

Paweł Rokita

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

WYKORZYSTANIE KONCEPCJI ASYMPTOTYCZNEJ NIEZALEŻNOŚCI W OGONIE ROZKŁADU DO ANALIZY ZALEŻNOŚCI EKSTREMALNEJ INDEKSÓW WYBRANYCH RYNKÓW AKCJI

1. Wstęp

Artykuł przedstawia wyniki badań asymptotycznej niezależności w ogonie dla dwuwymiarowych rozkładów stóp zwrotu. Analizowane są stopy zwrotu z indeksu WIG20 oraz wybranych indeksów światowych rynków akcji. Skupiono się głównie na prezentacji metody testowania asymptotycznej niezależności w ogonie, przy czym zostały wykorzystane rzeczywiste dane rynkowe, a pobocznym celem badań było stwierdzenie, czy w rozpatrywanych okresach występowała zależność między wartościami ekstremalnymi na rynku akcji w Polsce i na rynkach światowych. Szczególną uwagę poświęcono ekstremalnym stratom. Za miarę zależności ekstremalnej przyjęto współczynnik zależności w ogonie (*tail dependence coefficient* – TDC), wywodzący się z koncepcji zależności asymptotycznej.

Testowanie niezależności w ogonie jest etapem badań nad zależnością ekstremalną, które mają z kolei duże znaczenie praktyczne, zwłaszcza dla pomiaru ryzyka oraz dywersyfikacji portfela. Należy podkreślić, że ten etap analizy nie powinien być pomijany i powinien poprzedzać ewentualne próby pomiaru zależności ekstremalnej. Wynika to z tego, iż estymacja współczynnika zależności w ogonie odbywa się przy założeniu jego niezerowości. Gdyby był on w rzeczywistości zerowy, jego estymacja mogłaby prowadzić do całkowicie błędnych wniosków (por. [6]). Problem samej estymacji parametru TDC nie będzie tu dalej rozwijany. Więcej na ten temat można znaleźć w takich pozycjach, jak [6; 12]. Badania przepro-

wadzone na potrzeby tego artykułu koncentrują się na weryfikacji hipotezy o braku asymptotycznej zależności w ogonie (hipotezy mówiącej, że współczynnik zależności w ogonie jest równy zeru). Z punktu widzenia analizy zależności ekstremalnej na rynku kapitałowym podstawową informacją jest bowiem to, czy zależność ekstremalna w ogóle występuje, czy też nie.

Artykuł składa się z dwóch części i podsumowania. Część pierwsza stanowi wprowadzenie teoretyczne i jest poświęcona prezentacji zastosowanej metody badań. W części drugiej omówiono przeprowadzone badania i przedstawiono ich wyniki.

2. Zależność ekstremalna. Testowanie asymptotycznej niezależności w ogonie rozkładu

Przez zależność ekstremalną będziemy rozumieć zależność w ogonie rozkładu wielowymiarowego i definiować ją jako zależność między wartościami przekraczającymi pewien wysoki (niski) próg – kwantyl odpowiadający pewnemu wysokiemu (niskiemu) prawdopodobieństwu.

Definicję tę można sformalizować na różne sposoby. Tutaj wykorzystamy do tego celu koncepcję zależności asymptotycznej. Tak rozumianą zależność w ogonie można opisać następująco:

Definicja 1. Zależność (asymptotyczna) w ogonie.

Niech $X = (X_1, X_2)^T$ będzie dwuwymiarowym wektorem losowym. Zależność w prawym ogonie występuje dla X , jeżeli zachodzi:

$$\lambda_u \equiv \lim_{p_u \rightarrow 1^-} P(X_1 > F_1^{-1}(p_u) | X_2 > F_2^{-1}(p_u)) > 0. \quad (1)$$

Z kolei współczynnik zależności w ogonie definiuje się jako:

Definicja 2. Współczynnik zależności w ogonie (TDC).

Definicja 2.1. Współczynnik zależności w prawym ogonie (*upper* TDC):

$$\lambda_u = \lim_{p_u \rightarrow 1^-} P(X_1 > F_1^{-1}(p_u) | X_2 > F_2^{-1}(p_u)). \quad (2)$$

Definicja 2.2. Współczynnik zależności w lewym ogonie (*lower* TDC):

$$\lambda_l = \lim_{p_u \rightarrow 0^+} P(X_1 \leq F_1^{-1}(p_u) | X_2 \leq F_2^{-1}(p_u)). \quad (3)$$

Ponieważ, jak już to zostało wspomniane, jednym z najważniejszych elementów analizy zależności ekstremalnej jest stwierdzenie, czy ona w ogóle występuje, warto poświęcić uwagę technikom weryfikacji hipotezy o braku zależności w ogonie.

W literaturze wymieniane są zwykle trzy sposoby testowania asymptotycznej niezależności w ogonie. Są to:

- testowanie asymptotycznej niezależności w ogonie przy wykorzystaniu modelu przekroczeń (*peaks over threshold*– POT) – por. [8],
- testowanie asymptotycznej niezależności w ogonie przy wykorzystaniu modelu procesu punktowego (*point process methods*) – por. np.: [2; 3; 8],
- weryfikacja hipotezy o tym, że struktura zależności jest zgodna z Gaussowską funkcją powiązań względem hipotezy o pewnej wybranej Archimedesowskiej funkcji powiązań (*Archimedean copula function*) posiadającej własność zależności w ogonie – por. np. [5].

Tutaj została wykorzystana metoda oparta na modelu przekroczeń (POT). Jest ona stosunkowo prosta, a jednocześnie nie wymaga specjalnie mocnych założeń.

Rozpatrywany test asymptotycznej niezależności w ogonie polega na weryfikacji hipotezy:

$$H_0: \lambda = 0 \quad (4)$$

względem hipotezy alternatywnej:

$$H_1: \lambda \in (0, 1], \quad (5)$$

gdzie λ to współczynnik zależności w ogonie opisany równaniem (2) lub (3).

Zastosowana metoda nie jest jednak testem parametrycznym istotności. Prowadzona tu jest raczej estymacja innego parametru, zwanego dalej parametrem η ($\eta \in [1/2, 1]$), takiego że, jeśli przyjmuje on wartość mniejszą od 1, wówczas parametr λ przyjmuje wartość 0. Zastosowano tu zabieg techniczny polegający na pewnym odwzorowaniu przedziału dopuszczalnych wartości parametru λ na przedział dopuszczalnych wartości parametru η . Gdy parametr λ ma w rzeczywistości wartość 0, to osiąga tym samym dolne ograniczenia swojego przedziału. Estymacja parametru λ mogłaby nastręczać w takiej sytuacji poważnych trudności. Jednak parametr η przyjmuje wtedy wartość z przedziału $(1/2, 1)$ i jego estymacja jest dużo łatwiejsza.

Przyjmijmy stosunkowo słabe założenie, że badana zmienna dwuwymiarowa należy do obszaru przyciągania wielowymiarowego rozkładu wartości ekstremalnych. Jest ono potrzebne, ponieważ w dalszej części zostaną wykorzystane asymptotyczne własności ogona takich rozkładów.

Badanie asymptotycznej niezależności w ogonie przeprowadzone zostało w 6 etapach, opisanych w załączniku 1. Koncepcję leżącą u podstaw przedstawionej tam procedury można krótko opisać następująco. Problem wielowymiarowy (tutaj – dwuwymiarowy) sprowadzany zostaje do postaci jednowymiarowej. Wykorzystując dwuwymiarową zmienną Z , poddaną wcześniej konwersji w taki sposób, aby jednowymiarowy rozkład brzegowy był rozkładem Frécheta, tworzy się zagregowaną zmienną strukturalną T . Zmienna strukturalna spełnia równanie (por. [2, s. 23]):

$$P(T > r) = P(Z_1 > r, Z_2 > r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} L(r)r^{-1/\eta},$$

gdzie L jest wolno zmienną funkcją:

$$\forall t > 0 \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{L(tr)}{L(r)} = 1$$

Dla otrzymanej zmiennej jednowymiarowej (mającej tu znaczenie tylko techniczne) przeprowadza się estymację parametru η . Wartość tego parametru jest dalej wykorzystywana we wnioskowaniu na temat ogona rozkładu dwuwymiarowego.

Jednak nawet, jeśli zostanie odrzucona hipoteza o asymptotycznej niezależności w ogniu, oszacowanie tego parametru nie dostarcza informacji o sile zależności. Podejście to nie jest więc metodą pomiaru zależności ekstremalnej. Służy jedynie do weryfikacji hipotezy o asymptotycznej niezależności.

Rozpatrywany będzie prawy ogon¹. Zakładamy przy tym, że analizowane są straty względne (stopy zwrotu przemnożone przez -1).

3. Testowanie zależności ekstremalnej między portfelami naśladującymi indeksy wybranych rynków akcji – badania empiryczne

Badano występowanie asymptotycznej niezależności w ogniu dla indeksu WIG20 i 4 analogicznych indeksów wybranych giełd światowych. Były to indeksy: DAX30, FTSE100, S&P500 i NIKKEI300. Rozpatrywano ogony rozkładów dwuwymiarowych. Analizowaną cechą była dzienna logarytmiczna strata względna (logarytmiczna stopa zwrotu przemnożona przez -1). Wykorzystano pary:

- WIG20 i wybrany inny indeks nie opóźniony,
- WIG20 i wybrany inny indeks opóźniony o 1 dzień roboczy,
- WIG20 i wybrany inny indeks opóźniony o 2 dni robocze.

Na potrzeby estymacji parametru η za próg przyjęto kwantyl odpowiadający prawdopodobieństwu 0,98. Estymacja została przeprowadzona metodą największej wiarygodności.

Tabele 1, 2 i 3 w Załączniku 2 przedstawiają wyniki badań. Badany okres podzielono na trzy podokresy o równej długości. Dla każdej tak utworzonej podpróby powtórzono tę samą procedurę. Następnie wykorzystano dane pochodzące z całego okresu (por. tab. 4, Załącznik 2). Wyniki przedstawione w tabelach 1, 2, 3 i 4 (Załącznik 2) wskazują, iż uzyskiwane wartości estymatora parametru η są wrażliwe na wybór okresu, z którego pochodzą dane. Natomiast zastosowanie opóźnienia jedno- czy dwudniowego lub rezygnacja z opóźnienia nie miały wpływu na wynik.

¹ Podobna analiza dla lewego ogona może być przeprowadzona w ten sam sposób, po uprzednim przemnożeniu wszystkich obserwacji przez -1 .

Spostrzeżenie to wydaje się być istotne w odniesieniu do tych przypadków, w których hipoteza o asymptotycznej niezależności w ogonie została odrzucona. Dalsze badania mogłyby polegać m.in. na sprawdzeniu, przy jak dużym opóźnieniu asymptotyczna niezależność w ogonie przestaje być odrzucana.

W jednym z rozpatrywanych podokresów odrzucona została hipoteza o asymptotycznej niezależności w ogonie między indeksem WIG20 a NIKKEI100. Jest to dosyć zaskakujący wynik, zważywszy, że nie było podstaw do odrzucenia hipotezy o niezależności (asymptotycznej) między ekstremalnymi stratami z indeksu WIG20 i indeksów rynków europejskich i amerykańskich. Jak widać, uzyskane wyniki silnie zależą od wybranego podokresu. Gdy próba nie była dzielona na 3 podpróby (podokresy), wyniki były znacząco różne. Odrzucona została wówczas hipoteza o asymptotycznej niezależności w ogonie między indeksami WIG20 i FTSE100. Wyniki te przedstawia tab. 4 (Załącznik 2). Przy opóźnieniach wynoszących 1 dzień roboczy i 2 dni robocze wyniki były identyczne, dlatego nie zostały tu zamieszczone.

4. Podsumowanie

Badanie zależności między wartościami ekstremalnymi stóp zwrotu może być, przynajmniej w teorii, przydatnym narzędziem wspomagającym analizę ryzyka. Poprawia ono jakość oceny dywersyfikacji portfela. Tym samym może pomóc uniknąć rzadkich, ale bardzo wysokich strat na portfelach, które w typowych warunkach rynkowych wydają się być dobrze zdywersyfikowane.

Przeprowadzone badania pokazują jednak, że do wyników takiej analizy należy podchodzić ostrożnie. Duża wrażliwość estymatora parametru η na wybór okresu, z którego pochodzą dane, sprawia, że stosowanie modelu statycznego musi budzić wątpliwości. Nie ma żadnych podstaw, żeby zakładać ergodyczność współczynnika zależności w ogonie albo parametru η dwuwymiarowego procesu stopy zwrotu. Jednym z kierunków dalszych badań mogłaby być próba rozpoznania własności parametru η dla dwuwymiarowych szeregów czasowych stóp zwrotu i opracowanie dla niego modelu dynamicznego.

Inną, znacznie łatwiejszą kwestią jest pamięć rynku o zdarzeniach ekstremalnych z innych rynków. Odrzucono np. asymptotyczną niezależność w ogonie między stratą względną z indeksu WIG20 i indeksu FTSE100, a także indeksu FTSE100 opóźnionego o 1 dzień roboczy i 2 dni robocze. Interesujące wydaje się pytanie, przy jak dużym opóźnieniu hipoteza o asymptotycznej niezależności w ogonie nie byłaby już odrzucana.

Na koniec warto wspomnieć, że podobne badania zostały przeprowadzone dla górnego ogona dwuwymiarowego rozkładu stóp zwrotu. Ze względu na ograniczoną objętość tego artykułu, ich wyniki nie zostały przytoczone. Na podkreślenie zasługuje jednak to, iż w żadnym z rozpatrywanych okresów nie odrzucono hipotezy o asymptotycznej niezależności w ogonie. Zważywszy na przypadki odrzucenia tej hipotezy dla dolnego ogona, może to być przesłanka przemawiająca za asymetrią między górnym i dolnym ogonem wielowymiarowych rozkładów stóp zwrotu. Byłoby to zgodne z przytaczanymi w literaturze obserwacjami innych autorów.

Załącznik 1.

Niech będzie dany dwuwymiarowy rozkład:

$$F(y_1, y_2)$$

o dystrybuantach brzegowych:

$$F_1(y_1), F_2(y_2).$$

Jednowymiarowe zmienne brzegowe oznaczmy symbolami Y_1 i Y_2 .

Zakładamy, że zmienna F należy do obszaru przyciągania wielowymiarowego rozkładu wartości ekstremalnych.

Etap 1. Wyznaczenie (odpowiednio wysokich) progów u_1 i u_2 dla jednowymiarowych rozkładów brzegowych. W tym celu stosowane są metody jednowymiarowej teorii wartości ekstremalnych. Należą do nich m.in. techniki ustalania progu, powyżej którego rozkład ogona uznaje się za równy w przybliżeniu rozkładowi granicznemu według twierdzenia Pickandsa-Balkema-de Haana².

Etap 2. Transformowanie zmiennych brzegowych Y_1 i Y_2 na zmienne Z_1 i Z_2 o standardowym rozkładzie Fréchéta:

$$Z_j = -1/\log F_j(Y_j), \quad (6)$$

czyli tak, aby zachodziło:

$$P(Z_j \leq z) = \exp(-1/z), \quad 0 < z < \infty. \quad (7)$$

Wówczas progi u_1 i u_2 zostają transformowane do postaci:

$$r_1 = -1/\log F_1(u_1), \quad (8)$$

$$r_2 = -1/\log F_2(u_2).$$

Oczywiście, jeżeli progi u_1 i u_2 są kwantylami odpowiadającymi temu samemu prawdopodobieństwu p_u , to zachodzi równość:

² Rozkładem granicznym przekroczeń progu jest uogólniony rozkład Pareto. Wybór kwantyla progowego musi stanowić kompromis między dwoma rozbieżnymi kryteriami:

1) jak najwyższy próg (zbieżność co do rozkładu zachodzi bowiem przy prawdopodobieństwie progowym p_u dążącym do 1, przy czym próg u jest określony jako kwantyl odpowiadający temu prawdopodobieństwu, czyli: $u = F_i^{-1}(p_u)$),

2) jak najliczniejsza próba obserwacji przekraczających próg.

$$r_1 = r_2 = r. \quad (9)$$

Po transformacji zachowana zostaje struktura zależności. Dalsza analiza jest prowadzona dla zmiennych transformowanych.

Etap 3. Zakłada się następujący ogólny model łącznego ogona:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(Z_1 > r, Z_2 > r) = L(r)r^{-1/\eta}, \quad (10)$$

gdzie L jest wolno zmienną funkcją:

$$\forall t > 0 \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{L(tr)}{L(r)} = 1, \quad (11)$$

por. [9, s. 178].

Ten sam model ogona wyrażony za pomocą prawdopodobieństwa warunkowego przybiera postać:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(Z_1 > r \mid Z_2 > r) = L(r)r^{1-(1/\eta)}. \quad (12)$$

Niezależność w ogonie występuje, gdy:

$$\eta = \frac{1}{2}, \quad L(r) = 1. \quad (13)$$

Zależność zachodzi, gdy:

$$\eta = 1, \quad L(r) = 1. \quad (14)$$

Model ten można wykorzystać do weryfikacji hipotezy o asymptotycznej niezależności w ogonie.

Asymptotyczna niezależność w ogonie występuje, gdy:

$$\eta < 1. \quad (15)$$

Asymptotyczna zaś zależność zachodzi, jeśli:

$$\eta = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} L(r) \neq 0, \quad (16)$$

por. [9, s. 178, 179].

Jak widać, estymacja współczynnika η pozwala określić, czy występuje asymptotyczna niezależność.

Etap 4. Przejście do modelu jednowymiarowego. Tworzona jest zagregowana zmienna strukturalna T spełniająca równanie:

$$P(T > r) = P(Z_1 > r, Z_2 > r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} L(r)r^{-1/\eta}, \quad (17)$$

por. [2, s. 23].

Dla zmiennej T możliwe jest już zastosowanie klasycznej analizy przekroczeń (POT) wykorzystującej twierdzenia jednowymiarowej teorii wartości ekstremalnych.

Z twierdzenia Pickandsa-Balkema-de Haana otrzymujemy:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} P(T > u + t | T > u) = 1 - GPD = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{t}{\gamma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} & \text{dla } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\gamma}\right) & \text{dla } \xi = 0 \end{cases}, \quad (18)$$

gdzie: $\xi = \eta$, $\gamma = \eta r$

Symbol GPD w powyższym wzorze oznacza dystrybuantę uogólnionego rozkładu Pareto.

Ponieważ jednak $\eta \in [1/2, 1]$, a jednocześnie $\xi = \eta$, nie rozpatrujemy przypadku, gdy $\xi = 0$. Otrzymujemy więc:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} P(T > u + t | T > u) = 1 - \left(1 + \xi \frac{t}{\gamma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, \quad (19)$$

gdzie: $\xi = \eta$, $\gamma = \eta r$.

Ogon rozkładu zmiennej losowej T spełnia asymptotyczną równość:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(T > r) = \left(1 + \xi \frac{r - \delta_*}{\gamma_*}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, \quad (20)$$

gdzie: $\delta_* = L^\eta(r)$, $\gamma_* = \eta L^\eta(r)$.

Jednak dla $r > u$ można przyjąć, że δ_* i γ_* są stałe. Dzięki temu uproszczeniu można je estymować, np. metodą największej wiarygodności, jako stałe parametry ogona rozkładu zmiennej T .

Do wyestymowania parametrów ξ , δ_* i γ_* potrzebna jest próba zawierająca realizacje zmiennej T . Załóżmy że dostępne dane, np. historyczne stopy zwrotu lub straty (stopy zwrotu pomnożone przez -1) z akcji dwóch spółek, to realizacje zmiennych losowych Y_1 i Y_2 . Procedurę, w wyniku której otrzymujemy realizacje zmiennej T , można krótko opisać następująco:

- pozyskanie z rynku próby: $\{(Y_{1,k}, Y_{2,k}), k = 1, \dots, m\}$,
- zamiana na próbę: $\{(Z_{1,k}, Z_{2,k}), k = 1, \dots, m\}$, w której obserwacje zarówno $Z_{1,k}$, jak i $Z_{2,k}$ pochodzą ze standardowego rozkładu Fréchéta; dystrybuanty zmiennych Y_1 i Y_2 , potrzebne do przeprowadzenia transformacji na rozkład Fréchéta, można estymować nieparametrycznie, bądź też ich ogony przybliżyć za pomocą uogólnionego rozkładu Pareto (tylko ogony są przedmiotem dalszej analizy),
- tworzenie obserwacji pochodzących z rozkładu zmiennej T :
 $\{T_k = \min(Z_{1,k}, Z_{2,k}), k = 1, \dots, m\}$.

Etap 5. Estymacja parametrów ξ , δ_* i γ_* .

Etap 6. Interpretacja oszacowania parametru ξ . Jeżeli estymator parametru ξ przyjmuje wartość niższą od jedności, to tym samym zachodzi:

$$\eta < 1,$$

co oznacza, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o asymptotycznej niezależności w ogonie.

W przeciwnym razie hipotezę tę należy odrzucić. Zasadne jest wówczas szacowanie współczynnika zależności w ogonie.

Załącznik 2.

Tabela 1. Weryfikacja hipotezy o asymptotycznej niezależności w ogonie dla dwuwymiarowego rozkładu względnych strat logarymicznych – opóźnienie: 0

Liczba par:	4	Opóźn.:	0	Liczba prób:	3
Para: [WIG20, DAX30]					
Czy odrz.	<i>eta</i>	<i>ksi_T</i>	<i>gamma_T</i>	próg (<i>r</i>)	odch. stand. <i>ksi</i>
-	-	-1,390	7,289	5,435	inf
?	-	5,352	7,631	18,137	2,287
?	-	3,576	23,168	30,829	1,577
Para: [WIG20, FTSE100]					
Czy odrz.	<i>eta</i>	<i>ksi_T</i>	<i>gamma_T</i>	próg (<i>r</i>)	odch. stand. <i>ksi</i>
?	-	2,097	12477,748	1886,140	1,648
?	-	5,489	7,500	18,137	2,332
?	-	3,576	23,168	30,829	1,577
Para: [WIG20, S&P500]					
Czy odrz.	<i>eta</i>	<i>ksi_T</i>	<i>gamma_T</i>	próg (<i>r</i>)	odch. stand. <i>ksi</i>
-	-	-	-	30,829	-
FAŁSZ	0,663	0,663	3,681	4,977	0,612
FAŁSZ	0,678	0,678	5,360	15,521	0,562
Para: [WIG20, NIKKEI300]					
Czy odrz.	<i>eta</i>	<i>ksi_T</i>	<i>gamma_T</i>	próg (<i>r</i>)	odch. stand. <i>ksi</i>
PRAWDA	1	1,076	17,490	24,580	0,767
?	-	5,489	7,500	18,137	2,332
-	-	-0,236	30,234	30,829	0,422

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 2. Weryfikacja hipotezy o asymptotycznej niezależności w ogonie dla dwuwymiarowego rozkładu względnych strat logarymicznych – opóźnienie: 1 dzień roboczy (względem daty indeksu WIG20)

Liczba par:	4	Opóźn.:	1	Liczba prób:	3
Para: [WIG20, DAX30]					
Czy odrz.	<i>eta</i>	<i>ksi_T</i>	<i>gamma_T</i>	próg (<i>r</i>)	odch. stand. <i>ksi</i>
-	-	-1,000	5,243	5,435	inf
?	-	5,352	7,631	18,137	2,287
?	-	3,576	23,168	30,829	1,577
Para: [WIG20, FTSE100]					
Czy odrz.	<i>eta</i>	<i>ksi_T</i>	<i>gamma_T</i>	próg (<i>r</i>)	odch. stand. <i>ksi</i>
?	-	2,097	12477,748	1886,140	1,648
?	-	5,489	7,500	18,137	2,332
?	-	3,576	23,168	30,829	1,577

Para: [WIG20, S&P500]					
Czy odrz.	<i>eta</i>	<i>ksi_T</i>	<i>gamma_T</i>	próg (<i>r</i>)	odch. stand. <i>ksi</i>
-	-	-	-	30,829	-
FAŁSZ	0,663	0,663	3,681	4,977	0,612
FAŁSZ	0,678	0,678	5,360	15,521	0,562
Para: [WIG20, NIKKEI300]					
Czy odrz.	<i>eta</i>	<i>ksi_T</i>	<i>gamma_T</i>	próg (<i>r</i>)	odch. stand. <i>ksi</i>
PRAWDA	1	1,076	17,490	24,580	0,767
?	-	5,489	7,500	18,137	2,332
-	-	-0,236	30,234	30,829	0,422

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 3. Weryfikacja hipotezy o asymptotycznej niezależności w ogonie dla dwuwymiarowego rozkładu względnych strat logarytmicznych – opóźnienie: 2 dni robocze (względem daty indeksu WIG20)

Liczba par: 4 Opóźn.: 2 Liczba prób: 2

Para: [WIG20, DAX30]					
Czy odrz.	<i>eta</i>	<i>ksi_T</i>	<i>gamma_T</i>	próg (<i>r</i>)	odch. stand. <i>ksi</i>
?	-	5,352	7,631	18,137	2,287
?	-	3,576	23,168	30,829	1,577
Para: [WIG20, FTSE100]					
Czy odrz.	<i>eta</i>	<i>ksi_T</i>	<i>gamma_T</i>	próg (<i>r</i>)	odch. stand. <i>ksi</i>
?	-	5,489	7,500	18,137	2,332
?	-	2,305	31,603	30,829	1,222
Para: [WIG20, S&P500]					
Czy odrz.	<i>eta</i>	<i>ksi_T</i>	<i>gamma_T</i>	próg (<i>r</i>)	odch. stand. <i>ksi</i>
FAŁSZ	0,663	0,663	3,681	4,977	0,612
FAŁSZ	0,678	0,678	5,360	15,521	0,562
Para: [WIG20, NIKKEI300]					
Czy odrz.	<i>eta</i>	<i>ksi_T</i>	<i>gamma_T</i>	próg (<i>r</i>)	odch. stand. <i>ksi</i>
?	-	5,489	7,500	18,137	2,332
-	-	-0,236	30,234	30,829	0,422

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 4. Cała próba – weryfikacja hipotezy o asymptotycznej niezależności w ogonie dla dwuwymiarowego rozkładu względnych strat logarytmicznych – opóźnienie: 0.

Liczba par: 4 Opóźn.: 2 Liczba prób: 2

Para: [WIG20, DAX30]					
Czy odrz.	<i>eta</i>	<i>ksi_T</i>	<i>gamma_T</i>	próg (<i>r</i>)	odch. stand. <i>ksi</i>
FAŁSZ	0,522	0,522	5,948	8,185	0,316
Para: [WIG20, FTSE100]					
Czy odrz.	<i>eta</i>	<i>ksi_T</i>	<i>gamma_T</i>	próg (<i>r</i>)	odch. stand. <i>ksi</i>
PRAWDA	1	1,003	6,321	8,185	0,439
Para: [WIG20, S&P500]					
Czy odrz.	<i>eta</i>	<i>ksi_T</i>	<i>gamma_T</i>	próg (<i>r</i>)	odch. stand. <i>ksi</i>
-	-	0,146	4,344	8,185	0,228
Para: [WIG20, NIKKEI300]					
Czy odrz.	<i>eta</i>	<i>ksi_T</i>	<i>gamma_T</i>	próg (<i>r</i>)	odch. stand. <i>ksi</i>
FAŁSZ	0,849	0,849	6,876	8,185	0,429

Źródło: obliczenia własne.

Literatura

- [1] Armstrong M., *Copula Catalogue. Part 1: Bivariate Archimedean Copula*. Maszynopis CERNA, Paryż, Curuscant 2003 (dostępne w Internecie na stronie: www.cerna.ensmp.fr).
- [2] Coles S.G., Tawn J.A., *Statistical Methods for Multivariate Extremes: An Application to Structural Design*, „Applied Statistics” 1994 vol. 43, nr 1, s. 1-48.
- [3] Coles S.G., Tawn J.A., *Modelling Extreme Multivariate Events*, „Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)” 1991 nr 53/1, s. 377-392.
- [4] Coles S.G., Heffernan J., Tawn J.A., *Dependence Measures for Extreme Value Analyses*, „Extremes” 1999 nr 2, 4 (grudzień 1999), s. 339-365.
- [5] Fortin I., Kuzmics C., *Tail-Dependence in Stock-Return Pairs*, „International Journal of Intelligent Systems in Accounting, Finance & Management” 2002 nr 11, s. 89-107.
- [6] Frahm G., Junker M., Schmidt R., *Estimating the Tail-Dependence Coefficient. Properties and Pitfalls*, maszynopis, CAESAR i London School of Economics 2004.
- [7] Jajuga K., *Zależność w analizie danych – dyskusja nad niektórymi podejściami*, Taksonomia nr 12, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej nr 1076, Wrocław 2005.
- [8] Ledford A.W., Tawn J.A., *Modelling Dependence Within Joint Tail Regions*, „Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)” 1997 nr 59/2, s. 475-499.
- [9] Ledford A.W., Tawn J.A., *Statistics for Near Independence in Multivariate Extreme Values*, „Biometrika” 1996 nr 83/1, s. 169-187.
- [10] Schmidt R., *Tail Dependence*, [w:] *Statistical Tools in Finance and Insurance*, red. P. Cizek, W. Härdle, R. Weron, Springer Verlag, New York 2004.
- [11] Schmidt R., *Dependencies of Extreme Events in Finance. Modelling, Statistics and Data Analysis*, rozprawa doktorska Universität Ulm, Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften 2003.
- [12] Schmidt R., Stadtmüller U., *Nonparametric Estimation of Tail Dependence*, maszynopis London School of Economics i University of Ulm 2003.

APPLICATION OF ASYMPTOTIC TAIL INDEPENDENCE CONCEPT IN THE ANALYSIS OF EXTREME VALUE DEPENDENCE BETWEEN SELECTED STOCK INDICES

Summary

This paper presents an empirical analysis of asymptotic tail independence for bivariate stock-index return distributions. Returns from the WIG20 index and some selected indices of the leading stock markets are taken into consideration. Testing for tail independence is a stage of a research into tail dependence. The later may be of a big importance to the analysis of risk. Taking it into account may improve the quality of portfolio diversification. Thus, it may help avoiding rare-but-high losses on the portfolios that seem in the typical market conditions to be well diversified (though are not). The discussion here focuses on testing the hypothesis of asymptotic tail independence (tail dependence coefficient – TDC – equal to zero). The issue of measuring the strength of tail dependence is not investigated in this article. Measuring tail dependence may be of a big importance; it is, however, yet another step in the analysis. As it has been explained in the paper, it is not recommended to continue with estimating tail dependence without a prior verification of the tail independence hypothesis. The article is composed of two parts and a summary. The first part covers some theoretical background and a presentation of the method applied. The second part describes the empirical investigation and discusses its results.