000-2005**	**20,00**	**-30,09**	**146,28**	**176,37**	**866,99**	**239,9**	**1,63**	**0,105 (p<0,01)**
		2000-2002	6,09	-30,09	46,18	76,26	192,45	369,25	0,22	0,056 (p<0,01)
		2003-2005	33,90	-12,57	146,28	158,85	1155,70	110,88	1,09	0,132 (p<0,01)

Źródło: obliczenia własne.

cześnie mniejsze są odchylenia poniżej, a większe powyżej założonej stopy zwrotu. Z tego względu portfele SEM należy uznać za lepsze dla inwestorów, ponieważ przy mniejszym ryzyku uzyskania stopy zwrotu niższej od założonej stwarzają jednocześnie szansę na wysokie stopy zwrotu. Wszystkie portfele są prawostronnie skośne bądź w przybliżeniu symetryczne. W większości przypadków portfele SEM są bardziej prawoskośne od portfeli Markowitza. Prawostronna asymetria jest pożądana przez inwestorów [2], więc będą oni preferowali portfele SEM. Dla prawie wszystkich portfeli rozkłady stóp zwrotu istotnie odbiegają od rozkładu normalnego. Odstępstwo od rozkładu normalnego jest większe dla portfeli SEM niż dla portfeli Markowitza. Jednocześnie dla wszystkich typów portfeli rozkłady w drugiej podpróbie są bardziej niezgodne z rozkładem normalnym niż w pierwszej.

4. Podsumowanie

Badania wykazały, że zbudowane portfele charakteryzowały się dużą zmiennością rozkładów stóp zwrotu. Jest to zjawisko niekorzystne dla inwestora, gdyż portfele efektywne zbudowane na podstawie danych historycznych mogą nie zachowywać swoich własności w przyszłości (pomiędzy kupnem a sprzedażą). Rozważając wybrane parametry rozkładu, zauważamy, że portfele SEM były korzystniejsze dla inwestorów od portfeli Markowitza, wykazywały jednak większą niestabilność rozkładów w czasie.

Literatura

[1] Hogan W., Warren J., *Toward the Development of an Equilibrium Capital-Market Module Based on Semivariance*, „Journal of Finance and Quantitative Analysis", January 1974.

[2] Jajuga K., Jajuga T., *Inwestycje*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998.

[3] Markowitz H., *Portfolio Selection*, „Journal of Finance"1952 nr 7, s. 77-91.

[4] Markowitz H., *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley and Sons, New York 1959.

[5] Ogryczak W., Ruszczyński A., *On Consistency of Stochastic Dominance and Mean-Semideviation Models*, „Mathematical Programming", Ser. B vol. 89, Springer Verlag KG, 2001, s. 217-232.

[6] Rutkowska-Ziarko A., *Ocena przydatności modelu wyboru portfela w oparciu o semiwariancję w porównaniu z klasycznym modelem Markowitza*. „Przegląd Statystyczny" 2004 nr 3.

[7] Rutkowska-Ziarko A., Markowski L., *Analiza portfelowa a problem stacjonarności stóp zwrotu na przykładzie spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1088, *Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek*, AE, Wrocław 2005.

[8] Rutkowska-Ziarko A., *Metody znajdowania portfela efektywnego dla semiwariancji*, Badania Operacyjne i Decyzje, praca w druku.

[9] Sortino F., Satchell S., *Managing Downside Risk in Financial Markets: Theory, Practice and Implementation*, Butterworth – Heinemann, Oxford 2001.

[10] Tarczyński W., *Fundamentalny portfel papierów wartościowych*, PWE, Warszawa 2002.

[11] Wdowiński P., Wrzesiński D., *Analiza dynamiczna portfeli akcji*, „Acta Universitatis Lodziensis Folia Oeconomica" 2003 nr 166.

TIME VARIABILITY OF DISTRIBUTIONS OF MARKOWITZ'S PORTFOLIOS RETURNS IN COMPARISON WITH MINIMUM SEMI-VARIANCE PORTFOLIOS RETURNS

Summary

The research indicates efficient portfolios using semi-variance as a risk measure and Markowitz's ones. Changeability of distribution of Markowitz's portfolios returns and minimum Semi-variance portfolios were compared. The data used in the analysis refer to the period from 02.01.2000 to 30.12.2005. The selected, basic parameters of returns distribution were calculated. Generally the portfolios returns are non-normally distributed. The analysis of empirical results suggests that target semi-variance is a more appropriate measure of risk than variance.