

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA
INSTYTUT TELEKOMUNIKACJI I AKUSTYKI
Raport I - 28 / P - 033 / 98

Zbigniew Świątach

SZEROKOPASMOWE DOPASOWANIE
IMPEDANCJI
PRZY UŻYCIU BEZSTRATNYCH
DWUWROTNIKÓW I TRÓJWROTNIKÓW

Słowa kluczowe:
wielowrotowe filtry bezstratne,
realizacja wzmocnień napięciowych,
szerokopasmowe dopasowanie impedancji.

Wrocław 1998

**POLITECHNIKA WROCŁAWSKA
INSTYTUT TELEKOMUNIKACJI I AKUSTYKI**

Zbigniew Świątach

**SZEROKOPASMOWE DOPASOWANIE IMPEDANCJI
PRZY UŻYCIU BEZSTRATNYCH
DWUWROTNIKÓW I TRÓJWROTNIKÓW**

/ rozprawa doktorska /

Promotor:

dr hab. inż. Marcei Uruski
prof. nadzw. Politechniki Wrocławskiej

Praca wykonana w ramach Grantu KBN nr:8-T-11-D-007-10.

WROCŁAW 1998

mgr inż. Zbigniew Świętach
Politechnika Wrocławska
Instytut Telekomunikacji i Akustyki
ul. Wybrzeże S. Wyspiańskiego 27
50-370 Wrocław

PODZIĘKOWANIA

Pragnę złożyć gorące podziękowania Panu Profesorowi Marcelemu Uruskiemu za cenne wskazówki oraz pomoc w przygotowaniu rozprawy.

Pragnę podziękować również Panu Profesorowi Marianowi Piekarskiemu, Kierownikowi Zakładu Teorii Obwodów PWr. za stworzenie warunków umożliwiających powstanie tej pracy.

Dziękuję również Kolegom z Zakładu Teorii Obwodów, za wartościowe uwagi i sugestie, które zostały wykorzystane przy pisaniu niniejszej pracy.

Zbigniew Świętach

SPIS TREŚCI

Spis ważniejszych oznaczeń i skrótów	6
1. Wprowadzenie	7
2. Cel i układ pracy	8
2.1. Cel pracy.....	8
2.2. Układ pracy	9
3. Dopasowanie szerokopasmowe impedancji z wykorzystaniem bezstratnych n - wrotników	11
3.1. Podstawowe definicje i twierdzenia	11
3.1.1. Podstawy normalizacji zespolonej.....	13
3.1.2. Normalizacja zespolona n -wrotnika.....	14
3.1.3. Warunki realizowalności	16
3.1.4. Ograniczenia Youli	17
3.1.5. Warunki realizowalności wielowrotowych układów dopasowujących.....	20
3.2. Metody analizy problemu dopasowania	24
3.2.1. Zagadnienie konstrukcji macierzy rozproszenia	24
3.2.2. Metoda dekompozycji kaskadowej	28
3.2.3. Zastosowanie impedancji kompatybilnych	29
3.2.4. Numeryczne metody dopasowania szerokopasmowego, omówienie	31
3.3. Wnioski	33
4. Dopasowanie szerokopasmowe impedancji przy użyciu bezstratnych czwórników.....	34
4.1. Sformułowanie problemu	34
4.1.1. Konstrukcja macierzy rozproszenia	34
4.1.2. Omówienie warunków realizowalności.....	36
4.1.3. Przypadki szczególne konstrukcji macierzy rozproszenia.....	36
4.2. Wzory projektowe dla dopasowania wybranych impedancji obciążeń	38
4.2.1. Impedancje dwuelementowe RL lub RC.....	40
4.2.2. Impedancje pasmowo-przepustowe RLC.....	53
4.2.3. Impedancje RLC o trójkrotnych zerach transmisji.....	59
4.3. Realizacje układowe, przykłady.....	70
4.3.1. Przykład dopasowania impedancji z Rys. 4.2d	70
4.3.2. Przykład dopasowania impedancji z Rys. 4.2c	71
4.4. Podsumowanie rozdziału.....	75

5. Metody realizacji wzmocnień napięciowych w układach trójwrotowych	76
5.1. Realizacja wzmocnień napięciowych w bezstratnym trójwrotniku	76
5.2. Realizacja wzmocnień napięciowych o jednakowych charakterystykach fazowych	84
5.3. Realizacja wzmocnień napięciowych w n-wrotowym multiplekserze	89
5.4. Podsumowanie rozdziału	96
6. Wyznaczanie macierzy rozproszenia trójwrotowych układów dopasowujących	97
6.1. Konstrukcja macierzy rozproszenia trójwrotowego układu dopasowującego o dowolnej konfiguracji	97
6.2. Konstrukcja macierzy rozproszenia trójwrotnika złożonego z trzech czwórników połączonych w "gwiazdę"	113
6.3. Wykorzystanie bezstratnego dipleksera do rozwiązywania problemów transmisji sygnałów	118
6.4. Podsumowanie rozdziału	125
7. Zagadnienia konstrukcji wzmocnień mocy dla układów trójwrotowych	127
7.1. Konstrukcja pary maksymalnie płaskich wzmocnień mocy	127
7.2. Konstrukcja wzmocnień mocy o arbitralnie regulowanym tłumieniu	131
7.3. Przykłady	135
7.4. Podsumowanie rozdziału	139
8. Podsumowanie pracy	141
Dodatek 1	143
Dodatek 2	146
Dodatek 3	149
Dodatek 4	155
Bibliografia	157

SPIS WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ I SKRÓTÓW

Oznaczenia

$p=\sigma+j\omega$	pulsacja zespolona
$a(p), b(p), \dots, A(p), B(p), \dots$	funkcje wymierne o rzeczywistych współczynnikach
$\alpha(p), \beta(p), \dots, \zeta(p)$	pozostałe funkcje zmiennej zespolonej
$\mathbf{a}(p), \mathbf{b}(p), \dots, \mathbf{A}(p), \mathbf{B}(p), \dots$	macierze funkcji wymiernych o rzeczywistych współczynnikach
$\mathbf{A}_*(p)=\mathbf{A}^T(-p)$	sprzężenie parahermitowskie macierzy, "T" oznacza transpozycję
$\mathbf{A}^{-1}(p)$	macierz odwrotna
$\text{res}_{p=j\omega_0} \mathbf{A}(p)$	macierz residuów danej macierzy $\mathbf{A}(p)$ w punkcie $p=j\omega_0$
$(a(p), b(p))=1$ lub $(a, b)=1$	zapis oznaczający, że wielomiany $a(p)$ oraz $b(p)$ są względnie pierwsze
i, j, k, l, m, n	indeksy
k, m, n	oznaczenie stopnia funkcji lub krotności zer danego wyrażenia
$\mathbf{0}_n, \mathbf{1}_n$	macierze: zerowa i jednostkowa o wymiarach $n \times n$
$\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$	macierz diagonalna o wymiarach $n \times n$

Skróty

PR	(ang. positive real) funkcja (macierz) rzeczywista dodatnia
BR	(ang. bounded real) funkcja (macierz) rzeczywista ograniczona
RA	(ang. regular allpass) funkcja regularna wszechprzepustowa
SH	wielomian Hurwitza w ścisłym znaczeniu
WH	wielomian Hurwitza (dopuszczamy dowolną krotność zer na osi $j\omega$)
FDP, FGP, FPP	filtry: dolno, górno i pasmowo-przepustowy

1. WPROWADZENIE

Jednym z podstawowych problemów szeroko rozumianej telekomunikacji jest projektowanie bezstratnych układów, rozdzielających widmo sygnału na pewną liczbę rozłącznych pasm częstotliwości. Zazwyczaj przyjmowane jest dodatkowe założenie, że impedancja wewnętrzna generatora jak i impedancje odbiorników sygnału są dodatnimi stałymi (rezystancjami). Projektowanie bezstratnych układów, rozdzielających widmo sygnału generatora na poszczególne rezystancyjne obciążenia według wymaganych kryteriów transmisji sygnału, określa się ogólnie mianem problemu filtracji. W praktyce znaczna część urządzeń telekomunikacyjnych jest uzależniona częstotliwościowo, tzn. impedancje wewnętrzne generatora sygnału jak i odbiorników są funkcjami częstotliwości. Tym samym zastosowanie metod projektowania bezstratnych filtrów wielowrotowych współpracujących z rezystancyjnymi obciążeniami, stało się niewystarczające dla zapewnienia poprawnego przesyłania sygnałów we współczesnej telekomunikacji.

W projektowaniu w pełni nowoczesnych systemów telekomunikacyjnych istotnym zagadnieniem jest zatem ustalenie warunków realizacji bezstratnego układu sprzęgającego, który włączony pomiędzy uzależniony częstotliwościowo generator i dane impedancje obciążen, zapewni wymaganą transmisję mocy sygnału w wybranym pasmie częstotliwości. Zagadnienie projektowania wzmiankowanych, bezstratnych układów sprzęgających, nosi nazwę problemu dopasowania szerokopasmowego impedancji, natomiast układ sprzęgający określa się mianem układu dopasowującego.

Potrzeba stosowania układów dopasowujących występuje w wielu praktycznych zagadnieniach: w projektowaniu urządzeń pracujących z podziałem częstotliwości np. telefonia wielokrotna, czy też przy przesyłaniu sygnałów pomiędzy anteną i odbiornikiem w zakresie wysokich częstotliwości. Problem dopasowania szerokopasmowego jest obecny także w zagadnieniach akustycznych (stereofonia), gdzie oprócz wymaganej transmisji mocy, należy zapewnić również poprawną transmisję fazy sygnałów. Najczęściej problemy dopasowania szerokopasmowego i problem filtracji sygnału pojawiają się równolegle przy projektowaniu danego systemu.

Zagadnienie projektowania układów dopasowujących i układów filtrów bezstratnych może być rozpatrywane metodami analitycznymi jak i numerycznymi. Dotychczas efektywne metody projektowania omawianych układów zostały opracowane jedynie dla czwórników (metody analityczne i numeryczne). Przy projektowaniu wielowrotowych układów sprzęgających, tzn. filtrów lub układów dopasowujących, wykorzystuje się niemal wyłącznie metody numeryczne. Stosowanie metod analitycznych dla realizacji wielowrotowych układów sprzęgających napotyka na poważne trudności. Podstawowym problemem jest skonstruowanie macierzy rozproszenia wielowrotnika, posiadającej wymagane własności, wynikające z założeń projektowych. Drugim równie istotnym zagadnieniem jest wyznaczenie odpowiednich klas wzmocnień (najczęściej wzmocnień mocy), które umożliwiłyby analityczne obliczenie poszukiwanego współczynnika odbicia.

W niniejszej pracy postawiono i następnie rozwiązano kilka problemów związanych z projektowaniem dwu i trójwrotowych szerokopasmowych, bezstratnych układów dopasowujących oraz bezstratnych filtrów trójwrotowych. Postawione zadania realizacji układów sprzęgających zostały rozwiązane metodami analitycznymi. W pracy rozpatrzono warunki realizowalności fizycznej dla najczęściej spotykanych w praktyce trójwrotowych układów sprzęgających (dupleksorów), co pozwoliło znaleźć efektywne metody dopasowania szerokopasmowego i metody realizacji wzmocnień napięciowych dla tej kategorii n -wrotników. Sposoby rozwiązania wzmiankowanych problemów dopasowania i realizacji wzmocnień napięciowych są treścią kolejnych rozdziałów pracy.

2. CEL I UKŁAD PRACY

2.1. Cel pracy

W poprzednim rozdziale wspomniano o podstawowych problemach dotyczących dopasowania szerokopasmowego impedancji i zagadnień projektowania filtrów w układach wielowrotowych. Przegląd literatury przedmiotu, analizowanej pod kątem stosowania metod analitycznych dla realizacji bezstratnych układów sprzęgających, potwierdza istnienie wzmiankowanych problemów. W pracach [5,6] przeprowadzono analizę pewnej klasy filtrów trójwrotowych, jednakże bez podania metod realizacji. W [8,38,39] skonstruowano macierz rozproszenia filtru trójwrotowego w oparciu o postać kanoniczną macierzy rozproszenia trójwrotnika. Zastosowanie postaci kanonicznej macierzy rozproszenia do zrealizowania wymaganego filtru wymaga jednak w praktyce odwołania się do metod numerycznych. W [75] wprowadzono nową klasę wzmocnień, realizowalnych w układzie bezstratnego dupleksera. Zależności otrzymane w [75] są jednak skomplikowane i w efekcie mało przydatne dla aplikacji układowych. Jedynie w [82] podano praktyczne metody realizacji filtru trójwrotowego, dolno i górno-przepustowego, w układzie dupleksera, jakkolwiek formuły projektowe zaproponowane w [82] odwołują się również do procedur numerycznych.

Rozwój nowych metod syntezy bezstratnych filtrów wielowrotowych napotyka także na poważne trudności. Poza klasycznymi pracami [4,40,79] nowe metody syntezy można znaleźć w niewielu publikacjach. Interesującymi pracami dotyczącymi tego tematu są publikacje [70,84].

Przy analitycznym rozpatrywaniu problemu dopasowania szerokopasmowego impedancji w układach wielowrotowych, pojawiają się dodatkowe ograniczenia w porównaniu z problematyką projektowania filtrów. Z tego powodu publikacje w istotny sposób przybliżające rozwiązanie problemu dopasowania są stosunkowo nieliczne. Co prawda W.K.Chen wraz ze współpracownikami opublikował szereg prac dotyczących omawianego zagadnienia [16,19,30,71,72,73] lecz przydatność cytowanych artykułów dla rozwiązania zagadnienia dopasowania w układach wielowrotowych jest niewielka (z wyjątkiem pracy [30]). Ostatnio pojawiły się jednak prace [43,44,45,65,69,81] zawierające nowe metody matematyczne, które znajdują zastosowanie w rozwiązywaniu pewnych zagadnień z zakresu dopasowania.

Reasumując, problem dopasowania szerokopasmowego impedancji, jak i problem realizacji bezstratnych filtrów wielowrotowych nie jest jeszcze w pełni rozwiązany. Uwzględniając potrzebę rozwijania metod analitycznych w badaniu zagadnień szerokopasmowego dopasowania impedancji, a zarazem ograniczając rozważania do rozpatrywania najbardziej przydatnych w praktyce układów dopasowujących, tzn. układów dwuwrotowych i trójwrotowych, sformułowano następujące cele niniejszej rozprawy:

1. Opracowanie nowych procedur szerokopasmowego dopasowania impedancji w układach dwuwrotowych.
2. Opracowanie metod szerokopasmowego dopasowania impedancji w układach trójwrotowych, ze szczególnym uwzględnieniem układów o strukturze dupleksera.
3. Opracowanie metod realizacji wzmocnień napięciowych, również ze szczególnym uwzględnieniem układów o strukturze dupleksera.
4. Opracowanie praktycznych klas wzmocnień mocy, przydatnych do przeprowadzania wymaganej filtracji lub do rozwiązywania zagadnień dopasowania szerokopasmowego w układach trójwrotowych.

Zagadnienia będące celem rozprawy doktorskiej zostały opracowane w formie odpowiednich twierdzeń, procedur projektowych i wniosków, które są zawarte w poszczególnych rozdziałach pracy.

2.2. Układ pracy

Praca podzielona jest na osiem rozdziałów. Rozdziały 1,2 zawierają wprowadzenie oraz cel i układ rozprawy doktorskiej.

W Rozdziale 3 omówiono ogólnie zagadnienie szerokopasmowego dopasowania impedancji w układach n -wrotowych. Dokonano przeglądu wszystkich znanych metod dopasowania szerokopasmowego oraz podano podstawowe definicje i twierdzenia wykorzystywane w dalszej części pracy. Rozwiązanie problemu dopasowania szerokopasmowego zostało podzielone na dwa etapy: etap pierwszy polegający na skonstruowaniu macierzy rozproszenia n -wrotnika posiadającej wymagane własności i etap drugi, w którym na otrzymaną uprzednio macierz rozproszenia nakłada się warunki realizowalności fizycznej. Ponadto omówiono metody dopasowania szerokopasmowego impedancji w ujęciu numerycznym. W Rozdziale 3 uzasadniono również, dlaczego niniejsza praca dotyczy wyłącznie analitycznych metod szerokopasmowego dopasowania impedancji.

Rozdział 4 poświęcony jest opracowaniu metod szerokopasmowego dopasowania impedancji w układach dwuwrotowych. Na wstępie wyodrębniono dwa różne kryteria dopasowania: kryterium min.-max. oraz kryterium stałego stosunku wzmocnienia maksymalnego do wzmocnienia minimalnego w wymaganym pasmie częstotliwości. Dla celów dopasowania szerokopasmowego wykorzystane zostały skuteczne wzmocnienia mocy typu Butterwortha i Czebyszewa. Podstawową treścią Rozdziału 4 jest podanie nowych procedur dopasowania szerokopasmowego dla wybranych impedancji obciążeń.

W Rozdziale 5 opracowano metody realizacji wzmocnień napięciowych w układach wielowrotowych. Ustalono warunki realizacji wzmocnień napięciowych w bezstratnym układzie trójwrotowym o dowolnej konfiguracji. Następnie podano warunki realizacji pary wzmocnień napięciowych o jednakowych fazach, w bezstratnym układzie trójwrotowym również o dowolnej konfiguracji. W rozpatrywanych problemach zakładano, że obciążeniami trójwrotnika są rezystancje. W części trzeciej Rozdziału 5 ustalono warunki realizacji wzmocnień napięciowych w bezstratnym n -wrotowym multiplekserze, zakończonym częstotliwościowo uzależnionymi impedancjami obciążeń. Warunki realizacji wzmocnień napięciowych rozważanych w Rozdziale 5, podano w formie odpowiednich twierdzeń.

Rozdział 6 poświęcono konstrukcji pewnych klas wymiernych macierzy paraunitarnych, rzeczywistych ograniczonych (ang. bounded real BR) o wymiarach 3×3 . Konstruowane klasy wymiernych macierzy paraunitarnych BR charakteryzują się tym, że zawierają jako podklasę, wszystkie macierze rozproszenia fizycznie realizowalnych trójwrotowych układów dopasowujących, dopuszczalnych w danym zagadnieniu dopasowania szerokopasmowego impedancji. W części pierwszej Rozdziału 6 podano metodę konstrukcji klas macierzy paraunitarnych BR dla układu bezstratnego, odwracalnego trójwrotnika o dowolnej konfiguracji. W częściach drugiej i trzeciej Rozdziału 6 ograniczono rozważania do konstrukcji macierzy paraunitarnych BR bezstratnych układów sprzęgających o strukturze trzech czwórników połączonych w 'gwiazdę' oraz o strukturze szeregowego dupleksa. W efekcie otrzymano prostszą niż w przypadku ogólnym postać macierzy rozproszenia układu sprzęgającego, bardziej dogodną dla realizacji układowych. Ponadto w Rozdziale 6 przeprowadzono analizę układu bezstratnego, odwracalnego, szeregowego dupleksa zakończonego rezystorami, pod kątem realizacji wzmocnień napięciowych oraz realizacji wzmocnień mocy. Otrzymane w Rozdziale 6 rezultaty, zebrane zostały w wyodrębnione grupy wniosków.

W Rozdziale 7 zaproponowano autorskie metody konstrukcji par skutecznych wzmocnień mocy, przydatnych do realizacji w układach trójwrotowych. Wprowadzone wzmocnienia umożliwiają analityczne wyznaczenie wymaganego współczynnika odbicia dla arbitralnie wybranej stałej wzmocnienia z przedziału $(0,1]$ i dla zadanego tłumienia na przecięciu charakterystyk częstotliwościowych obu wzmocnień. Klasy wzmocnień mocy rozważane w Rozdziale 7 pozwalają na skonstruowanie poszukiwanej macierzy rozproszenia trójwrotowego układu dopasowującego lub filtru trójwrotowego, jako macierzy rozproszenia bezstratnego trójwrotnika w konfiguracji dupleksa.

W każdym z Rozdziałów 4,5,6,7 zamieszczono odpowiednio dobrane przykłady obliczeniowe ilustrujące omawiane zagadnienia.

Rozdział 8 zawiera krótkie podsumowanie niniejszej rozprawy, w formie zwięzłej listy zagadnień, zrealizowanych w ramach założonych celów pracy.

W Dodatkach 1,2,4 przedstawiono wyprowadzenia pomocniczych zależności wykorzystywanych w pracy. W Dodatku 3 zawarto wyprowadzenia wzorów obliczeniowych, użytych następnie w Rozdziale 5, przy metodach konstrukcji macierzy rozproszenia trójwrotowego układu dopasowującego w przypadku ogólnym, tzn. bez określania wewnętrznej struktury trójwrotnika.

Najbardziej istotne znaczenie dla pracy mają Rozdziały 4,5,6,7, które w znacznej mierze zawierają oryginalny dorobek autora.

3. DOPASOWANIE SZEROKOPASMOWE IMPEDANCJI Z WYKORZYSTANIEM BEZSTRATNYCH N - WROTNIKÓW

3.1. Podstawowe definicje i twierdzenia

W niniejszej pracy problem dopasowania szerokopasmowego jest rozumiany jako określenie warunków realizowalności fizycznej oraz synteza bezstratnego n-wrotnika N, który realizuje n-1 wymaganych skutecznych wzmoceń mocy, Rys. 3.1a. Zakłada się, że impedancje wewnętrzne generatorów i obciążenia są opisane funkcjami rzeczywistymi dodatnimi (ang. positive real PR), przy czym wzmiarkowane impedancje PR nie są funkcjami reaktancji (ang. non-Foster impedances). W praktyce, najczęściej należy rozdzielić widmo z generatora E_1 na n-1 obciążeń, Rys. 3.1b., lub odwrotnie należy zsumować widma n-1 generatorów na obciążeniu $z_n(p)$, Rys. 3.1c.

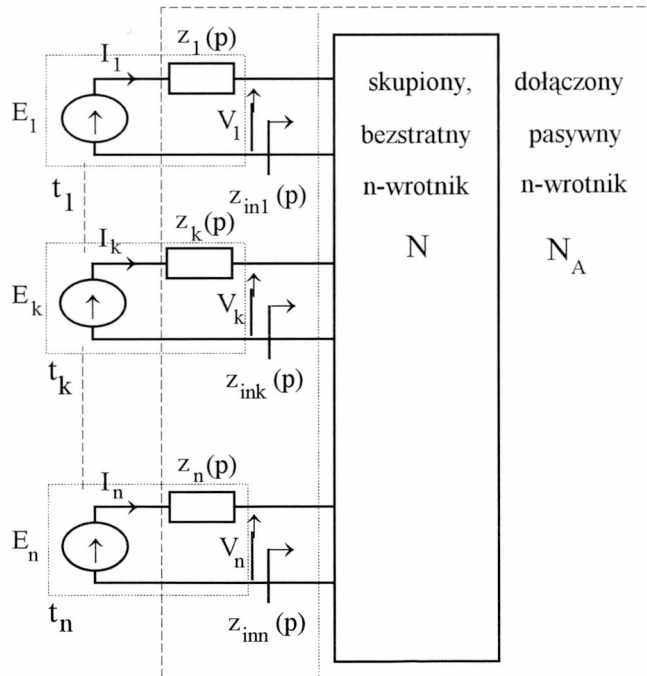
W dalszych rozważaniach zakładamy, że n-wrotnik N_A jest liniowym, stacjonarnym układem o stałych skupionych. Układy takie są opisane macierzami wymiernych funkcji rzeczywistych zmiennej zespolonej p.

Skuteczne wzmożenia mocy definiuje się jako

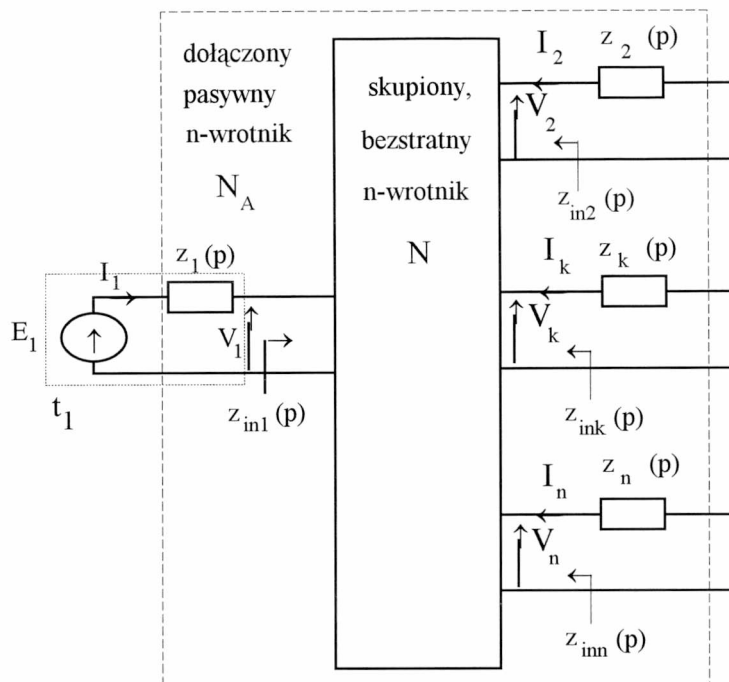
$$G_{ij} = P_j / P_{i_{dys}} = 4 \operatorname{Re} z_i(j\omega) \operatorname{Re} z_j(j\omega) \left| \frac{I_j}{E_i} \right|^2 \quad \left| \begin{array}{ll} E_j=0 & j=1,\dots,n, i \neq j \\ E_i \neq 0 & \end{array} \right. \quad (3.1)$$

gdzie P_j jest mocą czynną wydzieloną w j-tym obciążeniu, $P_{i_{dys}}$ jest mocą dysponowaną i-tego źródła. Symbole $\operatorname{Re} z_i(j\omega)$ i $\operatorname{Re} z_j(j\omega)$ oznaczają części rzeczywiste impedancji $z_i(j\omega)$ i $z_j(j\omega)$.

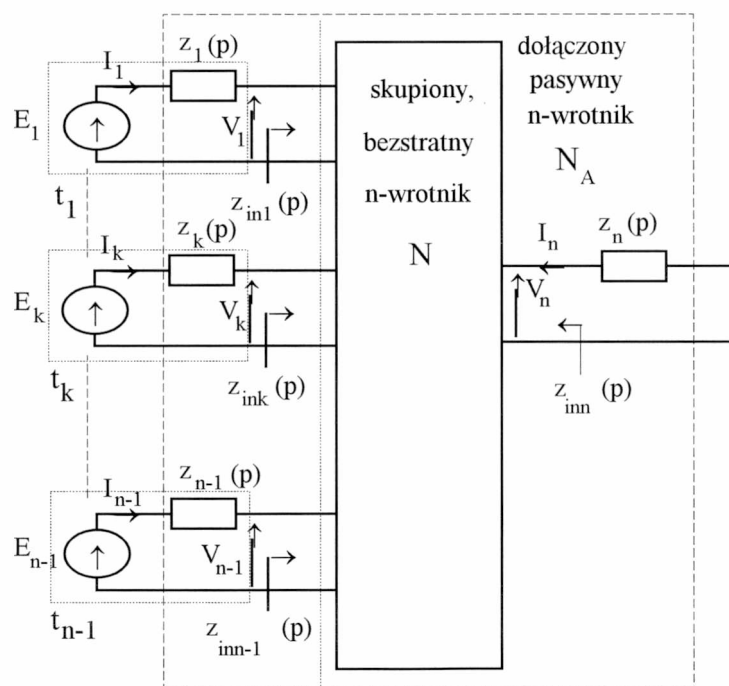
Podstawowym sposobem prezentowania zagadnień dopasowania, stosowanym w dalszej części pracy jest opis n-wrotników N i N_A odpowiednio macierzą rozproszenia $S(p)$ i macierzą admitancyjną $Y_A(p)$.



Rys. 3.1a. Schemat ogólny n-wrotowego układu dopasowującego. Dwójniki t_k $k=1,\dots,n$ reprezentują układ zastępczy Thevenina źródeł sygnału. Impedancje $z_k(p)$ $k=1,\dots,n$ są niefosterowskimi impedancjami rzeczywistymi dodatnimi, impedancje $z_{ink}(p)$ $k=1,\dots,n$ są impedancjami wejściowymi k-tych wrót n-wrotnika N, gdy pozostałe wrota n-wrotnika N zamknięto impedancjami $z_i(p)$ $i \neq k$, $i=1,\dots,n$.



Rys. 3.1b. Schemat n-wrotowego układu dopasowującego generator E_1 do impedancji $z_k(p)$ $k=2, \dots, n$. Dwójnik t_1 reprezentuje układ zastępczy Thevenina źródła sygnału. Impedancje $z_k(p)$ $k=1, \dots, n$ są niefosterowskimi impedancjami rzeczywistymi dodatnimi, impedancje $z_{ink}(p)$ $k=1, \dots, n$ są impedancjami wejściowymi k-tych wrót n-wrotnika N, gdy pozostałe wrota n-wrotnika N zamknięto impedancjami $z_i(p)$ $i \neq k$, $i=1, \dots, n$.



Rys. 3.1c. Schemat n-wrotowego układu dopasowującego generatory E_k $k=1, \dots, n-1$ do impedancji $z_n(p)$. Dwójniki t_k $k=1, \dots, n-1$ reprezentują układ zastępczy Thevenina źródeł sygnału. Impedancje $z_k(p)$ $k=1, \dots, n$ są niefosterowskimi impedancjami rzeczywistymi dodatnimi, impedancje $z_{ink}(p)$ $k=1, \dots, n$ są impedancjami wejściowymi k-tych wrót n-wrotnika N, gdy pozostałe wrota n-wrotnika N zamknięto impedancjami $z_i(p)$ $i \neq k$, $i=1, \dots, n$.

3.1.1. Podstawy normalizacji zespolonej

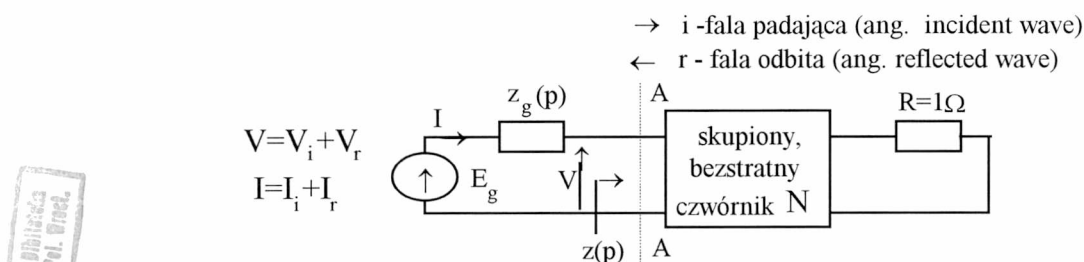
Rozważmy układ jak na Rys. 3.2. i zdefiniujemy falę padającą napięcia i prądu [14,74] jako

$$V_i = V|_{z(p)=z_g(p)}, \quad I_i = V_i / z_g(p), \quad (3.2)$$

oraz falę odbitą napięcia i prądu

$$V_r = V - V_i, \quad I_r = I - I_i, \quad (3.3)$$

gdzie napięcie V i prąd I odnoszą się do płaszczyzny A-A, Rys. 3.2.



Rys. 3.2. Koncepcja fali padającej i odbitej napięcia (prądu). Impedancja $z_g(p)$ jest impedancją wewnętrzną generatora E_g , impedancja $z(p)$ jest impedancją wejściową skupionego, bezstratnego czwórnika N zakończonego rezystorem 1Ω .

Analizując układ z Rys. 3.2. otrzymujemy zależności:

$$V_i = 0.5E_g, \quad I_i = V_i / z_g(p) = 0.5E_g / z_g(p). \quad (3.4)$$

Z (3.3) wynika, że napięcie w płaszczyźnie A-A układu z Rys. 3.2. jest sumą algebraiczną napięcia fali padającej V_i i odbitej V_r . Podobnie prąd w płaszczyźnie A-A układu z Rys. 3.2. jest sumą algebraiczną prądu fali padającej I_i i odbitej I_r . Napięciowy (prądowy) współczynnik odbicia w płaszczyźnie A-A, Rys. 3.2., wynosi:

$$\Gamma_v(p) = V_r / V_i = V / V_i - 1 = 2V / E_g - 1 = 2 \frac{z(p)}{z(p) + z_g(p)} - 1 = \frac{z(p) - z_g(p)}{z(p) + z_g(p)}, \quad (3.5)$$

$$\Gamma_i(p) = I_r / I_i = I / I_i - 1 = 2 \frac{z_g(p)}{z(p) + z_g(p)} - 1 = -\Gamma_v(p). \quad (3.6)$$

Zgodnie z (3.5,3.6) brak fali odbitej oznacza dopasowanie energetyczne w płaszczyźnie A-A, tzn. dopasowanie na maksimum mocy czynnej, jedynie dla rezystancji $z_g(p)=r_g$. Zastosowanie definicji (3.2,3.3) ma zatem sens tylko wtedy, gdy impedancja wewnętrzna generatora jest rezystancją lub reaktancją (w tym wypadku moc czynna wydzielona na $z_g(p)$ jest tożsamościowo zerem).

Aby brak fali odbitej oznaczał dopasowanie energetyczne w płaszczyźnie A-A również dla zespolonych impedancji $z_g(p)$ (nie będących oczywiście funkcjami reaktancji) wprowadza się koncepcję znormalizowanej fali padającej i odbitej [14,77,80]. Dodatkową zaletą wzmiankowanej koncepcji jest operowanie pojedynczym znormalizowanym współczynnikiem odbicia, w miejsce dwóch współczynników odbicia: napięciowego i prądowego. Zdefiniujemy na nowo falę padającą i odbitą napięcia (prądu), jako

$$V_i = V|_{z(p)=z_g^*(p)}, \quad I_i = V_i / z_g^*(p) \quad \text{gdzie } z_g^*(p) = z_g(-p), \quad (3.7)$$

$$V_r = V - V_i, \quad I_r = I - I_i$$

Niech $\text{Ev } z_g(p) = 0.5[z_g(p) + z_{g*}(p)]$ oznacza część parzystą rzeczywistej dodatniej impedancji $z_g(p)$. Funkcję $\text{Ev } z_g(p)$ zawsze można sfaktoryzować na iloczyn dwóch funkcji $h(p)$ i $h_*(p)$, tj.

$$\text{Ev } z_g(p) = 0.5[z_g(p) + z_{g*}(p)] = h(p)h_*(p) , \quad (3.8)$$

gdzie $h(p)$ i $h_*^{-1}(p)$ są funkcjami minimalnego stopnia, analitycznymi w obszarze $\text{Re } p > 0$. Przeprowadzona faktoryzacja jest jednoznaczna z dokładnością do stałej ± 1 .

Znormalizowaną falę padającą i odbitą w płaszczyźnie A-A, określoną względem impedancji wewnętrznej generatora $z_g(p)$, definiuje się jako

$$a(p) = h_*(p)I_i , \quad b(p) = -h(p)I_r . \quad (3.9)$$

Podstawiając (3.7, 3.8) do (3.9), otrzymuje się zależności:

$$a(p) = \frac{E_g}{2h(p)} , \quad b(p) = \frac{E_g}{2h_*(p)} \cdot \frac{z(p) - z_{g*}(p)}{z(p) + z_g(p)} .$$

Tym samym znormalizowany współczynnik odbicia wynosi:

$$\Gamma(p) = \frac{b(p)}{a(p)} = \frac{h(p)}{h_*(p)} \cdot \frac{z(p) - z_{g*}(p)}{z(p) + z_g(p)} . \quad (3.10)$$

Jeżeli współczynnik odbicia (3.10) przyjmuje w pewnym punkcie na osi $j\omega$ wartość równą zero, oznacza to, że w płaszczyźnie A-A, Rys. 3.2. ma miejsce dopasowanie energetyczne. Korzystając z (3.7), równania (3.9) zapisujemy w nieco innej formie:

$$a(p) = 0.5h^{-1}(p)[V + z_g(p)I] , \quad b(p) = 0.5h_*^{-1}(p)[V - z_{g*}(p)I] . \quad (3.11)$$

Definicje (3.11) można łatwo rozszerzyć na układ n-wrotowy.

3.1.2. Normalizacja zespolona n-wrotnika

Niech

$$\mathbf{Z}(p) = \text{diag}[z_1(p), \dots, z_n(p)]$$

będzie macierzą diagonalną niefosterowskich impedancji PR dołączonych do n-wrotnika N, Rys. 3.1a.-3.1c., ponadto niech

$$\mathbf{H}(p) = \text{diag}[h_1(p), \dots, h_n(p)]$$

będzie macierzą faktoryzacji części parahermitowskiej (parzystej) macierzy $\mathbf{Z}(p)$, taką że

$$\text{Ev } \mathbf{Z}(p) = 0.5[\mathbf{Z}(p) + \mathbf{Z}_*(p)] = \mathbf{H}(p)\mathbf{H}_*(p) = \mathbf{H}_*(p)\mathbf{H}(p) ,$$

gdzie $\mathbf{Z}_*(p) = \mathbf{Z}^T(-p)$. Funkcje $h_i(p)$ $i=1, \dots, n$ będące faktoryzacjami części parzystej impedancji $z_i(p)$:

$$\text{Ev } z_i(p) = 0.5[z_i(p) + z_{i*}(p)] = h_i(p)h_{i*}(p) \quad i=1, \dots, n ,$$

wybrano tak, że $h_i(p)$ i $h_{i*}^{-1}(p)$ są funkcjami minimalnego stopnia, analitycznymi w obszarze $\text{Re } p > 0$. Ponadto wektory:

$$\mathbf{I} = [I_1, \dots, I_n]^T , \quad \mathbf{V} = [V_1, \dots, V_n]^T , \quad \mathbf{E} = [E_1, \dots, E_n]^T$$

są wektorami prądów, napięć i sił elektromotorycznych generatorów, zgodnie z oznaczeniami stosowanymi na Rys. 3.1a.-3.1c.

Przez analogię do (3.11) wektory kolumnowe fali padającej i odbitej zdefiniujemy jako

$$\mathbf{a}(p) = 0.5\mathbf{H}^{-1}(p)[\mathbf{V} + \mathbf{Z}(p) \cdot \mathbf{I}] , \quad \mathbf{b}(p) = 0.5\mathbf{H}_*^{-1}(p)[\mathbf{V} - \mathbf{Z}_*(p) \cdot \mathbf{I}] . \quad (3.12)$$

Równania (3.12) określają znormalizowaną falę padającą i odbitą w bezstratnym n-wrotniku N, odniesioną względem macierzy niefosterowskich impedancji PR $\mathbf{Z}(p)$. Równania (3.12) nazywa się równaniami normalizacji zespolonej n-wrotnika N. Istnieją także nieco inne niż (3.12) koncepcje normalizacji zespolonej np. [41,42], jednak jak dotąd nie znalazły one szerszego zastosowania w zagadnieniach dopasowania szerokopasmowego.

Należy również zaznaczyć, że czasami w celu zmniejszenia stopnia funkcji wymiernych opisujących macierz rozproszenia n-wrotnika N, warunki, że funkcje $h_i(p)$ i $h_i^{-1}(p)$ są funkcjami minimalnego stopnia, analitycznymi w obszarze $\text{Re } p > 0$, zastępuje się warunkami, że funkcje $h_i(p)/h_{i*}(p)$ są minimalnego stopnia oraz funkcje $h_i(p)$ i $h_i(p)/h_{i*}(p)$ są analityczne w obszarze $\text{Re } p > 0$ [41]. Jednak powyższe założenie komplikuje postać funkcji $h_i(p)$ i nie będzie ono wykorzystywane w niniejszej pracy.

Wektory fali padającej i odbitej (3.12) wiąże macierz rozproszenia $\mathbf{S}(p) = [s_{ij}(p)]_{i,j=1,\dots,n}$:

$$\mathbf{b}(p) = \mathbf{S}(p)\mathbf{a}(p). \quad (3.13)$$

Bezstratność n-wrotnika N implikuje paraunitarność macierzy $\mathbf{S}(p)$, czyli

$$\mathbf{S}(p)\mathbf{S}_*(p) = \mathbf{S}_*(p)\mathbf{S}(p) = \mathbf{I}_n. \quad (3.14)$$

Stabilność skupionego n-wrotnika N wymaga aby macierz $\mathbf{S}(p)$ była regularna, tzn. analityczna w obszarze $\text{Re } p \geq 0$. Tym samym macierz rozproszenia $\mathbf{S}(p)$ skupionego, bezstratnego n-wrotnika N zakończonoego n niefosterowskimi impedancjami PR $z_i(p)$ $i=1,\dots,n$ jest wymierną paraunitarną macierzą rzeczywistą ograniczoną (ang. bounded real - BR), [14,77].

Niech

$$\mathbf{Y}_A(p) = [y_{Aij}(p)]_{i,j=1,\dots,n}$$

będzie macierzą admitancyjną dołączonego n-wrotnika N_A , Rys. 3.1a.-3.1c. Macierz ta jest zawsze dobrze określona [14]. Ponadto niech

$$\mathbf{Z}_N(p) = [z_{Nij}(p)]_{i,j=1,\dots,n}$$

będzie macierzą impedancyjną n-wrotnika N, Rys. 3.1a.-3.1c. Generalnie macierz ta może nie istnieć dla danego n-wrotnika N.

Korzystając z (3.12,3.13) oraz z oczywistych zależności

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_A(p)\mathbf{E}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{Z}_N(p)\mathbf{I}$$

dla Rys. 3.1a.-3.1c, otrzymujemy wyrażenia wiążące macierze $\mathbf{Y}_A(p)$ i $\mathbf{S}(p)$ n-wrotnika N:

$$\mathbf{S}(p) = \mathbf{H}(p)[\mathbf{H}(p)\mathbf{H}_*^{-1}(p) - 2\mathbf{Y}_A(p)]\mathbf{H}(p), \quad (3.15)$$

$$\mathbf{Y}_A(p) = 0.5\mathbf{H}^{-1}(p)[\mathbf{H}_*^{-1}(p)\mathbf{H}(p) - \mathbf{S}(p)]\mathbf{H}^{-1}(p). \quad (3.16)$$

Z (3.15) wynika, że również macierz $\mathbf{S}(p)$ jest zawsze dobrze określona. Co więcej, jeżeli istnieje macierz $\mathbf{Z}_N(p)$ wtedy prawdziwe są następujące zależności

$$\mathbf{S}(p) = \mathbf{H}_*^{-1}(p)[\mathbf{Z}_N(p) - \mathbf{Z}_*(p)][\mathbf{Z}_N(p) + \mathbf{Z}(p)]^{-1}\mathbf{H}(p), \quad (3.17)$$

$$\mathbf{Z}_N(p) = 2\mathbf{H}(p)[\mathbf{H}_*^{-1}(p)\mathbf{H}(p) - \mathbf{S}(p)]^{-1}\mathbf{H}(p) - \mathbf{Z}(p). \quad (3.18)$$

Podobne wzory można podać dla układów dualnych do obwodów przedstawionych na Rys. 3.1a.-3.1c.

3.1.3. Warunki realizowalności

Niech będzie dany n -wrotnik N , Rys. 3.1a.-3.1c. Macierz rozproszenia $S(p)$ skupionego, bezstratnego n -wrotnika N , znormalizowana względem macierzy $Z(p) = \text{diag}[z_1(p), \dots, z_n(p)]$, gdzie $z_i(p)$ są niefosterowskimi impedancjami PR, posiada następujące własności:

- 1) $S(p)$ jest macierzą wymierną, rzeczywistą, tzn. każdy element $s_{ij}(p)$ jest funkcją wymierną o rzeczywistych współczynnikach,
- 2) $S(p)$ jest macierzą regularną, tzn. analityczną w obszarze $\text{Re } p \geq 0$,
- 3) macierz $S(p)$ pasywnego n -wrotnika N jest macierzą rzeczywistą ograniczoną, tzn. $S(p)$ posiada własności 1) i 2) oraz $\mathbf{1}_n - S(j\omega)S^T(-j\omega)$ jest hermitowską macierzą dodatnio półokreśloną dla każdego ω ,
- 4) macierz $S(p)$ bezstratnego n -wrotnika N jest macierzą paraunitarną, tzn. $S(p)S_*(p) = S_*(p)S(p) = \mathbf{1}_n$,
- 5) jeżeli n -wrotnik N jest odwracalny wówczas macierz $S(p)$ jest symetryczna,
- 6) skuteczne wzmocnienia mocy w n -wrotniku N , będące parzystymi, nieujemnymi, wymiernymi funkcjami pulsacji ω , wynoszą

$$G_{ij}(\omega^2) = |s_{ji}(j\omega)|^2 \Big|_{i,j=1,\dots,n, i \neq j} \quad \text{oraz} \quad 0 \leq G_{ij}(\omega^2) \leq 1 \Big|_{i,j=1,\dots,n, i \neq j} \quad \text{dla każdego } \omega.$$

Własność 6) pokazuje bezpośredni związek pomiędzy zagadnieniem dopasowania, a opisem rozproszeniowym n -wrotnika N . Podane tutaj własności macierzy $S(p)$ są konieczne lecz niewystarczające na to, aby macierz $S(p)$ była macierzą rozproszenia n -wrotnika N znormalizowaną względem diagonalnej macierzy $Z(p) = \text{diag}[z_1(p), \dots, z_n(p)]$ niefosterowskich impedancji PR.

Warunki konieczne i wystarczające na to, aby macierz $S(p)$ była macierzą rozproszenia n -wrotnika N , znormalizowaną względem diagonalnej macierzy $Z(p) = \text{diag}[z_1(p), \dots, z_n(p)]$ niefosterowskich impedancji PR $z_i(p)$ $i=1, \dots, n$, podał po raz pierwszy Wohlers [76].

Twierdzenie 3.1. (Wohlers)

Rzeczywista, wymierna macierz $S(p)$ jest macierzą rozproszenia skupionego, stacjonarnego, liniowego, bezstratnego n -wrotnika N , znormalizowaną względem diagonalnej macierzy $Z(p)$ niefosterowskich impedancji PR $z_i(p)$ $i=1, \dots, n$, wtedy i tylko wtedy, gdy:

- 1) macierz $S(p)$ jest paraunitarna,
- 2) macierz admitancyjna $Y_A(p)$ n -wrotnika dołączonego N_A jest analityczna w obszarze $\text{Re } p > 0$,
- 3) $\det[\mathbf{1}_n - (Z(p) - \mathbf{1}_n)Y_A(p)] \neq 0$ dla każdego 'p' w obszarze $\text{Re } p > 0$ lub macierz $M(p) = [\mathbf{1}_n - (Z(p) - \mathbf{1}_n)Y_A(p)](Z(p) + \mathbf{1}_n)$ ma na osi $j\omega$ co najwyżej jednokrotne bieguny o macierzy residuów hermitowskiej i dodatnio półokreślonej w każdym z tych biegunów, (skrót 'det' oznacza wyznacznik danej macierzy o wymiarach $n \times n$).

W przypadkach szczególnych teza Twierdzenia 3.1. ulega uproszczeniu. Jeżeli $Z(p)$ jest macierzą minimalnej reaktancji, tzn. nie posiada biegunów na osi $j\omega$, wówczas punkt 3) tezy Twierdzenia 3.1. jest równoważny warunkowi, aby macierz $Y_A(p)$ miała na osi $j\omega$ co najwyżej jednokrotne bieguny o macierzy residuów hermitowskiej i dodatnio półokreślonej w każdym z tych biegunów, [14,76]. Jeżeli $Z(p)$ jest macierzą minimalnej reaktancji i dla każdego ω zachodzi nierówność $\text{Re } Z(j\omega) > 0$ to spełnienie warunków 1), 2) implikuje prawdziwość 3), [14,76,80].

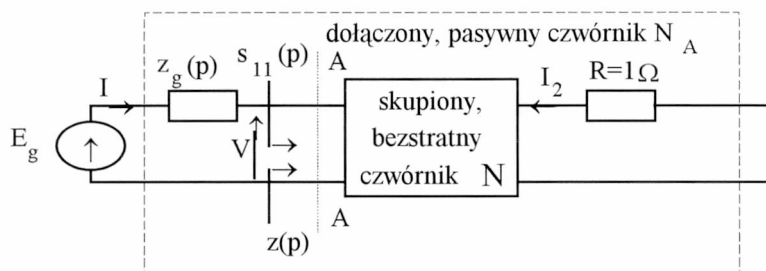
Twierdzenie 3.1. było modyfikowane przez wielu autorów [14,16,22,30,67]. Najistotniejszej modyfikacji dokonali Fei i Chen [30], tak, że warunek 3) został sprowadzony do badania macierzy $M(p)$ w tzw. zerach transmisji macierzy impedancji obciążeń $Z(p)$. Zagadnienie powyższe zostanie omówione w Rozdziale 3.1.5.

3.1.4. Ograniczenia Youli

Rozpatrzmy problem realizacji danego skutecznego wzmocnienia mocy $G(\omega^2)$ w bezstratnym dwuwrotniku N pobudzonym przez generator o niefosterowskiej impedancji PR $z_g(p)$. Pozostałe wrota dwuwrotnika N są obciążone rezystorem 1Ω . Tak postawiony problem nosi często nazwę problemu dopasowania jednostronnego w układzie dwuwrotnowym.

Pierwszą pracą dającą rozwiązanie powyższego zagadnienia był artykuł Fano [29] z 1950 r. Warunki realizowalności wzmocnienia $G(\omega^2)$, wyrażono w [29] jako zespół skomplikowanych ograniczeń całkowych nałożonych na poszukiwany współczynnik odbicia. Ograniczenia Fano nie dały się ponadto bezpośrednio zastosować do dopasowania impedancji aktywnych np: diody tunelowej. Zdecydowanie prostszą metodę określenia warunków realizowalności skutecznego wzmocnienia mocy $G(\omega^2)$ przy danej niefosterowskiej PR impedancji wewnętrznej generatora i rezystancyjnym obciążeniu podał w 1964 r. Youla [78]. W przeciwieństwie do [29] ograniczenia Youli dają się bezpośrednio zastosować dla celów dopasowania wybranych typów impedancji aktywnych np: diody tunelowej, [13,33]. Praca Youli została później rozszerzona na metodę dopasowania dwóch zadanych niefosterowskich impedancji PR (generatora i obciążenia) przy użyciu bezstratnego czwórnika N realizującego wymagane wzmocnienie $G(\omega^2)$, w układzie odwracalnym [22], jak i nieodwracalnym [67]. Problem szerokopasmowego dopasowania dwóch zadanych niefosterowskich impedancji PR (generatora i obciążenia) przy użyciu bezstratnego czwórnika N nosi miano problemu dopasowania dwustronnego. W późniejszych latach uogólniono metodę dopasowania zaproponowaną w [78] na układy wielowrotowe [16,30].

Rozważmy układ z Rys. 3.3.



Rys. 3.3. Czwórnik N dopasowujący zadaną niefosterowską impedancję PR $z_g(p)$ do rezystancyjnego obciążenia $R=1 \Omega$ przy założonym skutecznym wzmocnieniu mocy $G(\omega^2)$.

Macierz rozproszenia czwórnika N z Rys. 3.3 jest paraunitarną macierzą BR , zatem dane skuteczne wzmocnienie mocy $G(\omega^2)$ będzie wymierną, parzystą, rzeczywistą i nieujemną funkcją pulsacji ω , taką, że

$$0 \leq G(\omega^2) \leq 1 \text{ dla każdego } \omega. \quad (3.19)$$

Ponadto:

$$\rho(p)\rho_*(p) = 1 - G(-p^2), \quad (3.20)$$

gdzie $\rho(p)$ jest minimalnofazowym współczynnikiem odbicia w płaszczyźnie A-A na Rys. 3.3.

Równanie (3.16) w odniesieniu do układu z Rys. 3.3. pozwala wyznaczyć admitancję wejściową czwórnika N_A :

$$y_{A11}(p) = \frac{1}{z_g(p) + z(p)} = \frac{1}{2h^2(p)} \left(\frac{h(p)}{h_*(p)} - s_{11}(p) \right), \quad (3.21)$$

gdzie $z(p)$ jest impedancją wejściową czwórnika N z Rys. 3.3. zakończonego rezystorem jednostkowym, $z_g(p)$ jest niefosterowską PR impedancją wewnętrzną źródła sygnału, $s_{11}(p)$ jest

współczynnikiem odbicia w płaszczyźnie A-A. Funkcja $h(p)$ jest faktoryzacją części parzystej $\text{Ev } z_g(p)$ impedancji $z_g(p)$, tj.

$$\text{Ev } z_g(p) = 0.5[z_g(p) + z_{g*}(p)] = h(p)h_*(p) , \quad (3.22)$$

taką że $h(p)$ i $h_*^{-1}(p)$ są funkcjami minimalnego stopnia, analitycznymi w obszarze $\text{Re } p > 0$. Funkcję $h(p)/h_*(p)$ będącą w istocie funkcją regularną wszechprzepustową (ang. regular allpass - RA) można zawsze przedstawić [14,78] w postaci:

$$h(p)/h_*(p) = A(p)B(p) , \quad (3.23)$$

gdzie funkcję RA $A(p)$ utworzono ze wszystkich biegunów części parzystej impedancji $z_g(p)$ leżących w obszarze $\text{Re } p > 0$, z uwzględnieniem krotności tych biegunów. Funkcję RA $B(p)$ utworzono natomiast ze wszystkich zer części parzystej impedancji $z_g(p)$ leżących w obszarze $\text{Re } p > 0$, z uwzględnieniem krotności tych zer.

Ponieważ admitancja $y_{A11}(p)$ jest PR, zatem można wykazać [14], że współczynnik odbicia $s_{11}(p)$ w płaszczyźnie A-A musi mieć postać

$$s_{11}(p) = \rho(p)B(p)\eta(p) , \quad (3.24)$$

gdzie $\eta(p)$ jest dowolną funkcją RA. Po wstawieniu (3.24) do (3.21) widzimy, że koniecznym warunkiem, aby admitancja $y_{A11}(p)$ była PR, jest warunek, że żadne zero funkcji $\eta(p)$ nie może być zerem funkcji $h(p)/h_*(p)$, co zapisujemy symbolicznie jako

$$\left(\eta(p), \frac{h(p)}{h_*(p)} \right) = 1 . \quad (3.25)$$

Dodatkowo wprowadzamy następujące oznaczenia

$$F(p) = 2A(p)\text{Ev } z_g(p) , \quad (3.26)$$

$$\hat{s}(p) = \rho(p)\eta(p) . \quad (3.27)$$

Po wstawieniu (3.26,3.27) do (3.21) otrzymamy

$$y_{A11}^{-1}(p) = z_g(p) + z(p) = \frac{F(p)}{A(p) - \hat{s}(p)} . \quad (3.28)$$

W celu usystematyzowania dalszej dyskusji wprowadzone zostanie w oparciu o pracę Youli [78], pojęcie zer transmisji obciążenia $z_g(p)$ oraz podział tych zer na cztery rozłączne klasy. Zerem transmisji $p_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ krotności k niefosterowskiej impedancji PR $z_g(p)$ nazywamy każde zero w obszarze $\text{Re } p \geq 0$ krotności k następującego wyrażenia

$$\lambda(p) = \text{Ev } z_g(p) / z_g(p) . \quad (3.29)$$

Zera transmisji wygodnie jest rozdzielić na cztery rozłączne klasy:

- Klasa 1: $p_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ i $\sigma_0 > 0$.
- Klasa 2: $p_0 = \sigma_0 + j\omega_0$, $\sigma_0 = 0$ i $z_g(p_0) = 0$.
- Klasa 3: $p_0 = \sigma_0 + j\omega_0$, $\sigma_0 = 0$ i $0 < |z_g(p_0)| < \infty$.
- Klasa 4: $p_0 = \sigma_0 + j\omega_0$, $\sigma_0 = 0$ i $|z_g(p_0)| = \infty$.

Niech $p_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ będzie k - krotnym zerem transmisji impedancji $z_g(p)$. Funkcje $F(p)$, $A(p)$, $\hat{s}(p)$ rozkładamy w szeregi potęgowe w otoczeniu punktu $p=p_0$, tzn.

$$F(p) = \sum_{x=0}^{\infty} F_x (p - p_0)^x , \quad (3.30)$$

$$A(p) = \sum_{x=0}^{\infty} A_x (p - p_0)^x , \quad (3.31)$$

$$\hat{s}(p) = \sum_{x=0}^{\infty} \hat{s}_x (p - p_0)^x . \quad (3.32)$$

Dodatkowo niech residuum w biegunie $p=p_0$ funkcji wymiernej $f(p)$ o rzeczywistych współczynnikach, oznaczane będzie symbolem

$$\operatorname{res}_{p=p_0} f(p) .$$

Youla udowodnił [78], że admitancja $y_{A11}(p)$ i impedancja $z(p)$ są funkcjami PR wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym zerze transmisji $p_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ krotności k impedancji $z_g(p)$ spełnione są następujące ograniczenia:

I) Dla zer transmisji klasy 1, $p=p_0$:

$$A_x = \hat{s}_x \quad x = 0, 1, \dots, k-1 . \quad (3.33)$$

Komentarz: spełnienie (3.33) oznacza, że $y_{A11}(p)$ nie ma ani zera ani bieguna w obszarze $\operatorname{Re} p > 0$.

II) Dla zer transmisji klasy 2, $p=j\omega_0$:

$$A_x = \hat{s}_x \quad x = 0, 1, \dots, k-1 , \quad \frac{A_k - \hat{s}_k}{F_{k+1}} = \operatorname{res}_{p=j\omega_0} y_{A11}(p) \geq 0 , \quad (3.34)$$

Komentarz: spełnienie (3.34) oznacza, że

- a) $z(j\omega_0)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|y_{A11}(j\omega_0)|=\infty$, czyli $A(p)-\hat{s}(p)$ ma zero krotności k w punkcie $p=j\omega_0$,
- b) $0 < |z(j\omega_0)| < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < |y_{A11}(j\omega_0)| < \infty$, czyli $A(p)-\hat{s}(p)$ ma zero krotności $k+1$ w punkcie $p=j\omega_0$,
- c) $|z(j\omega_0)|=\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y_{A11}(j\omega_0)=0$, czyli $A(p)-\hat{s}(p)$ ma zero krotności $k+2$ w punkcie $p=j\omega_0$ i $F_{k+1} / (A_{k+2} - \hat{s}_{k+2}) = \operatorname{res}_{p=j\omega_0} z(p) > 0$.

III) Dla zer transmisji klasy 3, $p=j\omega_0$:

$$A_x = \hat{s}_x \quad x = 0, 1, \dots, k-2 , \quad \frac{A_{k-1} - \hat{s}_{k-1}}{F_k} = \operatorname{res}_{p=j\omega_0} y_{A11}(p) \geq 0 , \quad (3.35)$$

Komentarz: spełnienie (3.35) oznacza, że

- a) $z_g(j\omega_0)+z(j\omega_0)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|y_{A11}(j\omega_0)|=\infty$, czyli $A(p)-\hat{s}(p)$ ma zero krotności $k-1$ w punkcie $p=j\omega_0$,
- b) $0 < |z_g(j\omega_0)+z(j\omega_0)| < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < |y_{A11}(j\omega_0)| < \infty$, czyli $A(p)-\hat{s}(p)$ ma zero krotności k w punkcie $p=j\omega_0$,
- c) $|z(j\omega_0)|=\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y_{A11}(j\omega_0)=0$, czyli $A(p)-\hat{s}(p)$ ma zero krotności $k+1$ w punkcie $p=j\omega_0$ i $F_k / (A_{k+1} - \hat{s}_{k+1}) = \operatorname{res}_{p=j\omega_0} z(p) > 0$.

IV) Dla zer transmisji klasy 4, $p=j\omega_0$:

$$A_x = \hat{s}_x \quad x = 0, 1, \dots, k-1 , \quad \frac{F_{k-1}}{A_k - \hat{s}_k} \geq \operatorname{res}_{p=j\omega_0} z_g(p) , \quad (3.36)$$

Komentarz: spełnienie (3.36) oznacza, że $y_{A11}(j\omega_0)=0$, zatem $A(p)-\hat{s}(p)$ ma zero krotności k w punkcie $p=j\omega_0$. Ponadto znak równości w (36) wystąpi wtedy i tylko wtedy, gdy $|z(j\omega_0)| \neq \infty$. Jeżeli w (3.36) otrzymamy ostrą nierówność, wówczas $\operatorname{res}_{p=j\omega_0} z(p) = F_{k-1} / (A_k - \hat{s}_k) - \operatorname{res}_{p=j\omega_0} z_g(p)$.

Rozwiązanie problemu realizacji danego skutecznego wzmocnienia mocy $G(\omega^2)$ w bezstratnym czwórniku obciążonym rezystancją i pobudzany przez generator o niefosterowskiej PR impedancji wewnętrznej $z_g(p)$, sprowadzone zostało do wyznaczenia takiej funkcji RA $\eta(p)$, dla której spełnione są ograniczenia I - IV. Ograniczenia te zostały nazwane ograniczeniami Youli. Ponadto w [14,21] wykazano, że ograniczenia Youli i Twierdzenie 3.1. w odniesieniu do problemu dopasowania jednostronnego z zastosowaniem bezstratnego czwórnika, są wzajemnie równoważne.

Rozpatrzmy teraz jakie konieczne zależności muszą zachodzić pomiędzy danym skutecznym wzmocnieniem mocy $G(\omega^2)$ i impedancją $z_g(p)$, aby ograniczenia Youli mogły być spełnione w odniesieniu do problemu dopasowania jednostronnego z zastosowaniem bezstratnego czwórnika. Dla układu z Rys. 3.3. definicję (3.1) można zapisać jako

$$G(\omega^2) = 4 \operatorname{Re} z_g(j\omega) \left| \frac{I_2}{E_g} \right|^2 = 4 \operatorname{Re} z_g(j\omega) |y_{A21}(j\omega)|^2. \quad (3.37)$$

Macierz $Y_A(p)$ jest PR, zatem na osi $j\omega$ macierz ta może mieć co najwyżej jednokrotne bieguny o macierzy residuów hermitowskiej i dodatnio półokreślonej. Warunek powyższy i założenie o rezystancyjnym obciążeniu czwórnika N , implikują, że funkcje $y_{A21}(p)$ i $y_{A12}(p)$ są regularne. Dodatkowo jeżeli impedancja $z_g(p)$ ma biegun na osi $j\omega$, wówczas prądy I oraz I_2 są równe zero, zatem skuteczne wzmocnienie mocy jest również równe zero. Co więcej, w każdym biegunie $p=j\omega_0$ impedancji $z_g(p)$ mamy $y_{A21}(j\omega_0)=y_{A12}(j\omega_0)=0$. Tym samym dla spełnienia ograniczeń Youli konieczne jest, aby:

- 1) jeżeli w punkcie $p=j\omega_0$ impedancja $z_g(j\omega_0)$ nie ma bieguna, to każde zero $\operatorname{Re} z_g(j\omega)$ krotności $2k$ w punkcie $\omega=\omega_0$ jest zerem $G(\omega^2)$ krotności co najmniej $2k$,
- 2) jeżeli w punkcie $p=j\omega_0$ impedancja $z_g(j\omega_0)$ ma biegun, to każde zero $\operatorname{Re} z_g(j\omega)$ krotności $2k$ w punkcie $\omega=\omega_0$ jest zerem $G(\omega^2)$ krotności co najmniej $2k+2$.

Ograniczenia Youli są również podstawą dla rozwiązywania problemów projektowania wielowrotowych układów dopasowujących, które to zagadnienie zostanie omówione w następnym rozdziale.

3.1.5. Warunki realizowalności wielowrotowych układów dopasowujących

Rozwiązanie problemu realizowalności wymaganego skutecznego wzmocnienia mocy $G(\omega^2)$ przy zadanej niefosterowskiej impedancji PR $z_g(p)$ zostało uogólnione w [30] na przypadek n -wrotowy poprzez modyfikację Twierdzenia 3.1. i wykorzystanie ograniczeń Youli I - IV. Przed podaniem twierdzenia z pracy [30], wprowadzone zostaną niezbędne wielkości.

Zdefiniujemy znormalizowane zero n -wrotnika N , Rys. 3.1a.-3.1c., jako każde zero transmisji krotności k_i i -tej niefosterowskiej impedancji PR $z_i(p)$ $i=1, \dots, n$. Analogicznie do wzorów (3.22, 3.23, 3.24) zdefiniujemy dla i -tego obciążenia następujące funkcje. Funkcja $h_i(p)$ jest faktoryzacją części parzystej $\operatorname{Ev} z_i(p)$ impedancji $z_i(p)$, tj.

$$\operatorname{Ev} z_i(p) = 0.5[z_i(p) + z_i^*(p)] = h_i(p)h_{i*}(p) \quad i=1, \dots, n, \quad (3.38)$$

gdzie $h_i(p)$ i $h_{i*}^{-1}(p)$ są funkcjami minimalnego stopnia, analitycznymi w obszarze $\operatorname{Re} p > 0$. Funkcję RA $h_i(p)/h_{i*}(p)$ można zawsze przedstawić w formie:

$$h_i(p)/h_{i*}(p) = A_i(p)B_i(p) \quad i=1, \dots, n, \quad (3.39)$$

gdzie funkcję RA $A_i(p)$ utworzono ze wszystkich biegunów części parzystej impedancji $z_i(p)$ leżących w obszarze $\text{Re } p > 0$, z uwzględnieniem krotności tych biegunów. Funkcję RA $B_i(p)$ utworzono natomiast ze wszystkich zer części parzystej impedancji $z_i(p)$ leżących w obszarze $\text{Re } p > 0$, z uwzględnieniem krotności tych zer.

Ponieważ admitancje $y_{Aii}(p)$ $i=1, \dots, n$. są PR, zatem analogicznie do (3.24) współczynniki odbicia $s_{ii}(p)$ w poszczególnych wrotach n-wrotnika N, Rys. 1a.-1c., muszą mieć postać

$$s_{ii}(p) = \rho_{ii}(p) B_i(p) \eta_{ii}(p) \quad i=1, \dots, n., \quad (3.40)$$

gdzie $\eta_{ii}(p)$ są dowolnymi funkcjami RA oraz $\rho_{ii}(p)$ są minimalnofazowymi BR współczynnikami odbicia. Podobnie jak w (3.25), aby admitancje $y_{Aii}(p)$ były PR, koniecznym jest, że żadne zero funkcji $\eta_{ii}(p)$ nie może być zerem funkcji $h_i(p)/h_{i*}(p)$, co zapisujemy, w formie:

$$\left(\eta_{ii}(p), \frac{h_i(p)}{h_{i*}(p)} \right) = 1 \quad i=1, \dots, n. \quad (3.41)$$

Wprowadzamy dodatkowo następujące oznaczenia

$$F_i(p) = 2A_i(p) \text{Ev } z_i(p) \quad i=1, \dots, n., \quad (3.42)$$

$$\hat{s}_{ii}(p) = \rho_{ii}(p) \eta_{ii}(p) \quad i=1, \dots, n. \quad (3.43)$$

Po podstawieniu (3.42, 3.43) do (3.16) otrzymamy macierz admitancyjną postaci:

$$\mathbf{Y}_A = \begin{pmatrix} (A_1 - \hat{s}_1)/F_1 & -s_{12}/(2h_1h_2) & \cdots & -s_{1n}/(2h_1h_n) \\ -s_{21}/(2h_2h_1) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -s_{n1}/(2h_nh_1) & \cdots & \cdots & (A_n - \hat{s}_n)/F_n \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

gdzie elementy macierzy $s_{ij}(p)$ $i \neq j$, $i, j=1, \dots, n$, $\mathbf{S}(p) = [s_{ij}(p)]$ o wymiarach $n \times n$ są elementami macierzy rozproszenia n-wrotnika N, Rys. 3.1a.-3.1c., znormalizowanej względem macierzy $\mathbf{Z}(p) = \text{diag}[z_1(p), \dots, z_n(p)]$ niefosterowskich impedancji PR.

Niech w obszarze $\text{Re } p \geq 0$ punkt $p=p_{0i}$ będzie k_i - krotnym zerem transmisji impedancji $z_i(p)$. Funkcje $F_i(p)$, $A_i(p)$, $\hat{s}_i(p)$ $i=1, \dots, n$. rozkładamy w szeregi potęgowe w otoczeniu punktu $p=p_{0i}$, tzn.

$$F_i(p) = \sum_{x=0}^{\infty} F_{ix}(p - p_{0i})^x, \quad (3.45)$$

$$A_i(p) = \sum_{x=0}^{\infty} A_{ix}(p - p_{0i})^x, \quad (3.46)$$

$$\hat{s}_i(p) = \sum_{x=0}^{\infty} \hat{s}_{ix}(p - p_{0i})^x. \quad (3.47)$$

Twierdzenie Fei i Chena [30] w stosunkowo prosty sposób rozstrzyga, czy rozważana, wymierna macierz $\mathbf{S}(p) = [s_{ij}(p)]$ jest macierzą rozproszenia fizycznie realizowalnego n-wrotnika N, Rys. 3.1a.-3.1c., znormalizowaną względem danej macierzy $\mathbf{Z}(p) = \text{diag}[z_1(p), \dots, z_n(p)]$ niefosterowskich impedancji PR. Przytoczone niżej twierdzenie zostało nieznacznie zmodyfikowane w stosunku do oryginału [30]. Modyfikacja ta ma na celu ujednolicenie zapisu.

Twierdzenie 3.2. (Fei i Chen - zmodyfikowane)

Dana wymierna, rzeczywista macierz $\mathbf{S}(p)$ o wymiarach $n \times n$ jest macierzą rozproszenia stacjonarnego, liniowego, skupionego, bezstratnego n -wrotnika N znormalizowaną diagonalną macierzą $\mathbf{Z}(p) = \text{diag}[z_1(p), \dots, z_n(p)]$ niefosterowskich impedancji PR, wtedy i tylko wtedy, gdy:

- 1) $\mathbf{S}(p)$ jest paraunitarną macierzą BR;
- 2) elementy $y_{Aij}(p)$ $i \neq j$ $i, j=1, \dots, n$. macierzy $\mathbf{Y}_A(p) = 0.5\mathbf{H}^{-1}(p)(\mathbf{H}_*^{-1}(p)\mathbf{H}(p) - \mathbf{S}(p))\mathbf{H}^{-1}(p)$ są analityczne w obszarze $\text{Re } p > 0$, zaś na osi $j\omega$, elementy $y_{Aij}(p)$ $i \neq j$ $i, j=1, \dots, n$. macierzy $\mathbf{Y}_A(p)$ mają co najwyżej jednokrotne bieguny;
- 3) $A_{i,x} = \hat{s}_{i,x}$, $x=0, 1, \dots, m_i-1$, $i=1, \dots, n$ w każdym znormalizowanym zerze $p=p_{0i}$ krotności k_i , gdzie
$$m_i = \begin{cases} k_i & \text{dla zer klasy 1., 2., 4.} \\ k_i - 1 & \text{dla zer klasy 3.} \end{cases} \quad i=1, \dots, n;$$
- 4) macierz

$$\hat{\mathbf{Y}}_A(p) = \begin{bmatrix} \begin{matrix} t & u-t \\ \mathbf{Y}_I(p) & \mathbf{Y}_{II}(p) \\ \mathbf{Y}_{III}(p) & \mathbf{Y}_{IV}(p) \end{matrix} & \begin{matrix} t \\ u-t \end{matrix} \end{bmatrix}$$

będąca podmacierzą o wymiarach $u \times u$ macierzy $\mathbf{Y}_A(p)$, powstałą przez przenumrowanie wrót n -wrotnika N , tak aby pierwszych 't' impedancji miało zera klasy 4., następnych 'u-t' impedancji posiadało zera klasy 2. lub 3., a pozostałe 'n-u' impedancji nie posiadało zer transmisji, spełnia na osi $j\omega$ w każdym znormalizowanym zerze $p=j\omega_{0i}$ następujące ograniczenia:

a) macierz

$$\mathbf{M}_R = \begin{pmatrix} \begin{matrix} t & u-t \\ \mathbf{R}_{-1}^{-1} - \mathbf{Q}_1 & -\mathbf{Q}_a \\ \mathbf{Q}_b & \mathbf{Q}_{-1} \end{matrix} & \begin{matrix} t \\ u-t \end{matrix} \end{pmatrix}$$

jest hermitowską macierzą dodatnio półokreśloną, gdzie

$$\mathbf{R}_{-1} = \text{diag} \left[\underset{p=j\omega_{0i}}{\text{res } z_1(p)}, \dots, \underset{p=j\omega_{0i}}{\text{res } z_t(p)} \right],$$

$$\mathbf{Q}_1 = \frac{d\mathbf{Y}_I(p)}{dp} \Big|_{p=j\omega_{0i}} = \begin{pmatrix} q_{11,1} & q_{12,1} & \cdots & q_{1t,1} \\ q_{21,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ q_{t1,1} & \cdots & \cdots & q_{tt,1} \end{pmatrix}, \quad q_{ii,1} = \frac{A_{i,k_i} - \hat{s}_{i,k_i}}{F_{i,k_i-1}}, \quad i=1, \dots, t.,$$

$$\mathbf{Q}_{-1} = \underset{p=j\omega_{0i}}{\text{res } \mathbf{Y}_{IV}(p)} = \begin{pmatrix} q_{(t+1)(t+1),-1} & q_{(t+1)(t+2),-1} & \cdots & q_{(t+1)u,-1} \\ q_{(t+2)(t+1),-1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ q_{u(t+1),-1} & \cdots & \cdots & q_{uu,-1} \end{pmatrix}, \quad q_{ii,-1} = \frac{A_{i,m_i} - \hat{s}_{i,m_i}}{F_{i,m_i+1}}, \quad i=t+1, \dots, u.,$$

$$\mathbf{Q}_a = \mathbf{Y}_{II}(j\omega_{0i}), \quad \mathbf{Q}_b = \mathbf{Y}_{III}(j\omega_{0i});$$

b)

$$\underset{p=j\omega_{0i}}{\text{res } \mathbf{Y}_I(p)} = \mathbf{0}_t, \quad \mathbf{Y}_I(j\omega_{0i}) = \mathbf{0}_t, \quad \underset{p=j\omega_{0i}}{\text{res } \mathbf{Y}_{II}(p)} = \mathbf{0}_{t,u-t}, \quad \underset{p=j\omega_{0i}}{\text{res } \mathbf{Y}_{III}(p)} = \mathbf{0}_{u-t,t}.$$

Z Twierdzenia 3.2 wynikają dodatkowe zależności. Jeżeli $\mathbf{M}_R$ jest macierzą hermitowską i $\mathbf{R}_{-1}$ jest diagonalną macierzą o rzeczywistych elementach, to macierze $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_{-1}$ są również hermitowskie. Dla odwracalnego n-wrotnika N macierz $\mathbf{Y}_A(p)$ jest symetryczna. W efekcie dla odwracalnego n-wrotnika N, macierze $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_{-1}$ są macierzami o rzeczywistych elementach. Nieujemność części rzeczywistej macierzy $\mathbf{Y}_A(p)$ w obszarze $\text{Re } p \geq 0$ implikuje, że w każdym znormalizowanym zerze klasy 2. lub klasy 3. mamy: $\text{Re } \mathbf{Q}_a = \mathbf{0}_{t,u-t}$ i $\text{Re } \mathbf{Q}_b = \mathbf{0}_{u-t,t}$. W konsekwencji elementy macierzy $\mathbf{Q}_a$ i $\mathbf{Q}_b$ są urojone lub zerowe. Dodatkowo uwzględniając fakt, że macierz $\mathbf{M}_R$ jest macierzą hermitowską, stwierdzamy, iż $\mathbf{Q}_b = \mathbf{Q}_a^T$, przy czym dla odwracalnego n-wrotnika N macierz $\mathbf{Q}_a = \mathbf{0}_{t,u-t}$. Macierz $\mathbf{Y}_A(p)$ ma na osi $j\omega$ co najwyżej jednokrotne bieguny o macierzy residuów dodatnio półokreślonej w każdym z tych biegunów. Powyższa własność implikuje, że na osi $j\omega$, funkcje $y_{Aij}(p)$ $i \neq j$ mogą posiadać co najwyżej jednokrotne bieguny i to jedynie w punktach, w których impedancje $z_i(p)$ oraz $z_j(p)$ mają wspólne zera transmisji klasy 2. lub 3.

Zauważmy, że Twierdzenie 3.2. określa warunki realizowalności pewnych macierzy $\mathbf{S}(p)$, których elementy musiały zostać uprzednio określone (przynajmniej z dokładnością do funkcji RA). Dodatkowo macierze $\mathbf{S}(p)$ powinny zawierać wymagane skuteczne wzmocnienia mocy. Problem wyznaczenia wzmiankowanych macierzy $\mathbf{S}(p)$, które można następnie testować przy pomocy Twierdzenia 3.2. stanowi zasadniczą trudność w rozwiązywaniu zagadnień dopasowania szerokopasmowego impedancji.

Z Twierdzenia 3.2. wynikają ponadto ważne związki pomiędzy elementami macierzy $\mathbf{Z}(p) = \text{diag}[z_1(p), \dots, z_n(p)]$ niefosterowskich impedancji PR, a skutecznymi wzmocnieniami mocy $G_{ij}(\omega^2)$ $i \neq j, i, j = 1, \dots, n$. Na podstawie definicji (3.1) obliczamy:

$$G_{ij}(\omega^2) = 4 \text{Re } z_i(j\omega) \text{Re } z_j(j\omega) \left| \frac{\mathbf{I}_j}{\mathbf{E}_i} \right|^2 = 4 \text{Re } z_i(j\omega) \text{Re } z_j(j\omega) |y_{Aji}(j\omega)|^2 \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.48)$$

Niech $2k_i$, $2k_j$ będą krotnościami zer $\text{Ev } z_i(p)$, $\text{Ev } z_j(p)$ w punkcie $p = j\omega_0$, w którym impedancje $z_i(p)$, $z_j(p)$ mają zero transmisji klasy 2. lub klasy 3. lub klasy 4. Na podstawie Twierdzenia 3.2. i (3.48) można ustalić poniższe zależności:

- 1) Jeżeli w punkcie $p = j\omega_0$ impedancja $z_i(p)$ ma zero transmisji klasy 4., natomiast impedancja $z_j(p)$ nie ma zera transmisji w tym punkcie, to funkcje $y_{Aij}(p)$, $y_{Aji}(p)$ muszą osiągać zero w punkcie $p = j\omega_0$. W konsekwencji dla pulsacji $\omega = \omega_0$ skuteczne wzmocnienia mocy $G_{ij}(\omega^2)$ i $G_{ji}(\omega^2)$ mają zero krotności co najmniej $2(k_i + 1)$, gdzie $k_i \geq 0$.
- 2) Jeżeli w punkcie $p = j\omega_0$ impedancja $z_i(p)$ ma zero transmisji klasy 4., natomiast impedancja $z_j(p)$ ma zero transmisji klasy 2. lub klasy 3. w tym punkcie, to funkcje $y_{Aij}(p)$, $y_{Aji}(p)$ muszą być analityczne w punkcie $p = j\omega_0$ lecz niekoniecznie równe zero. W konsekwencji dla pulsacji $\omega = \omega_0$ skuteczne wzmocnienia mocy $G_{ij}(\omega^2)$ i $G_{ji}(\omega^2)$ mają zero krotności co najmniej $2(k_i + k_j)$, gdzie $k_i \geq 0$ i $k_j > 0$.
- 3) Jeżeli w punkcie $p = j\omega_0$ impedancje $z_i(p)$ i $z_j(p)$ mają zero transmisji klasy 4., to funkcje $y_{Aij}(p)$ i $y_{Aji}(p)$ muszą mieć zero w punkcie $p = j\omega_0$. W konsekwencji dla pulsacji $\omega = \omega_0$ skuteczne wzmocnienia mocy $G_{ij}(\omega^2)$ i $G_{ji}(\omega^2)$ osiągają zero krotności co najmniej $2(k_i + k_j + 1)$, gdzie $k_i \geq 0$ i $k_j \geq 0$.
- 4) Jeżeli w punkcie $p = j\omega_0$ impedancja $z_i(p)$ ma zero transmisji klasy 2. lub klasy 3., natomiast impedancja $z_j(p)$ nie ma zera transmisji w tym punkcie, to funkcje $y_{Aij}(p)$, $y_{Aji}(p)$ muszą mieć zero w punkcie $p = j\omega_0$. W konsekwencji dla pulsacji $\omega = \omega_0$ skuteczne wzmocnienia mocy $G_{ij}(\omega^2)$ oraz $G_{ji}(\omega^2)$ są równe zero krotności co najmniej $2(k_i + 1)$, gdzie $k_i > 0$.
- 5) Jeżeli w punkcie $p = j\omega_0$ impedancje $z_i(p)$ i $z_j(p)$ mają zero transmisji klasy 2. lub klasy 3., to funkcje $y_{Aij}(p)$ i $y_{Aji}(p)$ mogą posiadać jednokrotny biegun w punkcie $p = j\omega_0$. W konsekwencji dla pulsacji $\omega = \omega_0$ skuteczne wzmocnienia mocy $G_{ij}(\omega^2)$ i $G_{ji}(\omega^2)$ przyjmują wartość zero krotności co najmniej $2(k_i + k_j - 1)$, gdzie $k_i > 0$ i $k_j > 0$.

3.2. Metody analizy problemu dopasowania

Twierdzenia 3.1. i 3.2. wskazują, że rozwiązanie problemu dopasowania można podzielić na dwa etapy:

- 1) znalezienie klasy wszystkich macierzy $S(p)$ zawierających wymagane wzmocnienia mocy,
- 2) nałożenie na skonstruowaną zgodnie z punktem 1) klasę macierzy $S(p)$, warunków realizowalności fizycznej, czyli wypełnienie tez Twierdzenia 3.1. lub Twierdzenia 3.2.

Większość prac z zakresu dopasowania szerokopasmowego impedancji koncentruje się wokół zagadnienia 2) [14,20,21,30,72]. Zagadnienie 1), jak dotychczas, nie znalazło ogólnego rozwiązania. Osiągnięte dotychczas rezultaty w zakresie dopasowania szerokopasmowego w układach wielowrotowych stanowią jedynie częściowe rozwiązanie problemu, jakkolwiek prace [53,55,68,69,70] obejmują najbardziej pożądane w praktyce struktury n -wrotników, tzw. szeregowo i równoległe multipleksery (układy $n-1$ bezstratnych czwórników połączonych szeregowo lub równoległe we wrotach wejściowych).

3.2.1. Zagadnienie konstrukcji macierzy rozproszenia

Założmy, że dana jest diagonalna macierz niefosterowskich impedancji PR

$$\mathbf{Z}(p) = \text{diag}[z_1(p), \dots, z_n(p)]$$

oraz dane są skuteczne wzmocnienia mocy $G_{1i}(\omega^2)$ $i=2, \dots, n$, będące rzeczywistymi, wymiernymi, parzystymi i nieujemnymi funkcjami pulsacji rzeczywistej ω , spełniającymi konieczny warunek:

$$\sum_{i=2}^n G_{1i}(\omega^2) \leq 1 \quad \text{dla wszystkich } \omega.$$

Problem dopasowania szerokopasmowego stawia się zazwyczaj jako problem znalezienia bezstratnego n -wrotnika N , opisanego macierzą rozproszenia $S(p)$ znormalizowaną względem macierzy $\mathbf{Z}(p)$, takiego, który obciążony impedancjami $z_i(p)$ $i=1, \dots, n$ realizuje wymagane skuteczne wzmocnienia mocy.

Rozwiązanie problemu dopasowania szerokopasmowego w świetle Twierdzenia 3.2. wymaga na etapie 1) wyznaczenia klasy wszystkich macierzy $S(p)$ spełniających następujące postulaty:

I) $S(p)$ jest wymierną macierzą paraunitarną BR,

II) $|s_{1i}(j\omega)|^2 = G_{1i}(\omega^2)$ $i=2, \dots, n$.

III) Elementy diagonalne macierzy $S(p)$ mają postać

$$s_{ii}(p) = \rho_{ii}(p) B_i(p) \eta_{ii}(p) \quad i=1, \dots, n.$$

Funkcje $B_i(p)$ $i=1, \dots, n$ są funkcjami RA określonymi następująco:

niech $\text{Ev } z_i(p)$ oznacza część parzystą danej niefosterowskiej impedancji PR $z_i(p)$:

$$\text{Ev } z_i(p) = 0.5[z_i(p) + z_i^*(p)] = h_i(p) h_{i*}(p) \quad i=1, \dots, n.,$$

gdzie $h_i(p)$ i $h_{i*}^{-1}(p)$ są funkcjami minimalnego stopnia, analitycznymi w obszarze $\text{Re } p > 0$. Funkcję RA $h_i(p)/h_{i*}(p)$ można zawsze przedstawić jako

$$h_i(p)/h_{i*}(p) = A_i(p) B_i(p) \quad i=1, \dots, n.,$$

gdzie funkcję RA $A_i(p)$ utworzono ze wszystkich biegunów części parzystej impedancji $z_i(p)$ leżących w obszarze $\text{Re } p > 0$, z uwzględnieniem krotności tych biegunów. Funkcję RA $B_i(p)$ utworzono natomiast ze wszystkich zer części parzystej impedancji $z_i(p)$ leżących w obszarze

Re $p > 0$, z uwzględnieniem krotności tych zer. Ponadto $\rho_{ii}(p)$ są minimalnofazowymi BR współczynnikami odbicia oraz $\eta_{ii}(p)$ są dowolnymi funkcjami RA, takimi, że:

$$\left(\eta_{ii}(p), \frac{h_i(p)}{h_{i*}(p)} \right) = 1 \quad i=1, \dots, n,$$

co oznacza, że żadne zero funkcji $\eta_{ii}(p)$ nie jest zerem funkcji $\frac{h_i(p)}{h_{i*}(p)}$.

IV) Elementy macierzy $S(p)$ leżące poza główną przekątną mają postać

$$s_{ij}(p) = \rho_{ij}(p) B_i(p) B_j(p) \eta_{ij}(p) \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

gdzie $\rho_{ij}(p)$ są minimalnofazowymi wzmocnieniami BR oraz $\eta_{ij}(p)$ są funkcjami typu RA.

V) Skuteczne wzmocnienia mocy $G_{ij}(\omega^2)$ oraz impedancje $z_i(p)$ spełniają zależności 1)-5) z Rozdziału 3.1.5.

Nie wszystkie macierze $S(p)$ spełniające postulaty I)-V) są realizowalne fizycznie. Zagadnienie konstrukcji macierzy $S(p)$ spełniających postulaty I)-V) zostało generalnie rozwiązane jedynie dla czwórników [14,22,67]. Dla układów n -wrotowych, $n > 2$, problem konstrukcji wzmiankowanych macierzy $S(p)$ nie jest jeszcze w pełni rozwiązany. Część autorów przy pomocy dodatkowych warunków celowo zawęża klasę poszukiwanych macierzy $S(p)$, np. [16,17,30], lub jak w [53,55,66,68,69], autorzy ograniczają się do rozważania układów trójwrotowych lub układów multiplekserów.

Efektywne metody rozwiązania problemu dopasowania szerokopasmowego w układach wielowrotowych $n > 3$ są dane w [69] dla konfiguracji multipleksa. Podstawowym ograniczeniem wzmiankowanej pracy jest konieczność wyznaczenia i ustalenia współczynnika odbicia $s_{11}(p)$. Następnie dla danego $s_{11}(p)$ ustalane są warunki realizowalności czwórników składowych w oparciu o omówioną dalej metodę impedancji kompatybilnych.

W [70] opracowano metodę dopasowania szerokopasmowego przy użyciu bezstratnego n -wrotnika N o dowolnej strukturze, jednakże przy pewnych ograniczeniach. Nieznane elementy $S(p)$ wyznacza się metodą faktoryzacji Youli. Metoda ta daje w rezultacie niesymetryczną macierz $S(p)$, opisującą układ nieodwracalny. Najbardziej jednak istotne ograniczenie tkwi w fakcie, że wspomniana metoda faktoryzacji gwarantuje jedynie regularność macierzy $S(p)$, co generalnie nie wystarcza do spełnienia postulatów I)-V).

Na podstawie definicji skutecznego wzmocnienia mocy oraz postulatów I), II) zostanie wyprowadzony jeszcze jeden warunek konieczny, który spełniają macierze $S(p)$, będące macierzami rozproszenia fizycznie realizowalnych n -wrotników N .

Z postulatów I) i II) wynikają następujące równości:

$$\rho_{ii}(p) \rho_{ii}(-p) = s_{ii}(p) s_{ii}(-p) = G_{ii}(-p^2) \quad i=2, \dots, n, \quad (3.49)$$

$$\rho_{11}(p) \rho_{11}(-p) = s_{11}(p) s_{11}(-p) = 1 - \sum_{i=2}^n G_{ii}(-p^2), \quad (3.50)$$

gdzie $\rho_{11}(p)$ są minimalnofazowymi czynnikami współczynników transmisji $s_{11}(p)$ macierzy $S(p)$, zaś $\rho_{11}(p)$ jest minimalnofazowym czynnikiem współczynnika odbicia $s_{11}(p)$. Tym samym równania (3.49, 3.50) pozwalają obliczyć minimalnofazowe BR funkcje $\rho_{11}(p)$ i $\rho_{ii}(p)$ $i=2, \dots, n$.

Załóżmy, że istnieje macierz impedancyjna $Z_N(p)$ bezstratnego n -wrotnika N , Rys. 3.1b. Na podstawie (3.18) stwierdzamy:

$$Y_A(p) = [Z(p) + Z_N(p)]^{-1}, \quad (3.51)$$

gdzie $\mathbf{Y}_A(p)$ jest macierzą admitancyjną n -wrotnika dołączonego N_A , Rys. 3.1b, natomiast $\mathbf{Z}(p) = \text{diag}[z_1(p), \dots, z_n(p)]$ jest macierzą impedancyjną niefosterowskich impedancji PR. Prawa strona równania (3.51) jest zawsze dobrze określona, co wynika z Twierdzenia 5.9 [40]. Ponieważ n -wrotnik N jest bezstratny, tym samym:

$$\mathbf{Z}_N(p) + \mathbf{Z}_{N^*}(p) \equiv \mathbf{0}_n .$$

Jeżeli w punkcie $p=p_0$, $\text{Re } p_0 > 0$, wszystkie impedancje $z_i(p)$ $i=2, \dots, n$ mają wspólne zero transmisji klasy 1. krotności k_i , wówczas $\text{Ev } \mathbf{Z}(p)$ przyjmuje wartość zero w punkcie $p=p_0$ krotności $k = \min_{i=2, \dots, n} \{k_i\}$, zatem:

$$\mathbf{Z}_*(p)|_{p=p_0} + \mathbf{Z}_{N^*}(p)|_{p=p_0} = -[\mathbf{Z}(p) + \mathbf{Z}_N(p)]|_{p=p_0} . \quad (3.52)$$

Biorąc pod uwagę (3.51, 3.52), stwierdzamy:

$$\begin{aligned} \text{Ev } \mathbf{Y}_A(p)|_{p=p_0} &= \frac{1}{2} [\mathbf{Y}_A(p) + \mathbf{Y}_{A^*}(p)]|_{p=p_0} = \\ &= \frac{1}{2} [\mathbf{Z}(p) + \mathbf{Z}_N(p)]|_{p=p_0}^{-1} + \frac{1}{2} [\mathbf{Z}_*(p) + \mathbf{Z}_{N^*}(p)]|_{p=p_0}^{-1} = \\ &= \frac{1}{2} [\mathbf{Z}(p) + \mathbf{Z}_N(p)]|_{p=p_0}^{-1} - \frac{1}{2} [\mathbf{Z}(p) + \mathbf{Z}_N(p)]|_{p=p_0}^{-1} = \mathbf{0}_n . \end{aligned}$$

Na podstawie powyższej zależności wnioskujemy, że w punkcie $p=p_0$ zachodzi równość:

$$y_{Aij}(p_0) = -y_{Aji^*}(p_0) \quad i, j=1, \dots, n . \quad (3.53)$$

Równanie (3.53) jest prawdziwe niezależnie od tego, czy istnieje macierz $\mathbf{Z}_N(p)$, ponieważ macierz $\mathbf{Y}_A(p)$ jest zawsze dobrze określona. Biorąc pod uwagę kontynuację analityczną skutecznego wzmocnienia mocy (3.48) oraz (3.53), otrzymujemy w punkcie $p=p_0$ następującą zależność:

$$\begin{aligned} G_{ij}(-p^2)|_{p=p_0} &= \\ &= 4 \text{Ev } z_i(p) \text{Ev } z_j(p) y_{Aji}(p) y_{Aji^*}(p)|_{p=p_0} = \\ &= -4 \text{Ev } z_i(p) \text{Ev } z_j(p) y_{Aji}^2(p)|_{p=p_0} \quad i \neq j, \quad i, j=1, \dots, n . \end{aligned} \quad (3.54)$$

Ponieważ macierz $\mathbf{Y}_A(p)$ jest PR, zatem w punkcie $p=p_0$ funkcja $G_{ij}(-p^2)|_{p=p_0}$ ma zero krotności co najmniej k_i+k_j .

Zakładamy, że dane są niefosterowskie impedancje PR $z_i(p)$ $i=1, \dots, n$ oraz skuteczne wzmocnienia mocy $G_{ii}(\omega^2)$ $i=2, \dots, n$, będące wymiernymi, rzeczywistymi, parzystymi i nieujemnymi funkcjami pulsacji rzeczywistej ω . Macierze $\mathbf{S}(p)$ znormalizowane względem impedancji $z_i(p)$, będące w danym zagadnieniu dopasowania szerokopasmowego, macierzami rozproszenia fizycznie realizowalnych n -wrotników N , posiadających wymagane skuteczne wzmocnienia mocy $G_{ii}(\omega^2)$ $i=2, \dots, n$, spełniają następujące, konieczne warunki.

- 1) Macierz $\mathbf{S}(p)$ jest wymierną macierzą paraunitarną BR.
- 2) Zachodzą następujące równości:

$$\rho_{ii}(p) \rho_{ii}(-p) = s_{ii}(p) s_{ii}(-p) = G_{ii}(-p^2) \quad i=2, \dots, n ,$$

$$\rho_{11}(p) \rho_{11}(-p) = s_{11}(p) s_{11}(-p) = 1 - \sum_{i=2}^n G_{ii}(-p^2) .$$

- 3) Dla każdego ω spełniona jest nierówność:

$$\sum_{i=2}^n G_{1i}(\omega^2) \leq 1 \quad .$$

4) Elementy diagonalne macierzy $S(p)$ mają formę

$$s_{ii}(p) = \rho_{ii}(p) B_i(p) \eta_{ii}(p) \quad i=1, \dots, n, \quad ,$$

przy czym

$$\left(\eta_{ii}(p), \frac{h_i(p)}{h_{i*}(p)} \right) = 1 \quad i=1, \dots, n. \quad .$$

5) Elementy macierzy $S(p)$ leżące poza główną przekątną mają postać

$$s_{ij}(p) = \rho_{ij}(p) B_i(p) B_j(p) \eta_{ij}(p) \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad .$$

6) Jeżeli w punkcie $p=p_0$, $\operatorname{Re} p_0 > 0$, każda impedancja $z_i(p)$ $i=1, \dots, n$ posiada zero transmisji klasy 1 krotności k_i , to funkcja $G_{ij}(-p^2)_{|p=p_0}$ będąca kontynuacją analityczną skutecznego wzmocnienia mocy, ma zero krotności co najmniej $k_i + k_j$.

7) Niech $2k_1, 2k_i$ będą krotnościami zer $\operatorname{Re} z_1(j\omega)$, $\operatorname{Re} z_i(j\omega)$ w punkcie $p=j\omega_0$, w którym impedancje $z_i(p)$, $z_1(p)$ mają zero transmisji klasy 2. lub klasy 3. lub klasy 4. W każdym punkcie $p=j\omega_0$ zachodzi:

a) Jeżeli w punkcie $p=j\omega_0$ impedancja $z_1(p)$ ma zero transmisji klasy 4., natomiast impedancja $z_i(p)$ nie ma zera transmisji w tym punkcie, to dla pulsacji $\omega=\omega_0$ skuteczne wzmocnienia mocy $G_{1i}(\omega^2)$ i $G_{i1}(\omega^2)$ mają zero krotności co najmniej $2(k_1+1)$, gdzie $k_1 \geq 0$.

Jeżeli w punkcie $p=j\omega_0$ impedancja $z_i(p)$ ma zero transmisji klasy 4., natomiast impedancja $z_1(p)$ nie ma zera transmisji w tym punkcie, to dla pulsacji $\omega=\omega_0$ skuteczne wzmocnienia mocy $G_{1i}(\omega^2)$ i $G_{i1}(\omega^2)$ mają zero krotności co najmniej $2(k_i+1)$, gdzie $k_i \geq 0$.

b) Jeżeli w punkcie $p=j\omega_0$ impedancja $z_1(p)$ ma zero transmisji klasy 4., natomiast impedancja $z_i(p)$ ma zero transmisji klasy 2. lub klasy 3. w tym punkcie, to dla pulsacji $\omega=\omega_0$ skuteczne wzmocnienia mocy $G_{1i}(\omega^2)$ i $G_{i1}(\omega^2)$ osiągają zero krotności co najmniej $2(k_1+k_i)$, gdzie $k_1 \geq 0$ i $k_i > 0$.

Jeżeli w punkcie $p=j\omega_0$ impedancja $z_i(p)$ ma zero transmisji klasy 4., natomiast impedancja $z_1(p)$ ma zero transmisji klasy 2. lub klasy 3. w tym punkcie, to dla pulsacji $\omega=\omega_0$ skuteczne wzmocnienia mocy $G_{1i}(\omega^2)$ i $G_{i1}(\omega^2)$ mają zero krotności co najmniej $2(k_1+k_i)$, gdzie $k_i \geq 0$ i $k_1 > 0$.

c) Jeżeli w punkcie $p=j\omega_0$ impedancje $z_1(p)$ i $z_i(p)$ mają zero transmisji klasy 4., to dla pulsacji $\omega=\omega_0$ skuteczne wzmocnienia mocy $G_{1i}(\omega^2)$, $G_{i1}(\omega^2)$ osiągają zero krotności co najmniej $2(k_1+k_i+1)$, gdzie $k_1 \geq 0$ i $k_i \geq 0$.

d) Jeżeli w punkcie $p=j\omega_0$ impedancja $z_1(p)$ ma zero transmisji klasy 2. lub klasy 3., natomiast impedancja $z_i(p)$ nie ma zera transmisji w tym punkcie, to dla pulsacji $\omega=\omega_0$ skuteczne wzmocnienia mocy $G_{1i}(\omega^2)$ i $G_{i1}(\omega^2)$ mają zero krotności co najmniej $2(k_1+1)$, gdzie $k_1 > 0$.

Jeżeli w punkcie $p=j\omega_0$ impedancja $z_i(p)$ ma zero transmisji klasy 2. lub klasy 3., natomiast impedancja $z_1(p)$ nie ma zera transmisji w tym punkcie, to dla pulsacji $\omega=\omega_0$ skuteczne wzmocnienia mocy $G_{1i}(\omega^2)$ i $G_{i1}(\omega^2)$ osiągają zero krotności co najmniej $2(k_i+1)$, gdzie $k_i > 0$.

e) Jeżeli w punkcie $p=j\omega_0$ impedancje $z_1(p)$ i $z_i(p)$ mają zero transmisji klasy 2. lub klasy 3., to dla pulsacji $\omega=\omega_0$ skuteczne wzmocnienia mocy $G_{1i}(\omega^2)$ i $G_{i1}(\omega^2)$ przyjmują wartość zero krotności co najmniej $2(k_1+k_i-1)$, gdzie $k_1 > 0$ i $k_i > 0$.

Klasę wszystkich macierzy $S(p)$ spełniających postulaty 1)-7), otrzymaną na podstawie pewnej metody konstrukcji takich macierzy, nazywać będziemy najbardziej ogólną postacią (formą) macierzy $S(p)$. Z powyższego określenia wynika, że pierwszy etap procedury dopasowania

szerokopasmowego impedancji polega na określeniu metody konstrukcji najbardziej ogólnej formy macierzy $\mathbf{S}(p)$.

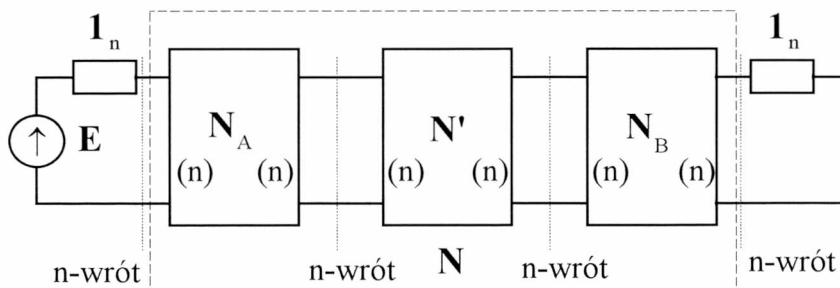
W przypadku n -wrotnika N określenie wzmiankowanej klasy macierzy jest bardzo skomplikowane. Jedyne dla trójwrotnika, $n=3$, zostały znalezione wzory wyrażające bezpośrednio funkcje $s_{22}(p)$, $s_{33}(p)$, $s_{23}(p)$ i $s_{32}(p)$ poprzez funkcje $s_{11}(p)$, $s_{12}(p)$, $s_{13}(p)$, $s_{21}(p)$, $s_{31}(p)$, [53,55,63,68]. Konstrukcja macierzy rozproszenia trójwrotnika zawarta w powyższych pracach jest jednak nadal złożona. Na podstawie cytowanych prac, w Rozdziale 6 podana zostanie nowa metoda konstrukcji klasy macierzy paraunitarnych $\mathbf{S}(p)$, zawierającej jako podklasę, wszystkie macierze rozproszenia fizycznie realizowalnych w danym problemie dopasowania, bezstratnych i odwracalnych trójwrotników.

Postulaty 1)-7) można podzielić na dwie rozłączne klasy. Na spełnienie postulatów 1), 4), 5) mamy wpływ poprzez odpowiedni wybór funkcji RA $\eta_{ii}(p)$ $i=1,\dots,n$ oraz funkcji RA $\eta_{ij}(p)$ $i \neq j$, $i,j=1,\dots,n$. Pozostałe postulaty tworzą zbiór warunków koniecznych, narzuconych na dane projektowe, tzn: impedancje PR $z_i(p)$ $i=1,\dots,n$, i wymagane wzmocnienia mocy $G_{1i}(\omega^2)$ $i=2,\dots,n$. Warunki 2), 3), 6), 7) muszą zostać spełnione przez przyjęte dane projektowe, aby problem dopasowania szerokopasmowego impedancji posiadał rozwiązanie.

W ostatnich latach opublikowano kilka prac dotyczących postaci kanonicznej macierzy $\mathbf{S}(p)$ trójwrotnika [6,38,39]. We wzmiankowanych pracach do konstrukcji $\mathbf{S}(p)$ stosuje się dziesięć wielomianów powiązanych wzajemnie zależnościami algebraicznymi. Lektura wspomnianych artykułów pozwala zdaniem autora stwierdzić, że uzyskane tam wyniki nie dają się adaptować dla celów dopasowania szerokopasmowego impedancji. Głównym powodem braku możliwości zastosowania wyników prac [6,38,39] dla rozwiązywania zagadnień dopasowania szerokopasmowego w układach trójwrotowych jest konieczność uprzedniego określenia wyznacznika macierzy $\mathbf{S}(p)$, zawierającego wszystkie zera transmisji trójwrotnika. W zagadnieniach projektowania układów dopasowujących nie znamy a priori wszystkich zer transmisji układu i co więcej nie mamy wystarczającej informacji jak należałoby wybierać nieznane zera transmisji.

3.2.2. Metoda dekompozycji kaskadowej

Metodę dekompozycji kaskadowej można traktować jako alternatywę dla stosowania Twierdzenia 3.1. w problemie dopasowania szerokopasmowego impedancji z zastosowaniem układów $2n$ wrotowych. Idea metody polega na wydzielaniu z bezstratnego $2n$ wrotnika N obciążonego rezystorami, bezstratnych $2n$ wrotników N_A , N_B , tak aby $2n$ wrotnik N' pozostał nadal bezstratny, Rys. 3.4.



Rys. 3.4. Ilustracja wydzielania $2n$ wrotników N_A , N_B w metodzie dekompozycji kaskadowej.

Macierz rozproszenia $\mathbf{S}(p)$ o wymiarach $2n \times 2n$ bezstratnego $2n$ -wrotnika N znormalizowana macierzami jednostkowymi $\mathbf{1}_n$ zawiera wymagane $2n-1$ skutecznych wzmocnień mocy, natomiast $2n$ wrotniki N_A , N_B zakończone macierzami $\mathbf{1}_n$ są modelami Darlingtona impedancji wewnętrznych n generatorów i n obciążeń. Aby wykorzystać metodę dekompozycji kaskadowej do rozwiązywania problemu dopasowania, potrzebna jest umiejętność skonstruowania macierzy $\mathbf{S}(p)$ zawierających wymagane wzmocnienia mocy. Tym samym metoda dekompozycji kaskadowej jest użyteczna wyłącznie dla etapu 2) procedury dopasowania.

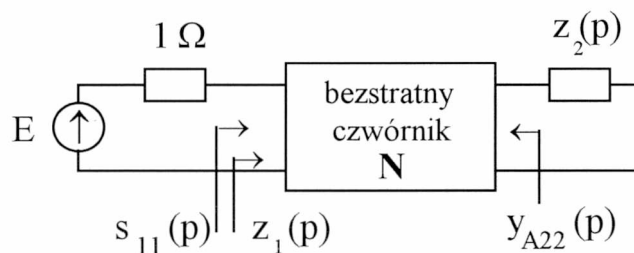
Warunki konieczne i wystarczające jednostronnego wydzielania $2n$ -wrotnika N_A lub N_B z odwracalnego $2n$ -wrotnika N podano w [81]. Później rozszerzono wzmiankowaną pracę na jednoczesne wydzielanie N_A , N_B z odwracalnego lub nieodwracalnego $2n$ -wrotnika N [65]. W pracy [65] pokazano także równoważność Twierdzenia 3.1. i metody dekompozycji kaskadowej w aspekcie problemu dopasowania. Ponadto w [65] wykazano, że metoda dekompozycji kaskadowej stanowi uogólnienie Twierdzenia 3.1. na zagadnienie dopasowania pasywnych $2n$ wrotników opisanych pełną macierzą $\mathbf{Z}(p)$, w miejsce diagonalnej macierzy impedancyjnej izolowanych obciążeń.

Ponieważ w niniejszej pracy rozpatrywane są tylko pojedyncze obciążenia, dla których macierz $\mathbf{Z}(p)$ jest diagonalna, zatem metoda dekompozycji kaskadowej jest równoważna zastosowaniu Twierdzenia 3.1. lub Twierdzenia 3.2. Ponadto metoda dekompozycji kaskadowej dotyczy wyłącznie układów $2n$ wrotowych. Reasumując metoda dekompozycji kaskadowej nie będzie stosowana w dalszej części pracy.

Należy jednak zaznaczyć, iż metoda dekompozycji kaskadowej jest dla rozwiązywania problemu dopasowania szerokopasmowego przy użyciu bezstratnego czwórnika (i jak dotychczas tylko dla czwórnika) metodą efektywną i może być stosowana zamiennie z metodą konstrukcji najbardziej ogólnej formy macierzy $\mathbf{S}(p)$ czwórnika sprzęgającego N , [11]. Metodę syntezy kaskadowej, służącej do wydzielania bezstratnych czwórników N_A , N_B z bezstratnego czwórnika N , można znaleźć w pracy [79].

3.2.3. Zastosowanie impedancji kompatybilnych

Ostatnim znanym sposobem rozwiązywania problemu dopasowania w ujęciu analitycznym jest podejście oparte o tzw. impedancje kompatybilne. Dwie niefosterowskie impedancje PR $z_1(p)$ i $z_2(p)$ nazywamy kompatybilnymi, jeżeli istnieje bezstratny czwórnik N , który zakończony impedancją $z_2(p)$ posiada impedancję wejściową równą $z_1(p)$, Rys. 3.5.



Rys. 3.5. Ilustracja pojęcia impedancji kompatybilnych.

Zagadnienie istnienia czwórnika N , Rys. 3.5. zostało w 1965 r. rozwiązane przez Wohlersa, [76]. Przytoczmy za [21] twierdzenie o impedancjach kompatybilnych, będące modyfikacją twierdzenia danego w [76], w wersji obejmującej czwórnik N odwracalny i nieodwracalny.

Twierdzenie 3.3. (kompatybilność impedancji)

Dwie niefosterowskie PR impedancje $z_1(p)$, $z_2(p)$ są kompatybilne wtedy i tylko wtedy, gdy

- 1) Jeżeli w punkcie $p=j\omega_0$ impedancja $z_2(p)$ ma biegun, natomiast impedancja $z_1(p)$ nie ma bieguna, to krotność zera części parzystej $Ev\ z_1(p)$ impedancji $z_1(p)$ jest co najmniej o dwa większa od krotności zera $Ev\ z_2(p)$. W pozostałych przypadkach w punktach $p=p_0$ obszaru $Re\ p \geq 0$, część parzysta $Ev\ z_1(p)$ impedancji $z_1(p)$ zawiera wszystkie zera $Ev\ z_2(p)$ z co najmniej tymi samymi krotnościami.
- 2) Istnieje funkcja RA $\eta(p)$ taka, że admitancja

$$y_{A22}(p) = \frac{1}{2h_2(p)} \left(\frac{h_2(p)}{h_{2*}(p)} - \frac{1-z_{1*}(p)}{1+z_1(p)} \cdot \frac{k_1(p)}{k_{1*}(p)} \cdot B_2^2(p) \cdot \eta(p) \right)$$

jest analityczna w obszarze $\text{Re } p > 0$, gdzie funkcję $k_1(p)$ określono jako minimalnofazową faktoryzację $\text{Ev } z_1(p) = k_1(p)k_{1*}(p)$, zaś funkcje $h_2(p)$ i $B_2(p)$ zdefiniowano tak jak w (3.38) i (3.39). Ponadto:

- a) w punktach $p = j\omega_0$ na osi $j\omega$, w których impedancja $z_2(p)$ jest analityczna, admitancja $y_{A22}(p)$ może posiadać co najwyżej jednokrotne bieguny o dodatnich residuach,
- b) w punktach $p = j\omega_0$ na osi $j\omega$, w których impedancja $z_2(p)$ ma biegun, granica $\lim_{p \rightarrow j\omega_0} z_2(p)y_{A22}(p)$ jest rzeczywista i nie większa od jedności.
- 3) Jeżeli czwórnik N jest odwracalny, to funkcja RA $\eta(p)$ musi być pełnym kwadratem funkcji wymiernej oraz suma krotności zer $\text{Ev } z_1(p)$ i $\text{Ev } z_2(p)$ jest parzysta w każdym zerze $\text{Ev } z_2(p)$ w obszarze $\text{Re } p > 0$.

Zastosowanie Twierdzenia 3.3. do rozwiązania problemu dopasowania szerokopasmowego składa się z trzech etapów. Zakładamy, że dane skuteczne wzmocnienie mocy $G(\omega^2)$ jest nieujemną, wymierną, parzystą funkcją ω , spełniającą ponadto konieczne ograniczenie:

$$0 \leq G(\omega^2) \leq 1 \quad \text{dla każdego } \omega.$$

Ponadto dana jest niefosterowska impedancja PR $z_2(p)$. W pierwszym etapie analogicznie jak w (3.20) wyznaczamy minimalnofazowy współczynnik odbicia $\rho_{11}(p)$, przez faktoryzację wyrażenia

$$\rho_{11}(p)\rho_{11*}(p) = 1 - G(-p^2),$$

oraz wyznaczamy funkcje $h_2(p)$ i $B_2(p)$ tak jak w (3.38) i (3.39). Następnie obliczamy pewien współczynnik odbicia $s_{11}(p)$, Rys. 3.5., poprzez ustalenie funkcji RA $\eta_{11}(p)$:

$$s_{11}(p) = \rho_{11}(p)\eta_{11}(p),$$

wybranej tak, aby impedancja $z_1(p)$, Rys. 3.5., obliczona jako:

$$z_1(p) = \frac{1 + s_{11}(p)}{1 - s_{11}(p)},$$

spełniała punkt 1) tezy Twierdzenia 3.3. W ostatnim etapie procesu dopasowania znajdujemy funkcję RA $\eta(p)$, taką aby zachodził punkt 2) tezy Twierdzenia 3.3.

Zastosowaniem impedancji kompatybilnych w problemie dopasowania szerokopasmowego zajmowało się wielu autorów [14,17,20,21,48]. Ważnym efektem powyższych prac jest wykazanie równoważności Twierdzenia 3.3. i ograniczeń Youli. Udowodniono [14,48], że impedancje PR $z_1(p)$ i $z_2(p)$ są kompatybilne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\hat{s}_{22}(p) = \frac{1 - z_{1*}(p)}{1 + z_1(p)} \cdot \frac{k_1(p)}{k_{1*}(p)} \cdot B_2(p) \cdot \eta(p)$$

jest współczynnikiem odbicia BR, spełniającym ograniczenia Youli w zerach transmisji impedancji $z_2(p)$. Syntezę układów realizujących impedancje kompatybilne można przeprowadzić w oparciu o pracę [2] dla układów odwracalnych lub [3,32] dla układów nieodwracalnych.

Przy wyznaczaniu admitancji $y_{A22}(p)$ pośrednio oblicza się współczynnik odbicia $s_{22}(p)$. Z drugiej strony, w celu określenia współczynnika odbicia $s_{22}(p)$ można skorzystać z własności paraunitarności macierzy $\mathbf{S}(p)$ czwórnika z Rys. 3.5., czyli:

$$s_{22}(p) = -s_{11*}(p) \frac{s_{21}(p)}{s_{12*}(p)} = -s_{11*}(p) \frac{s_{12}(p)}{s_{21*}(p)}.$$

Z powyższej zależności widać, że uprzednie ustalenie współczynnika odbicia $s_{11}(p)$ wprowadza ograniczenia na fizycznie dopuszczalny, tzn. BR, współczynnik $s_{22}(p)$. Powyższy fakt istotnie ogranicza możliwość uzyskania dopasowania szerokopasmowego dwóch niefosterowskich impedancji PR przy użyciu bezstratnego czwórnika w metodzie impedancji kompatybilnych. W metodach dopasowania impedancji przy pomocy czwórników, bazujących na konstrukcji najbardziej ogólnej postaci macierzy $S(p)$, np. [22,67], współczynniki odbicia $s_{11}(p)$ i $s_{22}(p)$ buduje się jednocześnie, poprzez wybór odpowiednich funkcji typu RA. Tym samym metoda impedancji kompatybilnych jest równoważna wcześniej omówionym metodom dopasowania szerokopasmowego jedynie dla przypadku dopasowania jednostronnego w układzie dwuwrotowym. Dla rozwiązywania zagadnień dopasowania dwustronnego w układach dwuwrotowych, metoda impedancji kompatybilnych wprowadza dodatkowe ograniczenia, w porównaniu z omówionymi wcześniej, innymi metodami analizy zagadnienia dopasowania szerokopasmowego.

Definicję kompatybilności łatwo jest rozszerzyć na większą niż dwie liczbę impedancji. Jakkolwiek sformułowanie twierdzenia analogicznego do Twierdzenia 3.3. dla układów $n > 2$ wrotowych, pozwalającego efektywnie rozwiązywać zagadnienia dopasowania szerokopasmowego impedancji, nie wydaje się możliwe. Już w przypadku trójwrotnika wyrażenia na współczynniki odbicia $s_{22}(p)$ i $s_{33}(p)$ stają się mocno skomplikowane (Dodatek 3). Dla układów wielowrotowych $n > 3$, w ogóle nie są znane metody jawnego określania współczynników odbicia $s_{ii}(p)$ $i=1, \dots, n$, w kontekście konstrukcji macierzy rozproszenia przy rozwiązywaniu problemu dopasowania. W przypadku ogólnym spełnienie postulatów 1)-6) z Rozdziału 3.2.1. wymaga zastosowania interpolacji macierzy $S(p)$ w pewnych punktach obszaru $\text{Re } p > 0$ macierzą paraunitarną $V(p)$, [43,44,45]. Dla macierzy $S(p)$ stopnia $n > 3$ nie są znane sposoby jawnego wyznaczania funkcji $s_{ii}(p)$ $i=2, \dots, n$ w oparciu o postulaty 1)-6) z Rozdziału 3.2.1. W konsekwencji pojęcie kompatybilności impedancji nie wnosi nic nowego do realizacji pierwszego etapu procesu dopasowania. Także w dostępnej literaturze nie spotkano pracy traktującej o dopasowaniu układów n -wrotowych, $n > 2$, przy użyciu impedancji kompatybilnych.

Pomimo sygnalizowanych ograniczeń metoda impedancji kompatybilnych znajduje pewne zastosowanie. W przypadku ograniczenia konfiguracji n -wrotnika N do układu multipleksa, znaleziono sposób rozwiązania problemu dopasowania i problemu realizacji wzmocnień napięciowych w oparciu o prezentowaną metodę, [64,69].

3.2.4. Numeryczne metody dopasowania szerokopasmowego, omówienie

Numeryczne metody dopasowania szerokopasmowego zostały zaproponowane po raz pierwszy przez Carlina, [9]. Problem dopasowania jest stawiany nieco inaczej niż w metodach analitycznych. Nie jest potrzebna znajomość funkcji PR $z_g(p)$ opisującej impedancję generatora. Wystarczy bowiem znać wartości tej impedancji w skończonym zbiorze punktów, otrzymanym na podstawie pomiarów $z_g(p)$ na osi $j\omega$, tzn. $z_g = r_g + jx_g$. Celem metod numerycznego dopasowania jest znalezienie takiego bezstratnego czwórnika N , który zasilany przez generator o impedancji wewnętrznej z_g i obciążony rezystancją r_0 , będzie zapewniać największą dopuszczalną wartość skutecznego wzmocnienia mocy w wymaganym pasmie częstotliwości. Rozwiązanie problemu dopasowania sprowadza się do określenia pewnej funkcji celu i znalezienia ekstremum tej funkcji przy użyciu odpowiednio dobranej procedury numerycznej. Funkcją celu najczęściej jest skuteczne wzmocnienie mocy, współczynnik odbicia lub współczynnik fali stojącej (ang. standing wave ratio SWR).

W pracach z zakresu dopasowania numerycznego [1,9,10,11,23,24,26,27,28] stosowane są trzy metody rozwiązania problemu dopasowania. Pierwszy sposób oparty jest o transformatę Hilberta $\mathcal{N}[f(\omega)]$ ($f(\omega)$ jest rzeczywistą funkcją pulsacji ω) wiążącą na osi $j\omega$ część rzeczywistą i urojoną danej impedancji PR z dokładnością do funkcji reaktancji. Oznaczmy przez $z_w(j\omega) = r(\omega) + jx(\omega)$, gdzie $x(\omega) = \mathcal{N}[r(\omega)]$, impedancję wejściową bezstratnego czwórnika N , pobudzanego przez generator o impedancji $z_g(j\omega) = r_g(\omega) + jx_g(\omega)$. Kwadrat modułu współczynnika odbicia na osi $j\omega$ wyniesie

$$|s_{11}|^2 = \frac{(r_g - r)^2 + (x_g + x)^2}{(r_g + r)^2 + (x_g + x)^2}.$$

W [9,11] aproksymuje się poszukiwaną funkcję $z_w(j\omega)$ odcinkami funkcji liniowych. W efekcie funkcja $|s_{11}|^2$ wyrażona jest przez zbiór parametrów funkcji liniowych. Minimalizując $|s_{11}|^2$ po w/w parametrach w zadanym przedziale częstotliwości, znajdujemy numeryczne rozwiązanie problemu dopasowania. W [11] rozszerzono omawianą metodę dla przypadku dopasowania dwóch danych niefosterowskich impedancji PR generatora i obciążenia (dopasowanie dwustronne).

Inny sposób dopasowania, polegający na optymalizacji funkcji celu po elementach czwórnika L, C o uprzednio założonej strukturze, zastosowano w [23,24,26,27,28]. Na uwagę zasługują zaawansowane metody optymalizacji stochastycznej (stochastic Newton-Gauss algorithm, recursive stochastic equalization algorithm) użyte w [27]. Opracowano też metody numerycznego dopasowania oparte o parametry falowe (image parameter method), [28]. Metoda opisana w [28] jest przydatna głównie do znajdowania punktu startowego dla numerycznych procedur dopasowania zamieszczonych w pracach [11,27].

Najogólniejsza lecz równocześnie najbardziej skomplikowana metoda dopasowania numerycznego polega na optymalizacji współczynników funkcji wymiennych tworzących współczynnik odbicia $s_{11}(j\omega)$. Metody takie opisano w [11,14].

Metody dopasowania numerycznego ze względu na swoją użyteczność praktyczną znajdują się stale w fazie intensywnego rozwoju. Przykładem może być poszukiwanie efektywnych algorytmów dopasowania szerokopasmowego opartych o kryterium minimax. Problem powyższy poruszano w [1,10].

Numeryczne metody dopasowania pomimo niewątpliwych zalet praktycznych posiadają jednak pewne niedogodności. Nie są znane metody numerycznego dopasowania dla układów n-wrotowych, $n > 2$, bez uprzedniego ustalenia struktury układu. Również możliwość szacowania fizycznie dopuszczalnego poziomu wzmocnienia daje tylko teoria dopasowania analitycznego.

Dalsza część niniejszej pracy dotyczy analitycznych metod dopasowania. Zrozumienie zagadnień dopasowania na gruncie analitycznym stanowi bowiem zdaniem autora punkt wyjścia do stworzenia w przyszłości metod numerycznego dopasowania przy pomocy bezstratnych n-wrotników, ze szczególnym uwzględnieniem układów trójwrotowych. Tym samym w niniejszej pracy skupiono uwagę na rozwiązaniu problemu dopasowania szerokopasmowego impedancji dla układów trójwrotowych w ujęciu analitycznym

Pewne metody numeryczne zostały w niniejszej pracy wykorzystane w Rozdziale 4, przy ustalaniu nowych procedur dopasowania wybranych impedancji PR. Część numeryczna procedur dopasowania ogranicza się do znajdowania ekstremum funkcji, posiadającej wyłącznie jedno ekstremum w danym przedziale [35], zatem wykorzystywane są tylko tzw. metody numeryczne dokładne [46]. Metody numeryczne dokładne były już w pewnych przypadkach stosowane w zagadnieniach dopasowania szerokopasmowego, rozpatrywanych w ujęciu analitycznym, [14,18,19,73].

Należy wspomnieć, że interesujące prace z zakresu dopasowania numerycznego można znaleźć w literaturze rosyjskiej, np: [23,24,26]. Dużą zaletą wzmiankowanych prac jest skoncentrowanie się na rozwiązaniu problemów praktycznych, ściśle związanych z zakresem zastosowań danych układów dopasowujących, np: układy radiokomunikacyjne, czy układy mikrofalowe realizowane w danej technologii.

W [23] przedstawiono syntetycznie metody dopasowania szerokopasmowego w układach dwuwrotowych, tj. klasyczną teorię dopasowania w ujęciu analitycznym i syntezy parametryczną opartą o metody numeryczne. Istotną zaletą tej ostatniej metody jest możliwość uwzględnienia dodatkowych parametrów stawianych projektowanym obwodom, jak wpływ strat w rzeczywistych elementach L,C, uwzględnienie elementów pasożytniczych, możliwość szybkiego i efektywnego przeprowadzenia analizy wrażliwościowej. Omawiane w [23] metody zostały oprogramowane i są dostępne w formie programu komputerowego DIASP (program komercyjny, rozprowadzany przez autora prac [23,24]). W praktyce pakiet oprogramowania DIASP [23,24], przeznaczony zarówno

dla numerycznego jak i analitycznego rozwiązywania zagadnień dopasowania szerokopasmowego stanowi wygodne i łatwe w zastosowaniach inżynierskich narzędzie projektowe.

W [23,26] podano numeryczne metody optymalizacji układów n -wrotowych, sprowadzając rozwiązanie problemu dopasowania przy użyciu n -wrotnika do rozwiązania problemu dopasowania impedancji w ' n ' układach dwuwrotowych (nie jest to jednak metoda generalna, dla dowolnego n -wrotnika). Ciekawą cechą jednej z metod dopasowania, opisanej w [26], jest wybór funkcji celu, będącej unormowaną formą hermitowską [36,37] macierzy $\mathbf{I}_n - \mathbf{S}(p)\mathbf{S}^*(p)$ na osi $j\omega$, czyli tzw. ilorazem Rayleigha, gdzie macierz $\mathbf{S}(p)$ jest macierzą rozproszenia stratnego n -wrotnika N . W [23,24,26] jako funkcję celu przyjęto odwrotność współczynnika fali stojącej SWR. Zaletą takiego wyboru funkcji celu jest duża wrażliwość zmian SWR ze względu na optymalizowane parametry, co polepsza i przyspiesza działanie zastosowanych procedur numerycznych. Z inżynierskiego punktu widzenia optymalizowanie SWR jest bardziej efektywne niż optymalizacja wzmocnienia mocy lub współczynnika odbicia, jak to ma miejsce w anglosaskiej literaturze przedmiotu [1,9,10,11,27,28].

3.3. Wnioski

Przegląd metod analizy problemu dopasowania szerokopasmowego nasuwa kilka spostrzeżeń. Po pierwsze dla określenia warunków realizowalności fizycznej danej macierzy rozproszenia $\mathbf{S}(p)$ bezstratnego n -wrotnika N , znormalizowanej względem macierzy $\mathbf{Z}(p)$ niefosterowskich impedancji PR, najbardziej dogodne do zastosowania jest Twierdzenie 3.2. Po drugie każda z omówionych metod dopasowania, oprócz oczywiście metod numerycznych, wymaga skonstruowania pewnej klasy macierzy $\mathbf{S}(p)$ wykorzystywanej następnie do ustalenia warunków realizowalności fizycznej układu dopasowującego. Macierz $\mathbf{S}(p)$, jeżeli jest macierzą rozproszenia n -wrotnika N , to spełnia postulaty 1)-7) z Rozdziału 3.2.1. Postulaty 2), 3), 6), 7) muszą zostać spełnione wprost przez dane projektowe, natomiast na spełnienie pozostałych postulatów można wpływać między innymi przez odpowiedni wybór funkcji typu RA. Problem realizacji wzmiankowanych postulatów nie znalazł jak dotąd pełnego rozwiązania dla układów n -wrotowych, $n > 2$.

W zakresie projektowania dopasowujących układów n -wrotowych, $n > 3$, zagadnienie dopasowania szerokopasmowego impedancji daje się efektywnie rozwiązać jedynie dla układów w konfiguracji n -wrotowego multipleksa [69]. W niniejszej pracy zostanie także przedstawiona metoda realizacji układu dopasowującego w konfiguracji bezstratnego trójwrotowego multipleksa zwanego dalej diplekserem. Ze względów praktycznych bezstratny diplekser jest niewątpliwie najodpowiedniejszym trójwrotowym układem dopasowującym.

Otrzymane przez autora metody i procedury realizacji dwu i trójwrotowych układów dopasowujących, a także rozwiązania układowe są treścią następnych rozdziałów.

4. DOPASOWANIE SZEROKOPASMOWE IMPEDANCJI PRZY UŻYCIU BEZSTRATNYCH CZWÓRNIKÓW

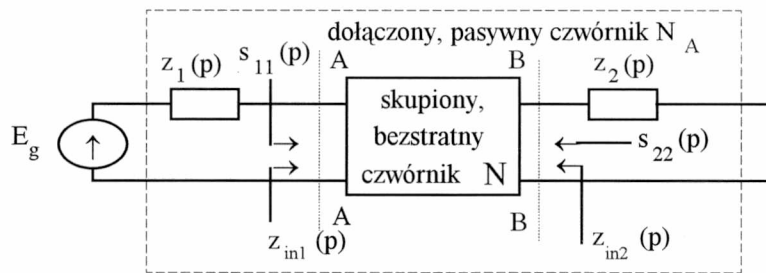
4.1. Sformułowanie problemu

Problem dopasowania szerokopasmowego niefosterowskiej impedancji PR przy użyciu bezstratnego czwornika został już w ogólnej postaci rozwiązany [29,78]. Rozszerzenie cytowanych prac na dopasowanie dwóch impedancji można znaleźć w [22] dla układu odwracalnego i w [67] dla układu nieodwracalnego. Metoda dopasowania impedancji przy użyciu bezstratnego czwornika bazuje na wykorzystaniu Twierdzenia 3.2. Przed zastosowaniem Twierdzenia 3.2. należy skonstruować wymaganą klasę macierzy rozproszenia $S(p)$ o wymiarach 2×2 spełniającą postulaty 1)-6) z Rozdziału 3.2.1.

W niniejszym rozdziale podane zostaną nowe formuły szerokopasmowego dopasowania impedancji dla wybranych modeli obciążeń, najbardziej przydatnych do wykorzystania w praktycznych zagadnieniach telekomunikacyjnych. Ponadto zdefiniuje się dwa odrębne kryteria optymalnego dopasowania impedancji. W celu wyznaczenia nowych procedur dopasowania szerokopasmowego rozpatrzone zostaną dolno i pasmowo-przepustowe skuteczne wzmocnienia mocy typu Butterwortha lub Czebyszewa.

4.1.1. Konstrukcja macierzy rozproszenia

Rozważmy układ bezstratnego czwornika N , Rys. 4.1. pobudzanego przez generator o niefosterowskiej impedancji wewnętrznej $z_1(p)$ i obciążonego niefosterowską impedancją $z_2(p)$. Zakładamy, że układ realizuje wymagane skuteczne wzmocnienie mocy $G(\omega^2)$, spełniające ograniczenie (3.19).



Rys. 4.1. Czwórnik N , dopasowujący niefosterowską impedancję PR $z_1(p)$ do niefosterowskiej impedancji obciążenia $z_2(p)$, przy danym skutecznym wzmocnieniu mocy $G(\omega^2)$.

Macierz rozproszenia $S(p)$ czwornika z Rys. 4.1. jest paraunitarną macierzą rzeczywistą ograniczoną (ang. bounded real - BR). Uwzględniając własność 6) Rozdział 3.1.3, dotyczącą macierzy $S(p)$, można ustalić podstawową zależność:

$$\rho_{21}(p)\rho_{21}^*(p) = G(\omega^2) \Big|_{\omega^2 = -p^2}, \quad (4.1)$$

gdzie $\rho_{21}(p)$ jest minimalnofazowym BR współczynnikiem transmisji oraz $\rho_{21}^*(p) = \rho_{21}(-p)$.

Niech:

$$\rho_{21}(p) = l(p)/m(p). \quad (4.2)$$

Wielomian $l(p)$ jest wielomianem Hurwitza (WH), natomiast $m(p)$ jest wielomianem Hurwitza w ścisłym znaczeniu (ang. strict Hurwitz - SH). Ponadto $(l,m)=1$, co oznacza, że wielomiany $l(p)$ i

$m(p)$ są względnie pierwsze. Warunek paraunitarności macierzy $S(p)$ implikuje dodatkowe zależności:

$$s_{11}(p)s_{11}^*(p) = 1 - s_{21}(p)s_{21}^*(p) = 1 - G(-p^2) , \quad (4.3)$$

$$s_{12}(p)s_{12}^*(p) = s_{21}(p)s_{21}^*(p) , \quad (4.4)$$

$$s_{22}(p)s_{22}^*(p) = s_{11}(p)s_{11}^*(p) , \quad (4.5)$$

$$s_{22}(p) = -s_{11}^*(p)s_{21}(p) / s_{12}^*(p) . \quad (4.6)$$

Oznaczmy przez $h_i(p)$ faktoryzację części parzystej $\text{Ev } z_i(p)$ impedancji $z_i(p)$ $i=1,2$:

$$\text{Ev } z_i(p) = 0.5[z_i(p) + z_i^*(p)] = h_i(p)h_i^*(p) , \quad i=1,2 , \quad (4.7)$$

przy czym:

$$h_i(p) / h_i^*(p) = A_i(p)B_i(p) . \quad (4.8)$$

Funkcja $h_i(p)$ jest faktoryzacją $\text{Ev } z_i(p)$, taką, że $h_i(p)$, $h_i^{-1}(p)$ są analityczne w obszarze $\text{Re } p > 0$, oraz $h_i(p)$ jest minimalnego stopnia. W konsekwencji $A_i(p)$ i $B_i(p)$ są funkcjami regularnymi wszechprzepustowymi (ang. regular allpass RA), których zera składają się odpowiednio z biegunów $\text{Ev } z_i(p)$ leżących w obszarze $\text{Re } p > 0$ oraz zer $\text{Ev } z_i(p)$ leżących w obszarze $\text{Re } p > 0$. Z równań (4.1-4.8) i postulatów 3),4) z Rozdziału 3.2.1, można ustalić postać elementów paraunitarnej BR macierzy $S(p)$:

$$s_{11}(p) = \frac{l_{11}(p)}{m(p)} B_1(p)\eta_{11}(p) , \quad (4.9)$$

$$s_{12}(p) = \frac{l(p)}{m(p)} B_1(p)B_2(p)\eta_{12}(p) , \quad (4.10)$$

$$s_{21}(p) = \frac{l(p)}{m(p)} B_1(p)B_2(p)\eta_{21}(p) , \quad (4.11)$$

$$s_{22}(p) = \frac{l_{11}(p)}{m(p)} B_2(p)\eta_{22}(p) . \quad (4.12)$$

Wielomian $l_{11}(p)$ jest wielomianem Hurwitza otrzymanym z faktoryzacji:

$$l_{11}(p)l_{11}^*(p) = m(p)m_*(p) - l(p)l_*(p) . \quad (4.13)$$

Ponadto:

$$\rho_{11}(p) = l_{11}(p) / m(p) \quad (4.14)$$

jest minimalnofazowym współczynnikiem odbicia. Funkcje $\eta_{11}(p)$, $\eta_{12}(p)$, $\eta_{21}(p)$, $\eta_{22}(p)$ są funkcjami RA spełniającymi dodatkowe ograniczenie, które wynika z (4.6), mianowicie:

$$\eta_{22}(p) = -\frac{l_{11}^*(p)}{l_{11}(p)} \cdot \frac{l(p)}{l_*(p)} B_1(p)B_2(p)\eta_{11}^*(p)\eta_{12}(p)\eta_{21}(p) . \quad (4.15)$$

Warunek braku zer i biegunów elementów $y_{A11}(p)$, $y_{A22}(p)$ macierzy $Y_A(p)$ w obszarze $\text{Re } p > 0$ implikuje dodatkowo:

$$(\eta_{11}, B_1A_1) = 1 , \quad (\eta_{22}, B_2A_2) = 1 . \quad (4.16)$$

Zapis równości (4.16) oznacza, że żadne zero iloczynu $A_i(p)B_i(p)$ nie jest zerem funkcji $\eta_{ii}(p)$. W pracach [22,67] opisano jak należy dobrać funkcje $\eta_{11}(p)$, $\eta_{12}(p)$, $\eta_{21}(p)$, $\eta_{22}(p)$, aby macierz $S(p)$ postaci (4.9-4.12) była paraunitarną macierzą rzeczywistą ograniczoną, spełniającą równanie (4.15) i ograniczenia (4.16). Tak otrzymaną klasę macierzy $S(p)$ testuje się następnie pod kątem realizowalności fizycznej przy pomocy Twierdzenia 3.2. W rezultacie wyznaczona zostaje co najmniej jedna macierz $S(p)$ (jeśli istnieje), będąca macierzą rozproszenia fizycznie realizowalnego czwórnika w układzie jak na Rys. 4.1.

4.1.2. Omówienie warunków realizowalności

Spełnienie tez Twierdzenia 3.2. jest ściśle związane z zagadnieniem interpolacji macierzami wymiennymi BR lub macierzami PR, [83], czyli z tzw. problemem Nevanlinny-Picka. Zasadniczą trudnością wykorzystania zagadnienia interpolacji macierzami BR do rozwiązania problemu dopasowania szerokopasmowego impedancji jest konieczność interpolacji w zerach transmisji obciążeń nie tylko daną macierzą wymienną, lecz również macierzą pochodnych, aż do k -tego rzędu włącznie, gdzie k oznacza największą krotność znormalizowanego zera transmisji w danym punkcie. Częściowe rozwiązanie tego skomplikowanego zagadnienia można znaleźć w [43,44,45]. Szczęśliwie w praktyce wspomniany problem interpolacji występuje często w bardzo uproszczonej postaci. Wynika to z faktu, że impedancje wewnętrzne urządzeń fizycznych modeluje się zazwyczaj możliwie prostymi układami RLC. Tym samym również zera transmisji obciążeń położone są przeważnie tylko na osi $j\omega$. Jeżeli występują zera transmisji obciążeń leżące poza osią $j\omega$, nie są one zazwyczaj wspólne dla obu impedancji.

4.1.3. Przypadki szczególne konstrukcji macierzy rozproszenia

Realizacje praktyczne układów dopasowujących wprowadzają dodatkowe ograniczenia na rozwiązanie, które są dopuszczalne w świetle Twierdzenia 3.2. Często, a zwłaszcza w zakresie wielkich częstotliwości, wymagamy aby odwracalny układ dopasowujący posiadał strukturę drabinkową bez sprzężeń magnetycznych. Do syntezy tego typu układu dopasowującego można zatem stosować wyłącznie sekcje złożone z pojedynczych elementów L,C lub sekcje o strukturze równoległego (szeregowego) obwodu L,C, tzw. sekcje Darlingtona typu A i B, [2]. Z podstaw teorii obwodów [2,32] jest znanym faktem, że wszystkie zera transmisji bezstratnego filtru o strukturze układu drabinkowego, położone są na osi $j\omega$. Jak dotąd nie znamy ogólnych metod syntezy takich układów. Jedynie w przypadkach szczególnych, tzn. układów drabinkowych o zerach transmisji położonych tylko w zerze lub w nieskończoności oraz układów drabinkowych o strukturach danych przez Fuisawę [74], znane są konieczne i wystarczające warunki realizowalności.

Ograniczenie zer transmisji układu drabinkowego do osi $j\omega$ implikuje, że elementy $s_{12}(p)=s_{21}(p)$ macierzy rozproszenia układu nie mogą posiadać poza osią $j\omega$ innych zer niż zera iloczynu $B_1(p)B_2(p)$, stąd $\eta_{12}(p)=\eta_{21}(p)=1$, (4.10,4.11). Z równania (4.15) wynika ponadto, że w omawianym przypadku impedancje $z_1(p)$ i $z_2(p)$, jeżeli posiadają wspólne zera transmisji klasy 1. Youli o krotności odpowiednio k_1 i k_2 , to wielomian $l_*(p)$ musi mieć zero krotności k_1+k_2 w tym punkcie. W konsekwencji po uwzględnieniu ograniczeń (4.16), funkcje z równań (4.9-4.12) przyjmą następującą formę.

- Funkcje typu RA:

$$B_1(p) = b_{1*}(p)/b_1(p) \quad , \quad B_2(p) = b_{2*}(p)/b_2(p) \quad , \quad \eta_{11}(p) = v_*(p)/v(p) \quad ,$$

- Wielomiany:

$$l_{11}(p) = \hat{l}_{11}(p)l_a(p)l_b(p) \quad ,$$

$$b_1(p) = b_{01}(p)b_{011}(p)b_{11}(p) ,$$

$$b_2(p) = b_{02}(p)b_{022}(p)b_{22}(p) ,$$

$$l(p) = \hat{l}(p)b_{01}(p)b_{011}(p)b_{02}(p)b_{022}(p) ,$$

$$v(p) = b_{22}(p)l_b(p) .$$

Objaśnienia:

Wielomiany $\hat{l}_{11}(p)$, $\hat{l}(p)$ mają zera leżące tylko na osi $j\omega$. Pozostałe wielomiany są wielomianami SH. Wielomiany $b_{01}(p)$ i $b_{02}(p)$ posiadają jednakowe zera, ewentualnie z różnymi krotnościami. Ponadto:

$$(b_{011}(p)b_{11}(p), b_{022}(p)b_{22}(p)) = 1 ,$$

$$(b_{01}(p), b_{011}(p)b_{11}(p)) = 1 ,$$

$$(b_{02}(p), b_{022}(p)b_{22}(p)) = 1 ,$$

$$(l_b(p), b_1(p)) = 1 ,$$

$$(l_a(p), b_2(p)) = 1 .$$

Równania (4.9-4.12) przy użyciu wprowadzonych tutaj wielomianów można przedstawić w postaci:

$$s_{11}(p) = \pm \frac{\hat{l}_{11}(p)l_a(p)l_b(p)}{m(p)} \cdot \frac{b_{01*}(p)b_{011*}(p)b_{11*}(p)b_{22*}(p)}{b_{01}(p)b_{011}(p)b_{11}(p)b_{22}(p)} , \quad (4.17)$$

$$s_{12}(p) = s_{21}(p) = \frac{\hat{l}(p)b_{01*}(p)b_{011*}(p)b_{02*}(p)b_{022*}(p)}{m(p)} \cdot \frac{b_{11*}(p)b_{22*}(p)}{b_{11}(p)b_{22}(p)} , \quad (4.18)$$

$$s_{22}(p) = \mp \zeta \frac{\hat{l}_{11}(p)l_a(p)l_b(p)}{m(p)} \cdot \frac{b_{02*}(p)b_{022*}(p)b_{22*}(p)b_{11*}(p)}{b_{02}(p)b_{022}(p)b_{22}(p)b_{11}(p)} , \quad (4.19)$$

$$\frac{\hat{l}(p)}{\hat{l}_*(p)} = \pm 1 . \quad (4.20)$$

Znak (-) wystąpi w (4.20), jeżeli wielomian $\hat{l}(p)$ ma w punkcie $p=0$ zero nieparzystej krotności. Z równań (4.17-4.19) wynika, że aby uczynić macierz $\mathbf{Y}_A(p)$ czwórnika dopasowującego macierzą PR, można jedynie (w ramach stosowania Twierdzenia 3.2.) przesuwając poszczególne zera $l_{11}(p)$ z lewej do prawej półpłaszczyzny. Metodę tę zastosowano np. w [85,86]. Wspomniana metoda nie daje wystarczająco dużego stopnia swobody w doborze zer współczynników odbicia, aby w praktyce można wykorzystać macierz $\mathbf{S}(p)$ postaci (4.17-4.19) do celów dopasowania.

Uelastycznienie warunków (4.17-4.19) otrzymamy zakładając, że jedna z impedancji obciążeń jest rezystancją. Niech $z_1(p)=1 \Omega$, zatem $B_1(p)=1$ i teza Twierdzenia 3.2. sprowadza się do spełnienia ograniczeń Youli w zerach transmisji impedancji $z_2(p)$. Przypadek taki był przez autora rozpatrywany w pracy [50], przy założeniu, że układ dopasowujący ma strukturę bezstratnej drabinki o zerach transmisji położonych tylko w zerze i nieskończoności. Z [50] wynika, że ograniczenia Youli dla impedancji $z_2(p)$ należy spełnić ze znakiem równości, poza co najwyżej zerem lub nieskończonością, tzw. przypadek niezdegenerowany. Twierdzenie traktujące o dopasowaniu

impedancji przez czwórnik w konfiguracji omawianej drabinki można znaleźć również w pracy [50].

Drugi interesujący przypadek szczególny zagadnienia dopasowania ma miejsce, gdy wzmacnienie mocy jest stałą $G(\omega^2)=K^2 < 1$ dla każdego ω . Minimalnofazowy współczynnik odbicia jest także stałą, która wynosi $\rho_{11}(p) = \sqrt{1-K^2}$. Z (4.15) wynika, że $z_1(p)$ i $z_2(p)$ nie mogą posiadać wspólnych zer transmisji w klasy 1 ani żadnych zer transmisji na osi $j\omega$. Uwzględniając (4.15, 4.16) wnioskujemy, że każde zero $B_2(p)$ jest zerem $\eta_{11}(p)$ co najmniej tej samej krotności. Macierz rozproszenia $S(p)$ układu dopasowującego przyjmie wówczas postać

$$s_{11}(p) = \pm \sqrt{1-K^2} \cdot B_1(p)B_2(p)\eta_a(p)\eta_b(p) , \quad (4.21)$$

$$s_{12}(p) = K \cdot B_1(p)B_2(p)\eta_a(p)\eta_c(p) , \quad (4.22)$$

$$s_{21}(p) = K \cdot B_1(p)B_2(p)\eta_b(p)\eta_d(p) , \quad (4.23)$$

$$s_{22}(p) = \mp \sqrt{1-K^2} \cdot B_1(p)B_2(p)\eta_c(p)\eta_d(p) , \quad (4.24)$$

przy ograniczeniach $(B_1, B_2)=1$, $(B_1A_1, \eta_a\eta_b)=1$, $(B_2A_2, \eta_c\eta_d)=1$, gdzie $\eta_a(p)$, $\eta_b(p)$, $\eta_c(p)$, $\eta_d(p)$ są funkcjami RA. Przykładowe układy dopasowujące, realizujące omawiane wzmacnienia, można znaleźć np. w [14].

4.2. Wzory projektowe dla dopasowania wybranych impedancji obciążeń

Niniejszy rozdział poświęcono opracowaniu nowych procedur dopasowania szerokopasmowego wybranych impedancji. W praktyce inżynierskiej często spotykamy się z zagadnieniem projektowania bezstratnego układu sprzęgającego, realizującego zadane skuteczne wzmacnienie mocy pomiędzy rezystancyjnym generatorem i obciążeniem modelowanym pewnym obwodem RLC. Analityczne metody projektowania tego typu układów wymagają założenia, jakiego rodzaju wzmacnienia mają być realizowane. Zazwyczaj wzmacnienia mocy aproksymuje się wykorzystując wielomiany Butterwortha lub Czebyszewa.

Pierwsze prace dotyczące projektowania szerokopasmowych czwórników dopasowujących bazują na ograniczeniach Fano [29], natomiast późniejsze prace [12, 14, 15, 31, 34, 85, 86] odwołują się do ograniczeń Youli.

Podstawą do dalszych rozważań będzie zdefiniowanie kryteriów dopasowania szerokopasmowego. W praktyce mają zastosowanie dwa odrębne kryteria.

1) Dla danej dopuszczalnej nierównomierności wzmacnienia, zdefiniowanej jako

$$t = D / K , \quad (4.25)$$

$$0 < D < K \leq 1,$$

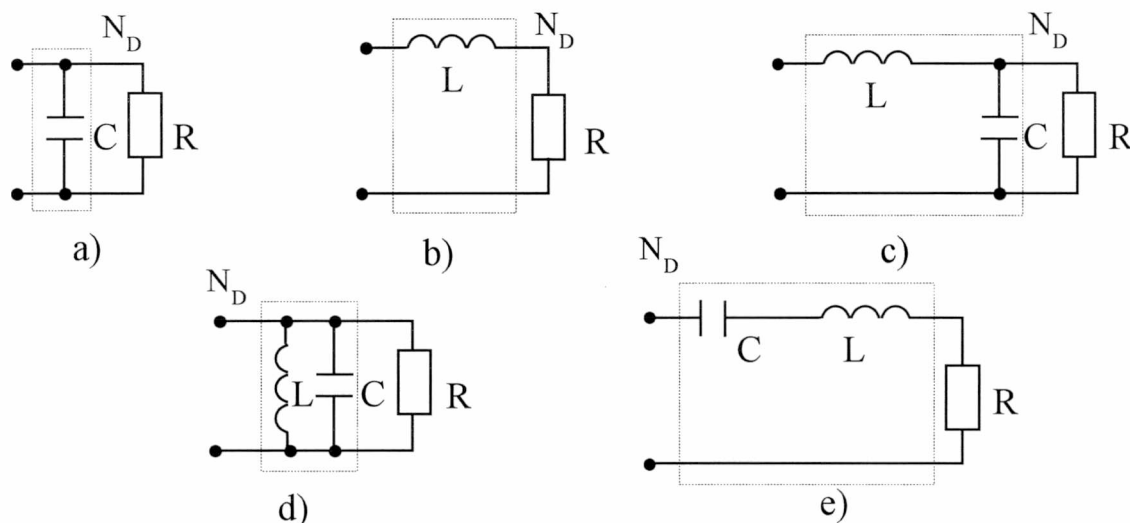
gdzie D , K oznaczają odpowiednio minimum i maksimum skutecznego wzmacnienia mocy w pasmie $[\omega_1, \omega_2]$, należy znaleźć największy dopuszczalny poziom minimalnego wzmacnienia $D=D_{\max}$ (oczywiście wówczas $K=K_{\max}$).

2) W pasmie $[\omega_1, \omega_2]$ należy znaleźć optymalną wartość stałej wzmacnienia $K=K_{\text{opt}}$, taką, że minimum wzmacnienia jest maksymalne $D=D_{\max}$, tzw. kryterium min-max.

W obu kryteriach zakłada się, że stopień wzmacnienia n jest parametrem, $n=1, 2, 3, \dots$. Z faktu traktowania n jako parametru wynika, iż wzmacnienia mocy typu Cauera lub Bessela nie mogą być rozpatrywane w tak postawionym problemie. Obliczenie współczynników odpowiednich

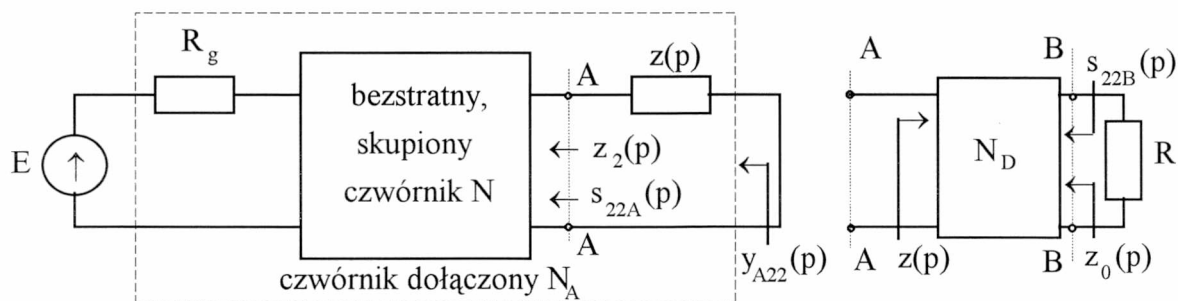
wielomianów dla obu wzmiarkowanych wzmocnień jest możliwe dopiero po ustaleniu n , ponieważ współczynniki wzmocnień Cauera i Bessela wyrażają się przez funkcje nieelementarne. Wspomniane wzmocnienia wykorzystuje się niekiedy do celów dopasowania szerokopasmowego realizowanych metodami numerycznymi.

Po ustaleniu wymaganych klas wzmocnień mocy i ustaleniu kryteriów dopasowania, należy określić klasy rozważanych impedancji obciążenia. W praktyce najczęściej impedancje obciążenia modelowane są obwodami przedstawionymi na Rys. 4.2. Elementy L, C obwodów z Rys. 4.2.a), b), c) modelują odpowiednio indukcyjność i pojemność doprowadzeń danego obciążenia. Impedancje z Rys. 4.2.d), e) mogą służyć do modelowania anten w otoczeniu ich częstotliwości rezonansowej [1,47].



Rys. 4.2.a)-e). Najczęściej stosowane w praktyce modele impedancji obciążenia. Człowniki N_D są modelami Darlingtona prezentowanych impedancji.

Poglądowy schemat układu, dopasowującego szerokopasmowo impedancje z rys. 4.2 do rezystancyjnego generatora, z wykorzystaniem bezstratnego, skupionego i odwracalnego czwórnika N pokazano na Rys. 4.3.



Rys. 4.3. Schemat układu dopasowującego. Impedancję $z(p)$ przedstawiono dla dwóch modeli: Thevenina i Darlingtona.

Impedancja $z(p)$ jest jedną z impedancji przedstawionych na Rys. 4.2. R_g oznacza rezystancję wewnętrzną generatora, $z_2(p)$ jest impedancją wejściową czwórnika N obciążonego od strony generatora rezystancją R_g , $s_{22A}(p)$ jest współczynnikiem odbicia znormalizowanym względem impedancji $z(p)$, $y_{A22}(p)$ jest admitancją wejściową czwórnika dołączonego N_A . Ponadto $s_{22B}(p)$ jest współczynnikiem odbicia znormalizowanym względem rezystancji R , zaś $z_0(p)$ określa impedancję

wejściową kaskady czwórników N_D i N , zakończonej rezystancją R_g . W pracach [41,42] dowiedziono, że zawsze $s_{22A}(p)=s_{22B}(p)$.

Niech

$$s(p) = s_{22A}(p) = s_{22B}(p) .$$

Warunek paraunitarności macierzy rozproszenia czwórnika N z Rys. 4.3 pozwala wyznaczyć minimalnofazową część współczynnika odbicia $s(p)$, oznaczoną symbolem $\rho(p)$, poprzez faktoryzację następującego wyrażenia:

$$\rho(p)\rho_*(p) = 1 - G(\omega^2) \Big|_{\omega^2 = -p^2} .$$

Funkcja $G(\omega^2)$ jest skutecznym wzmocnieniem mocy typu Butterwortha lub Czebyszewa, ze stałą wzmocnienia $K \in (0,1]$.

4.2.1. Impedancje dwuelementowe RL lub RC

Mimo, że formuły dopasowania impedancji RL i RC z Rys. 4.2a),b) zostały już opracowane np. [14,29], (głównie przy użyciu kryterium 1), zostanie jednak podany sposób ich wyprowadzenia oparty na bazie ograniczeń Youli [78]. Nowym aspektem dotyczącym problemu dopasowania są natomiast formuły projektowe otrzymane z zastosowaniem kryterium 2). Formuły te będą przydatne do wyznaczenia wzorów dla dopasowania pozostałych impedancji z Rys. 4.2. Rozpatrzmy impedancję z Rys. 4.2a):

$$z(p) = \frac{R}{1 + p \cdot R \cdot C} , \quad (4.26)$$

$$Ev \ z(p) = \frac{R}{(1 + p \cdot R \cdot C)(1 - p \cdot R \cdot C)} , \quad (4.27)$$

$$h(p) = \pm \frac{\sqrt{R}}{1 + p \cdot R \cdot C} . \quad (4.28)$$

Korzystając z (3.29) stwierdzamy, że $z(p)$ ma jednokrotne zero transmisji w punkcie $p=\infty$ klasy 2. Stosując (3.23) do (4.28) otrzymujemy

$$B(p) = 1 , \quad (4.29)$$

$$A(p) = \frac{1 - p \cdot R \cdot C}{1 + p \cdot R \cdot C} . \quad (4.30)$$

Ponadto

$$F(p) = 2A(p) \cdot Ev \ z(p) = \frac{2R}{(1 + p \cdot R \cdot C)^2} . \quad (4.31)$$

Zapiszmy współczynnik odbicia $s(p)$ w ogólnej postaci:

$$s(p) = \pm \rho(p)\eta(p) ,$$

gdzie $\rho(p)$ jest minimalnofazowym współczynnikiem odbicia, natomiast $\eta(p)$ jest dowolną funkcją RA. Niech dodatkowo w nieskończoności $\eta(\infty) = 1$. Rozkładając funkcje $A(p)$, $F(p)$, $s(p)$ w szereg potęgowy w otoczeniu punktu $p=\infty$, otrzymujemy po wykorzystaniu zależności (D2.13-D2.15) z Dodatku 2 następujące współczynniki poszukiwanego rozkładu

$$A_0 = -1, \quad A_1 = \frac{2}{R \cdot C}, \quad F_0 = F_1 = 0, \quad F_2 = \frac{2}{R \cdot C^2}, \quad (4.32)$$

$$s_0 = \rho_0 \eta_0, \quad s_1 = \rho_0 \eta_1 + \rho_1 \eta_0. \quad (4.33)$$

Ograniczenia Youli (3.34) dla impedancji z Rys. 4.2a) przyjmą z wykorzystaniem (4.32-4.33) formę

$$A_0 = \rho_0 \eta_0, \quad \frac{A_1 - (\rho_0 \eta_1 + \rho_1 \eta_0)}{F_2} \geq 0,$$

zatem

$$\rho_0 \eta_0 = -1, \quad \frac{2}{R \cdot C} \geq \rho_0 \eta_1 + \rho_1 \eta_0, \quad (4.34)$$

oraz

$$\eta_0 = 1.$$

Impedancja z Rys. 4.2b) posiada jednokrotne zero transmisji w punkcie $p=\infty$ klasy 4. Analogicznie jak wyżej, rozpatrując ograniczenia Youli (3.36) dla tej impedancji, otrzymujemy warunki fizycznej realizacji układu dopasowującego, w następującej postaci:

$$\rho_0 \eta_0 = 1, \quad \frac{2R}{L} \geq -(\rho_0 \eta_1 + \rho_1 \eta_0), \quad \rho_0 \eta_1 + \rho_1 \eta_0 < 0, \quad (4.35)$$

przy czym znów $\eta_0 = 1$. Z wykorzystaniem wzorów (D2.8) z Dodatku 2 i (D1.22) z Dodatku 1, ograniczenia (4.34,4.35) odpowiednio przyjmą postać

$$\rho_0 = -1, \quad \frac{2}{R \cdot C} \geq 2\varphi_{a\infty} + \varphi_1 W, \quad (4.36)$$

$$\rho_0 = 1, \quad \frac{2R}{L} \geq 2\varphi_{a\infty} + \varphi_1 W, \quad (4.37)$$

gdzie nieujemny współczynnik $\varphi_{a\infty}$ oraz dodatni współczynnik φ_1 zdefiniowano odpowiednio w (D2.7) Dodatek 2 i (D1.24,D1.25) Dodatek 1 dla wzmocnień mocy Butterwortha lub Czebyszewa. Stała W wynosi

$$W = \omega_2 - \omega_1$$

i jest ona szerokością pasma przenoszenia pasmowo-przepustowego układu dopasowującego. Porównując zależności (D1.20,D1.22) z Dodatku 1, stwierdzamy, że wzory (4.36,4.37) obowiązują również dla dolno-przepustowych układów dopasowujących, wystarczy wówczas przyjąć we wzmiankowanych wzorach $\omega_1=0$. Niech:

$$\tau = R \cdot C \text{ lub } \tau = L / R \quad (4.38)$$

dla impedancji odpowiednio z Rys. 4.2a),b). Uwzględniając (4.38), warunki dopasowania (4.36,4.37) można zapisać w postaci:

$$\rho_0 = \mp 1, \quad \frac{2}{W} \left(\frac{1}{\tau} - \varphi_{a\infty} \right) \geq \varphi_1.$$

Znak (-) obowiązuje dla impedancji z Rys. 4.2a), zaś (+) dla impedancji z Rys. 4.2b). Współczynniki $\varphi_{a\infty}$ oraz φ_1 są nieujemne, zatem wybranie $\varphi_{a\infty} > 0$, oznaczające zastosowanie funkcji RA $\eta(p)$ do celów dopasowania, spowoduje zmniejszenie fizycznie dopuszczalnego wzmocnienia. Tym samym bez strat dla ogólności rozważań można przyjąć $\varphi_{a\infty} = 0$, co oznacza, że $\eta(p) \equiv 1$. Co więcej, jeżeli ograniczenia (4.38) będą spełnione dla $\varphi_{a\infty} > 0$, to będą one spełnione również dla $\varphi_{a\infty} = 0$. Po

przyjęciu $\varphi_{\infty}=0$, ograniczenia Youli dla rozpatrywanych impedancji są równoważne spełnieniu poniższych warunków:

$$\rho_0 = \mp 1, \quad \frac{2}{W \cdot \tau} \geq \varphi_1. \quad (4.39)$$

Na podstawie wzorów (D1.24,D1.25) z Dodatku 1 zapiszmy jawnie stałą φ_1 , jako:

$$\varphi_1 = \begin{cases} \frac{(1-\delta)}{\beta \sin \gamma} & \text{dla wzmacnień Butterwortha} \\ b_{n-1} - \hat{b}_{n-1} & \text{dla wzmacnień Czebyszewa} \end{cases}, \quad (4.40)$$

gdzie

$$\beta = \sqrt[n]{1/t-1}, \quad (4.41)$$

$$\gamma = 0.5\pi/n, \quad (4.42)$$

$$\delta = \sqrt[n]{1-K}, \quad (4.43)$$

$$b_{n-1} = \sinh\left(\frac{1}{n} \operatorname{ar sinh} \frac{1}{\varepsilon}\right) / \sin \gamma, \quad (4.44)$$

$$\hat{b}_{n-1} = \sinh\left(\frac{1}{n} \operatorname{ar sinh} \frac{\sqrt{1-K}}{\varepsilon}\right) / \sin \gamma, \quad (4.45)$$

$$\varepsilon = \sqrt{1/t-1}. \quad (4.46)$$

Symbol K oznacza stałą wzmacnienia, określającą maksimum wzmacnienia w pasmie, $K \in (0,1]$. Stałą 't' zdefiniowano w (4.25). Symbolem ε , przy $\varepsilon > 0$, oznaczono czynnik falistości wzmacnienia mocy typu Czebyszewa.

Rozważmy warunki optymalnego dopasowania rozważanych impedancji według kryterium 1) z Rozdziału 4.2., przy użyciu wzmacnień mocy typu Butterwortha. Zadanie zgodnie z (4.25) pewnej wartości parametru t , a więc ustalenie β , pozwala, na podstawie (4.39), wyznaczyć poszukiwane związki:

$$\sqrt[n]{1-K} \geq \Phi, \quad \Phi = 1 - \frac{2}{\tau \cdot W} \beta \sin \gamma. \quad (4.47)$$

Jeżeli $\Phi \leq 0$ to nierówność (4.47) jest spełniona dla dowolnego $K \in (0,1]$. Maksymalizując wzmacnienie przyjmujemy $K=1$, zatem $D_{\max}=t$. Jeżeli $\Phi > 0$, wówczas z (4.25,4.47) otrzymujemy:

$$D \leq D_{\max}, \quad D_{\max} = t \left[1 - \left(1 - \frac{2}{\tau \cdot W} \sqrt[n]{1/t-1} \cdot \sin \frac{\pi}{2n} \right)^{2n} \right]. \quad (4.48)$$

W rezultacie wyznaczone warunki optymalnego dopasowania można zapisać w postaci:

$$D \leq D_{\max}, \quad D_{\max} = \begin{cases} t \left[1 - \left(1 - \frac{2}{\tau \cdot W} \sqrt[n]{1/t-1} \cdot \sin \frac{\pi}{2n} \right)^{2n} \right] & \text{dla } 1 > \frac{2}{\tau \cdot W} \beta \sin \gamma \\ t & \text{dla } 1 \leq \frac{2}{\tau \cdot W} \beta \sin \gamma \end{cases}. \quad (4.49)$$

Zastosujmy dla rozważanych tutaj impedancji, kryterium optymalności 1) z Rozdziału 4.2, przy wykorzystaniu wzmocnień mocy typu Czebyszewa. Na podstawie (3.39) łatwo jest otrzymać poszukiwane zależności:

$$\sinh\left(\frac{1}{n} \operatorname{ar sinh} \frac{\sqrt{1-K}}{\varepsilon}\right) \geq \Phi, \quad \Phi = \sinh\left(\frac{1}{n} \operatorname{ar sinh} \frac{1}{\varepsilon}\right) - \frac{2}{\tau \cdot W} \sin \gamma, \quad (4.50)$$

gdzie ε jest ustalone dla zadanego t , patrz (4.46). Jeżeli $\Phi \leq 0$, wówczas nierówność (4.50) jest spełniona dla każdego $K \in (0, 1]$. Przyjmujemy zatem $K=1$ i $D_{\max}=t$. Jeżeli $\Phi > 0$ to z (4.25, 4.46, 4.50) wyznaczamy następujący związek:

$$D \leq D_{\max}, \quad D_{\max} = t - (1-t) \sinh^2 \left[n \cdot \operatorname{ar sinh} \left(\sinh\left(\frac{1}{n} \operatorname{ar sinh} \frac{1}{\sqrt{1/t-1}}\right) - \frac{2}{\tau \cdot W} \sin \frac{\pi}{2n} \right) \right]. \quad (4.51)$$

Wyznaczone warunki optymalnego dopasowania można ująć w formie:

$$D \leq D_{\max},$$

$$D_{\max} = \begin{cases} t - (1-t) \sinh^2 \left[n \cdot \operatorname{ar sinh} \left(\sinh\left(\frac{1}{n} \operatorname{ar sinh} \frac{1}{\sqrt{1/t-1}}\right) - \frac{2}{\tau \cdot W} \sin \frac{\pi}{2n} \right) \right] & \text{a)} \\ t & \text{b)} \end{cases} \quad (4.52)$$

Przypadek a) zachodzi, gdy $\sinh\left(\frac{1}{n} \operatorname{ar sinh} \frac{1}{\varepsilon}\right) > \frac{2}{\tau \cdot W} \sin \gamma$, natomiast przypadek b) ma miejsce w przeciwnej sytuacji.

Rozważmy dopasowanie impedancji z Rys. 4.2a), b) w idealnym układzie dopasowującym tzn. w układzie o nieskończonej liczbie elementów L, C . Oczekujemy, że wzmocnienie mocy wyrażone będzie funkcją stałą o wartości $D_{\infty}=K_{\infty}$ w pasmie przenoszenia W . Wartość D_{∞} dla impedancji z Rys. 4.2a), b) została już co prawda wyznaczona przez Bodego [29,32] i innych autorów [14,25], lecz tutaj otrzymamy wartość D_{∞} na nieco innej drodze, bezpośrednio wykorzystując nierówności (3.39). Wynik uzyskany przez Bodego jest następujący

$$\oint_C \ln \frac{1}{\rho(p)} \cdot dp \leq \frac{\pi}{\tau}, \quad (4.53)$$

gdzie $\rho(p)$ jest minimalnofazowym współczynnikiem odbicia, natomiast kontur C obejmuje cały obszar $\operatorname{Re} p \geq 0$. Dla prostokątnej charakterystyki skutecznego wzmocnienia mocy, na podstawie (4.53) ustalamy następującą zależność:

$$D \leq D_{\infty}, \quad D_{\infty} = 1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{\tau \cdot W}\right). \quad (4.54)$$

Zależność (4.54) zostanie teraz wyznaczona na innej drodze, bezpośrednio przy użyciu (4.39), a otrzymane wyniki pośrednie będą później wykorzystane przy ustalaniu warunków dopasowania dla pozostałych rozpatrywanych w niniejszym rozdziale impedancji.

Rozważmy przejście graniczne, wynikające z nierówności (4.39), zastosowanej dla wzmocnień mocy typu Butterwortha:

$$\frac{2}{\tau \cdot W} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ t \rightarrow 1}} \sqrt[n]{1/t-1} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt[n]{1-K}}{\sin(0.5\pi/n)}. \quad (4.55)$$

Zostanie wykazane, że granica $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ t \rightarrow 1}} \sqrt[n]{1/t-1}$, równoważna granicy typu $\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} x^y$, nie istnieje. Dla pary ciągów $(x_k = 1/k, y_k = 1/k)$ mamy $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^{y_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} 1/\sqrt[k]{k} = 1$. Dla ciągów $(x_k = 1/e^k, y_k = 1/k)$

otrzymujemy natomiast $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^{y_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} 1/\sqrt[k]{e^k} = 1/e$. Tym samym granica $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ t \rightarrow 1}} \sqrt[n]{1/t-1}$ nie istnieje.

Istnieją natomiast granice iterowane

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow 1} \sqrt[n]{1/t-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{0} = 0, \quad (4.56)$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/t-1} = \lim_{t \rightarrow 1} (1/t-1)^0 = 1. \quad (4.57)$$

Ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt[n]{1-K}}{\sin \frac{\pi}{2n}} \stackrel{0}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln(1-K) \cdot \left(\frac{-1}{2n^2}\right)}{\pi \left(\frac{-1}{2n^2}\right) \cos \frac{\pi}{2n}} = \frac{-1}{\pi} \ln(1-K) \Big|_{K=K_\infty} \quad (4.58)$$

Wykorzystanie granic (4.56, 4.58) narusza nierówność (4.55). Zastosowanie przejścia granicznego (4.57) i (4.58) pozwala wyznaczyć poszukiwany poziom wzmacnienia:

$$\frac{2}{\tau \cdot W} \geq \frac{-1}{\pi} \ln(1-K_\infty), \quad K_\infty = D_\infty, \quad (4.59)$$

zatem

$$D \leq D_\infty, \quad D_\infty = 1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{\tau \cdot W}\right). \quad (4.60)$$

Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić w odniesieniu do (4.39), dla wzmacnień mocy typu Czebyszewa:

$$\frac{2}{\tau \cdot W} \geq \frac{1}{\sin(0.5\pi/n)} \left[\sinh\left(\frac{1}{n} \operatorname{ar sinh} \frac{1}{\varepsilon}\right) - \sinh\left(\frac{1}{n} \operatorname{ar sinh} \frac{\sqrt{1-K}}{\varepsilon}\right) \right], \quad (4.61)$$

$$\sinh\left(\frac{1}{n} \operatorname{ar sinh} \frac{1}{\varepsilon}\right) = 0.5 \left(\sqrt[n]{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{1}{\varepsilon}} - \sqrt[n]{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} - \frac{1}{\varepsilon}} \right). \quad (4.62)$$

Ponadto:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} - \frac{1}{\varepsilon} = 0. \quad (4.63)$$

Zostało poprzednio wykazane, że granica typu

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} x^y$$

nie istnieje. Nie istnieje zatem granica prawej strony nierówności (4.61). Można jednak wyznaczyć granice iterowane:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\sinh(\frac{1}{n} \operatorname{ar sinh} \frac{1}{\varepsilon}) - \sinh(\frac{1}{n} \operatorname{ar sinh} \frac{\sqrt{1-K}}{\varepsilon})] = 0, \quad (4.64)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} [\sinh(\frac{1}{n} \operatorname{ar sinh} \frac{1}{\varepsilon}) - \sinh(\frac{1}{n} \operatorname{ar sinh} \frac{\sqrt{1-K}}{\varepsilon})] / \sin \frac{\pi}{2n} \stackrel{0}{=}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} [\cosh(\frac{1}{n} \operatorname{ar sinh} \frac{1}{\varepsilon}) \left(\frac{-1}{n^2}\right) \operatorname{ar sinh} \frac{1}{\varepsilon} - \cosh(\frac{1}{n} \operatorname{ar sinh} \frac{\sqrt{1-K}}{\varepsilon}) \left(\frac{-1}{n^2}\right) \operatorname{ar sinh} \frac{\sqrt{1-K}}{\varepsilon}] / [(\frac{-\pi}{2n^2}) \cos \frac{\pi}{2n}] =$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\operatorname{ar sinh} \frac{1}{\varepsilon} - \operatorname{ar sinh} \frac{\sqrt{1-K}}{\varepsilon} \right) / \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{\sqrt{1-K} + \sqrt{1-K + \varepsilon^2}} = \frac{-1}{\pi} \ln(1-K). \quad (4.65)$$

Zastosowanie przejścia granicznego (4.65) do (4.61), pozwala otrzymać wynik identyczny z (4.60). Uzyskane rezultaty zostaną użyte do określenia poziomów wzmocnień w idealnym układzie dopasowującym, dla pozostałych impedancji z Rys. 4.2.

Sprawdźmy jak zmienia się $D_{\max}$ dane wzorem (4.48) w funkcji $\tau \cdot W$ oraz n przy ustalonym parametrze t . Funkcja $D_{\max}(\tau \cdot W)$ maleje monotonicznie ze wzrostem $\tau \cdot W$, aż do wartości zero. Funkcja $D_{\max}(n)$ w zależności od danych parametrów $\tau \cdot W$, t , nie jest funkcją monotoniczną. Analiza pochodnej $D_{\max}(n)$ wskazuje, że funkcja $D_{\max}(n)$ jest rosnącą dla $n \geq 1$, lub jest funkcją rosnącą dla $1 \leq n \leq n_0$, oraz funkcją malejącą dla $n > n_0$. W obu przypadkach zachodzi równość $\lim_{n \rightarrow \infty} D_{\max}(n) = t \cdot D_{\infty}$. Przykład ilustrujący zmiany wartości funkcji $D_{\max}(n)$ dla wzmiankowanych sytuacji, zamieszczono w Tabeli 4.1.

	$\tau \cdot W=1, t=0.9$	$\tau \cdot W=2, t=0.9$
n	$D_{\max}(n) - (n_0=3)$	$D_{\max}(n) - \text{rosnąca}$
1	0.800000	0.500000
2	0.898979	0.789643
3	0.899252	0.830016
4	0.899154	0.847992
10	0.898750	0.856086

Tabela 4.1. Wybrane wartości funkcji $D_{\max}(n)$ określonej w (4.48).

Zbadajmy także zmienność $D_{\max}$ danego wzorem (4.51) w funkcji $\tau \cdot W$ oraz n przy ustalonym parametrze t . Funkcja $D_{\max}(\tau \cdot W)$ maleje monotonicznie ze wzrostem $\tau \cdot W$. Ponadto funkcja $D_{\max}(n)$ przy ustalonych danych parametrach $\tau \cdot W$, t , i warunku

$$\sinh\left(\frac{1}{n} \operatorname{ar sinh} \frac{1}{\varepsilon}\right) > \frac{2}{\tau \cdot W} \sin \frac{\pi}{2n}$$

zmienia się monotonicznie, przy czym $\lim_{n \rightarrow \infty} D_{\max}(n) = t \cdot D_{\infty}$.

Dla obu typów wzmocnień mocy zachodzi nierówność $\max_n D_{\max}(n) < D_{\infty}$, przy dowolnie wybranych τ , W , t . Nierówność powyższą należy tłumaczyć tym, że w układzie dopasowującym o wzmocnieniu D_{∞} nie jest zachowana stała wartość parametru t , dla $n \rightarrow \infty$.

Rozpatrzmy zagadnienie dopasowania impedancji z Rys. 4.2.a),b) według kryterium 2). Zagadnienie to poruszane było w [29] przy użyciu ograniczeń Fano oraz w [11] przy pomocy metod numerycznych. W zasadzie, w literaturze przedmiotu, poza wspomnianymi pracami, nie są dostępne procedury analitycznego dopasowania impedancji z użyciem kryterium 2) Rozdział 4.2.

Dla wzmocnień mocy typu Butterwortha, po przekształceniu nierówności (4.39), gdzie $\beta = \sqrt[n]{K/D-1}$, otrzymamy:

$$D(K) \leq \frac{K}{1 + \left[\frac{\tau \cdot W}{2 \sin(0.5\pi/n)} (1 - \sqrt[n]{1-K}) \right]^{2n}}. \quad (4.66)$$

Wyznamy pochodną po 'K' prawej strony nierówności (4.66):

$$D'(K) = f_1(K) / f_2^2(K),$$

gdzie

$$f_1(K) = 1 + a(1-\delta)^{2n-1} - a(1/\delta - 1)^{2n-1},$$

$$\delta = \sqrt[n]{1-K} \quad ,$$

$$a = \left[\frac{\tau \cdot W}{2 \sin(0.5\pi / n)} \right]^{2n} \quad ,$$

$$f_2(K) = 1 + a(1-\delta)^{2n} \quad ,$$

przy czym n jest liczbą naturalną. Następnie obliczamy poniższe granice:

$$\lim_{K \rightarrow 0} D'(K) = 1 \quad , \quad \lim_{K \rightarrow 1} D'(K) = -\infty \quad .$$

Wnioskujemy, że w przedziale $K \in (0,1)$ istnieje co najmniej jeden punkt $K=K_{\text{opt}}$, w którym $D'(K)|_{K=K_{\text{opt}}} = 0$. Funkcja $f_2(K)$ jest w przedziale $K \in (0,1)$ funkcją rosnącą o dodatnich wartościach, czyli funkcja $f_2^{-2}(K)$ jest w przedziale $K \in (0,1)$ funkcją malejącą, przyjmującą również wartości dodatnie. Ponadto funkcja $f_1(K)$ jest na odcinku $K \in (0,1)$ funkcją malejącą, ponieważ pochodna po 'K' funkcji $f_1(K)$, wynosząca:

$$f'_1(K) = -a \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{K}{(1-K)(1-\delta)} \cdot \left(\frac{1}{\delta} - 1 \right)^{2n-1}$$

jest ujemna dla każdego $K \in (0,1)$. Reasumując wnioskujemy, że prawa strona nierówności (4.66) posiada w przedziale $K \in (0,1)$ dokładnie jedno maksimum i jest to jedyne ekstremum (4.66) dla $K \in (0,1)$. Przyrównanie pochodnej prawej strony nierówności (4.66) do zera w celu wyznaczenia K_{opt} pozwala ustalić:

$$(1-\delta) \frac{\tau \cdot W}{2 \sin(0.5\pi / n)} = \left[\frac{K + \delta - 1}{(1-K)(1-\delta)} \right]^{-\frac{1}{2n}} \Big|_{K=K_{\text{opt}}} \quad . \quad (4.67)$$

Po wstawieniu (4.67) do (4.66) znajdujemy:

$$D_{\text{max}} = 1 - (1-K)^{1-\frac{1}{2n}} \Big|_{K=K_{\text{opt}}} \quad . \quad (4.68)$$

Równanie (4.67) jest nieelementarne ze względu na K , tzn. nie można sprowadzić rozwiązania (4.67) do obliczania pierwiastków pewnego wielomianu [35]. Stałą K_{opt} możemy natomiast wyznaczyć, posługując się jedną z metod numerycznych dokładnych wyznaczania ekstremum funkcji mającej jedno ekstremum w danym przedziale, np. metodą złotego podziału odcinka lub metodą przybliżeń średniokwadratowych, [46].

Analizując (4.39) pod kątem kryterium dopasowania 2) z Rozdziału 4.2., dla założonego skutecznego wzmocnienia mocy typu Czebyszewa i pamiętając, że $D = K / (1 + \varepsilon^2)$, po wykonaniu niezbędnych przekształceń, otrzymamy:

$$D(\varepsilon) \leq \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \left\{ 1 - \left[\varepsilon \cdot \sinh \left[n \cdot \text{ar sinh} \left[\sinh \left(\frac{1}{n} \text{ar sinh} \frac{1}{\varepsilon} \right) - \frac{2 \sin(0.5\pi / n)}{\tau \cdot W} \right] \right] \right]^2 \right\} \quad . \quad (4.69)$$

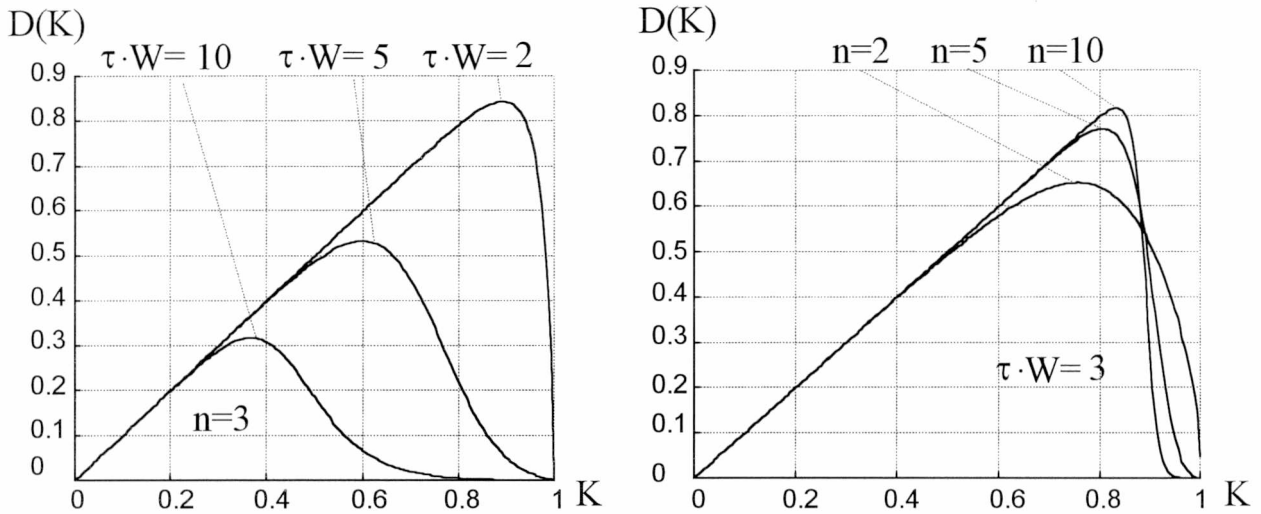
Uwzględnienie w (4.69) warunku $D \in (0,1)$ prowadzi do zawężenia przedziału dopuszczalnych wartości parametru ε , mianowicie:

$$0 < \varepsilon < \left[\sinh \left(n \cdot \text{ar sinh} \frac{2 \cdot \sin \frac{\pi}{2n}}{\tau \cdot W} \right) \right]^{-1} \quad . \quad (4.70)$$

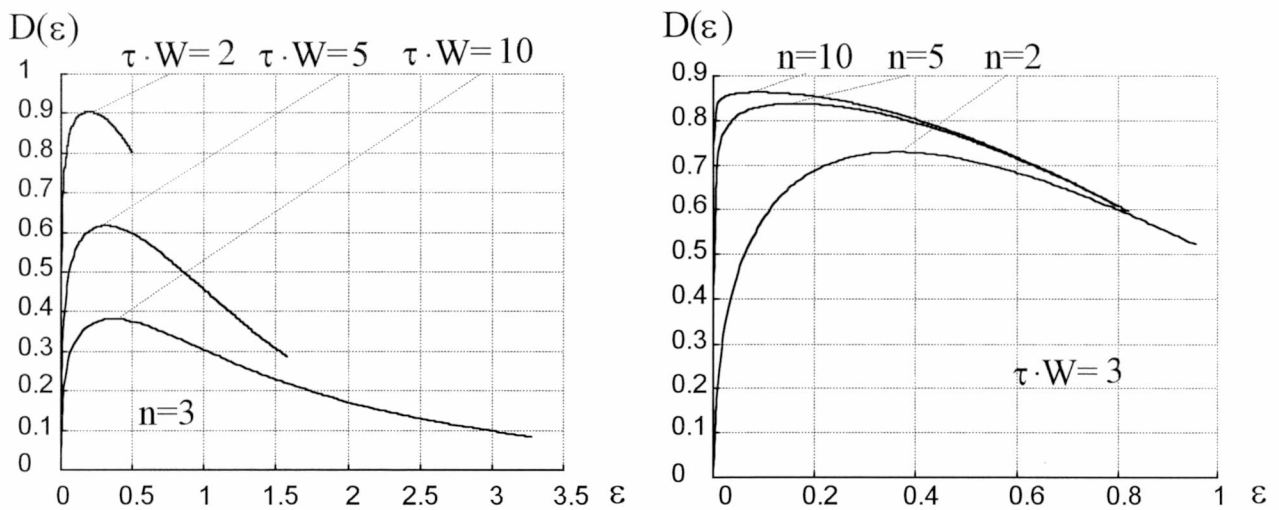
Rozumując analogicznie jak przy rozpatrywaniu (4.66-4.68), można wykazać, że funkcja $D(\varepsilon)$ posiada w przedziale określonym zależnością (4.70) dokładnie jedno ekstremum (maksimum). Optymalnego parametru ε , takiego, że $D(\varepsilon_{\text{opt}}) = D_{\text{max}}$, nie można jednak wyznaczyć analitycznie,

ponieważ funkcja $D(\varepsilon)$ także nie jest elementarna. Dla obliczenia ε_{opt} należy posłużyć się jedną z zaproponowanych wcześniej metod numerycznych.

Łatwo sprawdzić, że wyrażenia dane w (4.66,4.69) są malejącymi funkcjami parametrów $\tau \cdot W$ oraz rosnącymi funkcjami ze względu na n . Przykładowy przebieg funkcji $D(K)$ i $D(\varepsilon)$ pokazano na Rys. 4.4. i Rys. 4.5.

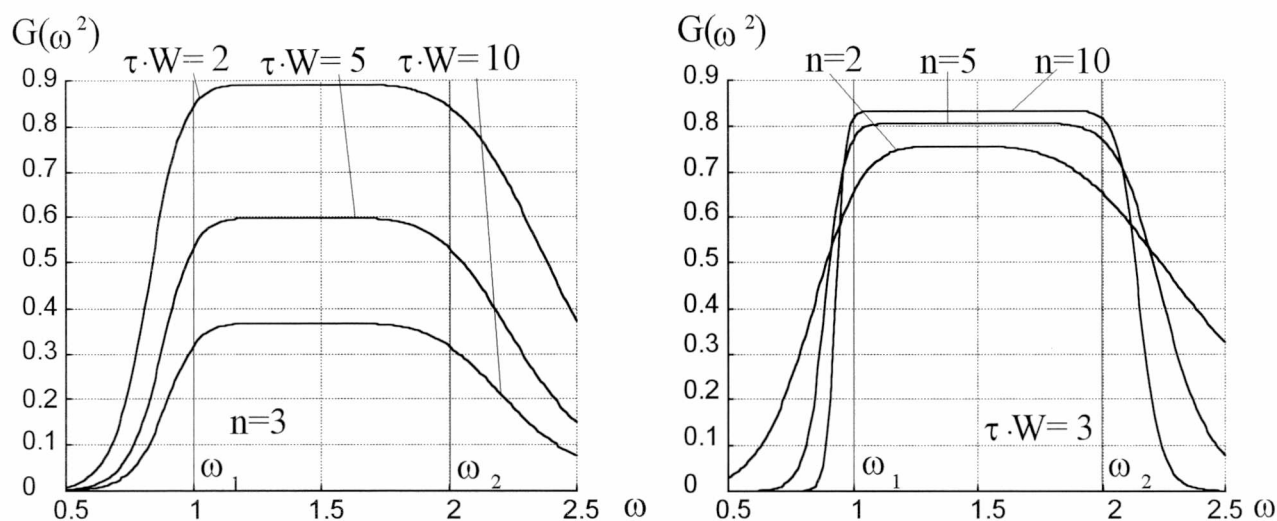


Rys. 4.4. Funkcja $D(K)$, patrz (4.66), kreślona z różnymi parametrami $n, \tau \cdot W$.

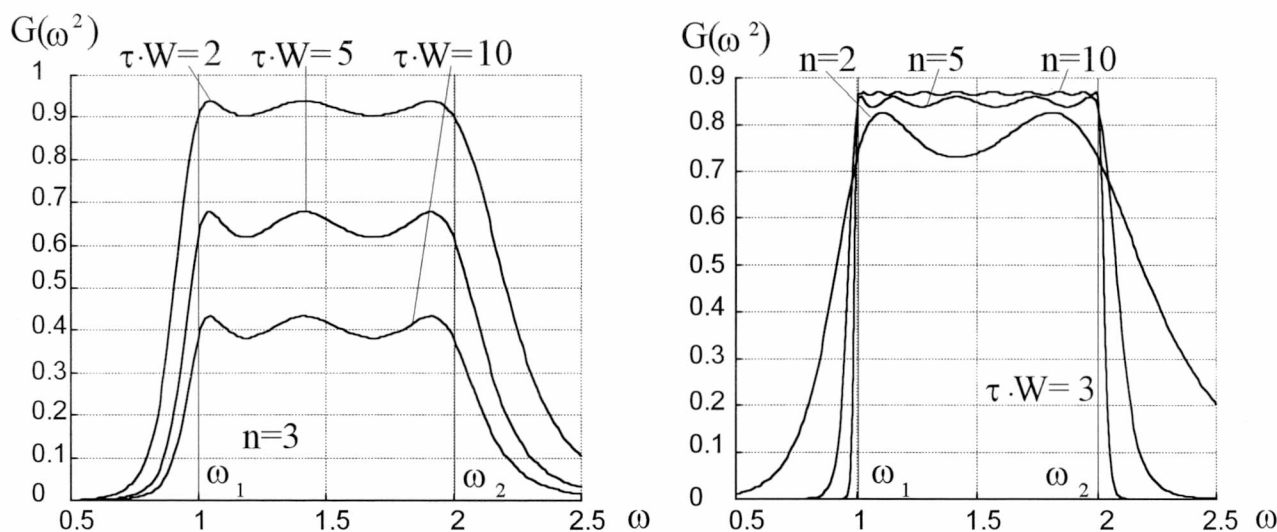


Rys. 4.5. Funkcja $D(\varepsilon)$, patrz (4.69), kreślona z różnymi parametrami $n, \tau \cdot W$.

Wzmocnienia mocy typu Butterwortha i Czebyszewa, dla wartości n , $\tau \cdot W$ takich jak na Rys. 4.4 i Rys. 4.5 oraz optymalnych w sensie kryterium 2) współczynników K i D , zilustrowano na Rys. 4.6. i Rys. 4.7.

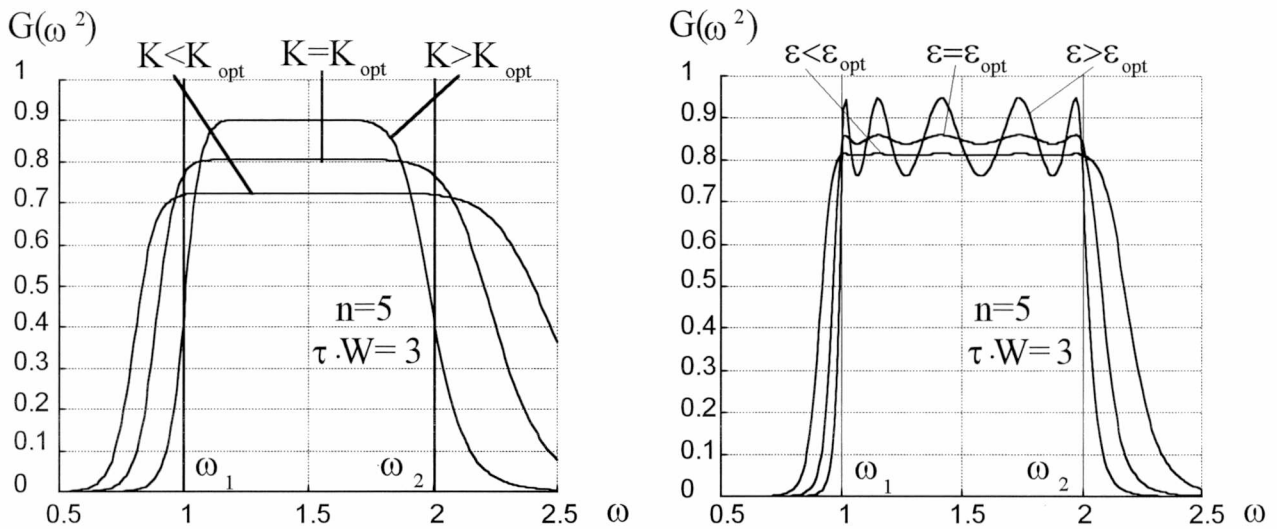


Rys. 4.6. Wzmocnienia mocy typu Butterwortha w pasmie $\omega_1=1$, $\omega_2=2$, dla różnych wartości parametrów $\tau \cdot W$ oraz n , kreślone z optymalnymi w sensie kryterium 2) współczynnikami D , K .



Rys. 4.7. Wzmocnienia mocy typu Czebyszewa w pasmie $\omega_1=1$, $\omega_2=2$, dla różnych wartości parametrów $\tau \cdot W$ oraz n , kreślone z optymalnymi w sensie kryterium 2) współczynnikami D , ϵ .

Na Rys. 4.8. wykreślono wzmocnienia mocy typu Butterwortha i Czebyszewa otrzymane dla różnych K lub ε przy jednakowych wartościach n i $\tau \cdot W$.



Rys. 4.8. Wzmocnienia mocy typu Butterwortha i Czebyszewa otrzymane dla różnych K lub ε przy jednakowych wartościach n i $\tau \cdot W$.

Dla wzmocnień Butterwortha, przy $K < K_{opt}$ dobre dopasowanie otrzymujemy w pasmie szerszym niż W , lecz poziomy wzmocnienia K i D są mniejsze niż dla $K = K_{opt}$. Dla $K > K_{opt}$ w środku pasma wzmocnienie jest większe niż dla $K = K_{opt}$ lecz na granicy pasma wzmocnienie jest mniejsze niż dla $K = K_{opt}$. Podobnie jest dla wzmocnień typu Czebyszewa.

Impedancje wejściowe $z_2(p)$, $z_0(p)$, Rys. 4.3., obliczone dla obciążeń z Rys. 4.2a),b), wynoszą odpowiednio:

$$z_2(p) = \left(\frac{1}{R} \cdot \frac{1+\rho(p)}{1-\rho(p)} - p \cdot C \right)^{-1}, \quad z_0(p) = R \cdot \frac{1-\rho(p)}{1+\rho(p)}, \quad (4.71)$$

$$z_2(p) = R \cdot \frac{1+\rho(p)}{1-\rho(p)} - p \cdot L, \quad z_0(p) = R \cdot \frac{1+\rho(p)}{1-\rho(p)}, \quad (4.72)$$

gdzie $\rho(p)$ jest minimalnofazowym współczynnikiem odbicia, dolno lub pasmowo-przepustowym typu Butterwortha lub Czebyszewa, porównaj (D1.20,D1.22) Dodatek 1. Spełnienie ograniczeń Youli (4.39) dla impedancji z Rys. 4.2.a),b) gwarantuje, że impedancje $z_2(p)$ są PR. Zależności (4.71,4.72) otrzymano z wykorzystaniem równania (3.21).

Dla obu wzmocnień mocy dolno-przepustowych (FDP) mamy: $\rho_0 = \mp 1$, czyli $\rho(\infty) = 1$. Dla zmaksymalizowania wzmocnienia, ograniczenia Youli (4.39) są spełnione ze znakiem równości, dlatego $z_2(\infty) = \infty$ dla impedancji RC i $z_2(\infty) = 0$ dla impedancji RL.

Przy pulsacji $p=0$ impedancja $z_0(p)$ wynosi:

$$z_0(0) = R_G = R \cdot \frac{1 \mp \sqrt{1-K_0}}{1 \pm \sqrt{1-K_0}}, \quad (4.73)$$

gdzie znak (-) dotyczy impedancji RC, natomiast znak (+) impedancji RL. Stała K_0 ma wartość:

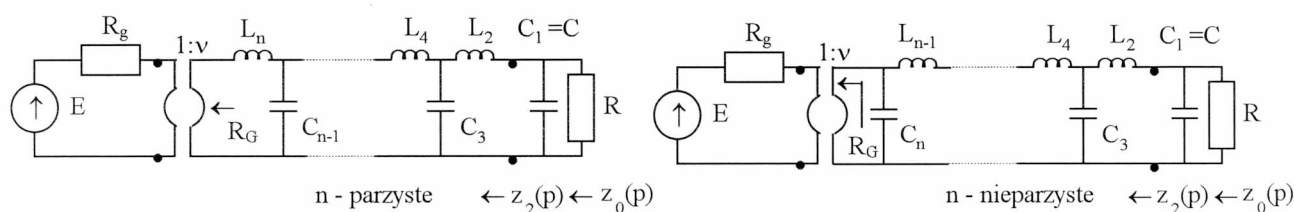
$$K_0 = \begin{cases} K & \text{a)} \\ K / (1 + \varepsilon^2) = t \cdot K & \text{b)} \end{cases} \quad (4.74)$$

Przypadek:

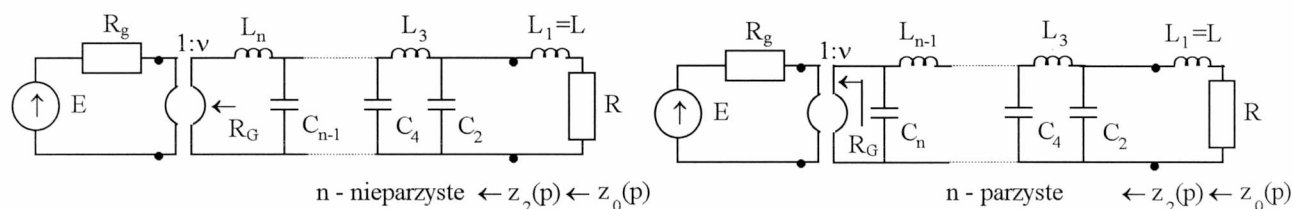
a) Obowiązuje dla wzmacnień mocy Butterwortha wszystkich stopni i dla wzmacnień Czebyszewa nieparzystych stopni.

b) Dotyczy wzmacnień Czebyszewa parzystych stopni.

Realizacje dolnoprzepustowych układów dopasowujących pokazano na Rys. 4.9 i Rys. 4.10. Wielkość $v = \sqrt{R_G/R_g}$ jest przekładnią transformatora idealnego.



Rys. 4.9. Układ dopasowujący impedancję z Rys. 4.2a) dla wzmacnień dolno-przepustowych.

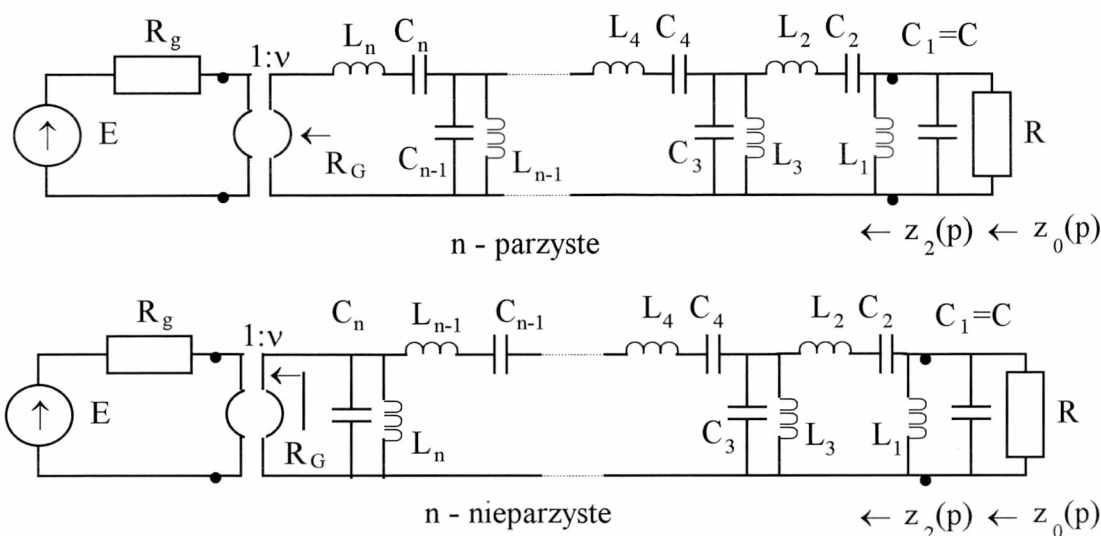


Rys. 4.10. Układ dopasowujący impedancję z Rys. 4.2b) dla wzmacnień dolno-przepustowych.

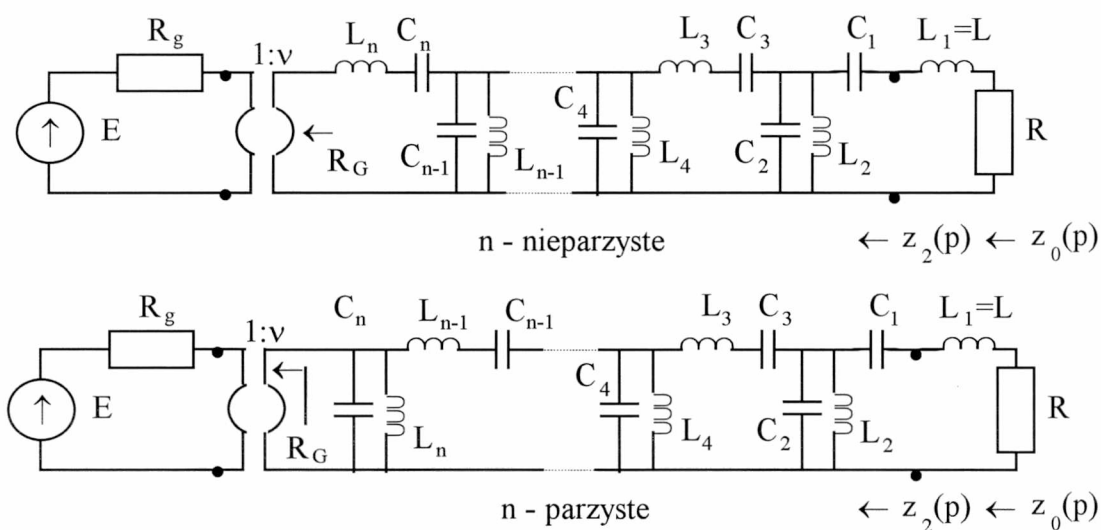
Dla pasmowo-przepustowych wzmacnień mocy (FPP) mamy: $\rho_0 = \mp 1$, czyli $\rho(0) = \rho(\infty) = +1$. W celu zmaksymalizowania wzmacnienia, ograniczenia Youli (4.39) są spełnione ze znakiem równości, zatem wartość impedancji $z_2(p)$ w zerze i nieskończoności wynosi: $z_2(\infty) = \infty$, $z_2(0) = 0$ dla impedancji RC i $z_2(\infty) = 0$, $z_2(0) = \infty$ dla impedancji RL. Realizacje pasmowo-przepustowych układów, dopasowujących impedancje z Rys. 4.2a), b) pokazano na Rys. 4.11 i Rys. 4.12. Omawiane układy otrzymano przez przekształcenie reaktancyjne

$$p \rightarrow \frac{\omega_0}{W} \left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p} \right),$$

odpowiednich prototypów FDP, gdzie $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ i $W = \omega_2 - \omega_1$. Wielkość R_G oblicza się tak jak dla układów FDP, lecz teraz $R_G = z_0(j\omega_0)$.

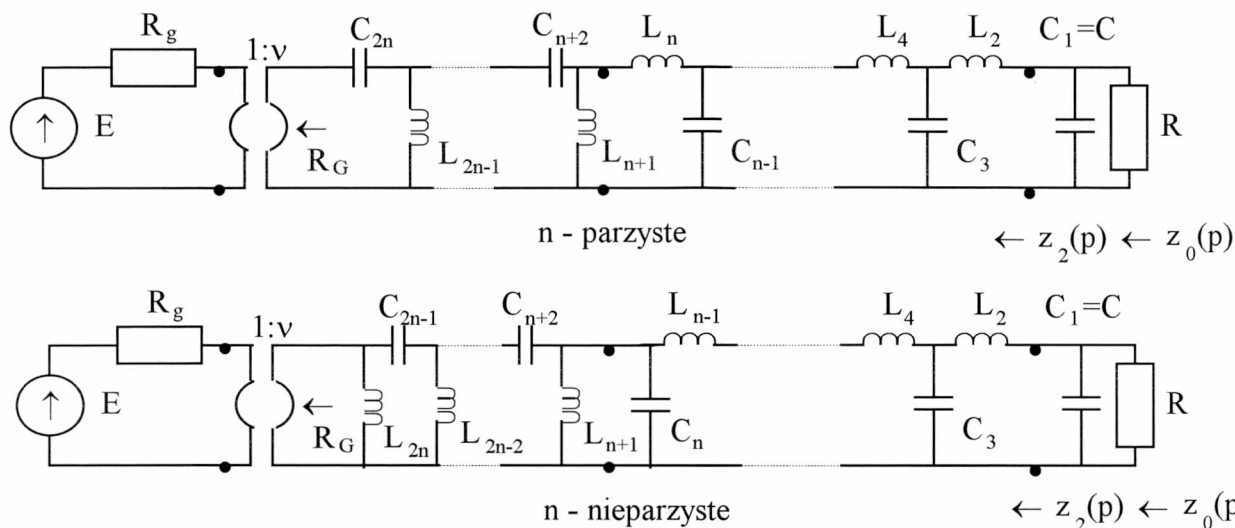


Rys. 4.11. Układ dopasowujący impedancję z Rys. 4.2a) dla wzmocnień pasmowo-przepustowych.

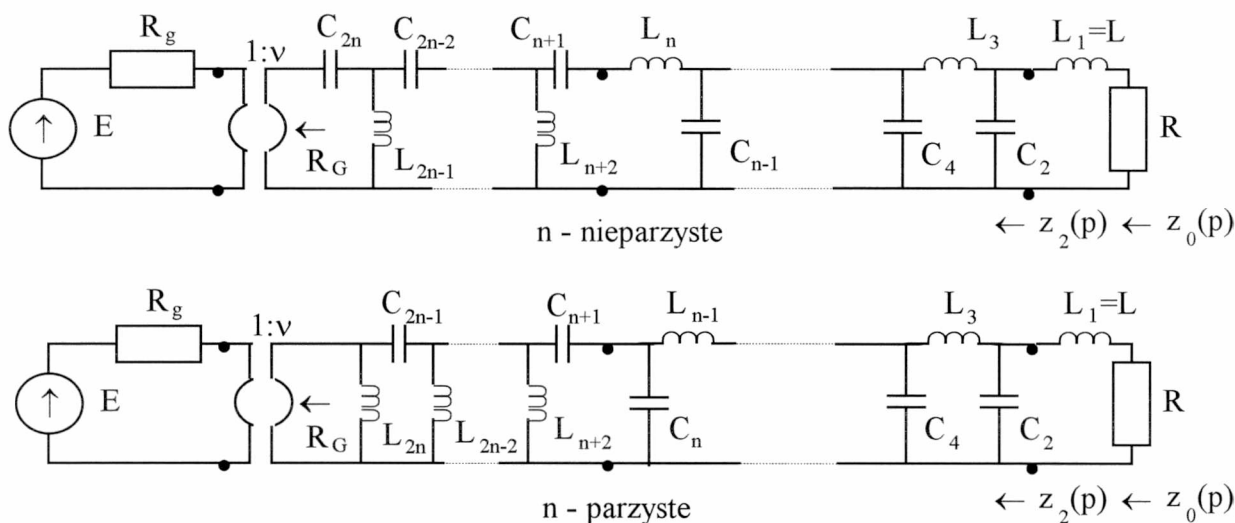


Rys. 4.12. Układ dopasowujący impedancję z Rys. 4.2b) dla wzmocnień pasmowo-przepustowych.

Zaletą układów z Rys. 4.9-4.12. jest niewątpliwie możliwość wyznaczenia poszczególnych elementów z ogólnie znanych formuł Takahasiego i Bossego [14]. Jednak niedogodnością w stosowaniu układów z Rys. 4.11., 4.12. jest konieczność dokładnego zestrojenia wszystkich obwodów rezonansowych na jednakową pulsację ω_0 . Rezygnując z użycia jawnych wzorów obliczeniowych, możemy rozłożyć w ułamek łańcuchowy impedancje (4.71, 4.72) (najprościej $z_0(p)$) i wyznaczyć poszukiwane elementy układu dopasowującego. Korzyścią z takiego postępowania jest bardziej dogodna dla realizacji praktycznej struktura układu dopasowującego, będąca kaskadowym połączeniem drabinki L,C dolno i górno-przepustowej. Realizacje pasmowo-przepustowych układów dopasowujących dla impedancji (4.71, 4.72), w konfiguracji kaskadowo połączonych drabinek L,C dolno i górno-przepustowej, pokazano na Rys. 4.13 i Rys. 4.14.



Rys. 4.13. Układ dopasowujący impedancję z Rys. 4.2a) dla wzmocnień pasmowo-przepustowych.



Rys. 4.14. Układ dopasowujący impedancję z Rys. 4.2b) dla wzmocnień pasmowo-przepustowych.

Układy z Rys. 4.13., 4.14. powstały przez rozkład impedancji $z_0(p)$ w ułamek łańcuchowy, przy czym w n kolejnych krokach rozkładu wydzielano bieguny immitancji w nieskończoności, a następnie w n dalszych krokach rozkładu wydzielano bieguny pozostałej immitancji w zerze. Kolejność wydzielania poszczególnych biegunów rozważanych funkcji PR w zerze lub nieskończoności jest w tym przypadku dowolna, co może mieć praktyczne znaczenie, jeżeli wartości elementów L, C są ograniczone w pewnych przedziałach, wynikających np. z technologii wykonania elementów L, C . Dodatkowo w układach dopasowujących z Rys. 4.13., 4.14. istnieje możliwość wyeliminowania transformatora idealnego poprzez przesunięcie transformatora na koniec drabinki górnoprzepustowej i wykorzystanie odpowiedniego przekształcenia równoważnego tzw. przekształcenia Nortona [1,32,74]. Wybrane przekształcenia Nortona zawarto także w Dodatku 4. Dla uzupełnienia dyskusji rozważmy przypadek, gdy po zmaksymalizowaniu stałej wzmocnienia K według kryterium 1, otrzymamy wartość $K=1$. W omawianej sytuacji ograniczenia (4.49,4.52) nie są spełnione ze znakiem równości, co oznacza, że wówczas $z_2(\infty)=0$ dla impedancji RC oraz $z_2(\infty)=\infty$ dla impedancji RL. Przedstawione schematy układów dopasowujących pozostaną niezmienione, jedyną różnicą będzie włączenie równoległe do pojemności C , dodatkowej

pojemności C_0 (dla impedancji RC) lub włączenie szeregowo z cewką L dodatkowej indukcyjności L_0 . Podsumowaniem niniejszego rozdziału są poniższe procedury projektowe.

Procedura dopasowania impedancji z Rys. 4.2a), 4.2b). według kryterium 1).

- 1) Dane: $\omega_2 > \omega_1 \geq 0$, $1 > t > 0$, $n=1,2,3,\dots$, $\tau=L/R$ lub $\tau=R \cdot C$, patrz Rys. 4.2a), 4.2b).
- 2) Wyznacz $W=\omega_2-\omega_1$, a następnie oblicz D_∞ ze wzoru (4.54).
- 3) Wyznacz $D_{\max}$ ze wzoru (4.49) lub (4.52).
- 4) Jeżeli $D_{\max}$ jest zbyt małe w stosunku do D_∞ , zwiększ stopień n lub zmniejsz szerokość pasma W .
- 5) Zrealizuj układ dopasowujący w jednej ze struktur danych na Rys. 4.9-4.14.

Procedura dopasowania impedancji z Rys. 4.2a), 4.2b). według kryterium 2).

- 1) Dane: $\omega_2 > \omega_1 \geq 0$, $n=1,2,3,\dots$, $\tau=L/R$ lub $\tau=R \cdot C$, patrz Rys. 4.2a), 4.2b).
- 2) Wyznacz $W=\omega_2-\omega_1$, oraz oblicz D_∞ ze wzoru (4.54).
- 3) Metodą złotego podziału odcinka lub metodą przybliżeń średniokwadratowych wyznacz $D_{\max}$ będące maksimum funkcji (4.66) lub (4.69).
- 4) Jeżeli $D_{\max}$ jest zbyt małe w stosunku do D_∞ , zwiększ stopień n lub zmniejsz szerokość pasma W .
- 5) Zrealizuj układ dopasowujący w jednej ze struktur danych na Rys. 4.9-4.14.

Komentarz: wzrost $D_{\max}$ wraz ze zwiększaniem 'n' jest niewielki, dlatego w praktyce lepszym rozwiązaniem jest zmniejszenie wymaganego pasma W , niż zwiększanie stopnia 'n'.

4.2.2. Impedancje pasmowo-przepustowe RLC

Impedancje przedstawione na Rys. 4.2d), 4.2e) rozpatrywane były w kontekście dopasowania szerokopasmowego przez wielu autorów, np. [11,14,29]. Jednak kryterium 2) z Rozdziału 4.2 nie było w zasadzie używane dla celów dopasowania impedancji RLC z Rys. 4.2d), 4.2e). Metody dopasowania wzmiankowanych obciążeń zawarł autor w pracach [49,51,54]. W bieżącym rozdziale zostaną przedstawione najważniejsze etapy procedury dopasowania szerokopasmowego impedancji z Rys. 4.2d), 4.2e), w układzie pokazanym na Rys. 4.3.

Dla impedancji z Rys. 4.2d) obliczamy:

$$z(p) = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{p \cdot L} + p \cdot C \right)^{-1}, \quad (4.75)$$

$$\operatorname{Ev} z(p) = \frac{-p^2 L^2 R}{(R + p \cdot L + p^2 R \cdot L \cdot C)(R - p \cdot L + p^2 R \cdot L \cdot C)}, \quad (4.76)$$

$$h(p) = \pm \frac{p \cdot L \cdot \sqrt{R}}{R + p \cdot L + p^2 R \cdot L \cdot C}. \quad (4.77)$$

Impedancja z Rys. 4.2d) posiada zgodnie z (3.29) jednokrotne zero transmisji w punktach $p=0$ i $p=\infty$ klasy 2. Postępując identycznie jak w Rozdziale 4.2.1., wyznaczamy następujące ograniczenia Youli dla tej impedancji:

w punkcie $p=0$:

$$\rho_0^{(0)} \eta_0^{(0)} = -1, \quad 2L/R \geq \rho_0^{(0)} \eta_1^{(0)} + \rho_1^{(0)} \eta_0^{(0)}, \quad (4.78)$$

w punkcie $p=\infty$:

$$\rho_0^{(\infty)}\eta_0^{(\infty)} = -1, \quad 2/(R \cdot C) \geq \rho_0^{(\infty)}\eta_1^{(\infty)} + \rho_1^{(\infty)}\eta_0^{(\infty)}, \quad (4.79)$$

gdzie wielkości $\rho_0^{(0)}, \rho_0^{(\infty)}, \rho_1^{(0)}, \rho_1^{(\infty)}$, są współczynnikami rozkładu w szereg potęgowy w otoczeniu zera i nieskończoności minimalnofazowego współczynnika odbicia $\rho(p)$ typu Butterwortha lub Czebyszewa stopnia n , Dodatek 1 wzory (D1.22,D1.23). Z faktu występowania zer transmisji impedancji z Rys. 4.2d) w zerze i nieskończoności, wynika, że rozpatrywane wzmocnienia będą wzmocnieniami pasmowo-przepustowymi. Wielkości $\eta_0^{(0)}, \eta_0^{(\infty)}, \eta_1^{(0)}, \eta_1^{(\infty)}$, są współczynnikami rozkładu w szereg potęgowy w otoczeniu zera i nieskończoności funkcji typu RA, Dodatek2 wzory (D2.5,D2.8). W dalszych rozważaniach przyjmuje się, że $\eta(\infty)=1$.

Analogicznie dla impedancji z Rys. 4.2e), posiadającej w punktach $p=0$ i $p=\infty$ jednokrotne zera transmisji klasy 4, wyznaczamy następujące ograniczenia Youli:

w punkcie $p=0$:

$$\rho_0^{(0)}\eta_0^{(0)} = 1, \quad 2R \cdot C \geq -(\rho_0^{(0)}\eta_1^{(0)} + \rho_1^{(0)}\eta_0^{(0)}), \quad \rho_0^{(0)}\eta_1^{(0)} + \rho_1^{(0)}\eta_0^{(0)} < 0, \quad (4.80)$$

w punkcie $p=\infty$:

$$\rho_0^{(\infty)}\eta_0^{(\infty)} = 1, \quad 2R / L \geq -(\rho_0^{(\infty)}\eta_1^{(\infty)} + \rho_1^{(\infty)}\eta_0^{(\infty)}), \quad \rho_0^{(\infty)}\eta_1^{(\infty)} + \rho_1^{(\infty)}\eta_0^{(\infty)} < 0. \quad (4.81)$$

Z wykorzystaniem wzorów (D2.4-D2.8) z Dodatku 2, zależności (4.78-4.81) przyjmą formę

$$\begin{cases} \rho_0^{(0)} = -1, & 2L / R \geq 2\varphi_{a0} + \varphi_1 W / \omega_0^2, \\ \rho_0^{(\infty)} = -1, & 2 / (R \cdot C) \geq 2\varphi_{a\infty} + \varphi_1 W, \end{cases} \quad (4.82)$$

oraz

$$\begin{cases} \rho_0^{(0)} = 1, & 2R \cdot C \geq 2\varphi_{a0} + \varphi_1 W / \omega_0^2, \\ \rho_0^{(\infty)} = 1, & 2R / L \geq 2\varphi_{a\infty} + \varphi_1 W. \end{cases} \quad (4.83)$$

Nieujemne współczynniki $\varphi_{a0}, \varphi_{a\infty}$ zdefiniowano w Dodatku 2, wzory (D2.4,D2.7). Dodatni współczynnik φ_1 określono w (4.40) dla wzmocnień mocy Butterwortha lub Czebyszewa. Stała W wynosi

$$W = \omega_2 - \omega_1$$

i jest ona szerokością pasma przenoszenia pasmowo-przepustowego układu dopasowującego, dodatkowo ω_0 jest pulsacją centralną w pasmie przenoszenia

$$\omega_0^2 = \omega_1 \omega_2.$$

Współczynniki $\varphi_{a\infty}$ oraz φ_{a0} są nieujemne, zatem wybranie $\varphi_{a\infty} > 0$ lub $\varphi_{a0} > 0$, oznaczające zastosowanie funkcji RA $\eta(p)$ do celów dopasowania, spowoduje zmniejszenie fizycznie dopuszczalnego wzmocnienia. Tym samym bez strat dla ogólności rozważań można przyjąć $\varphi_{a0} = \varphi_{a\infty} = 0$, co oznacza, że $\eta(p) \equiv 1$. Co więcej, jeżeli ograniczenia (4.82,4.83) będą spełnione dla $\varphi_{a\infty} > 0$ lub $\varphi_{a0} > 0$, to będą one spełnione również dla $\varphi_{a0} = \varphi_{a\infty} = 0$. Powyższe rozumowanie jest prawdziwe przy dodatkowym założeniu, że wymagane wzmocnienia mocy są stopnia $n \geq 2$. Założenie to jest konieczne, ponieważ liczba elementów reaktancyjnych obciążenia z Rys. 4.2d),e) wynosi dwa, zatem jakiegokolwiek skuteczne wzmocnienie mocy w układzie zawierającym wzmiankowane impedancje ma stopień $n \geq 2$. Po przyjęciu $\varphi_{a0} = \varphi_{a\infty} = 0$, ograniczenia Youli (4.82,4.83) przyjmują formę:

$$\begin{cases} \rho_0^{(0)} = -1, & 2L / R \geq \varphi_1 W / \omega_0^2, \\ \rho_0^{(\infty)} = -1, & 2 / (R \cdot C) \geq \varphi_1 W, \end{cases} \quad (4.84)$$

oraz

$$\begin{cases} \rho_0^{(0)} = 1, & 2R \cdot C \geq \varphi_1 W / \omega_0^2, \\ \rho_0^{(\infty)} = 1, & 2R / L \geq \varphi_1 W. \end{cases} \quad (4.85)$$

Niech:

$$\omega_r^2 = \frac{1}{L \cdot C}. \quad (4.86)$$

Symbolem τ , tak jak poprzednio, oznaczmy stałą czasową

$$\tau = \max\{R / (L \cdot \omega_0^2), R \cdot C\} \quad (4.87)$$

dla impedancji z Rys. 4.2d), oraz

$$\tau = \max\{L / R, 1 / (R \cdot C \cdot \omega_0^2)\} \quad (4.88)$$

stałą czasową dla impedancji z Rys. 4.2e). Wykorzystując (4.87,4.88) można ograniczenia Youli (4.84,4.85) zapisać wspólnie dla obu impedancji:

$$\rho_0^{(0)} = \rho_0^{(\infty)} = \mp 1, \quad \frac{2}{\tau \cdot W} \geq \varphi_1. \quad (4.89)$$

Znak (-) obowiązuje dla impedancji z Rys. 4.2d), zaś (+) dla impedancji z Rys. 4.2e).

Porównując (4.89) z (4.39) staje się jasne, że ograniczenia realizowalności fizycznej układu dopasowującego otrzymane w Rozdziale 4.2.1 są identyczne z ograniczeniami nałożonymi na impedancje rozpatrywane w bieżącym rozdziale. Zmianie uległo jedynie określenie wielkości τ , która to wielkość dla impedancji z Rys. 4.2d),e) jest zdefiniowana odpowiednio w (4.87,4.88). Również wzór (4.54) określający wzmocnienie w idealnym układzie dopasowującym pozostaje prawdziwy dla impedancji z Rys. 4.2d),e). Reasumując procedury dopasowania szerokopasmowego podane w Rozdziale 4.2.1, mogą bez zmian zostać użyte do wyznaczania K_{opt} i D_{max} dla impedancji z Rys. 4.2d),e). Powyższe analogie należy tłumaczyć tym, że impedancje z Rys. 4.2d),e) można traktować jako wynik pasmowo-przepustowego przekształcenia reaktancyjnego impedancji z Rys. 4.2a),b) z parametrami W, ω_0 .

Impedancje $z_2(p)$ i $z_0(p)$ Rys. 4.3 obliczamy, dla obciążeń z Rys. 4.2d),e), wykorzystując zależność (3.21), która umożliwia wyznaczenie następujących równań:

$$z_2(p) = \left(\frac{1}{R} \cdot \frac{1 + \rho(p)}{1 - \rho(p)} - \frac{1}{p \cdot L} - p \cdot C \right)^{-1}, \quad z_0(p) = R \cdot \frac{1 - \rho(p)}{1 + \rho(p)}, \quad (4.90)$$

$$z_2(p) = R \cdot \frac{1 + \rho(p)}{1 - \rho(p)} - \frac{1}{p \cdot C} - p \cdot L, \quad z_0(p) = R \cdot \frac{1 + \rho(p)}{1 - \rho(p)}, \quad (4.91)$$

gdzie $\rho(p)$ jest minimalnofazowym, pasmowo-przepustowym współczynnikiem odbicia, typu Butterwortha lub Czebyszewa. Spełnienie ograniczeń Youli dla obciążeń z Rys. 4.2d),e) gwarantuje, że impedancje $z_2(p)$ są PR.

Dla impedancji z Rys. 4.2d),e) i obu typów wzmocnień mocy zachodzi równość $\rho_0^{(0)} = \rho_0^{(\infty)} = \mp 1$, czyli $\rho(\infty) = \rho(0) = +1$. Z (4.90) obliczamy $z_0(0) = z_0(\infty) = 0$. Z (4.91) otrzymujemy $z_0(0) = z_0(\infty) = \infty$. Rezystancję generatora $R_G = z_0(j\omega_0)$ możemy wyznaczyć korzystając ze wzoru (4.73), który pozostaje słuszny również dla impedancji z Rys. 4.2d),e). Dla określenia struktury układu dopasowującego zastosowano metodę zaczerpniętą z [7]. Praca [7] jest szczególnie interesująca, ponieważ jest to prawdopodobnie jedyny współczesny artykuł traktujący o dopasowaniu szerokopasmowym, w którym nie korzysta się a priori z warunków Youli. Idea pracy polega na realizacji układu sprzęgającego metodą Darlingtona, od strony impedancji obciążenia, która jest również wyrażona przez swój model Darlingtona. W kolejnych krokach syntezy otrzymuje się warunki realizowalności, będące właśnie ograniczeniami Youli dla tej impedancji.

Rozpatrzmy realizację układu dopasowującego dla impedancji z Rys. 4.2d). Analizując układ z Rys. 4.3 pod kątem realizowalności fizycznej, można zapisać impedancję $z_0(p)$ w formie:

$$z_0(p) = \left[p \cdot (C + C_0) + \frac{1}{p} \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{L_0} \right) + \dots \right]^{-1},$$

gdzie $C_0 \geq 0$, $L_0 \geq 0$ są pierwszymi elementami układu dopasowującego, widzianymi od strony obciążenia. Wykorzystując (D1.22, D1.23) rozkładamy impedancję $z_0(p)$, wzór (4.90), w ułamek łańcuchowy, w pierwszym przypadku zaczynając rozkład od wydzielenia bieguna admitancji $1/z_0(p)$ w nieskończoności, w drugim natomiast przypadku zaczynając rozkład od wydzielenia bieguna admitancji $1/z_0(p)$ w zerze. W efekcie otrzymamy następujące równania:

Wydzielanie bieguna admitancji $1/z_0(p)$ w nieskończoności:

$$z_0(p) = \frac{1}{\frac{2p}{R \cdot W \cdot \phi_1} + \dots}$$

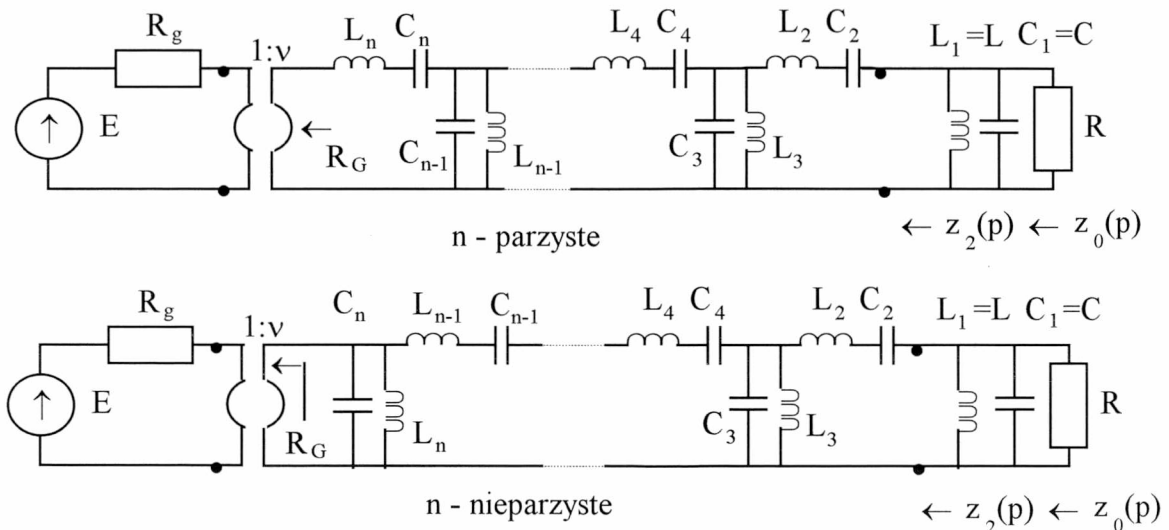
Wydzielanie bieguna admitancji $1/z_0(p)$ w zerze:

$$z_0(p) = \frac{1}{\frac{2\omega_0^2}{R \cdot W \cdot \phi_1 \cdot p} + \dots}$$

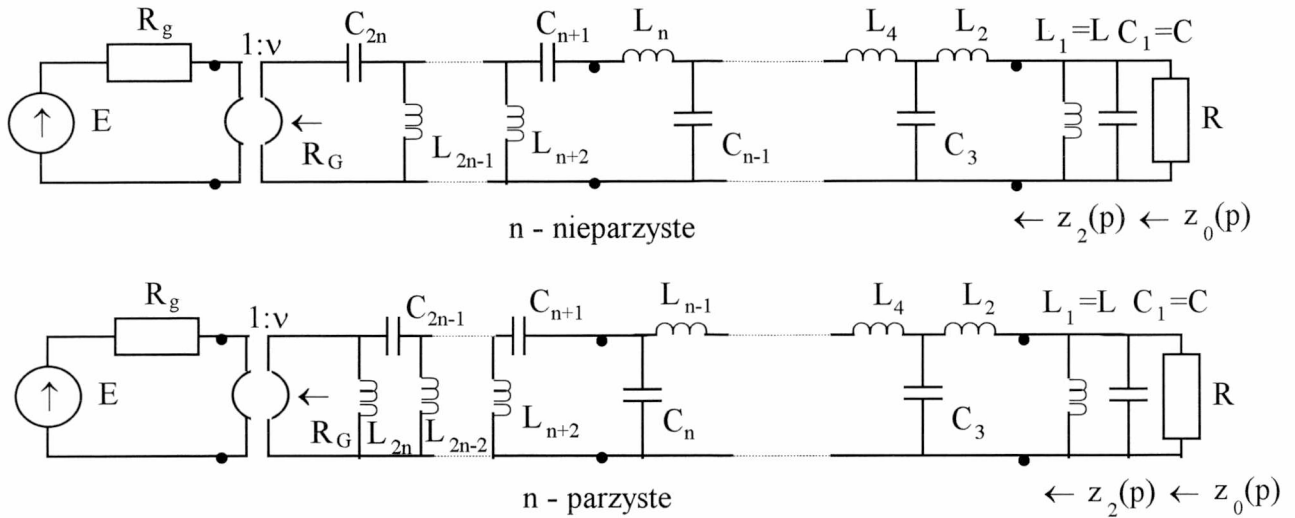
Porównując trzy powyższe równania, ustalamy poszukiwane zależności:

$$C + C_0 = 2 / (R \cdot W \cdot \phi_1), \quad \frac{1}{L} + \frac{1}{L_0} = 2\omega_0^2 / (R \cdot W \cdot \phi_1).$$

Niech ograniczenia Youli (4.89) będą spełnione ze znakiem równości, ponieważ oznacza to maksymalizację minimum wzmocnienia w pasmie. Dodatkowo niech $\tau = R \cdot C = R / (L \cdot \omega_0^2)$, wzór (4.87), czyli $\omega_0^2 = \omega_r^2$, (4.86). Dla przyjętych wyżej założeń staje się oczywiste, że $C_0 = 0$ i $L_0 = 0$ oraz $z_2(0) = z_2(\infty) = \infty$. Zaproponowane konfiguracje układu dopasowującego dla przypadku $\omega_0^2 = \omega_r^2$ przedstawiono na Rys. 4.15) i Rys. 4.16). Wielkość $v = \sqrt{R_G / R_g}$ jest przekładnią transformatora idealnego.



Rys. 4.15. Układ dopasowujący impedancję z Rys. 4.2d), przypadek $\omega_0^2 = \omega_r^2$.



Rys. 4.16. Inny wariant układu dopasowującego impedancję z Rys. 4.2d), przypadek $\omega_0^2 = \omega_r^2$.

Założmy, że ograniczenia Youli (4.89) są spełnione ze znakiem równości i dodatkowo niech $\tau = R \cdot C > R / (L \cdot \omega_0^2)$, wzór (4.89), czyli $\omega_0^2 > \omega_r^2$. Przyjęte założenia implikują, że $C_0 = 0$ i $L_0 > 0$ oraz $z_2(0) = 0$, $z_2(\infty) = \infty$. Proponowane konfiguracje układu dopasowującego impedancję z rys. 4.2d) dla przypadku $\omega_0^2 > \omega_r^2$ są identyczne jak układy zamieszczone na Rys. 4.15 i Rys. 4.16, jedyną zmianą jest włączenie równolegle do indukcyjności L , indukcyjności L_0 .

Ostatni przypadek to sytuacja, gdy $\omega_0^2 < \omega_r^2$. Założmy, że (4.89) jest nadal spełnione ze znakiem równości i dodatkowo niech $\tau = R / (L \cdot \omega_0^2) > R \cdot C$, wzór (4.87), czyli $\omega_0^2 < \omega_r^2$. Przyjęte założenia implikują, że $C_0 > 0$ i $L_0 = 0$ oraz $z_2(0) = \infty$, $z_2(\infty) = 0$. Proponowane konfiguracje układu dopasowującego impedancję z rys. 4.2d) dla przypadku $\omega_0^2 > \omega_r^2$ są nadal takie jak układów zamieszczonych na Rys. 4.15 i Rys. 4.16, jedyną zmianą jest włączenie równolegle do pojemności C , pojemności C_0 .

Dla uzupełnienia dyskusji rozważmy przypadek, gdy po zmaksymalizowaniu stałej wzmocnienia K , według kryterium 1, otrzymamy wartość $K=1$. W omawianej sytuacji ograniczenia (4.49,4.52) ze stałymi czasowymi danymi w (4.87,4.88) nie są spełnione ze znakiem równości, co oznacza, że wówczas $z_2(\infty) = 0$ i $z_2(0) = \infty$ dla impedancji z Rys. 4.2d). Przedstawione schematy układów dopasowujących pozostaną niezmiennic, jedyną różnicą będzie włączenie równolegle do obciążenia z Rys. 4.2d), dodatkowej pojemności C_0 i indukcyjności L_0 .

Rozpatrzmy realizację układu dopasowującego dla impedancji z Rys. 4.2e). Analizując układ z Rys. 4.3 pod kątem realizowalności fizycznej, można zapisać impedancję $z_0(p)$ w formie:

$$z_0(p) = (L + L_0) \cdot p + \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_0} \right) \frac{1}{p} + \dots,$$

gdzie $C_0 \geq 0$, $L_0 \geq 0$ są pierwszymi elementami układu dopasowującego, widzianymi od strony obciążenia. Wykorzystując (D1.22,D1.23) rozkładamy impedancję $z_0(p)$, wzór (4.91), w ułamek łańcuchowy, w pierwszym przypadku zaczynając rozkład od wydzielenia bieguna $z_0(p)$ w nieskończoności, natomiast w drugim przypadku zaczynając rozkład od wydzielenia bieguna $z_0(p)$ w zerze. W efekcie otrzymamy następujące równania:

Wydzielanie bieguna $z_0(p)$ w nieskończoności:

$$z_0(p) = \frac{2R}{\phi_1 \cdot W} \cdot p + \dots,$$

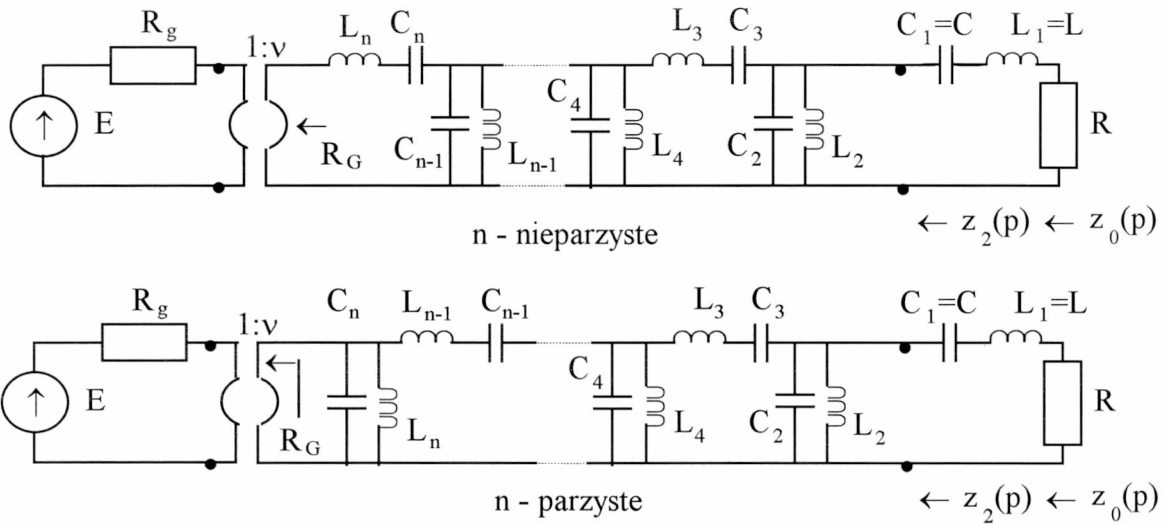
Wydzielanie bieguna $z_0(p)$ w zerze:

$$z_0(p) = \frac{2R \cdot \omega_0^2}{\phi_1 \cdot W \cdot p} + \dots,$$

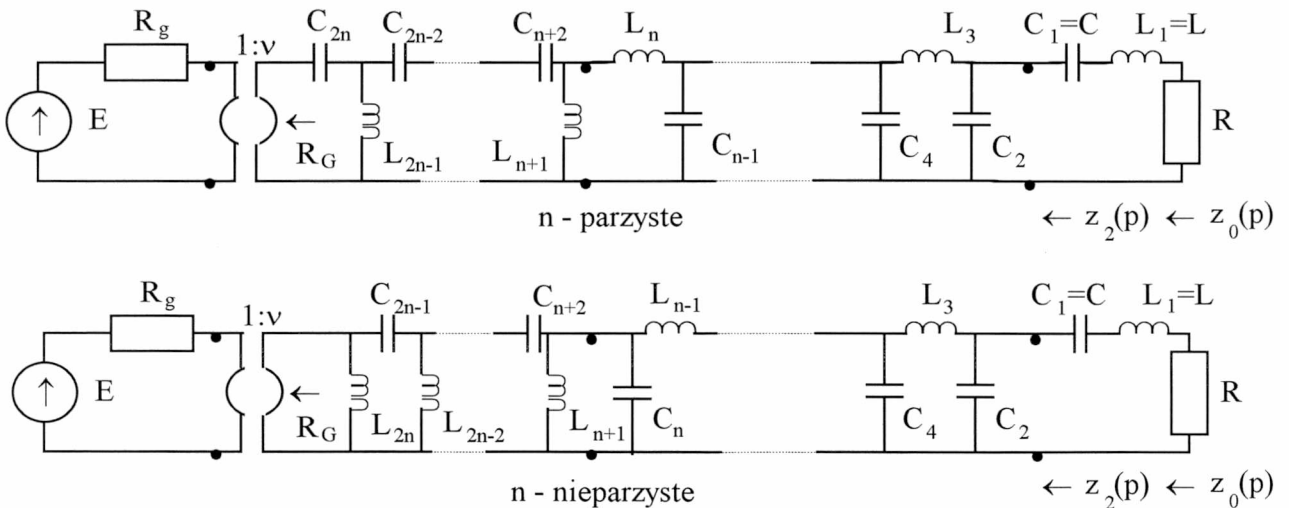
Porównując trzy powyższe równania, ustalamy poszukiwane zależności:

$$L + L_0 = 2R / (W \cdot \phi_1), \quad \frac{1}{C} + \frac{1}{C_0} = 2R \cdot \omega_0^2 / (W \cdot \phi_1).$$

Niech ograniczenia Youli (4.89) będą spełnione ze znakiem równości. Dodatkowo niech $\tau = 1/(R \cdot C \cdot \omega_0^2) = L/R$, wzór (4.88), czyli $\omega_0^2 = \omega_r^2$. W świetle przyjętych założeń staje się oczywiste, że $C_0 = 0$ i $L_0 = 0$ oraz $z_2(0) = z_2(\infty) = 0$. Proponowane konfiguracje układu dopasowującego dla przypadku $\omega_0^2 = \omega_r^2$ przedstawiono na Rys. 4.17 i Rys. 4.18.



Rys. 4.17. Układ dopasowujący impedancję z Rys. 4.2e), przypadek $\omega_0^2 = \omega_r^2$.



Rys. 4.18. Inny wariant układu dopasowującego impedancję z Rys. 4.2e), przypadek $\omega_0^2 = \omega_r^2$.

Założmy, że ograniczenia Youli (4.89) są spełnione ze znakiem równości i dodatkowo niech $\tau = L/R > 1/(R \cdot C \cdot \omega_0^2)$, wzór (4.88), czyli $\omega_0^2 > \omega_r^2$. Przyjęte założenia implikują, że $C_0 > 0$ i $L_0 = 0$ oraz $z_2(0) = \infty$, $z_2(\infty) = 0$. Proponowane konfiguracje układu dopasowującego impedancję z

Rys. 4.2e) dla przypadku $\omega_0^2 > \omega_r^2$ są identyczne jak układy zamieszczone na Rys. 4.17 i Rys. 4.18, jedyną zmianą jest włączenie szeregowo z pojemnością C , pojemności C_0 .

Ostatni przypadek to sytuacja, gdy $\omega_0^2 < \omega_r^2$. Załóżmy, że (4.89) jest nadal spełnione ze znakiem równości i dodatkowo niech $\tau = 1/(R \cdot C \cdot \omega_0^2) > L/R$, wzór (4.88), czyli $\omega_0^2 < \omega_r^2$. Przyjęte założenia implikują, że $C_0 = 0$ i $L_0 > 0$ oraz $z_2(0) = 0$, $z_2(\infty) = \infty$. Proponowane konfiguracje układu dopasowującego impedancję z rys. 4.2e) dla przypadku $\omega_0^2 < \omega_r^2$ są nadal takie jak układów zamieszczonych na Rys. 4.17 i Rys. 4.18, jedyną zmianą jest włączenie szeregowo z indukcyjnością L , indukcyjności L_0 .

Dla uzupełnienia dyskusji rozważmy przypadek, gdy po zmaksymalizowaniu stałej wzmocnienia K , według kryterium 1, otrzymamy wartość $K=1$. W omawianej sytuacji ograniczenia (4.49,4.52) ze stałymi czasowymi danymi w (4.87,4.88) nie są spełnione ze znakiem równości, co oznacza, że wówczas $z_2(\infty) = \infty$ i $z_2(0) = \infty$ dla impedancji z Rys 4.2e). Przedstawione schematy układów dopasowujących pozostaną niezmienione, jedyną różnicą będzie włączenie szeregowo z obciążeniem z Rys. 4.2e), dodatkowej indukcyjności L_0 i pojemności C_0 .

4.2.3. Impedancja RLC o trójkrotnych zerach transmisji

Rozważmy dopasowanie szerokopasmowe impedancji z Rys. 4.2c) w układzie jak na Rys. 4.3. Rozwiązanie problemu dopasowania takiej impedancji można znaleźć w [12,14,15,31,34,85,86]. Wspólną cechą cytowanych prac jest możliwość dopasowania szerokopasmowego impedancji z Rys. 4.2c) z użyciem funkcji RA co najwyżej drugiego stopnia (dla wzmocnień pasmowo-przepustowych Butterwortha lub Czebyszewa), przy spełnieniu dodatkowego warunku:

$$\omega_0 < \omega_r, \quad \omega_r^2 = 1/(L \cdot C), \quad (4.92)$$

gdzie L, C są odpowiednio indukcyjnością i pojemnością obciążenia, zaś ω_0 jest pulsacją środkową pasma przenoszenia. Rozwiązanie problemu dopasowania rozpatrywanej impedancji zawarte w niniejszej pracy zawiera istotną innowację. Dopasowanie jest zawsze możliwe z użyciem funkcji RA co najwyżej pierwszego stopnia i co więcej ograniczenie (4.92) przestaje obowiązywać. Omawiane rozwiązanie problemu dopasowania impedancji z Rys. 4.2c) było tematem prac [52,60,62] autora niniejszej rozprawy.

Zgodnie z (3.29) impedancja z Rys. 4.2c) ma trzykrotne zero transmisji w punkcie $p=\infty$ klasy 4, zatem:

$$z(p) = \frac{R}{1 + p \cdot R \cdot C} + p \cdot L, \quad (4.93)$$

$$\text{Ev } z(p) = \frac{R}{(1 + p \cdot R \cdot C)(1 - p \cdot R \cdot C)}, \quad (4.94)$$

$$h(p) = \pm \frac{\sqrt{R}}{1 + p \cdot R \cdot C}. \quad (4.95)$$

Stosując (3.23) do (4.95) otrzymujemy zależności

$$B(p) = 1, \quad (4.96)$$

$$A(p) = \frac{1 - p \cdot R \cdot C}{1 + p \cdot R \cdot C}. \quad (4.97)$$

Ponadto

$$F(p) = 2A(p)Evz(p) = \frac{2R}{(1+p \cdot R \cdot C)^2} . \quad (4.98)$$

Rozkładając funkcje $A(p)$, $F(p)$, $s(p) = \rho(p)\eta(p)$, $\rho(p)$ i $\eta(p)$, w szereg potęgowy w otoczeniu punktu $p=\infty$, po wykorzystaniu zależności (D1.20,D1.22) z Dodatku 1 i (D2.13-D2.15) z Dodatku 2, obliczamy współczynniki wzmiarkowanego rozkładu, (4.99,4.100). Funkcja $\rho(p)$ jest minimalnofazowym współczynnikiem odbicia typu Butterwortha lub Czebyszewa, natomiast funkcja $\eta(p)$ jest dowolną funkcją RA.

$$A_0 = -1, \quad A_1 = \frac{2}{R \cdot C}, \quad F_0 = F_1 = 0, \quad F_2 = \frac{2}{R \cdot C^2}, \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned} s_0 &= \rho_0 \eta_0, \\ s_1 &= \rho_0 \eta_1 + \rho_1 \eta_0, \\ s_2 &= \rho_0 \eta_2 + \rho_1 \eta_1 + \rho_2 \eta_0, \\ s_3 &= \rho_0 \eta_3 + \rho_1 \eta_2 + \rho_2 \eta_1 + \rho_3 \eta_0. \end{aligned} \quad (4.100)$$

W dalszych rozważaniach zakładamy, że $\lim_{p \rightarrow \infty} \eta(p) = 1$, czyli współczynnik $\eta_0 = 1$. Ograniczenia Youli (3.36), dla impedancji z Rys. 4.2c), przyjmą z wykorzystaniem równań (4.99,4.100) następującą postać:

$$\rho_0 = -1, \quad (4.101)$$

$$\rho_0 \eta_1 + \rho_1 = \frac{2}{R \cdot C}, \quad (4.102)$$

$$\rho_0 \eta_2 + \rho_1 \eta_1 + \rho_2 = \frac{-2}{(R \cdot C)^2}, \quad (4.103)$$

$$\frac{2\omega_r^2}{R \cdot C} > \rho_0 \eta_3 + \rho_1 \eta_2 + \rho_2 \eta_1 + \rho_3 + \frac{2\omega_r^2}{R \cdot C} - \frac{2}{(R \cdot C)^3} \geq 0. \quad (4.104)$$

Po wstawieniu współczynników ρ_i $i=0,1,2,3$ danych w (D1.22) Dodatek 1 i η_i $i=0,1,2,3$ danych w (D2.8) Dodatek 2, do wzorów (4.101-4.104), otrzymamy równoważne zależności:

$$\rho_0 = -1, \quad (4.105)$$

$$\varphi_1 W = 2 \left(\frac{1}{R \cdot C} - \varphi_{a\infty} \right), \quad (4.106)$$

$$\left(\frac{1}{R \cdot C} - \varphi_{a\infty} \right) \left[2 \left(\frac{1}{3} - \varphi_2 \right) \left(\frac{1}{R \cdot C} - \varphi_{a\infty} \right)^2 + \omega_0^2 \right] + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{(R \cdot C)^3} - \varphi_{b\infty} + 6\varphi_{c\infty} \right] > 0, \quad (4.107)$$

$$\frac{\omega_r^2}{R \cdot C} \geq \left(\frac{1}{R \cdot C} - \varphi_{a\infty} \right) \left[2 \left(\frac{1}{3} - \varphi_2 \right) \left(\frac{1}{R \cdot C} - \varphi_{a\infty} \right)^2 + \omega_0^2 \right] + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{(R \cdot C)^3} - \varphi_{b\infty} + 6\varphi_{c\infty} \right]. \quad (4.108)$$

Nieujemne współczynniki $\varphi_{a\infty}$, $\varphi_{b\infty}$, $\varphi_{c\infty}$ określono w (D2.7) Dodatek 2, natomiast współczynniki φ_1 , φ_2 dane są w (D1.24) Dodatek 1 dla wzmocnień mocy typu Butterwortha i w (D2.25) Dodatek 1 dla wzmocnień mocy typu Czebyszewa. Stała W wynosi

$$W = \omega_2 - \omega_1$$

i jest ona szerokością pasma przenoszenia pasmowo-przepustowego układu dopasowującego, dodatkowo ω_0 jest pulsacją centralną w pasmie przenoszenia

$$\omega_0^2 = \omega_1 \omega_2 \quad .$$

Porównując wzory (D1.20) i (D1.22) z Dodatku 1, można zauważyć, że zależności (4.105-4.108) pozostaną prawdziwe również dla wzmocnień dolno-przepustowych po przyjęciu $\omega_0 = 0$ i $W = \omega_d$, gdzie ω_d jest pulsacją graniczną pasma przenoszenia. Z określenia φ_1 wynika, że $\varphi_1 > 0$, ponadto $\varphi_{a\infty} \geq 0$, zatem równanie (4.106) implikuje nierówność:

$$\frac{1}{R \cdot C} > \varphi_{a\infty} \geq 0 \quad . \quad (4.109)$$

Co więcej, z (D1.24, D1.25) Dodatek 1 wynika, że $1/3 - \varphi_2 > 0$. Nierówność $1/3 - \varphi_2 > 0$ jest prawdziwa przy dodatkowym założeniu, że wymagane wzmocnienia mocy są stopnia $n \geq 2$. Założenie to jest konieczne, ponieważ liczba elementów reaktancyjnych obciążenia z Rys. 4.2c) wynosi dwa, zatem jakiegokolwiek skuteczne wzmocnienie mocy w układzie zawierającym wzmiankowaną impedancję ma stopień $n \geq 2$. Ze wzorów (D2.7) Dodatek 2 i nierówności (4.109) można wywnioskować, że:

$$\frac{1}{(R \cdot C)^3} - \varphi_{b\infty} + 6\varphi_{c\infty} > \varphi_{a\infty}^3 - \varphi_{b\infty} + 6\varphi_{c\infty} \geq 0 \quad . \quad (4.110)$$

Reasumując stwierdzamy, że nierówność (4.107) jest spełniona dla dowolnego wyboru funkcji RA $\eta(p)$ i dla dowolnej stałej wzmocnienia $K \in (0, 1]$. W praktyce dążymy do tego, aby stopień funkcji $\eta(p)$ był jak najmniejszy, najlepiej, gdy $\eta(p) \equiv 1$. Z równania (4.6) wynika jasno, że każde zero $\eta(p)$, nie będące zerem $\rho_*(p)$, jest zerem $s_{12}(p)$ lub $s_{21}(p)$. Oczywiście zera $s_{12}(p)$ lub $s_{21}(p)$ są zerami transmisji układu dopasowującego. Sytuacja, gdy $s_{12}(p)$ lub $s_{21}(p)$ ma zero poza osią $j\omega$ jest niekorzystna, ponieważ realizacja zer transmisji położonych poza osią $j\omega$ w bezstratnym obwodzie dopasowującym, wymaga generalnie użycia induktorów sprzężonych. W dalszych rozważaniach założono, że funkcja RA $\eta(p)$ jest co najwyżej pierwszego stopnia:

$$\eta(p) = \frac{p - \alpha}{p + \alpha} \quad , \quad (4.111)$$

gdzie

$$\frac{1}{R \cdot C} > \alpha \geq 0 \quad . \quad (4.112)$$

Zostanie uzasadnione, iż dopasowanie szerokopasmowe impedancji z Rys. 4.2c) jest zawsze możliwe przy użyciu funkcji (4.111) i przy dodatkowym założeniu, że wzmocnienia mocy są typu Butterwortha lub Czebyszewa. Dla $\eta(p)$ w postaci jak (4.111), ograniczenia Youli (4.105-4.108) staną się równoważne następującym warunkom:

$$\rho_0 = -1 \quad , \quad (4.113)$$

$$\varphi_1 W = 2 \left(\frac{1}{R \cdot C} - \alpha \right) \quad , \quad (4.114)$$

$$\frac{\omega_r^2}{R \cdot C} \geq \left(\frac{1}{R \cdot C} - \alpha \right) \left[(1 - 2\varphi_2) \left(\frac{1}{R \cdot C} - \alpha \right)^2 + \frac{\alpha}{R \cdot C} + \omega_0^2 \right] \quad . \quad (4.115)$$

Wyznamy pochodną po α , prawej strony nierówności (4.115):

$$-2(1-3\varphi_2)\left(\frac{1}{R \cdot C} - \alpha\right)^2 - \alpha^2 - \omega_0^2 . \quad (4.116)$$

Z (D1.24,D1.25) Dodatek 1 wynika, że $1/3 - \varphi_2 > 0$, zatem prawa strona nierówności (4.115) jest malejącą funkcją α . Uwzględniając (4.112), stwierdzamy, że granicą prawej strony nierówności (4.115) dla $\alpha \rightarrow 1/(R \cdot C)$ jest zero. Reasumując wnioskujemy, że dla dowolnych: $K \in (0,1]$ i $0 \leq \omega_1 < \omega_2$ zawsze istnieje funkcja RA pierwszego stopnia, pozwalająca dopasować szerokopasmowo impedancję z Rys. 4.2c) przy wymaganych wzmocnieniach mocy typu Butterwortha lub Czebyszewa.

Otrzymany rezultat w zasadniczy sposób różni się od wyników uzyskanych przez W.K.Chena i innych [12,14,15,31,34], gdzie dla dopasowania impedancji z Rys. 4.2c), przy założeniu, że wymagane wzmocnienia mocy są pasmowymi wzmocnieniami typu Butterwortha lub Czebyszewa, konieczne było użycie funkcji RA drugiego stopnia. Ponadto, elementy L,C obciążenia z Rys. 4.2c) musiały spełniać nierówność (4.92). Jak pokazano w niniejszej pracy, spełnienie nierówności (4.92) nie jest konieczne dla uzyskania dopasowania.

Wyjaśnienie zaistniałych rozbieżności jest proste. W.K.Chen skonstruował współczynnik odbicia $s(p) = \rho(p)\eta(p)$ przez użycie pasmowo-przepustowego przekształcenia reaktancyjnego, zastosowanego do danego dolno-przepustowego współczynnika odbicia. W rezultacie funkcja RA $\eta(p)$ stopnia $n=1$, również została poddana reaktancyjnej transformacji pasmowo-przepustowej. Rozkład w szereg potęgowy w otoczeniu nieskończoności dla tego typu funkcji RA zawarto w Dodatku 2 wzór (D2.12). Gdyby zastosować funkcję RA drugiego stopnia do ograniczeń Youli (4.113-4.115), wówczas zmiana ulegałaby nierówność (4.115). Do prawej strony nierówności (4.115) należałoby dodać czynnik $\alpha \cdot \omega_0^2$. W rezultacie granica prawej strony nierówności (4.115) przy $\alpha \rightarrow 1/(R \cdot C)$ wynosiłaby $\omega_0^2/(R \cdot C)$ i ograniczenie (4.92) stałoby się obowiązujące. W niniejszej pracy współczynnik odbicia $s(p) = \rho(p)\eta(p)$ skonstruowano jako iloczyn minimalnofazowego, pasmowo-przepustowego współczynnika odbicia typu Butterwortha lub Czebyszewa i funkcji RA pierwszego stopnia. Tego typu współczynnik odbicia mimo, iż nie jest transformowany poprzez przekształcenie reaktancyjne to pozostaje nadal funkcją BR. Co więcej, użycie funkcji RA pierwszego stopnia zawsze umożliwia uzyskanie wymaganego dopasowania i dodatkowo ograniczenie (4.92) nie występuje.

Rozważmy dopasowanie szerokopasmowe impedancji z Rys. 4.2c) przy użyciu kryterium 1) Rozdział 4.2. Jeżeli dane jest 't' (4.25), to wielkości β (4.41) oraz ε (4.46) są również ustalone. Z (4.114) przy użyciu wzorów (D1.24,D1.25) z Dodatku 1 można obliczyć:

$$\delta = 1 - \frac{2\beta \sin \gamma}{W} \left(\frac{1}{R \cdot C} - \alpha \right) , \quad (4.117)$$

$$\hat{b}_{n-1} = b_{n-1} - \frac{2}{W} \left(\frac{1}{R \cdot C} - \alpha \right) , \quad (4.118)$$

odpowiednio dla wzmocnień mocy Butterwortha i Czebyszewa. Wielkości γ , δ , b_{n-1} , $\hat{b}_{n-1}$ określono we wzorach (4.42,4.43,4.44,4.45). Ponieważ $K \in (0,1]$, czyli $\delta \in [0,1)$ oraz obowiązuje nierówność (4.112), zatem poszukiwane α ograniczone jest do przedziału:

$$\frac{1}{R \cdot C} > \alpha \geq \max\{0, \alpha_1\} , \quad (4.119)$$

gdzie

$$\alpha_1 = \frac{1}{R \cdot C} - \frac{W}{2\beta \sin \gamma} \quad (4.120)$$

dla wzmocnień mocy Butterwortha, oraz

$$\alpha_1 = \frac{1}{R \cdot C} - 0.5 \cdot W \cdot b_{n-1} \quad (4.121)$$

dla wzmocnień mocy Czebyszewa. Po wstawieniu (4.117) lub (4.118) do (4.115) i wykorzystaniu zależności (D1.24,D1.25) Dodatek 1, otrzymamy nierówność (4.122), równoważną nierówności (4.115), mianowicie:

$$y(\alpha) = \alpha^3 + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 \geq 0 \quad (4.122)$$

Współczynniki wielomianu $y(\alpha)$ wynoszą:

$$a_2 = -4 \left(\frac{\sin \gamma}{R \cdot C} - \frac{W}{2\beta} \right) \sin \gamma \quad (4.123)$$

$$a_1 = 4 \left(\frac{\sin \gamma}{R \cdot C} - \frac{W}{2\beta} \right)^2 + \omega_0^2 (3 - 4 \sin^2 \gamma) \quad (4.124)$$

$$a_0 = \frac{1}{R \cdot C} \left[(\omega_r^2 - \omega_0^2)(3 - 4 \sin^2 \gamma) - \frac{1}{(R \cdot C)^2} + 2 \frac{W}{\beta} \left(\frac{\sin \gamma}{R \cdot C} - \frac{W}{2\beta} \right) \right] \quad (4.125)$$

$$a_2 = -4 \left(\frac{1}{R \cdot C} - 0.5 W \cdot b_{n-1} \right) \sin^2 \gamma \quad (4.126)$$

$$a_1 = 4 \left(\frac{1}{R \cdot C} - 0.5 W \cdot b_{n-1} \right)^2 \sin^2 \gamma + \omega_0^2 (3 - 4 \sin^2 \gamma) + W^2 \cos^2 \gamma \quad (4.127)$$

$$a_0 = \frac{1}{R \cdot C} \left[(\omega_r^2 - \omega_0^2)(3 - 4 \sin^2 \gamma) - \frac{1}{(R \cdot C)^2} - W^2 \cos^2 \gamma + 2 W \cdot b_{n-1} \left(\frac{1}{R \cdot C} - 0.5 W \cdot b_{n-1} \right) \sin^2 \gamma \right] \quad (4.128)$$

odpowiednio dla wzmocnień mocy Butterwortha i Czebyszewa. Zera wielomianu $y(\alpha)$ można wyznaczyć wykorzystując znane formuły Cardano, zamieszczone np. w [14].

$$\begin{aligned} y(\alpha) &= (\alpha + a_2/3)^3 + q_1(\alpha + a_2/3) + q_0 \big|_{\alpha=\alpha_2} = 0, \\ q_1 &= a_1 - a_2^2/3, \quad q_0 = a_0 - a_1 a_2/3 + 2a_2^3/27, \\ \Delta &= \sqrt{(q_1/3)^3 + (q_0/2)^2}, \\ \alpha_2 &= -a_2/3 + (\Delta - q_0/2)^{1/3} - (\Delta + q_0/2)^{1/3} \end{aligned} \quad (4.129)$$

Pierwiastek α_2 jest zawsze rzeczywisty i pojedynczy ponieważ $q_1 > 0$ i $\Delta > 0$.

Ostatecznie, w celu zapewnienia optymalnego dopasowania wystarczy obliczyć

$$\alpha_0 = \max\{0, \alpha_1, \alpha_2\} \quad (4.130)$$

a następnie wyznaczyć $D_{\max}$ przy użyciu wzorów (4.117,4.118), przekształconych do wygodniejszej dla czytelnika postaci:

$$D_{\max} = t \left[1 - \left(1 - \frac{2}{W} \left(\frac{1}{R \cdot C} - \alpha_0 \right) \cdot \sqrt[n]{1/t-1} \cdot \sin \frac{\pi}{2n} \right)^{2n} \right] \quad (4.131)$$

dla wzmocnień Butterwortha lub

$$D_{\max} = t - (1-t) \sinh^2 \left[n \cdot \operatorname{ar sinh} \left(\sinh \left(\frac{1}{n} \operatorname{ar sinh} \frac{1}{\sqrt{1/t-1}} \right) - \frac{2}{W} \left(\frac{1}{R \cdot C} - \alpha_0 \right) \sin \frac{\pi}{2n} \right) \right] \quad (4.132)$$

dla wzmocnień Czebyszewa.

Rozważmy następnie sytuację, gdy stopień wzmocnienia mocy dąży do nieskończoności, $n \rightarrow \infty$. Oczekujemy, że charakterystyka skutecznego wzmocnienia mocy stanie się wówczas prostokątna. Biorąc pod uwagę zależności (4.58) lub (4.65) w odniesieniu do ograniczenia Youli (4.114), przy $n \rightarrow \infty$ stwierdzamy, że (4.114) przyjmuje formę:

$$-\frac{W}{\pi} \ln(1 - K_{\infty}) = 2 \left(\frac{1}{R \cdot C} - \alpha \right) . \quad (4.133)$$

W Rozdziale 4.2.1 wykazano:

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow 1, \beta \rightarrow 1, \delta \rightarrow 1, \varepsilon \rightarrow 0, \sin \gamma \rightarrow 0 \text{ oraz } K < 1 ,$$

zatem w równaniu (4.120) stała $\alpha_1 = 0$. Zauważmy, że:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} b_{n-1} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sinh\left(\frac{1}{n} \operatorname{ar sinh} \frac{1}{\varepsilon}\right) / \sin \frac{\pi}{2n} = \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} [\cosh\left(\frac{1}{n} \operatorname{ar sinh} \frac{1}{\varepsilon}\right) \left(\frac{-1}{n^2}\right) \operatorname{ar sinh} \frac{1}{\varepsilon}] / \left[\left(\frac{-\pi}{2n^2}\right) \cos \frac{\pi}{2n}\right] &= \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\operatorname{ar sinh} \frac{1}{\varepsilon}\right) / \frac{\pi}{2} &= \infty \end{aligned} \quad (4.134)$$

Z (4.134) wynika, że wówczas w równaniu (4.121) również stała $\alpha_1 = 0$. Ponadto:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} (b_{n-1} \sin \frac{\pi}{2n}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sinh\left(\frac{1}{n} \operatorname{ar sinh} \frac{1}{\varepsilon}\right) = 0 . \quad (4.135)$$

Uwzględniając (4.135) w równaniach (4.126-4.128), jest oczywiste, że odpowiednie współczynniki w (4.123-4.125) oraz w (4.126-4.128) stają się identyczne i wynoszą:

$$a_2 = 0 , \quad (4.136)$$

$$a_1 = W^2 + 3\omega_0^2 , \quad (4.137)$$

$$a_0 = \frac{1}{R \cdot C} \left[3(\omega_r^2 - \omega_0^2) - \frac{1}{(R \cdot C)^2} - W^2 \right] . \quad (4.138)$$

Wartość stałej α_2 , oznaczonej dla przypadku $n \rightarrow \infty$ jako $\alpha_{2\infty}$, otrzymamy przy pomocy równania (4.129), znajdując miejsce zerowe funkcji (4.122) ze współczynnikami danymi w (4.136-4.138). Reasumując, dla dopasowania impedancji z Rys. 4.2c) w przypadku $n \rightarrow \infty$, należy przyjąć:

$$\alpha_{\infty} = \max\{0, \alpha_{2\infty}\} , \quad (4.139)$$

oraz wyznaczyć optymalny poziom wzmocnienia $K_{\infty} = D_{\infty}$, który można obliczyć z (4.133) jako:

$$D_{\infty} = 1 - \exp \left[-\frac{2\pi}{W} \left(\frac{1}{R \cdot C} - \alpha_{\infty} \right) \right] . \quad (4.140)$$

Zauważmy, że jeżeli

$$3\omega_r^2 < \frac{1}{(R \cdot C)^2} + W^2 + 3\omega_0^2 , \quad (4.141)$$

wówczas dla uzyskania dopasowania konieczne jest użycie funkcji RA nawet przy $n \rightarrow \infty$.

Rozpatrzmy dopasowanie impedancji z Rys. 4.2c) zgodnie z kryterium optymalności danym w punkcie 2) Rozdział 4.2. Przyjmijmy, że wymagane wzmocnienie mocy jest wzmocnieniem Butterwortha stopnia n lub $2n$ dla wzmocnień pasmowo-przepustowych. W świetle przyjętych założeń równanie (4.114), przy pomocy (D1.24) z Dodatku 1, można przekształcić do postaci:

$$D(K) = \frac{K}{1 + \left(\frac{1 - \delta}{\frac{2 \sin \gamma}{W} \left(\frac{1}{R \cdot C} - \alpha \right)} \right)^{2n}}, \quad (4.142)$$

gdzie przypomnijmy:

$$\gamma = \frac{\pi}{2n}, \quad \delta = \sqrt[2n]{1 - K}, \quad (4.143)$$

oraz $\alpha \in [0, \frac{1}{R \cdot C})$, $K \in (0, 1]$, czyli $\delta \in [0, 1]$. Rozwiązanie rozważanego problemu polega na znalezieniu takiego $K = K_{\text{opt}}$ oraz takiej wartości $\alpha_{\text{opt}} = \alpha(K_{\text{opt}})$, dla których minimum wzmocnienia (4.142) w pasmie $[\omega_1, \omega_2]$ jest maksymalne, przy czym jednocześnie spełniona jest nierówność (4.115). Funkcję (4.142) analizujemy analogicznie jak (4.66), stwierdzając, że funkcja (4.142) posiada na odcinku $K \in (0, 1)$ maksimum, będące jedynym ekstremum tej funkcji w rozważanym przedziale. Wyznaczamy maksimum $D(K)$ przez przyrównanie pochodnej $D'(K)$ do zera, otrzymując równanie:

$$(1 - \delta)^{2n-1} = \left(\frac{2 \sin(0.5\pi/n)}{W} \right)^{2n} \left(\frac{1}{R \cdot C} - \alpha \right)^{2n} \frac{1 - K}{K + \delta - 1}. \quad (4.144)$$

Równanie (4.144) jest nieelementarne ze względu na K , lecz umożliwia ono wyznaczenie poszukiwanego parametru α jako funkcji K :

$$\alpha = \frac{1}{R \cdot C} - \frac{W}{2 \sin \gamma} \cdot \frac{1 - \delta}{\beta}, \quad (4.145)$$

gdzie

$$\beta = \sqrt[2n]{\frac{(1 - K)(1 - \delta)}{K + \delta - 1}}. \quad (4.146)$$

Wstawiając (4.145) do (4.142) otrzymamy:

$$D_{\text{max}} = 1 - (1 - K)^{1 - \frac{1}{2n}}, \quad (4.147)$$

gdzie $K = K_{\text{opt}}$, dla którego funkcja (4.142) osiąga maksimum. Zauważmy, że minimalny poziom wzmocnienia w wymaganym pasmie częstotliwości jest rosnącą funkcją optymalnej, w świetle kryterium 2), stałej wzmocnienia $K = K_{\text{opt}}$. Największy dopuszczalny poziom D_1 uzyskamy, jeżeli w (4.142) przyjmiemy $\alpha = 0$. Oznaczmy przez $K_1 = K_{\text{opt}|\alpha=0}$ optymalną stałą wzmocnienia, taką dla której $D_1 = D(K_1)$. Z (4.147) wynika, że K_1 jest fizycznie największą stałą wzmocnienia, która może wystąpić w rozważanym problemie. Po wstawieniu (4.145) do (4.115) i wykorzystaniu (D1.24) z Dodatku 1, nierówność (4.115) zostanie przekształcona do następującej postaci:

$$y(K) \leq 0, \quad (4.148)$$

dla funkcji $y(K)$ wynoszącej:

$$y(K) = \frac{1}{3 - 4 \sin^2 \gamma} \left(\frac{W}{2 \sin \gamma} \right)^3 \left(\frac{1 - \delta}{\beta} \right)^3 - \frac{1}{R \cdot C} \left(\frac{W}{2 \sin \gamma} \right)^2 \left(\frac{1 - \delta}{\beta} \right)^2 + \\ + \left[\frac{1}{(R \cdot C)^2} + \omega_0^2 + \frac{1}{3 - 4 \sin^2 \gamma} \cdot W^2 \cdot \frac{\delta}{\beta^2} \right] \cdot \frac{W}{2 \sin \gamma} \cdot \frac{1 - \delta}{\beta} - \frac{\omega_r^2}{R \cdot C} \quad (4.149)$$

Aby zbadać przebieg funkcji $y(K)$ należy określić granice $y(K)$ przy $K \rightarrow 0$, $K \rightarrow 1$ oraz obliczyć pierwszą pochodną $y(K)$. Wyznaczamy granicę:

$$\lim_{K \rightarrow 0} \beta = \lim_{K \rightarrow 0} \sqrt[2n]{\frac{(1-K)(1-\delta)}{K+\delta-1}} = \frac{1}{\sqrt[2n]{2n-1}} , \quad (4.150)$$

ponieważ

$$\lim_{K \rightarrow 0} \frac{(1-K)(1-\delta)}{K+\delta-1} = \lim_{K \rightarrow 0} \left(\frac{K \cdot \delta}{K+\delta-1} - 1 \right) \stackrel{0}{=} \lim_{K \rightarrow 0} \left(\frac{\delta - \frac{\delta}{2n(1-K)}}{1 - \frac{\delta}{2n(1-K)}} - 1 \right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2n}} - 1 = \frac{1}{2n-1} . \quad (4.151)$$

Ponadto:

$$\lim_{K \rightarrow 1} \frac{(1-K)(1-\delta)}{K+\delta-1} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta^{2n}(1-\delta)}{\delta - \delta^{2n}} \stackrel{0}{=} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{-\delta^{2n} + 2n(1-\delta)\delta^{2n-1}}{1 - 2n\delta^{2n-1}} = 0 , \quad (4.152)$$

zatem

$$\lim_{K \rightarrow 1} \beta = 0 . \quad (4.153)$$

Używając granic (4.150, 4.153) w zastosowaniu do (4.149), wnioskujemy:

$$\lim_{K \rightarrow 0} y(K) = -\frac{\omega_r^2}{R \cdot C} , \quad \lim_{K \rightarrow 1} y(K) = \infty . \quad (4.154)$$

Dodatkowo z (4.144) wynika, że dla $K \rightarrow 0$ stała $\alpha \rightarrow 1/(R \cdot C)$. Obliczmy jeszcze pierwszą pochodną względem K , z zależności (4.149):

$$y'(K) = \frac{W}{2\sin\gamma} \cdot \left[\frac{W^2}{3-4\sin^2\gamma} \left(\frac{1-\delta}{\beta} \right)^2 + \left(\frac{1}{R \cdot C} - \frac{W}{2\sin\gamma} \cdot \frac{1-\delta}{\beta} \right)^2 + \omega_0^2 + \frac{W^2}{3-4\sin^2\gamma} \cdot \frac{\delta}{\beta^2} \right] \frac{d}{dK} \left(\frac{1-\delta}{\beta} \right) + \\ + \frac{W}{2\sin\gamma} \cdot \frac{W^2}{3-4\sin^2\gamma} \cdot \frac{1-\delta}{\beta} \cdot \frac{d}{dK} \left(\frac{\delta}{\beta^2} \right) . \quad (4.155)$$

Ponadto wyznaczamy pochodne:

$$\frac{d}{dK} \left(\frac{1-\delta}{\beta} \right) = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{(2n-1) \cdot K \cdot \delta}{(2n)^2(1-K)(K+\delta-1)} , \quad (4.156)$$

$$\frac{d}{dK} \frac{\delta}{\beta^2} = \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{[n(1-\delta)(1+\delta-K) - K \cdot \delta] \cdot \delta}{2n^2(1-K)(1-\delta)(K+\delta-1)} . \quad (4.157)$$

Następnie sprawdzamy, czy spełniona jest nierówność:

$$n(1-\delta)(1+\delta-K) - K \cdot \delta \geq 0 ,$$

będąca równoważna następującej nierówności:

$$1 - \delta^2 \geq -K[1 - \delta(1 + 1/n)] .$$

Jest oczywiste, że prawa strona ostatniej nierówności jest malejącą funkcją parametru K . Ponadto jedynie dla $K=0$ rozpatrywana nierówność przechodzi w równość. Ponieważ $\alpha \in [0, \frac{1}{R \cdot C})$, $K \in (0, 1)$, czyli $\delta \in (0, 1)$ oraz $\sin^2 \gamma \in (0, 1/2]$ dla $n \geq 2$, zatem funkcja $y(K)$ jest rosnąca. Tym samym problem dopasowania szerokopasmowego impedancji z Rys. 4.2c) przy użyciu funkcji RA co najwyżej pierwszego stopnia, ma zawsze jednoznaczne rozwiązanie, dla wzmacnień mocy typu Butterwortha w odniesieniu do kryterium 2) z Rozdziału 4.2.

W celu zapewnienia optymalnego dopasowania należy wyznaczyć stałą wzmocnienia K_1 , dla której funkcja (4.142) osiąga maksimum przy $\alpha = 0$. Następnie sprawdzamy, czy warunek (4.148) jest spełniony dla $K=K_1$, tzn. czy $y(K_1) \leq 0$. Jeżeli tak, to $K_{opt}=K_1$ jest poszukiwanym poziomem wzmocnienia oraz $\alpha_{opt} = 0$. W przypadku przeciwnym poszukiwany poziom wzmocnienia K_{opt} otrzymamy znajdując numerycznie jedyny pierwiastek równania $y(K)|_{K=K_{opt}} = 0$ dla $K \in (0, K_1)$, gdzie funkcję $y(K)$ określono wzorem (4.149). Na koniec z równania (4.145) obliczymy wymaganą wartość parametru $\alpha_{opt} = \alpha(K_{opt})$.

Sprawdzenie warunku $y(K_1) \leq 0$ sprowadza się do przyrównania nierówności (4.122) do zera dla założonego $\alpha = 0$, czyli do wyznaczenia stałej $K=K_2$, dla której współczynnik a_0 określony w równaniu (4.125) przyjmuje wartość zero. Zapiszmy jawnie nierówność $a_0 \geq 0$:

$$\frac{1}{R \cdot C} \left[(\omega_r^2 - \omega_0^2)(3 - 4 \sin^2 \gamma) - \frac{1}{(R \cdot C)^2} + 2 \frac{W}{\beta} \left(\frac{\sin \gamma}{R \cdot C} - \frac{W}{2\beta} \right) \right] \geq 0, \quad (4.158)$$

przy czym β należy wyznaczyć z (4.145) dla $\alpha = 0$. Rozwiązując nierówność (4.158), otrzymujemy poszukiwaną stałą wzmocnienia:

$$K_2 = \begin{cases} 1 - \left[1 - \frac{2 \sin \gamma}{v} \left(\sqrt{\sin^2 \gamma + v} - \sin \gamma \right) \right]^{2n} & \text{dla } v > 0 \\ \text{przyjmujemy } K_2 = 1 & \text{dla } v \leq 0 \end{cases}, \quad (4.159)$$

gdzie

$$v = (R \cdot C)^2 (\omega_r^2 - \omega_0^2)(3 - 4 \sin^2 \gamma) - 1. \quad (4.160)$$

Jeżeli $K_1 \geq K_2$, wówczas $\alpha_{opt} = 0$ i $K_{opt} = K_1$.

Rozpatrzmy raz jeszcze dopasowanie impedancji z Rys. 4.2c) zgodnie z kryterium optymalności danym w punkcie 2) Rozdział 4.2. Przyjmijmy, że wymagane wzmocnienie mocy jest wzmocnieniem Czebyszewa stopnia n lub $2n$ dla wzmocnień pasmowo-przepustowych. W świetle przyjętych założeń równanie (4.114), przy pomocy (D1.25) z Dodatku 1, można przekształcić do postaci:

$$D(\varepsilon) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \left\{ 1 - \left[\varepsilon \cdot \sinh \left[n \cdot \operatorname{ar sinh} \left[\sinh \left(\frac{1}{n} \operatorname{ar sinh} \frac{1}{\varepsilon} \right) - \frac{2 \sin(0.5\pi/n)}{W} \left(\frac{1}{R \cdot C} - \alpha \right) \right] \right] \right]^2 \right\}, \quad (4.161)$$

przy czym $\alpha \in [0, \frac{1}{R \cdot C}]$. Uwzględnienie w (4.161) warunku $D \in (0, 1)$ prowadzi do zawężenia przedziału dopuszczalnych wartości parametru ε , mianowicie:

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_{\max} \\ \varepsilon_{\max} = \left[\sinh \left(n \cdot \operatorname{ar sinh} \frac{2 \sin \frac{\pi}{2n}}{R \cdot C \cdot W} \right) \right]^{-1}. \quad (4.162)$$

Rozwiązanie rozważanego problemu polega na znalezieniu takiego $\varepsilon = \varepsilon_{opt}$ oraz takiej wartości $\alpha_{opt} = \alpha(\varepsilon_{opt})$, dla których minimum wzmocnienia (4.161) w pasmie $[\omega_1, \omega_2]$ jest maksymalne, przy czym jednocześnie spełniona jest nierówność (4.122).

Analogicznie jak dla wzmocnień Butterwortha, można wykazać, że funkcja $D(\varepsilon)$, (4.161), posiada w przedziale określonym zależnością (4.162) dokładnie jedno ekstremum (maksimum). Parametru optymalnego ε , takiego, że $D(\varepsilon_{opt}) = D_{\max}$, nie można jednak wyznaczyć analitycznie, ponieważ funkcja $D(\varepsilon)$ nie jest elementarna. Przyrównanie pochodnej względem ε , równania (4.161) do zera, pozwala ustalić następujący warunek:

$$\left(2 + \left[\sinh \left[n \cdot \operatorname{ar sinh} \left[\sinh \left(\frac{1}{n} \operatorname{ar sinh} \frac{1}{\varepsilon} \right) - \frac{2 \sin(0.5\pi/n)}{W} \left(\frac{1}{R \cdot C} - \alpha \right) \right] \right] \right]^2 \right) \cdot \left(1 + \left[\sinh \left(\frac{1}{n} \operatorname{ar sinh} \frac{1}{\varepsilon} \right) - \frac{2 \sin(0.5\pi/n)}{W} \left(\frac{1}{R \cdot C} - \alpha \right) \right] \right)^2 - (1 + \varepsilon^2) \sinh^2 \left(\frac{1}{n} \operatorname{ar sinh} \frac{1}{\varepsilon} \right) = 0 \quad (4.163)$$

Niestety w przeciwieństwie do rozpatrywanych wcześniej wzmocnień Butterwortha, w tym przypadku rozwikłanie równania (4.163) ze względu na zmienną α lub ε nie jest możliwe. Z drugiej strony dla zapewnienia dopasowania konieczne jest równoczesne spełnienie nierówności (4.122). Lewa strona nierówności (4.122) jest jawną funkcją parametru α , jak również jest funkcją parametru ε , poprzez współczynniki a_0, a_1, a_2 (4.126-4.128). Łatwo można wykazać, że funkcja $y(\alpha, \varepsilon)$ opisująca lewą stronę nierówności (4.122) jest rosnącą funkcją parametru α . Nieco większego nakładu obliczeniowego wymaga sprawdzenie, że funkcja $y(\alpha, \varepsilon)$ jest także rosnącą funkcją parametru ε . Ponadto nierówność (4.122) jest spełniona dla pary (α, ε) , gdzie $\alpha = 0$ i $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$, (4.162). Co więcej, jeżeli $\alpha \rightarrow 1/(R \cdot C)$, to $K \rightarrow 0$ i wówczas nierówność (4.122) jest spełniona dla każdego $\varepsilon > 0$.

W pierwszym etapie procedury dopasowania wyznaczamy numerycznie parametr $\varepsilon = \varepsilon_1$, dla którego funkcja $D(\varepsilon)$ (4.161) osiąga maksimum, przy czym w (4.161) przyjmujemy $\alpha = 0$. Jeżeli nierówność (4.122) jest spełniona z parametrami $\alpha = 0$ i $\varepsilon = \varepsilon_1$, wówczas optymalne dopasowanie ma miejsce przy $\alpha_{\text{opt}} = 0$ i $\varepsilon_{\text{opt}} = \varepsilon_1$. W przeciwnym przypadku dla każdego $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_{\max}]$ istnieje takie $\alpha \in (0, 1/(R \cdot C))$, że nierówność (4.122) staje się równa zero. Parametr α o wymaganej własności obliczamy z równania (4.129). Optymalną w sensie kryterium 2) wartość parametru $\varepsilon = \varepsilon_{\text{opt}}$ znajdujemy przez numeryczne obliczenie maksimum funkcji (4.161), gdzie $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_{\max}]$, natomiast $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ jest wyznaczane z (4.129). W rozważanej sytuacji $\alpha_{\text{opt}} = \alpha(\varepsilon_{\text{opt}})$.

Rozpatrzmy rozwiązania układowe obwodów dopasowujących impedancje z Rys. 4.2c) z zastosowaniem wzmocnień pasmowo-przepustowych. Impedancja $z_2(p)$ z Rys. 4.3. dla impedancji obciążenia z Rys. 4.2c) wynosi

$$z_2(p) = \frac{1}{\frac{1}{R} \cdot \frac{1 + \rho(p)}{1 - \rho(p)} \cdot \frac{p + \alpha}{p - \alpha} - p \cdot C} - p \cdot L, \quad z_0(p) = R \cdot \frac{1 - \rho(p)}{1 + \rho(p)} \cdot \frac{p - \alpha}{p + \alpha} \quad (4.164)$$

Spełnienie ograniczeń Youli dla rozpatrywanej impedancji gwarantuje, że funkcja $z_2(p)$ jest PR. Realizacja impedancji (4.164) przeprowadzana jest według klasycznej procedury syntezy Darlingtona [2,3,74], jako kaskadowe połączenie drabinek L,C dolno i górno-przepustowej wraz z kaskadowym połączeniem sekcji typu allpass, jeżeli $\alpha > 0$. W przypadku $\alpha = 0$ mamy $z_0(0) = z_0(\infty) = 0$. W punkcie $p = j\omega_0$ impedancja $z_0(p)$ wynosi:

$$z_0(j\omega_0) = R_G = R \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - K_0}}{1 + \sqrt{1 - K_0}} \quad (4.165)$$

Stała K_0 ma wartość:

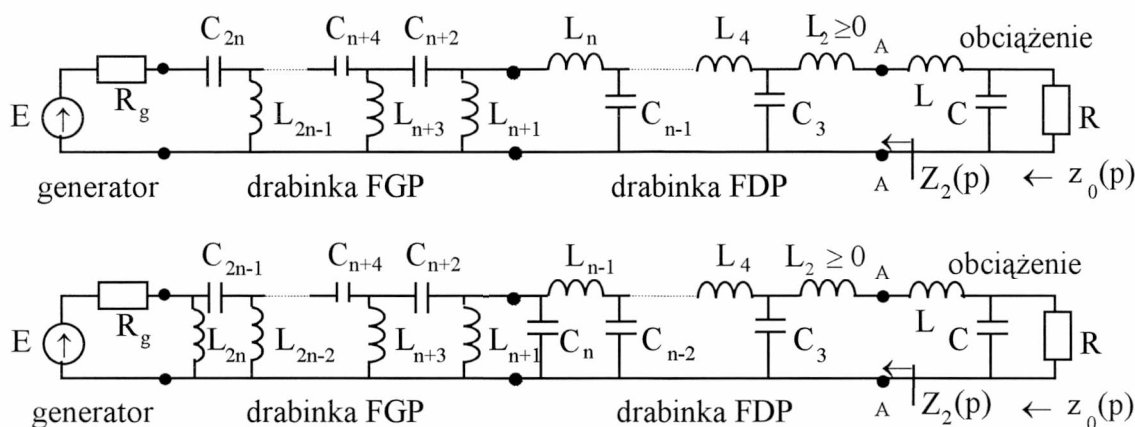
$$K_0 = \begin{cases} K & \text{a)} \\ K / (1 + \varepsilon^2) = t \cdot K & \text{b)} \end{cases} \quad (4.166)$$

Przypadek:

a) Obowiązuje dla wzmocnień mocy Butterwortha wszystkich stopni i dla wzmocnień Czebyszewa nieparzystych stopni.

b) Dotyczy wzmocnień Czebyszewa parzystych stopni.

Układ dopasowujący posiada wówczas następującą realizację:

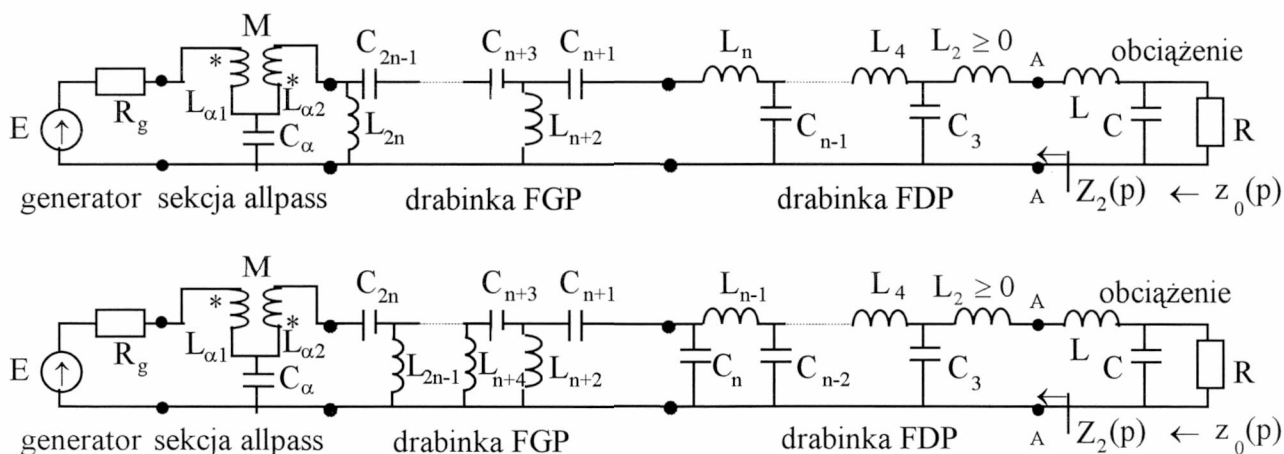


Rys. 4.19. Układ dopasowujący impedancję z Rys. 4.2c) dla n parzystych i n nieparzystych, przypadek $\alpha=0$.

W przypadku $\alpha>0$ obliczamy: $z_0(0) = \infty$ i $z_0(\infty) = 0$. Dla pulsacji $p=j\omega_0$ impedancja $z_2(p)$ nie jest rezystancją (układ nie jest 'przezroczysty' dla pulsacji centralnej), oraz

$$z_2(j\omega_0) = R \frac{\alpha(1 + \sqrt{1 - K_0}) + j\omega_0(1 - \sqrt{1 - K_0})}{\alpha(1 - \sqrt{1 - K_0}) + j\omega_0(1 + \sqrt{1 - K_0})},$$

gdzie K_0 dane jest wzorem (4.166) i $L_2 \geq 0$. Jawny wzór na rezystancję R_g nie jest wówczas dostępny. Układ dopasowujący ma następującą konfigurację:



Rys. 4.20. Układ dopasowujący impedancję z Rys. 4.2c) dla n parzystych i n nieparzystych, przypadek $\alpha>0$.

Wartość rezystancji R_g otrzymamy podczas przeprowadzania syntezy układu dopasowującego, zgodnie z konfiguracją daną na Rys. 4.20. Dla wzmocnień dolno-przepustowych układy dopasowujące pozostaną takie jak na Rys. 4.19 i Rys. 4.20, z tym, że pominięta będzie górno-przepustowa drabinka LC. Podsumowaniem niniejszego rozdziału są poniższe procedury projektowe.

Procedura dopasowania impedancji z Rys. 4.2c). według kryterium 1).

1) Dane: $\omega_2 > \omega_1 \geq 0$, $1 > t > 0$, $n=1,2,3,\dots$, $\omega_r^2 = 1/(L \cdot C)$, $\omega_0^2 = \omega_1 \omega_2$, $W = \omega_2 - \omega_1$,

patrz Rys. 4.2c).

- 2) Wyznacz $\alpha_{2\infty}$ z (4.129) ze współczynnikami danymi w (4.136-4.138). Oblicz α_{∞} z (4.139) i D_{∞} ze wzoru (4.54).
- 3) Wyznacz α_1 z (4.120) lub (4.121) oraz α_2 z (4.129) ze współczynnikami danymi w (4.123-4.125) lub (4.126-4.128). Przyjmij $\alpha_0 = \max\{0, \alpha_1, \alpha_2\}$. Oblicz $D_{\max}$ ze wzorów (4.131) lub (4.132).
- 4) Jeżeli $D_{\max}$ jest zbyt małe w stosunku do D_{∞} , zwiększ stopień n lub zmniejsz szerokość pasma W .
- 5) Zrealizuj układ dopasowujący w jednej ze struktur pokazanych na Rys. 4.19-4.20.

Procedura dopasowania impedancji z Rys. 4.2c). według kryterium 2).

- 1) Dane: $\omega_2 > \omega_1 \geq 0$, $n=1,2,3,\dots$, $\omega_r^2 = 1/(L \cdot C)$, $\omega_0^2 = \omega_1 \omega_2$, $W = \omega_2 - \omega_1$, patrz Rys. 4.2c).
- 2) Wyznacz $\alpha_{2\infty}$ z (4.129) ze współczynnikami danymi w (4.136-4.138). Oblicz α_{∞} z (4.139) i D_{∞} ze wzoru (4.54).
- 3) Metodą złotego podziału odcinka lub metodą przybliżeń średniokwadratowych wyznacz $D_{\max}$ będące maksimum funkcji (4.142) lub (4.161) przy $\alpha = 0$. Niech odpowiednio K_1 lub ε_1 oznaczają argument, dla którego $D=D_{\max}$.
- 4) Dla wzmacnień Butterwortha:
Sprawdź, czy $y(K_1) \leq 0$, gdzie $y(K)$ określono w (4.149). Jeżeli $y(K_1) \leq 0$, wówczas przyjmij $K_{\text{opt}} = K_1$, $\alpha_{\text{opt}} = 0$. W przeciwnym przypadku wyznacz numerycznie K_0 , takie że $y(K_0) = 0$, $K \in (0, K_1)$. Przyjmij $K_{\text{opt}} = K_0$, wyznacz ze wzoru (4.145) $\alpha_{\text{opt}} = \alpha(K_0)$ i oblicz $D_{\max}$ z równania (4.147).
Dla wzmacnień Czebyszewa:
Sprawdź, czy $a_0(\varepsilon_1) \geq 0$, gdzie $a_0(\varepsilon)$ określono w (4.128). Jeżeli $a_0(\varepsilon_1) \geq 0$, wówczas przyjmij $\varepsilon_{\text{opt}} = \varepsilon_1$, $D_{\max} = D(\varepsilon_1)$ (4.161), $K_{\text{opt}} = D_{\max} / (1 + \varepsilon_1^2)$, $\alpha_{\text{opt}} = 0$. W przeciwnym przypadku wyznacz ε_0 poprzez numeryczne znalezienie maksimum równania (4.161) dla $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_{\max})$, przy czym wymaganą w (4.161) zmienną α należy obliczać z (4.129) ze współczynnikami $a_i(\varepsilon)$ $i=0,1,2$ danymi w (4.126-4.128). Parametr $\varepsilon_{\max}$ wyznacz z (4.162). Przyjmij $\varepsilon_{\text{opt}} = \varepsilon_0$, $D_{\max} = D(\varepsilon_0)$ (4.161), $K_{\text{opt}} = D_{\max} / (1 + \varepsilon_0^2)$, $\alpha_{\text{opt}} = \alpha(\varepsilon_0)$ (4.129).
- 5) Jeżeli $D_{\max}$ jest zbyt małe w stosunku do D_{∞} , zwiększ stopień n lub zmniejsz szerokość pasma W .
- 6) Zrealizuj układ dopasowujący w jednej ze struktur danych na Rys. 4.19-4.20.

Komentarz: wzrost $D_{\max}$ wraz ze zwiększaniem 'n' jest niewielki, dlatego w praktyce lepszym rozwiązaniem jest zmniejszenie wymaganego pasma W , niż zwiększanie stopnia 'n'.

4.3. Realizacje układowe, przykłady

4.3.1. Przykład dopasowania impedancji z Rys. 4.2d

Niech impedancja z Rys. 4.2d, składa się z elementów R , L , C o wartościach $R = 62 \Omega$, $L = 2.7 \text{ nH}$, $C = 1 \text{ pF}$, (Rys. 4.2d). Przyjmując rezystancję generatora równą $R_g = 50 \Omega$ określamy graniczne wzmacnienia mocy i pasmo -3 dB modelowanej impedancji pracującej bez układu dopasowującego: $G_{\max} = 0.98852$, $G_{\min} = 0.49426$, $f_d = 1.326 \text{ GHz}$, $f_r = 3.063 \text{ GHz}$,

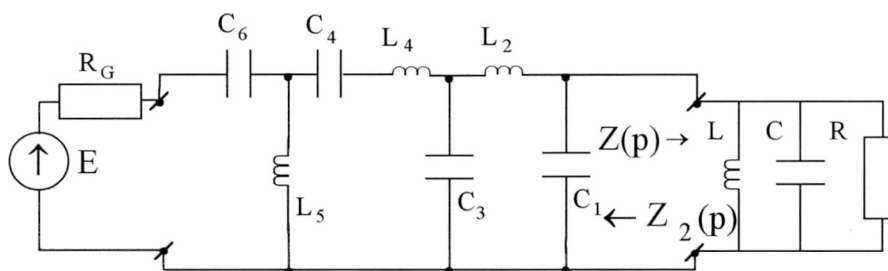
$f_g = 7.076$ GHz. Graniczne współczynniki fali stojącej w pasmie przenoszenia wynoszą $SWR_{\min} = 1.001$, $SWR_{\max} = 5.924$. Należy dopasować rozważaną impedancję do rezystancyjnego generatora w przedziale $f_1 = 1.300$ GHz, $f_2 = 7.100$ GHz minimalizując SWR w całym pasmie (kryterium 2). Po zastosowaniu procedury dopasowania z Rozdziału 4.2.2 otrzymano następujące wyniki:

$f_0 = 3.038$ GHz oraz dla $n = \infty$: $SWR_{\infty} = 1.6833$ i $D_{\infty} = 0.9352$. Dla skończonych wartości n obliczono:

typ	n	K_{opt}	D_{max}	$SWR_{\min}$	$SWR_{\max}$	ϵ_{opt}
B	2	0.8386	0.7454	2.343	3.037	-
Ch	2	0.8965	0.8156	1.948	2.505	0.3149
B	4	0.8715	0.8339	2.118	2.376	-
Ch	4	0.9193	0.8950	1.794	1.959	0.1646
B	10	0.9024	0.9004	1.908	1.990	-
Ch	10	0.9303	0.9254	1.717	1.752	0.0729

gdzie B oznacza wzmocnienie mocy typu Butterwortha natomiast Ch wzmocnienie mocy typu Czebyszewa.

Układ dopasowujący o charakterystyce Czebyszewa został wyznaczony dla $n = 4$ z użyciem wzoru (4.90). Konfigurację układu dopasowującego przedstawiono na Rys. 4.21.



Rys. 4.21. Przykładowy pasmowo-przepustowy układ dopasowujący o charakterystyce wzmocnienia mocy typu Czebyszewa stopnia $2n = 8$.

Wartości elementów czwórnika N z rys. 4.21. wynoszą:

$C_1 = 0.0136$ pF	$L_2 = 1.412$ nH	$C_3 = 0.730$ pF	$L_4 = 1.327$ nH
$C_4 = 1.213$ pF	$L_5 = 4.696$ nH	$C_6 = 2.653$ pF	$R_G = 49.36$ Ω

W realizacji układowej pojemność C_1 pomijamy, ponieważ jej wartość jest dwa rzędy mniejsza od pozostałych pojemności. Po usunięciu C_1 wzmocnienie mocy $G(\omega^2)$ pozostanie praktycznie niezmienione, co łatwo sprawdzić.

4.3.2. Przykłady dopasowania impedancji z Rys. 4.2c

Przykład 1. W niniejszym przykładzie należy dopasować impedancję z Rys. 4.2c) o wartościach $R = 100$ Ω , $C = 200$ pF, $L = 450$ nH w pasmie $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 10^8$ rad/s, $\omega_2 = \sqrt{2} \cdot 10^8$ rad/s stosując wzmocnienie Butterwortha stopnia $n=5$ (porównaj z przykładem danym w [14,15]). Stałą 't' (4.25) przyjęto jako $t=0.5$. Stosując procedurę dopasowania daną w Rozdziale 4.2.3, dla kryterium dopasowania 1), otrzymano:

	rozwiązanie z [14,15]	prezentowane rozwiązanie	rozwiązanie dla $n=\infty$
K	0.7827	0.9939	0.9855
D	0.3914	0.4969	0.9855
$\alpha \cdot 10^6$	47.803	4.314	2.3806

Wyznaczone wartości elementów układu dopasowującego wynoszą:

generator	sekcja allpass	drabinka FGP	drabinka FDP
$R_g=0.66 \Omega$	$L_{\alpha 1}=11.3 \text{ nH}$	$C_6=503 \text{ pF}$	$L_2=0$
	$L_{\alpha 2}=1.820 \mu\text{H}$	$L_7=234.8 \text{ nH}$	$C_3=773 \text{ pF}$
	$M=143.2 \text{ nH}$	$C_8=134 \text{ pF}$	$L_4=177 \text{ nH}$
	$C_\alpha=375 \text{ nF}$	$L_9=620.9 \text{ nH}$	$C_5=888 \text{ pF}$
		$C_{10}=110 \text{ pF}$	

Przykład 2. W niniejszym przykładzie należy dopasować impedancję z Rys. 4.2c) o wartościach $R = 100 \Omega$, $C = 200 \text{ pF}$, $L = 1 \mu\text{H}$ w pasmie $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 10^8 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = \sqrt{2} \cdot 10^8 \text{ rad/s}$ stosując wzmacnienie Butterwortha stopnia $n=2$. Dla przyjętych danych projektowych, nie można według formuł W.K.Chena [12,14,15] uzyskać dopasowania, ponieważ warunek (4.92) został naruszony. Przyjęto stałą 't' równą $t=0.5$. Stosując procedurę dopasowania daną w Rozdziale 4.2.3, dla kryterium dopasowania 1), otrzymano:

	prezentowane rozwiązanie	rozwiązanie dla $n=\infty$
K	0.7941	0.8591
D	0.3971	0.8591
$\alpha \cdot 10^6$	33.680	21.948

Wyznaczone wartości elementów układu dopasowującego wynoszą:

generator	sekcja allpass	drabinka FGP	drabinka FDP
$R_g=330 \Omega$	$L_{\alpha 1}=7.87 \mu\text{H}$	$C_3=113 \text{ pF}$	$L_2=0$
	$L_{\alpha 2}=437 \text{ nH}$	$L_4=357.3 \text{ nH}$	
	$M=1.93 \mu\text{H}$		
	$C_\alpha=457 \text{ pF}$		

Przykład 3. W niniejszym przykładzie należy dopasować impedancję z Rys. 4.2c) o wartościach $R = 100 \Omega$, $C = 450 \text{ pF}$, $L = 200 \text{ nH}$ w pasmie $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 10^8 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = \sqrt{2} \cdot 10^8 \text{ rad/s}$ stosując wzmacnienie Czebyszewa stopnia $n=5$ (porównaj z przykładem zamieszczonym w [14,15]). Przyjęto stałą 't' równą $t = 10^{-0.05} \cong 0.8913$. Stosując procedurę dopasowania daną w Rozdziale 4.2.3, dla kryterium dopasowania 1), otrzymano:

	rozwiązanie z [14,15]	prezentowane rozwiązanie	rozwiązanie dla $n=\infty$
K	0.6424	0.8673	0.8475
D	0.5725	0.7730	0.8475
$\alpha \cdot 10^6$	15.577	1.7369	1.0582

Wyznaczone wartości elementów układu dopasowującego wynoszą:

generator	sekcja allpass	drabinka FGP	drabinka FDP
$R_g=0.064 \Omega$	$L_{\alpha 1}=0.4 \text{ nH}$	$C_6=1.143 \text{ nF}$	$L_2=0$
	$L_{\alpha 2}=3.376 \mu\text{H}$	$L_7=124.5 \text{ nH}$	$C_3=1.739 \text{ nF}$
	$M=36.6 \text{ nH}$	$C_8=148 \text{ pF}$	$L_4=75.8 \text{ nH}$
	$C_\alpha=9.06 \mu\text{F}$	$L_9=721 \text{ nH}$	$C_5=2.447 \text{ nF}$
		$C_{10}=39 \text{ pF}$	

Przykład 4. W niniejszym przykładzie należy dopasować impedancję z Rys. 4.2c) o wartościach $R = 100 \Omega$, $C = 200 \text{ pF}$, $L = 1 \mu\text{H}$ w pasmie $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 10^8 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = \sqrt{2} \cdot 10^8 \text{ rad/s}$ stosując wzmocnienie Czebyszewa stopnia $n=2$. Dla wymaganych danych projektowych nie można według formuł W.K.Chena [12,14,15] uzyskać dopasowania, ponieważ warunek (4.77) został naruszony. Przyjęto stałą 't' równą $t = 10^{-0.1} \cong 0.7943$. Stosując procedurę dopasowania zamieszczoną w Rozdziale 4.2.3, dla kryterium dopasowania 1), otrzymano:

	prezentowane rozwiązanie	rozwiązanie dla $n=\infty$
K	0.7217	0.8591
D	0.5733	0.8591
$\alpha \cdot 10^6$	34.653	21.948

Wyznaczone wartości elementów układu dopasowującego wynoszą:

generator	sekcja allpass	drabinka FGP	drabinka FDP
$R_g=509 \Omega$	$L_{\alpha 1}=12.4 \mu\text{H}$	$C_3=104 \text{ pF}$	$L_2=0$
	$L_{\alpha 2}=424.3 \text{ nH}$	$L_4=453.1 \text{ nH}$	
	$M=2.294 \mu\text{H}$		
	$C_\alpha=363 \text{ pF}$		

Przykład 5. W niniejszym przykładzie należy dopasować impedancję z Rys. 4.2c) o wartościach $R = 100 \Omega$, $C = 100 \text{ pF}$, $L = 550 \text{ nH}$ w pasmie $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 10^8 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = \sqrt{2} \cdot 10^8 \text{ rad/s}$ używając wzmocnienia Butterwortha stopnia $n=3$ i $n=5$. Stosując procedurę dopasowania podaną w Rozdziale 4.2.3, dla kryterium dopasowania 2), otrzymano:

n=3	n=5	n= ∞
D=0.9854	D=0.9963	D=0.9998
K=0.9937	K=0.9990	K=0.9998
$\alpha=0.1055 \cdot 10^8$	$\alpha=0$	$\alpha=0$

Wyznaczone wartości elementów układu dopasowującego wynoszą:

Dla $n=3$:

generator	sekcja allpass	drabinka FGP	drabinka FDP
$R_g=3.48 \Omega$	$L_{\alpha 1}=61.4 \text{ nH}$	$C_4=821 \text{ pF}$	$L_2=0$
	$L_{\alpha 2}=1172 \text{ nH}$	$L_5=613.5 \text{ nH}$	$C_3=116.3 \text{ pF}$
	$M=268 \text{ nH}$	$C_6=204 \text{ pF}$	
	$C_{\alpha}=33.5 \text{ nF}$		

Dla $n=5$:

generator	drabinka FGP	drabinka FDP
$R_g=21.6 \Omega$	$L_6=183 \text{ nH}$	$L_2=72 \text{ nH}$
	$C_7=499 \text{ pF}$	$C_3=267 \text{ pF}$
	$L_8=222 \text{ nH}$	$L_4=245 \text{ nH}$
	$C_9=675 \text{ pF}$	$C_5=271 \text{ pF}$
	$L_{10}=718 \text{ nH}$	

Przykład 6. Należy dopasować impedancję z Rys. 4.2c) o wartościach $R = 100 \Omega$, $C = 100 \text{ pF}$, $L = 550 \text{ nH}$ w pasmie $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 10^8 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = \sqrt{2} \cdot 10^8 \text{ rad/s}$ używając wzmocnienia Czebyszewa stopnia $n=2$ i $n=3$. Stosując procedurę dopasowania zamieszczoną w Rozdziale 4.2.3, dla kryterium dopasowania 2), otrzymano:

$n=2$	$n=3$	$n=\infty$
$D=0.9593$	$D=0.9970$	$D=0.9998$
$K=0.9713$	$K=0.9991$	$K=0.9998$
$\alpha=0.3194 \cdot 10^8$	$\alpha=0$	$\alpha=0$

Wyznaczone wartości elementów układu dopasowującego wynoszą:

Dla $n=2$:

generator	sekcja allpass	drabinka FGP	drabinka FDP
$R_g=301 \Omega$	$L_{\alpha 1}=6.99 \mu\text{H}$	$C_3=281 \text{ pF}$	$L_2=0$
	$L_{\alpha 2}=852 \text{ nH}$	$L_4=680 \text{ nH}$	
	$M=2.44 \mu\text{H}$		
	$C_{\alpha}=402 \text{ pF}$		

Dla $n=3$:

generator	drabinka FGP	drabinka FDP
$R_g=49.7 \Omega$	$L_4=435 \text{ nH}$	$L_2=15.4 \text{ nH}$
	$C_5=196 \text{ pF}$	$C_3=211 \text{ pF}$
	$L_6=984 \text{ nH}$	

Zaprezentowane przykłady potwierdzają, że formuły dopasowania z Rozdziału 4.2.3. pozwalają uzyskać większe poziomy wzmocnień niż formuły podane przez W.K.Chena [12,14,15]. Ponadto

jest widoczne, że w pewnych przypadkach, według wyprowadzonych tutaj formuł można rozwiązać problem dopasowania szerokopasmowego, natomiast przy użyciu formuł danych przez W.K.Chena nie można we wzmiarkowanych sytuacjach rozwiązać problemu dopasowania.

4.4. Podsumowanie rozdziału

W niniejszym rozdziale zawarto następujące nowe rozwiązania z zakresu dopasowania szerokopasmowego czwórników:

1. Podano warunki dopasowania szerokopasmowego dowolnej impedancji PR przy użyciu drabinki L,C o zerach transmisji położonych w zerze i nieskończoności, sprowadzając rozwiązanie problemu do spełnienia ograniczeń Youli dla tzw. przypadku niezdegenerowanego. Dowód twierdzenia dotyczącego omawianego przypadku zawarł autor w pracy [50].
2. Wyróżniono dwa kryteria dopasowania: kryterium 1) maksymalizacji minimalnego poziomu wzmocnienia w wymaganym pasmie częstotliwości dla zadanej stałej (4.25), oraz kryterium 2), tzw. min.-max., czyli kryterium maksymalizacji minimalnego poziomu wzmocnienia w wymaganym pasmie, bez zadawania stałej (4.25). Przy użyciu wzmiarkowanych kryteriów podano formuły projektowe dopasowania impedancji z Rys. 4.2d),e).
3. Ustalono formuły projektowe dopasowania impedancji z Rys. 4.2c) dla kryterium 1), w sposób istotny modyfikujące dotychczasowe formuły dane przez W.K.Chena [12,14,15].
4. Wyprowadzono formuły projektowe dopasowania impedancji z Rys. 4.2c) dla kryterium 2).
5. Dla wszystkich impedancji z Rys. 4.2. podano formuły dopasowania, w układzie dopasującym o nieskończonej liczbie elementów.

Otrzymane w Rozdziale 4 metody dopasowania impedancji są metodami jak najbardziej praktycznymi i mogą służyć do projektowania prototypowych filtrów L,C współpracujących z częstotliwościowo uzależnionymi obciążeniami.

5. METODY REALIZACJI WZMOCNIEN NAPIĘCIOWYCH W UKŁADACH TRÓJWROTOWYCH

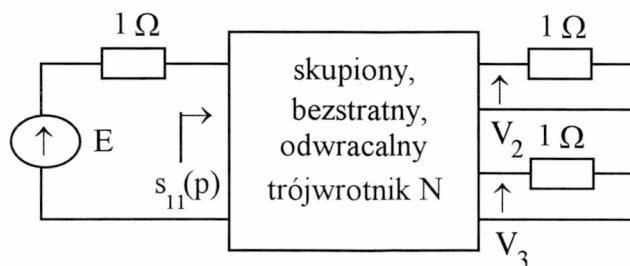
Istotnym problemem projektowania urządzeń telekomunikacyjnych, pojawiającym się równolegle z zagadnieniami dopasowania szerokopasmowego impedancji, jest problem konstrukcji bezstratnego n -wrotowego układu sprzęgającego, który włączony pomiędzy źródło sygnału i dane obciążenia, realizować będzie wymagane wzmocnienia napięciowe. W odróżnieniu od zagadnień szerokopasmowego dopasowania impedancji, dla realizacji wzmocnień napięciowych konieczne jest skonstruowanie układu sprzęgającego z uwzględnieniem wymaganych charakterystyk amplitudowych jak i fazowych [2,32,75,82,84]. W zagadnieniach praktycznych, wzmocnienia napięciowe realizuje się zazwyczaj w układach dwuwrotowych i trójwrotowych. W dalszej części niniejszego rozdziału rozważane będą problemy konstrukcji bezstratnych trójwrotników, realizujących daną parę wzmocnień napięciowych. Ponieważ praktyczne metody syntezy układów wielowrotowych nie są dostatecznie dobrze opracowane, tak więc przy konstruowaniu wielowrotników zakłada się a priori konfigurację układu. Najczęściej strukturę wielowrotnika ogranicza się do układu multipleksa [82,84]. W dalszej części rozdziału ustalone zostaną warunki konieczne i wystarczające dla realizacji wzmocnień napięciowych w bezstratnym n -wrotowym multipleksie zakończonym impedancjami PR (ang. positive real). W pozostałych, rozważanych w Rozdziale 5 problemach przyjęto, że obciążenia są rezystancjami.

5.1. Realizacja wzmocnień napięciowych w bezstratnym trójwrotniku

Problem realizacji wymaganych wzmocnień napięciowych w bezstratnym układzie trójwrotowym jest jednym z podstawowych zagadnień syntezy układów elektronicznych. Prace dotyczące wzmiankowanego zagadnienia, np. [5,6,82] rozwiązują problem tylko częściowo, ograniczając rozważania do układu złożonego z dwóch odpowiednio połączonych czwórników lub koncentrując uwagę na pewnych typach wzmocnień [5,82]. Co więcej wzmocnienia o pożądanых cechach można w [82] uzyskać jedynie na drodze numerycznej lub jak w [5] rozważania analityczne dotyczą układu zawierającego co najwyżej sześć elementów reaktancyjnych.

Ostatnio pojawiła się praca [84] w której podano twierdzenie dotyczące warunków realizacji wzmocnień napięciowych w układzie trójwrotnika. W [84] wymagne jest wyznaczenie funkcji rzeczywistych ograniczonych (ang. bounded real BR) i dodatkowo dwóch wielomianów, interpolujących w wymagany sposób poszukiwane współczynniki odbicia. Opracowana przez autora metoda realizacji wzmocnień napięciowych wymaga przeprowadzenia odpowiedniej interpolacji jedynie pojedynczą funkcją regularną wszechprzepustową (ang. regular allpass RA), bez potrzeby wyznaczania dodatkowych wielomianów. Prezentowana metoda realizacji wzmocnień napięciowych została opublikowana w [63].

Rozważmy układ jak na Rys. 5.1.



Rys. 5.1. Bezstratny trójwrotnik N obciążony jednostkowymi rezystancjami. Funkcja BR $s_{11}(p)$ jest współczynnikiem odbicia we wrotach wejściowych trójwrotnika N .

Niech układ z Rys. 5.1. realizuje zadane wzmocnienia napięciowe $T_i(p)$:

$$T_i(p) = V_i(p) / E(p) \quad i = 2, 3 \quad (5.1)$$

Macierz rozproszenia $S(p)$ o wymiarach 3×3 odwracalnego, bezstratnego trójwrotnika N , jest wymierną, symetryczną, paraunitarną macierzą rzeczywistą ograniczoną, tzn:

$$S_*(p)S(p) = S(p)S_*(p) = \mathbf{1}_3 \quad (5.2)$$

gdzie

$$S_*(p) = S^T(-p) \quad .$$

Na podstawie (3.12), w odniesieniu do macierzy $S(p)$ znormalizowanej macierzą jednostkową $\mathbf{1}_3$, można ustalić:

$$s_{ii}(p) = T_i(p) = V_i(p) / E(p) \quad i = 2, 3 \quad (5.3)$$

Z (5.3) wynika, że przyjęcie jako danych, wzmocnień $T_i(p)$ $i=2,3$ jest równoważne wyspecyfikowaniu współczynników transmisji $s_{21}(p)$, $s_{31}(p)$ będących funkcjami BR. Niech:

$$\mathbf{T}(p) = \begin{bmatrix} s_{21}(p) \\ s_{31}(p) \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

zatem

$$\mathbf{S}(p) = \begin{bmatrix} s_{11}(p) & \mathbf{T}^T(p) \\ \mathbf{T}(p) & \mathbf{W}(p) \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

gdzie $\mathbf{W}(p)$ jest podmacierzą o wymiarach 2×2 macierzy $\mathbf{S}(p)$. Przy pomocy (5.5) można zapisać jawnie równanie (5.2) w postaci:

$$s_{11*}(p)s_{11}(p) = 1 - \mathbf{T}_*(p)\mathbf{T}(p) \quad (5.6)$$

$$-s_{11*}(p)\mathbf{T}(p) = \mathbf{W}(p)\mathbf{T}(-p) \quad (5.7)$$

$$\mathbf{T}(p)\mathbf{T}_*(p) = \mathbf{W}(p)\mathbf{W}_*(p) = \mathbf{1}_2 \quad (5.8)$$

Z (5.6) wynika podstawowe ograniczenie dotyczące wymaganych wzmocnień, mianowicie:

$$|s_{21}(j\omega)|^2 + |s_{31}(j\omega)|^2 \leq 1 \quad \text{dla każdego } \omega \quad (5.9)$$

Wzmocnienia (5.4), jako wymierne funkcje BR, można zawsze zapisać formie:

$$s_{ii}(p) = e(p)h_i(p) / g(p) \quad i = 2, 3 \quad (5.10)$$

przy czym $g(p)$ jest wielomianem Hurwitza w ścisłym znaczeniu (ang. strict Hurwitz SH) oraz $e(p)$ i $h_i(p)$ są wielomianami. Ponadto $(e, g) = 1$, $(h_2, h_3) = 1$, co oznacza, że dane wielomiany są względnie pierwsze. Zdefiniujemy funkcję $\Theta(p)$, jako minimalnofazową faktoryzację następującego równania:

$$\Theta(p)\Theta_*(p) = \mathbf{T}_*(p)\mathbf{T}(p) = 1 - s_{11}(p)s_{11*}(p) \quad (5.11)$$

Dalsza analiza układu z Rys. 5.1. wymaga określenia struktury macierzy $\mathbf{W}(p)$. W tym celu skorzystać można z twierdzenia zamieszczonego w [4]. Zakładamy, że wzmocnienia $s_{21}(p)$, $s_{31}(p)$ nie są dane, natomiast ustalony został współczynnik odbicia $s_{11}(p)$. W [4] podano ogólne rozwiązanie równań (5.6-5.8), dla zadanego współczynnika odbicia $s_{11}(p)$. W przypadku $n=3$ wzmiankowane rozwiązanie równań (5.6-5.8) można zapisać w następującej postaci:

$$\mathbf{S}(p) = \begin{bmatrix} s_{11}(p) & \Theta(p)\mathbf{J}^T\mathbf{U}^T(p) \\ \Theta(p)\mathbf{U}(p)\mathbf{J} & \mathbf{U}(p)[\alpha(p) \oplus V_0(p)]\mathbf{U}^T(p) \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$$\alpha(p) = -s_{11*}(p) \frac{\Theta(p)}{\Theta_*(p)} , \quad (5.13)$$

oraz

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Symbol $\oplus$ oznacza sumę prostą danych macierzy, $V_0(p)$ jest funkcją wszechprzepustową, niekoniecznie regularną, gdzie pojęcie regularności oznacza brak biegunów danej funkcji w obszarze $\text{Re } p \geq 0$, $\mathbf{U}(p)$ jest dowolną paraunitarną macierzą BR o wymiarach 2×2 .

Jeżeli w miejsce $s_{11}(p)$ dane są wzmocnienia $s_{21}(p)$, $s_{31}(p)$, wówczas porównując (5.5) z (5.12) stwierdzamy, że:

$$\mathbf{T}(p) = \Theta(p) \mathbf{U}(p) \mathbf{J} , \quad (5.14)$$

$$\mathbf{U}(p) = \begin{bmatrix} s_{21}(p)/\Theta(p) & u_{12}(p) \\ s_{31}(p)/\Theta(p) & u_{22}(p) \end{bmatrix} , \quad (5.15)$$

$$\mathbf{W}(p) = \begin{bmatrix} s_{22}(p) & s_{23}(p) \\ s_{32}(p) & s_{33}(p) \end{bmatrix} = \mathbf{U}(p) \begin{bmatrix} \alpha(p) & 0 \\ 0 & V_0(p) \end{bmatrix} \mathbf{U}^T(p) . \quad (5.16)$$

Minimalnofazową faktoryzację równania (5.11), $\Theta(p)$, zapiszmy w najbardziej ogólny sposób, jako:

$$\Theta(p) = \frac{e_0(p)\gamma(p)}{g(p)} . \quad (5.17)$$

Wielomian $\gamma(p)$ jest wielomianem SH, obliczonym z faktoryzacji równania:

$$\gamma(p)\gamma_*(p) = h_2(p)h_{2*}(p) + h_3(p)h_{3*}(p) , \quad (5.18)$$

oraz wielomian $e_0(p)$ jest WH, spełniającym równanie:

$$e_0(p)e_{0*}(p) = e(p)e_*(p) . \quad (5.19)$$

Zależności (5.11, 5.17) pozwalają wyznaczyć minimalnofazowy współczynnik odbicia:

$$\rho_{11}(p) = l(p)/g(p) , \quad (5.20)$$

gdzie wielomian $l(p)$ jest WH obliczonym z faktoryzacji równania:

$$l(p)l_*(p) = g(p)g_*(p) - e(p)e_*(p)\gamma(p)\gamma_*(p) . \quad (5.21)$$

Współczynnik odbicia $s_{11}(p)$ wyrażony w najbardziej ogólnej formie jest równy:

$$s_{11}(p) = \rho_{11}(p)\eta(p) , \quad (5.22)$$

gdzie $\eta(p)$ jest pewną funkcją RA. Zależność (5.7) przy pomocy (5.10) przekształcamy do postaci:

$$-s_{11*}(p) \frac{e(p)g_*(p)}{e_*(p)g(p)} \begin{bmatrix} h_2(p) \\ h_3(p) \end{bmatrix} = \mathbf{W}(p) \begin{bmatrix} h_{2*}(p) \\ h_{3*}(p) \end{bmatrix} . \quad (5.23)$$

Prawa strona (5.23) jest regularna, zatem funkcja:

$$-s_{11*}(p) \frac{e(p)g_*(p)}{e_*(p)g(p)} = -\rho_{11}(p)\eta_*(p) \frac{l_*(p)e(p)}{l(p)e_*(p)} \quad (5.24)$$

jest również regularna. Co więcej, wykorzystując równanie (5.21) przekształcamy zależność (5.24):

$$\begin{aligned}
-\rho_{11}(p)\eta_*(p)\frac{l_*(p)e(p)}{l(p)e_*(p)} &= -\rho_{11}(p)\eta_*(p)\frac{1}{l^2(p)} \cdot \frac{e(p)}{e_*(p)} \cdot l(p)l_*(p) = \\
&= -\rho_{11}(p)\eta_*(p)\frac{1}{l^2(p)} \cdot \left[\frac{e(p)}{e_*(p)} \cdot g(p)g_*(p) - e^2(p)\gamma(p)\gamma_*(p) \right] .
\end{aligned} \quad (5.25)$$

Ponieważ $(e, g) = 1$ i wielomian $g(p)$ jest SH, zatem funkcja $\frac{e(p)}{e_*(p)}$ jest funkcją typu RA. Tak więc wielomian $e(p)$ ma postać:

$$e(p) = \hat{e}(p)e_1(p)e_{1*}(p)e_{2*}(p) . \quad (5.26)$$

Wielomian $\hat{e}(p)$ posiada zera leżące tylko na osi $j\omega$, natomiast wielomiany $e_1(p)$, $e_2(p)$ są SH. Na podstawie równań (5.19, 5.26) ustalamy:

$$e_0(p) = \hat{e}(p)e_1^2(p)e_2(p) . \quad (5.27)$$

Regularność wyrażenia (5.24) implikuje, że każde zero funkcji RA $\eta(p)$ jest zerem wielomianu $l_*(p)e_{2*}(p)$ co najmniej tej samej krotności. Tym samym funkcja $\eta(p)$ ma formę:

$$\eta(p) = \frac{l_{2*}(p)}{l_2(p)} \cdot \frac{e_{21*}(p)}{e_{21}(p)} , \quad (5.28)$$

gdzie:

$$l(p) = l_1(p)l_2(p) , \quad e_2(p) = e_{21}(p)e_{22}(p) . \quad (5.29)$$

Niech wielomiany $\gamma_1(p)$ i $\gamma_2(p)$ będą wspólną częścią wielomianu SH $\gamma(p)$ zdefiniowanego w (5.18), i odpowiednio wielomianów $l_1(p)$ i $e_{22}(p)$. Z tak określonymi wielomianami $\gamma_1(p)$ i $\gamma_2(p)$, można zapisać wielomiany $\gamma(p)$, $l(p)$, $e(p)$, $e_0(p)$ w postaci:

$$\gamma(p) = \gamma_0(p)\gamma_1(p)\gamma_2(p) , \quad (5.30)$$

$$l(p) = l_2(p)\gamma_1(p)l_{11}(p) , \quad (5.31)$$

$$e(p) = \hat{e}(p)e_1(p)e_{1*}(p)e_{21*}(p)\gamma_{2*}(p)e_{222*}(p) , \quad (5.32)$$

$$e_0(p) = \hat{e}(p)e_1^2(p)e_{21}(p)\gamma_2(p)e_{222}(p) , \quad (5.33)$$

przy czym:

$$l_1(p) = l_{11}(p)\gamma_1(p) , \quad e_{22}(p) = e_{222}(p)\gamma_2(p) . \quad (5.34)$$

Następnie przekształcamy zależność (5.24) przy użyciu (5.31, 5.32) do równoważnej zależności:

$$-s_{11*}(p)\frac{e(p)g_*(p)}{e_*(p)g(p)} = -\Psi(p) \cdot \frac{\gamma_{1*}(p)\gamma_{2*}(p)}{\gamma_1(p)\gamma_2(p)} \quad (5.35)$$

gdzie funkcja BR $\Psi(p)$ wynosi:

$$\Psi(p) = \rho_{11}(p) \cdot \frac{l_{11*}(p)e_{222*}(p)\hat{e}(p)}{l_{11}(p)e_{222}(p)\hat{e}_*(p)} . \quad (5.36)$$

Przystępujemy do wyznaczania macierzy $\mathbf{U}(p)$ i $\mathbf{W}(p)$. Uwzględniając (5.26, 5.27) można przedstawić macierz $\mathbf{U}(p)$, (5.15), w formie kanonicznej [4, 38], jako:

$$\mathbf{U}(p) = \frac{1}{e_1(p)e_2(p)\gamma(p)} \begin{bmatrix} e_{1*}(p)e_{2*}(p)h_2(p) & e_1(p)e_2(p)h_{3*}(p) \\ e_{1*}(p)e_{2*}(p)h_3(p) & -e_1(p)e_2(p)h_{2*}(p) \end{bmatrix} . \quad (5.37)$$

Wstawiając (5.37) do (5.16) i ponadto wykorzystując równania (5.30-5.33, 5.36), wyznaczamy poszukiwane elementy macierzy $\mathbf{S}(p)$:

$$\mathbf{W}(p) = \begin{bmatrix} s_{22}(p) & s_{23}(p) \\ s_{32}(p) & s_{33}(p) \end{bmatrix} = \frac{-1}{\gamma_0(p)\gamma_{0*}(p)} \cdot \begin{bmatrix} \hat{s}_{22}(p) & \hat{s}(p) \\ \hat{s}(p) & \hat{s}_{33}(p) \end{bmatrix}, \quad (5.38)$$

gdzie:

$$\hat{s}_{22}(p) = \Psi(p)h_2^2(p) - V(p)h_{3*}^2(p), \quad (5.39)$$

$$\hat{s}_{33}(p) = \Psi(p)h_3^2(p) - V(p)h_{2*}^2(p), \quad (5.40)$$

$$\hat{s}(p) = \Psi(p)h_2(p)h_3(p) + V(p)h_{2*}(p)h_{3*}(p), \quad (5.41)$$

$$V(p) = V_0(p) \frac{\gamma_{0*}(p)}{\gamma_0(p)}. \quad (5.42)$$

Analizytność elementów macierzy $\mathbf{W}(p)$ w prawej półpłaszczyźnie wymaga, aby funkcja $V(p)$ w obszarze $\text{Re } p > 0$ była również analityczna (zauważmy, że funkcja $\Psi(p)$ jest regularna oraz $h_i(p)$ $i=2,3$ są wielomianami). Wnioskujemy, że funkcja $V(p)$ jest funkcją RA. Elementy macierzy $\mathbf{W}(p)$, (5.38), są funkcjami BR, zatem w każdym zerze wielomianu $\gamma_{0*}(p)$ funkcje $\hat{s}_{22}(p)$, $\hat{s}_{33}(p)$, $\hat{s}(p)$ mają zera co najmniej tej samej krotności. Na tym kończymy analizę układu z Rys. 5.1.

Rozważmy problem syntezy wzmacnień napięciowych. Niech dane będą wzmacnienia BR (5.3), spełniające ograniczenie (5.9). Dla realizacji wzmacnień (5.3), spełniających (5.9), w układzie jak na Rys. 5.1., konieczne i wystarczające jest, aby macierz rozproszenia trójwrotnika N była symetryczną, paraunitarną macierzą BR [4]. Znając wzmacnienia (5.3) wyznaczamy wielomiany (5.10) i sprawdzamy, czy funkcja $e(p)/e_*(p)$ jest typu RA. Jeżeli tak, w następnym kroku obliczamy minimalnofazowy współczynnik odbicia $\rho_{11}(p)$, (5.20). Zauważmy, że bez strat dla ogólności rozważań można przyjąć współczynnik odbicia $s_{11}(p)$ jako funkcję minimalnofazową, tzn. $s_{11}(p) = \rho_{11}(p)$ oraz $\eta(p) \equiv 1$. W przeciwnym przypadku może zaistnieć sytuacja, że wielomiany $l_2(p)$ albo $e_{21}(p)$ mają wspólne zera z wielomianem $\gamma_0(p)$, co pociąga za sobą konieczność przeprowadzenia interpolacji przy pomocy funkcji $V(p)$ w takich punktach. Interpolacja nie byłaby konieczna lub stopień funkcji interpolującej $V(p)$ mógłby być niższy, jeżeli wzmiarkowane zera wielomianów $l_2(p)$ albo $e_{21}(p)$ zostałyby wykorzystane do choćby częściowej redukcji zer wielomianu $\gamma_0(p)$, w miejsce redukowania zer funkcji $\eta(p)$, która to funkcja jest wybierana arbitralnie w przypadku przeprowadzania syntezy. Następnie budujemy funkcję $\Psi(p)$, po czym wyznaczamy funkcje (5.39-5.41). Funkcję RA $V(p)$ wybieramy tak, aby zapewnić analityczność współczynników $s_{22}(p)$, $s_{33}(p)$, $s_{32}(p)$ we wszystkich zerach wielomianu $\gamma_{0*}(p)$. Skonstruowana w powyższy sposób macierz $\mathbf{S}(p)$ jest paraunitarną macierzą BR fizycznie realizowalnego bezstratnego trójwrotnika N .

Zostanie wykazane, że wystarczy znaleźć funkcję RA $V(p)$, która zapewni analityczność tylko jednej z funkcji: $s_{22}(p)$, $s_{33}(p)$, $s_{32}(p)$ we wszystkich zerach wielomianu $\gamma_{0*}(p)$, a wówczas pozostałe dwie funkcje spośród $s_{22}(p)$, $s_{33}(p)$, $s_{32}(p)$ będą również analityczne w obszarze $\text{Re } p > 0$.

Na podstawie (5.39-5.41) i (5.18) wyznaczamy następujące równania:

$$h_{2*}(p)\hat{s}_{22}(p) = \gamma(p)\gamma_*(p)\Psi(p)h_2(p) - h_{3*}(p)\hat{s}(p), \quad (5.43a)$$

$$h_3(p)\hat{s}_{22}(p) = h_2(p)\hat{s}(p) - \gamma(p)\gamma_*(p)V(p)h_{3*}(p), \quad (5.43b)$$

$$h_{3*}(p)\hat{s}_{33}(p) = \gamma(p)\gamma_*(p)\Psi(p)h_3(p) - h_{2*}(p)\hat{s}(p), \quad (5.44a)$$

$$h_2(p)\hat{s}_{33}(p) = h_3(p)\hat{s}(p) - \gamma(p)\gamma_*(p)V(p)h_{2*}(p). \quad (5.44b)$$

Niech w punkcie $p=p_0$ wielomian $\gamma_{0*}(p)$ ma zero krotności n_0 . Z (5.30,5.18) wynika, że zachodzi wówczas równość:

$$(h_2 h_{2*})^{(k)} = -(h_3 h_{3*})^{(k)} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n_0 - 1, \quad (5.45)$$

gdzie $(f)^{(k)}$ oznacza k -tą pochodną funkcji $f(p)$ liczoną w punkcie $p=p_0$.

Jeżeli w punkcie $p=p_0$, $\operatorname{Re} p_0 > 0$, iloczyn $h_2(p)h_{2*}(p)$ jest różny od zera, wówczas z (5.45) wnioskujemy, że w punkcie $p=p_0$ iloczyn $h_3(p)h_{3*}(p)$ jest także różny od zera. Analityczność w obszarze $\operatorname{Re} p > 0$ funkcji $s_{32}(p)$ implikuje, że funkcja $\hat{s}(p)$ ma w punkcie $p=p_0$ zero krotności co najmniej n_0 . Uwzględniając (5.43a,5.44a) stwierdzamy, że jeżeli funkcja $\hat{s}(p)$ ma w punkcie $p=p_0$ zero krotności n_0 , to funkcje $\hat{s}_{22}(p)$, $\hat{s}_{33}(p)$ posiadają w punkcie $p=p_0$ zera krotności co najmniej n_0 . Wystarczy zatem dobrać funkcję $V(p)$, tak aby funkcja $\hat{s}(p)$ była równa zero krotności co najmniej n_0 w punkcie $p=p_0$, czyli aby funkcja $s_{32}(p)$ była analityczna w punkcie $p=p_0$, a wówczas pozostałe funkcje $s_{22}(p)$, $s_{33}(p)$ również są analityczne w punkcie $p=p_0$.

Jeżeli w punkcie $p=p_0$, $\operatorname{Re} p_0 > 0$, funkcja $h_{2*}(p)$ posiada zero krotności n_1 , wówczas z (5.45) przy uwzględnieniu relacji $(h_2, h_3) = 1$ wnioskujemy, że funkcja $h_3(p)$ ma zero krotności $\min(n_1, n_0)$ oraz funkcje $h_2(p)$ i $h_{3*}(p)$ są różne od zera w tym punkcie. Analityczność w obszarze $\operatorname{Re} p > 0$ funkcji $s_{22}(p)$ implikuje, że funkcja $\hat{s}_{22}(p)$ ma w punkcie $p=p_0$ zero krotności co najmniej n_0 . Jeżeli funkcja $\hat{s}_{22}(p)$ ma w punkcie $p=p_0$ zero krotności co najmniej n_0 , to z (5.43a) wynika, że funkcja $\hat{s}(p)$ ma w punkcie $p=p_0$ zero krotności co najmniej n_0 . Jeżeli funkcja $\hat{s}(p)$ ma w punkcie $p=p_0$ zero krotności co najmniej n_0 , to z (5.44a) jest oczywiste, że także funkcja $\hat{s}_{33}(p)$ ma w punkcie $p=p_0$ zero krotności co najmniej n_0 . Wystarczy zatem dobrać funkcję $V(p)$, tak aby funkcja $\hat{s}_{22}(p)$ posiadała w punkcie $p=p_0$ zero krotności co najmniej n_0 , czyli aby funkcja $s_{22}(p)$ była analityczna w punkcie p_0 , a wówczas pozostałe funkcje $s_{32}(p)$, $s_{33}(p)$ również są analityczne w punkcie $p=p_0$.

Jeżeli w punkcie $p=p_0$, $\operatorname{Re} p_0 > 0$, funkcja $h_2(p)$ posiada zero krotności n_1 , wówczas z (5.45) przy uwzględnieniu relacji $(h_2, h_3) = 1$ wnioskujemy, że funkcja $h_{3*}(p)$ ma zero krotności $\min(n_1, n_0)$ oraz funkcje $h_{2*}(p)$ i $h_3(p)$ są różne od zera w tym punkcie. Analityczność w obszarze $\operatorname{Re} p > 0$ funkcji $s_{33}(p)$ implikuje, że funkcja $\hat{s}_{33}(p)$ ma w punkcie $p=p_0$ zero krotności co najmniej n_0 . Jeżeli funkcja $\hat{s}_{33}(p)$ ma w punkcie $p=p_0$ zero krotności co najmniej n_0 , to z (5.44a) wynika, że funkcja $\hat{s}(p)$ ma w punkcie $p=p_0$ zero krotności co najmniej n_0 . Jeżeli funkcja $\hat{s}(p)$ ma w punkcie $p=p_0$ zero krotności co najmniej n_0 , to z (5.43a) jest oczywiste, że także funkcja $\hat{s}_{22}(p)$ ma w punkcie $p=p_0$ zero krotności co najmniej n_0 . Wystarczy zatem dobrać funkcję $V(p)$, tak aby funkcja $\hat{s}_{33}(p)$ w punkcie $p=p_0$ osiągała zero krotności co najmniej n_0 , czyli aby funkcja $s_{33}(p)$ była analityczna w punkcie p_0 , a wówczas pozostałe funkcje $s_{32}(p)$, $s_{22}(p)$ również są analityczne w punkcie $p=p_0$.

Zdefiniujmy ponadto następującą funkcję:

$$\Phi(p) = \frac{l_*(p)e(p)\gamma(p)}{l(p)e_*(p)\gamma_*(p)}, \quad (5.46)$$

gdzie wielomiany $e(p)$, $\gamma(p)$, $l(p)$ określono równaniami (5.10,5.18,5.21). Po uwzględnieniu wszystkich możliwych skrótów pomiędzy wielomianami tworzącymi funkcję $\Phi(p)$, wyrażenie (5.46) można zapisać w postaci:

$$\Phi(p) = \frac{\varphi_{0*}(p)\gamma_0(p)}{\varphi_0(p)\gamma_{0*}(p)}, \quad (5.47)$$

gdzie $\varphi_0(p)$, $\gamma_0(p)$ są wielomianami SH, takimi, że $(\varphi_0, \gamma_0) = 1$.

Przeprowadzone tutaj rozumowanie wraz z wprowadzonymi w (5.46,5.47) funkcjami pozwala sformułować następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.1. Dane wzmocnienia BR

$$s_{i1}(p) = e(p)h_i(p)/g(p) \quad i = 2, 3 ,$$

(wielomiany $(e, g) = 1$, $(h_2, h_3) = 1$) spełniające warunek

$$|s_{21}(j\omega)|^2 + |s_{31}(j\omega)|^2 \leq 1 \quad \text{dla każdego } \omega ,$$

są realizowalne w odwracalnym, bezstratnym trójwrotniku N zakończonym rezystancjami 1Ω , wtedy i tylko wtedy, gdy:

1. Funkcja $e(p)/e_*(p)$ jest funkcją RA.
2. Istnieje funkcja RA $V(p)$, która w każdym zerze $p=p_0$, $\text{Re } p_0 > 0$, krotności n_0 wielomianu $\gamma_0(p)$, patrz (5.47), spełnienia następujące warunki:

a) Jeżeli w punkcie $p=p_0$, wielomian $h_2(p)h_{2*}(p)$ jest różny od zera, wówczas wyrażenie

$$\frac{\varphi_{0*}(p)l(p)}{\varphi_0(p)g(p)} \cdot h_2(p)h_3(p) + V(p) \cdot h_{2*}(p)h_{3*}(p)$$

ma zero w punkcie $p=p_0$ krotności co najmniej n_0 .

b) Jeżeli w punkcie $p=p_0$, wielomian $h_{2*}(p)$ jest równy zero, wówczas wyrażenie

$$\frac{\varphi_{0*}(p)l(p)}{\varphi_0(p)g(p)} \cdot h_2^2(p) - V(p)h_{3*}^2(p)$$

ma zero w punkcie $p=p_0$ krotności co najmniej n_0 .

c) Jeżeli w punkcie $p=p_0$, wielomian $h_2(p)$ jest równy zero, wówczas wyrażenie

$$\frac{\varphi_{0*}(p)l(p)}{\varphi_0(p)g(p)} \cdot h_3^2(p) - V(p)h_{2*}^2(p)$$

ma zero w punkcie $p=p_0$ krotności co najmniej n_0 .

Jeżeli w miejsce wzmocnień napięciowych dane są wzmocnienia mocy, co oznacza, że znamy jedynie funkcje $|s_{21}(j\omega)|^2$, $|s_{31}(j\omega)|^2$, wówczas wyznaczanie funkcji $V(p)$ nie jest konieczne. Analityczność macierzy $S(p)$ w obszarze $\text{Re } p > 0$ można zawsze zapewnić przez odpowiedni wybór zer funkcji $s_{21}(p)$, $s_{31}(p)$. Podane twierdzenie ma jeszcze dodatkową przewagę nad twierdzeniem z pracy [84]. W Twierdzeniu 5.1. konieczne jest zredukowanie jedynie części zer wielomianu $h_2(p)h_{2*}(p) + h_3(p)h_{3*}(p)$, w obszarze $\text{Re } p > 0$, podczas gdy w [84] należy zredukować wszystkie zera wielomianu $h_2(p)h_{2*}(p) + h_3(p)h_{3*}(p)$ leżące w obszarze $\text{Re } p > 0$.

Dla ilustracji prowadzonych rozważań, zostanie podany przykład zastosowania Twierdzenia 5.1. Rozważmy parę wzmocnień napięciowych BR, spełniających warunek (5.9):

$$s_{21}(p) = \frac{1-p}{(p^2 + \sqrt{2} \cdot p + 1)\sqrt{2}} , \quad s_{31}(p) = \frac{p(1-p)}{(p^2 + \sqrt{2} \cdot p + 1)\sqrt{2}} . \quad (5.48)$$

Zgodnie z (5.10) wyznaczamy wielomiany:

$$e(p) = 1-p , \quad h_2(p) = 1 , \quad h_3(p) = p , \quad g(p) = (p^2 + \sqrt{2} \cdot p + 1)\sqrt{2} .$$

Obliczamy wielomiany $l(p)$ i $\gamma(p)$ zgodnie z (5.21) i (5.18):

$$\gamma_*(p)\gamma(p) = 1-p^2 , \quad l_*(p)l(p) = (p^2 + 1)^2 ,$$

po czym dokonujemy identyfikacji:

$$l_2(p) = \gamma_1(p) = e_1(p) = \hat{e}(p) = 1 ,$$

$$l_{11}(p) = p^2 + 1, \quad \gamma_0(p)\gamma_2(p) = p + 1, \quad \gamma_2(p)e_{21}(p)e_{222}(p) = p + 1.$$

Rozważmy trzy przypadki:

Przypadek 1), w którym współczynnik odbicia $s_{11}(p)$ został przyjęty jako minimalnofazowy, zatem

$$\gamma_2(p) = p + 1, \quad \gamma_0(p) = e_{21}(p) = e_{222}(p) = 1.$$

W rozważanej sytuacji wielomian $\gamma_{0*}(p) \equiv 1$, zatem zgodnie z Twierdzeniem 5.1 można przyjąć jako $V(p)$ funkcję $V(p) \equiv 1$.

Przypadek 2)

$$\gamma_0(p) = p + 1, \quad \gamma_2(p) = e_{21}(p) = 1, \quad e_{222}(p) = p + 1.$$

Obliczamy funkcję $\Psi(p)$ ze wzoru (5.36):

$$\Psi(p) = \frac{p^2 + 1}{g(p)} \cdot \frac{1 - p}{1 + p}.$$

Wielomian $\gamma_{0*}(p) \equiv 1 - p$ ma jednokrotne zero w punkcie $p=1$ oraz $h_2(p)h_{2*}(p)|_{p=1} \neq 0$. Szukamy zatem funkcji RA $V(p)$ spełniającej następującą zależność:

$$\left[\frac{p^2 + 1}{g(p)} \cdot \frac{1 - p}{1 + p} \cdot p - V(p) \cdot p \right]_{p=1} = 0 \quad \text{krotności 1.}$$

Jako $V(p)$ można przykładowo wybrać funkcję: $V(p) = \frac{1 - p}{1 + p}$, która jest funkcją o najniższym stopniu, spośród funkcji spełniających powyższy warunek.

Przypadek 3)

$$\gamma_0(p) = p + 1, \quad \gamma_2(p) = e_{222}(p) = 1, \quad e_{21}(p) = p + 1.$$

Obliczamy funkcję $\Psi(p)$ ze wzoru (5.36):

$$\Psi(p) = \frac{p^2 + 1}{g(p)}.$$

Wielomian $\gamma_{0*}(p) \equiv 1 - p$ ma jednokrotne zero w punkcie $p=1$ oraz $h_2(p)h_{2*}(p)|_{p=1} \neq 0$. Szukamy zatem funkcji RA $V(p)$ spełniającej zależność:

$$\left[\frac{p^2 + 1}{g(p)} \cdot p - V(p) \cdot p \right]_{p=1} = 0 \quad \text{krotności 1.}$$

Powyższy warunek interpolacyjny jest równoważny następującemu warunkowi:

$$V(p)|_{p=1} = \sqrt{2} - 1.$$

Przyjmując, że $V(p) = (p - \alpha)/(p + \alpha)$ jest funkcją pierwszego stopnia, obliczamy stałą α , otrzymując w wyniku $\alpha = \sqrt{2} - 1$.

Jak widać z przeprowadzonych rozważań, w praktyce należałoby realizować trójwrotnik spełniający warunki analizowane w przypadku 1), ponieważ wówczas stopnie wielomianów tworzących elementy macierzy $S(p)$ są najniższe. Dla przypadku 1) obliczamy $s_{11}(p)$ przy pomocy wzoru (5.20), otrzymując:

$$s_{11}(p) = \rho_{11}(p) = \frac{p^2 + 1}{(p^2 + \sqrt{2} \cdot p + 1)\sqrt{2}}.$$

Pozostałe elementy macierzy rozproszenia $S(p)$ wyznaczyć należy z zależności (5.38). Macierz $S(p)$ można zrealizować znanymi metodami syntezy [32,40,74,77]. Jedną z dopuszczalnych realizacji układowych wzmacnień (5.48) zostanie przedstawiona w Rozdziale 6.3.

5.2. Realizacja wzmacnień napięciowych o jednakowych charakterystykach fazowych

W niniejszym rozdziale zostanie podana metoda realizacji wzmacnień napięciowych o jednakowych charakterystykach fazowych. Następnie rozwiążemy problem realizacji powyższych wzmacnień przy dodatkowym założeniu, że suma wzmacnień jest funkcją regularną wszechprzepustową (ang. regular allpass RA). Wzmiankowane wzmacnienia znajdują zastosowanie przy projektowaniu bezstratnych, odwracalnych filtrów trójwrotowych, szczególnie w zagadnieniach akustycznych (stereofonia).

Ostatnio Winter [75] rozważał konstrukcję pary filtrów o jednakowych charakterystykach fazowych. Niedogodnością rozwiązania danego w [75] jest to, że warunki realizacji wzmacnień wyrażają się przez ograniczenia nakładane na specjalnie skonstruowane funkcje, które bezpośrednio nie są przydatne do przeprowadzenia syntezy. Wzmiankowane niedogodności zostały usunięte przez autora niniejszej rozprawy w [56,57], przy założeniu, że realizowany trójwrotnik ma strukturę dipleksera. W niniejszym rozdziale zostaną ustalone warunki konieczne i wystarczające realizacji omawianych wzmacnień napięciowych w układzie trójwrotowym o dowolnej konfiguracji. W tym celu zostanie wykorzystane Twierdzenie 5.1.

Niech dane wzmacnienia napięciowe $s_{21}(p)$, $s_{31}(p)$ postaci (5.3) będące funkcjami rzeczywistymi ograniczonymi (ang. bounded real BR) są realizowalne w odwracalnym, bezstratnym trójwrotniku N , Rys. 5.1. Macierz rozproszenia $S(p)$ o wymiarach 3×3 odwracalnego, bezstratnego trójwrotnika N , jest wymierną, symetryczną, paraunitarną macierzą rzeczywistą ograniczoną (5.2). Paraunitarność macierzy $S(p)$ zapisana wzorami (5.6-5.8) implikuje podstawowy warunek realizowalności wzmacnień $s_{21}(p)$, $s_{31}(p)$ dany w (5.9). Przyjmijmy, że rozważane wzmacnienia napięciowe posiadają jednakowe fazy [75], tzn:

$$\frac{s_{21}(p)}{s_{21}^*(p)} = \frac{s_{31}(p)}{s_{31}^*(p)} \quad (5.49)$$

Wzmacnienia $s_{21}(p)$, $s_{31}(p)$ jako funkcje BR zawsze mogą zostać zapisane w formie:

$$s_{i1}(p) = e(p)h_i(p)/g(p) \quad i = 2,3, \quad (5.50)$$

przy czym $g(p)$ jest wielomianem Hurwitza w ścisłym znaczeniu (ang. strict Hurwitz SH) oraz $e(p)$ i $h_i(p)$ są wielomianami. Ponadto $(e, g) = 1$, $(h_2, h_3) = 1$, co oznacza, że dane wielomiany są względnie pierwsze. Warunek (5.49) w odniesieniu do (5.50) implikuje:

$$\frac{h_2(p)}{h_{2}^*(p)} = \frac{h_3(p)}{h_{3}^*(p)} \quad (5.51)$$

Ponieważ $(h_2, h_3) = 1$, zatem z (5.51) wynika, że każde zero $h_2(p)$ jest zerem $h_{2}^*(p)$ tej samej krotności. Analogiczne rozumowanie obowiązuje w odniesieniu do funkcji $h_3(p)$. W konsekwencji na podstawie (5.51) ustalamy:

$$h_2(p) = \hat{l}_2(p)l_2(p)l_{2}^*(p), \quad (5.52)$$

$$h_3(p) = \hat{l}_3(p)l_3(p)l_{3}^*(p), \quad (5.53)$$

gdzie wielomiany $l_2(p)$, $l_3(p)$ są SH, wielomiany $\hat{l}_2(p)$, $\hat{l}_3(p)$ są parzyste i mają zera położone tylko na osi $j\omega$ oraz $(\hat{l}_2l_2, \hat{l}_3l_3) = 1$. Ponieważ $(\hat{l}_2l_2, \hat{l}_3l_3) = 1$, zatem w każdym zerze wyrażenia:

$$h_2(p)h_{2*}(p) + h_3(p)h_{3*}(p) \quad (5.54)$$

wielomiany $l_2(p)$, $l_3(p)$, $l_{2*}(p)$, $l_{3*}(p)$, $\hat{l}_2(p)$, $\hat{l}_3(p)$ są różne od zera. Przeprowadzona analiza w połączeniu z Twierdzeniem 5.1. umożliwia ustalenie nowego twierdzenia dotyczącego realizacji wzmacnień napięciowych o jednakowych fazach.

Twierdzenie 5.2. Dane wzmacnienia BR

$$s_{i1}(p) = e(p)h_i(p)/g(p) \quad i = 2, 3,$$

(wielomiany $(e, g) = 1$, $(h_2, h_3) = 1$) o jednakowych fazach, spełniające warunek

$$|s_{21}(j\omega)|^2 + |s_{31}(j\omega)|^2 \leq 1 \quad \text{dla każdego } \omega,$$

są realizowalne w odwracalnym, bezstratnym trójwrotniku N zakończonym rezystancjami 1Ω , wtedy i tylko wtedy, gdy:

1. Funkcja $e(p)/e_*(p)$ jest funkcją RA.
2. Wielomiany $h_2(p)$, $h_3(p)$ mają postać

$$h_2(p) = \hat{l}_2(p)l_2(p)l_{2*}(p), \quad h_3(p) = \hat{l}_3(p)l_3(p)l_{3*}(p),$$

gdzie wielomiany $l_2(p)$, $l_3(p)$ są SH, wielomiany $\hat{l}_2(p)$, $\hat{l}_3(p)$ są parzyste i mają zera położone tylko na osi $j\omega$ oraz $(\hat{l}_2l_2, \hat{l}_3l_3) = 1$.

3. Istnieje funkcja RA $V(p)$, która w każdym zerze $p=p_0$, $\text{Re } p_0 > 0$, krotności n_0 wielomianu $\gamma_0(p)$, patrz (5.47), przyjmuje taką wartość, że wyrażenie

$$\frac{\varphi_{0*}(p)l(p)}{\varphi_0(p)g(p)} + V(p)$$

ma zero w punkcie $p=p_0$ krotności co najmniej n_0 .

Przyjmijmy teraz, że wzmacnienia napięciowe $s_{21}(p)$, $s_{31}(p)$ postaci (5.3) oprócz zależności (5.49) spełniają dodatkowy warunek:

$$s_{21}(p) + s_{31}(p) = b(p), \quad (5.55)$$

gdzie $b(p)$ jest funkcją RA. Zależność (5.55) została wprowadzona przez T. Mitrę jako matematyczny zapis warunku subiektywnego braku zniekształceń amplitudowych przy odsłuchu stereofonicznym [75]. Jednoczesne spełnienie równań (5.49, 5.55) przez układ realizujący pewne wzmacnienia napięciowe, oznacza dla słuchacza subiektywny brak zniekształceń sygnału stereofonicznego [75]. Zastosowanie warunku (5.55) do wzmacnień (5.50) spełniających równania (5.52, 5.55), pozwala wyznaczyć poniższą zależność:

$$\frac{e(p)}{g(p)} [\hat{l}_2(p)l_2(p)l_{2*}(p) + \hat{l}_3(p)l_3(p)l_{3*}(p)] = b(p), \quad (5.56)$$

Ponieważ $(e, g) = 1$, zatem:

$$e(p) = e_{2*}(p), \quad g(p) = \pm m^2(p)e_2(p), \quad (5.57)$$

gdzie

$$m(p)m_*(p) = \hat{l}_2(p)l_2(p)l_{2*}(p) + \hat{l}_3(p)l_3(p)l_{3*}(p), \quad (5.58)$$

przy czym wielomiany $e_2(p)$, $m(p)$ są SH. Ponieważ wielomian $m(p)$ jest SH, to wielomiany $\hat{l}_2(p)$, $\hat{l}_3(p)$ muszą mieć postać:

$$\hat{l}_2(p) = \hat{l}_{20}^2(p), \quad \hat{l}_3(p) = \hat{l}_{30}^2(p) \quad , \quad (5.59)$$

gdzie wielomiany $\hat{l}_{20}(p)$, $\hat{l}_{30}(p)$ o zerach położonych wyłącznie na osi $j\omega$, są względnie pierwsze. Po uwzględnieniu (5.57, 5.58, 5.59), wzmocnienia $s_{21}(p)$, $s_{31}(p)$ można zapisać w formie:

$$s_{21}(p) = \frac{e_{2*}(p)\hat{l}_{20}^2(p)l_2(p)l_{2*}(p)}{e_2(p)m^2(p)} \quad , \quad s_{31}(p) = \frac{e_{2*}(p)\hat{l}_{30}^2(p)l_3(p)l_{3*}(p)}{e_2(p)m^2(p)} \quad . \quad (5.60)$$

Warunek paraunitarności macierzy $S(p)$

$$\rho_{11*}(p)\rho_{11}(p) = 1 - s_{21*}(p)s_{21}(p) - s_{31*}(p)s_{31}(p) \quad (5.61)$$

pozwała z użyciem (5.58-5.60) wyznaczyć minimalnofazowy współczynnik odbicia $\rho_{11}(p)$, jako:

$$\rho_{11}(p) = \sqrt{2} \frac{\hat{l}_{20}(p)\hat{l}_{30}(p)l_2(p)l_3(p)}{m^2(p)} \quad . \quad (5.62)$$

Dla pulsacji ω_0 , przy której przecinają się charakterystyki amplitudowe wzmocnień (5.60) spełniony jest warunek:

$$|s_{21}(j\omega_0)|^2 = |s_{31}(j\omega_0)|^2 \quad . \quad (5.63)$$

Warunek (5.62) z uwzględnieniem (5.58-5.60) prowadzi do następującej zależności:

$$|m(j\omega_0)|^2 = 2|\hat{l}_{20}(j\omega_0)l_2(j\omega_0)|^2 = 2|\hat{l}_{30}(j\omega_0)l_3(j\omega_0)|^2 \quad . \quad (5.64)$$

W konsekwencji kwadraty modułów wzmocnień $s_{21}(p)$, $s_{31}(p)$ dla pulsacji ω_0 osiągają wartość:

$$|s_{21}(j\omega_0)|^2 = |s_{31}(j\omega_0)|^2 = 1/4 \quad . \quad (5.65)$$

Równania (5.58-5.60) umożliwiają modyfikację Twierdzenia 5.2. w odniesieniu do wzmocnień napięciowych spełniających warunki (5.49, 5.55). Zmodyfikowane Twierdzenie 5.2. zostało przedstawione poniżej jako Twierdzenie 5.3.

Twierdzenie 5.3. Dane wzmocnienia BR

$$s_{i1}(p) = e(p)h_i(p)/g(p) \quad i = 2, 3 \quad ,$$

(wielomiany $(e, g) = 1$, $(h_2, h_3) = 1$) o jednakowych fazach, spełniające warunki

$$|s_{21}(j\omega)|^2 + |s_{31}(j\omega)|^2 \leq 1 \quad \text{dla każdego } \omega \quad ,$$

oraz

$$s_{21}(p) + s_{31}(p) = b(p)$$

gdzie funkcja $b(p)$ jest dowolną funkcją typu RA, są realizowalne w odwracalnym, bezstratnym trójwrotniku N zakończonym rezystancjami $1/\Omega$, wtedy i tylko wtedy, gdy:

1.

$$e(p) = e_{2*}(p) \quad ,$$

,przy czym wielomian $e_2(p)$ jest SH.

2. Wielomiany $h_2(p)$, $h_3(p)$ mają postać

$$h_2(p) = \hat{l}_{20}^2(p)l_2(p)l_{2*}(p) \quad , \quad h_3(p) = \hat{l}_{30}^2(p)l_3(p)l_{3*}(p) \quad ,$$

gdzie wielomiany $l_2(p)$, $l_3(p)$ są SH, natomiast wielomiany $\hat{l}_{20}(p)$, $\hat{l}_{30}(p)$ mają zera położone tylko na osi $j\omega$ oraz $(\hat{l}_{20}^2l_2, \hat{l}_{30}^2l_3) = 1$.

3. Wielomian $g(p)$ ma postać:

$$g(p) = \pm m^2(p) e_2(p) ,$$

gdzie $m(p)$ jest wielomianem SH otrzymanym z faktoryzacji następującego równania:

$$m(p)m_*(p) = \hat{l}_{20}^2(p)l_2(p)l_{2*}(p) + \hat{l}_{30}^2(p)l_3(p)l_{3*}(p) .$$

4. Istnieje funkcja RA $V(p)$, która w każdym zerze $p=p_0$, $\text{Re } p_0 > 0$, krotności n_0 wielomianu $\gamma_0(p)$, patrz (5.47), przyjmuje taką wartość, że wyrażenie

$$\frac{\varphi_{0*}(p)l(p)}{\varphi_0(p)g(p)} + V(p)$$

ma zero w punkcie $p=p_0$ krotności co najmniej n_0 .

W celu zobrazowania prowadzonych rozważań zrealizujemy przykład obliczeniowy z wykorzystaniem Twierdzeń 5.2. i 5.3. Niech dane wzmocnienia napięciowe będą wzmocnieniami minimalnofazowymi:

$$s_{21}(p) = \frac{K^2}{B_k^{2n}(p)} , \quad s_{31}(p) = p^{2k \cdot n} \cdot s_{21}(p) . \quad (5.66)$$

Stała $K \in (0,1]$, $B_k(p)$ jest wielomianem Butterwortha stopnia k oraz $n=1,2,3,\dots$. Ponieważ wzmocnienia (5.66) mają w świetle warunku (5.49) jednakowe fazy, zatem do realizacji wymaganych wzmocnień wykorzystamy Twierdzenie 5.2. Na wstępie sprawdzamy warunek (5.9), który w rozpatrywanym przykładzie przyjmuje postać:

$$K^4 \frac{1 + \omega^{4kn}}{(1 + \omega^{2k})^{2n}} \leq 1$$

Powyższa funkcja posiada maksimum dla $\omega=0$, wynoszące K^4 , zatem warunek (5.9) jest spełniony. Obliczamy ponadto: $\omega_0=1$, oraz wyznaczamy pulsacje graniczne w pasmach przenoszenia ustalone na poziomie 3 dB spadku mocy wydzielonej w obciążeniach, otrzymując: $\omega_a = \sqrt[2k]{\sqrt{2}-1}$ dla wzmocnienia dolno-przepustowego i $\omega_b = 1/\omega_a$ dla wzmocnienia górno-przepustowego. Wzmocnienie mocy dla $\omega_0=1$ wynosi $G_0 = K^4 / 4^n$. Poniższa tabela ilustruje poziom wzmocnienia przy $\omega=\omega_0$ i pasmo przenoszenia dla wzmocnienia dolnoprzepustowego (-3 dB) w funkcji k oraz n .

k	n	G_0	ω_a	k	n	G_0	ω_a
1	1	-6	0.6436	1	5	-30	0.2679
2	1	-6	0.8022	2	5	-30	0.5176
5	1	-6	0.9156	5	5	-30	0.7684
10	1	-6	0.9569	10	5	-30	0.8766
1	2	-12	0.4350	1	10	-60	0.1878
2	2	-12	0.6595	2	10	-60	0.4333
5	2	-12	0.8466	5	10	-60	0.7157
10	2	-12	0.9201	10	10	-60	0.8460

Tabela 5.1. Wzmocnienie G_0 oraz pulsacja ω_a w funkcji k , n .

Zauważmy, że tylko dla $K=1$ i $n=1$ rozpatrywane wzmocnienia spełniają równocześnie postulaty (5.49, 5.55). Zgodnie z punktami 1), 2), 3) tezy Twierdzenia 5.2 dokonujemy identyfikacji następujących wielomianów:

$$e(p) = 1 , \quad l_2(p) = K , \quad \hat{l}_2(p) = 1 , \quad l_3(p) = K , \quad \hat{l}_3(p) = p^{2k \cdot n} , \quad g(p) = B_k^{2n}(p) ,$$

Ponadto:

$$l(p)l_*(p) = (1 + (-1)^k p^{2k})^{2n} - K^4(1 + p^{4k \cdot n}) ,$$

zatem:

$$\gamma(p) = K^2 B_{2k \cdot n}(p) .$$

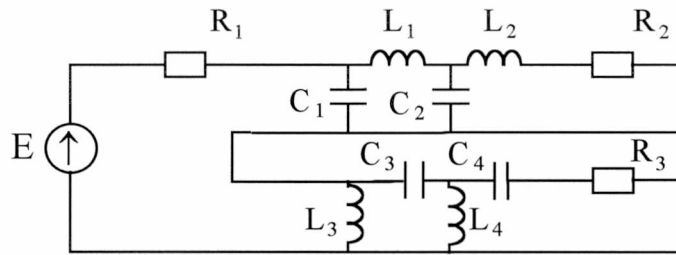
Obliczenia numeryczne wykonano dla $k=2, n=1, K=1$, otrzymując:

$$\gamma_0(p) = B_4(p) , \quad l(p) = \sqrt{2} \cdot p^2 .$$

Zauważmy, że w rozpatrywanym przykładzie wszystkie zera wielomianu $\gamma_*(p)$ są potencjalnymi biegunami macierzy $S(p)$ w obszarze $\text{Re } p > 0$. Wyznaczamy warunek zawarty w punkcie 4 tezy Twierdzenia 5.2:

$$V(p)|_{p=p_i} = \frac{-\sqrt{2} \cdot p^2}{B_2^2(p)} \Big|_{p=p_i} ,$$

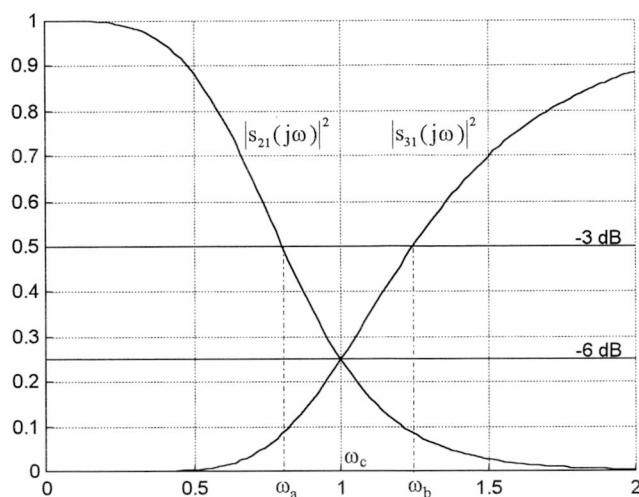
gdzie punkty $p_i, i=1,2,3,4$ są zerami wielomianu $B_4(-p)$. Aby uniknąć konieczności przeprowadzania powyższej interpolacji, ograniczono strukturę trójwrotnika do układu dipleksera. W Rozdziale 6.3 zostanie wykazane, że rozpatrywane tutaj wzmocnienia są zawsze realizowalne w układzie dipleksera, co w konsekwencji eliminuje potrzebę wyznaczania funkcji $V(p)$. Wykorzystując postać macierzy rozproszenia dla konfiguracji dipleksera (Rozdział 6.3) otrzymano następujące rozwiązanie układowe:



Rys. 5.2. Realizacja przykładu obliczeniowego, wartości elementów wynoszą:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 = R_3 = 1 \, \Omega, \\ C_1 &= 4(2\sqrt{2} - 1) / 7 \approx 1.045 \, \text{F}, \quad C_2 = 2(3\sqrt{2} + 2) / 7 \approx 1.784 \, \text{F}, \\ C_3 &= 4(5\sqrt{2} + 1) / 49 \approx 0.659 \, \text{F}, \quad C_4 = 2\sqrt{2} \approx 2.828 \, \text{F}, \\ L_1 &= (5\sqrt{2} - 1) / 4 \approx 1.518 \, \text{H}, \quad L_2 = \sqrt{2} / 4 \approx 0.354 \, \text{H}, \\ L_3 &= (2\sqrt{2} + 1) / 4 \approx 0.957 \, \text{H}, \quad L_4 = (3\sqrt{2} - 2) / 4 \approx 0.561 \, \text{H}. \end{aligned}$$

Wykresy kwadratów modułów wzmocnień $|s_{21}(j\omega)|^2$, $|s_{31}(j\omega)|^2$ ilustruje Rys. 5.3.

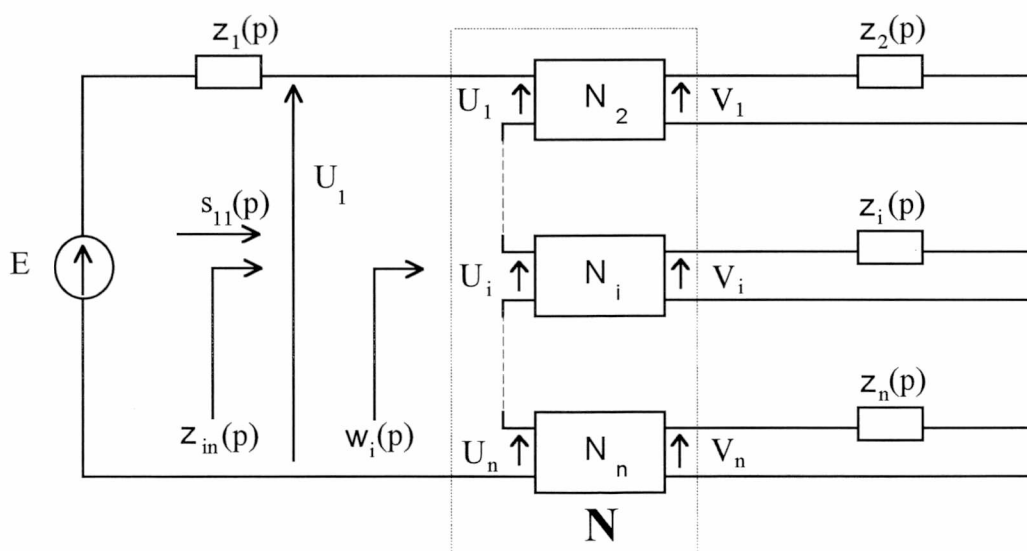


Rys. 5.3. Wykresy kwadratów modułów wzmocnień $|s_{21}(j\omega)|^2$, $|s_{31}(j\omega)|^2$ w rozpatrywanym przykładzie.

5.3. Realizacja wzmocnień napięciowych w n-wrotowym multiplekserze

Zastosowanie bezstratnego wielowrotnika o strukturze szeregowego lub równoległego multipleksera, Rys. 5.4., do przeprowadzenia wymaganej filtracji sygnału poruszano w pracach [5,6,8,19,39,81,84]. Ostatnio w [69] rozwiązano również problem dopasowania szerokopasmowego impedancji w układzie multipleksera. Cytowane prace pomogły postawić i następnie rozwiązać problem syntezy wielowrotnika o strukturze multipleksera, realizującego dane wzmocnienia napięciowe, tzn. wzmocnienia uwzględniające zachowanie wymaganych charakterystyk amplitudowo-fazowych [64].

Rozważmy skupione, bezstratne czwórnik N_i $i=2,\dots,n$, połączone w strukturę multipleksera, Rys. 5.4.



Rys. 5.4. Bezstratny wielowrotnik N w konfiguracji szeregowego multipleksera, zakończony niefosterowskimi impedancjami PR.

Impedancje $z_i(p)$ $i=1,\dots,n$, są niefosterowskimi wymiernymi funkcjami rzeczywistymi dodatnimi (ang. positive real - PR). Niech $\text{Ev } z_i(p)$ oznacza część parzystą i -tej impedancji $z_i(p)$:

$$\text{Ev } z_i(p) = \frac{1}{2} (z_{i*}(p) + z_i(p)) = h_{i*}(p) h_i(p) \quad (5.67)$$

Funkcje $h_i(p)$ są wybrane tak, że $h_i(p)$ oraz $h_i(p)/h_{i*}(p)$ są analityczne w obszarze $\text{Re } p > 0$, ponadto $h_i(p)$ są minimalnego stopnia. Niech $\mathbf{S}(p)$ oznacza macierz rozproszenia wielowrotnika N znormalizowaną względem impedancji $z_i(p)$ $i=1, \dots, n$. Macierz $\mathbf{S}(p)$ jest paraunitarną macierzą rzeczywistą ograniczoną (ang. bounded real BR). Na podstawie [77] można zapisać wyrażenia na współczynniki transmisji $s_{i1}(p)$ macierzy $\mathbf{S}(p)$, w układzie z Rys. 5.4:

$$s_{i1}(p) = 2 \cdot \frac{h_1(p) h_i(p)}{z_i(p)} \cdot \frac{V_i(p)}{E(p)}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (5.68)$$

Wzmocnienia dane wzorem (5.68) są funkcjami BR spełniającymi na osi $j\omega$ następującą nierówność wynikającą z warunku paraunitarności macierzy $\mathbf{S}(p)$:

$$\sum_{i=2}^n |s_{i1}(j\omega)|^2 \leq 1 \quad \text{dla każdego } \omega, \quad (5.69)$$

W rezultacie zadanie wzmocnień $V_i(p)/E(p)$, $i = 2, \dots, n$, jest równoważne wyspecyfikowaniu $n-1$ funkcji BR $s_{i1}(p)$ $i=2, \dots, n$. Przed dalszą analizą układu multipleksa zostaną wprowadzone twierdzenia pomocnicze (Lematy 5.1, 5.2).

Lemat 5.1. Niech $W(p)$ będzie niefosterowską impedancją PR oraz niech $H(p)$, $K(p)$ będą dowolnymi faktoryzacjami części parzystej impedancji $W(p)$, tzn.

$$\text{Ev } W(p) = H_*(p) H(p) = K_*(p) K(p). \quad (5.70)$$

Macierz paraunitarna $\tilde{\mathbf{S}}(p)$ o wymiarach 2×2 :

$$\tilde{\mathbf{S}}(p) = \begin{bmatrix} \tilde{s}_{11}(p) & \tilde{s}_{12}(p) \\ \tilde{s}_{21}(p) & \tilde{s}_{22}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (W-1)/(W+1) & 2K/(W+1) \\ 2H/(W+1) & H(1-W_*)/[K_*(1+W)] \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

jest regularna (nie posiada biegunów w obszarze $\text{Re } p \geq 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy:

1. Funkcje $H(p)$, $K(p)$ są analityczne w obszarze $\text{Re } p > 0$.
2. Funkcja $D(p) = H(p)/K_*(p)$ jest analityczna w obszarze $\text{Re } p > 0$.

Niech $h(p)$ oznacza faktoryzację części parzystej niefosterowskiej impedancji PR $Z(p)$, tzn.

$$\text{Ev } Z(p) = h_*(p)h(p), \quad (5.72)$$

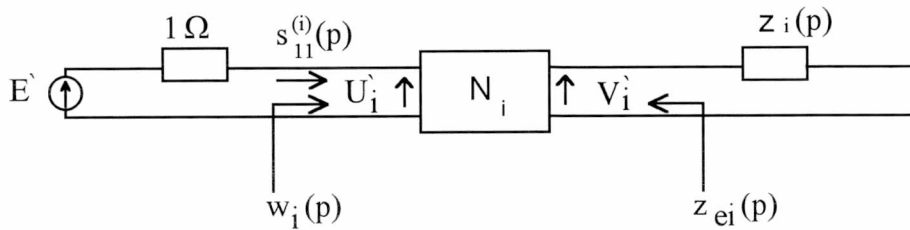
taką, że funkcje $h(p)$ i $h(p)/h_*(p)$ są analityczne w obszarze $\text{Re } p > 0$ oraz $h(p)$ jest minimalnego stopnia.

Lemat 5.2. Impedancja PR $W(p)$ jest impedancją wejściową bezstratnego czwórnika $\tilde{N}$ obciążonego impedancją niefosterowską PR $Z(p)$, wtedy i tylko wtedy, gdy:

1. Macierz $\tilde{\mathbf{S}}(p)$ czwórnika $\tilde{N}$ postaci (5.71) jest regularna.
2. Funkcje $\tilde{s}_{12}(p)/h(p)$ i $\tilde{s}_{21}(p)/h(p)$ są analityczne w obszarze $\text{Re } p > 0$.
3. Funkcja $Z_e(p) = 2h^2(p)[h(p)/h_*(p) - \tilde{s}_{22}(p)]^{-1} - Z(p)$ jest funkcją PR.

Powyższe lematy wynikają wprost z Lematu 3 i Wniosku 1 zawartych w pracy [65] dla czwórnika nieodwracalnego, oraz z Twierdzenia 1 (wersja impedancyjna) danego w pracy [81] dla czwórnika odwracalnego.

Rozważmy pojedynczy czwórnik N_i , Rys. 5.5., tworzący układ wielowrotnika z Rys. 5.4.



Rys. 5.5. Bezstratny czwórnik N_i .

Porównując Rys. 5.4. i Rys. 5.5. staje się oczywiste, że $V_i/U_i = V'_i/U'_i$, zatem:

$$\frac{V'_i(p)}{E'(p)} = \frac{V_i(p)}{E(p)} \left(\frac{z_{in}(p) + z_l(p)}{1 + w_i(p)} \right), \quad i = 2, \dots, n, \quad (5.73)$$

gdzie

$$z_{in}(p) = \sum_{i=2}^n w_i(p) \quad (5.74)$$

jest impedancją wejściową widzianą w pierwszych wrotach multipleksera N , gdy pozostałe wrota są zamknięte impedancjami obciążeń. Impedancja $w_i(p)$ $i=2, \dots, n$ jest impedancją wejściową widzianą w pierwszych wrotach czwórnika N_i , podczas gdy drugie wrota są zamknięte impedancją $z_i(p)$, Rys. 5.5.

Dodatkowo przez analogię do (5.68) łatwo jest ustalić:

$$s_{21}^{(i)}(p) = 2 \cdot \frac{h_i(p)}{z_i(p)} \cdot \frac{V'_i(p)}{E'(p)}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (5.75)$$

Z równania (5.70) w połączeniu z (5.68, 5.72) wynika następujący związek:

$$s_{21}^{(i)}(p) = \frac{s_{i1}(p)}{h_1(p)} \left(\frac{z_{in}(p) + z_l(p)}{1 + w_i(p)} \right), \quad i = 2, \dots, n. \quad (5.76)$$

Macierz rozproszenia czwórnika N_i można otrzymać wprost z (5.71) zastępując $W(p)$ przez $w_i(p)$, $H(p)$ przez $H_i(p)$ oraz $K(p)$ przez $K_i(p)$. Wykorzystując macierz postaci (5.71) czwórnika N_i do przekształcenia równania (5.76), otrzymujemy po wykonaniu obliczeń następującą zależność:

$$\frac{2 H_i(p)}{1 + w_i(p)} = \frac{s_{i1}(p)}{h_1(p)} \left(\frac{z_{in}(p) + z_l(p)}{1 + w_i(p)} \right), \quad i = 2, \dots, n. \quad (5.77)$$

Z (5.77) można bezpośrednio wyznaczyć poszukiwany czynnik $H_i(p)$, będący faktoryzacją części parzystej impedancji $w_i(p)$:

$$H_i(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{s_{i1}(p)}{h_1(p)} \cdot (z_{in}(p) + z_l(p)), \quad i = 2, \dots, n, \quad (5.78)$$

gdzie

$$\text{Ev } w_i(p) = H_{i*}(p) H_i(p) \quad i=2, \dots, n. \quad (5.79)$$

Znajomość czynnika $H_i(p)$ pozwala obliczyć poszukiwaną impedancję $w_i(p)$ z dokładnością do funkcji reaktancji.

Rozważmy następujący problem: dane są wzmocnienia BR $s_{il}(p)$ $i=2,\dots,n$. spełniające nierówność (5.69). Należy znaleźć warunki realizowalności bezstratnego multipleksa, Rys. 5.4., obciążonego impedancjami PR $z_i(p)$ $i=1,\dots,n$, który realizuje wymagane wzmocnienia napięciowe $V_i(p)/E(p)$, $i=2,\dots,n$. Jeżeli poszukiwany multipleks jest realizowalny, to istnieje paraunitarna macierz BR $S(p)$ o wymiarach $n \times n$ znormalizowana impedancjami $z_i(p)$ $i=1,\dots,n$, która zawiera wymagane wzmocnienia $s_{il}(p)$ $i=2,\dots,n$, (5.68). Warunek paraunitarności macierzy $S(p)$ implikuje:

$$s_{1l}^*(p) s_{1l}(p) = 1 - \sum_{i=2}^n s_{il}^*(p) s_{il}(p) \quad (5.80)$$

Oznaczmy przez $s_{1l}(p) = s_{1lm}(p)$ minimalnofazową BR faktoryzację (5.80). Współczynnik odbicia $s_{1l}(p)$ ma w ogólnym przypadku postać:

$$s_{1l}(p) = s_{1lm}(p) \eta(p) \quad (5.81)$$

gdzie $\eta(p)$ jest pewną funkcją regularną wszechprzepustową (ang. regular allpass RA). Impedancja wejściowa $z_{in}(p)$, Rys. 5.4., na podstawie wzoru (3.28) może zostać zapisana jako:

$$z_{in}(p) = 2 A_1(p) \operatorname{Ev} z_1(p) [A_1(p) - s_{1lm}(p) \eta(p)]^{-1} - z_1(p) \quad (5.82)$$

gdzie $A_1(p)$ jest funkcją RA utworzoną ze wszystkich biegunów funkcji $h_1(p)$. Wybór funkcji $\eta(p)$ takiej, aby impedancja $z_{in}(p)$ była PR jest przeprowadzany zgodnie z [78] (należy spełnić dla tej impedancji tzw. ograniczenia Youli, omówione w Rozdziale 3).

Po ustaleniu impedancji $z_{in}(p)$ można wyznaczyć funkcje $H_i(p)$ z wzoru (5.78), następnie funkcje $\operatorname{Ev} w_i(p) = H_i^*(p) H_i(p)$ i ostatecznie impedancje wejściowe $w_i(p)$ czwórników składowych N_i , Rys. 5.5., posługując się w tym celu np. metodą Gewertza [2]. Macierze rozproszenia czwórników N_i wyznaczamy korzystając z (5.71), jako:

$$S^{(i)}(p) = \begin{bmatrix} s_{11}^{(i)}(p) & s_{12}^{(i)}(p) \\ s_{21}^{(i)}(p) & s_{22}^{(i)}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (w_i - 1)/(w_i + 1) & 2K_i/(w_i + 1) \\ 2H_i/(w_i + 1) & H_i(1 - w_i^*)/[K_i^*(1 + w_i)] \end{bmatrix}, \quad i = 2, \dots, n \quad (5.83)$$

Funkcje $H_i(p)$ $i=2,\dots,n$. określono w (5.78). Funkcje $K_i(p)$ $i=2,\dots,n$. są faktoryzacjami części parzystych impedancji $w_i(p)$:

$$\operatorname{Ev} w_i(p) = K_i^*(p) K_i(p) \quad i=2,\dots,n, \quad (5.84)$$

analitycznymi w obszarze $\operatorname{Re} p > 0$. Jeżeli macierze $S^{(i)}(p)$ są regularne, wówczas funkcje $H_i(p)$ i $K_i(p)$ spełniają tezy Lematu 5.1.

Dla odwracalnego czwórnika N_i macierz rozproszenia jest symetryczna, zatem zachodzi równość $K_i(p) = H_i(p)$ Regularność macierzy $S^{(i)}(p)$ wymaga (Lemat 5.1), aby funkcje

$$H_i = (0.5 s_{il}/h_l) \cdot (z_{in} + z_l), \quad i = 2, \dots, n \quad (5.85)$$

były regularne, oraz funkcje

$$D_i = \frac{H_i}{H_i^*} = \frac{s_{il}}{s_{il}^*} \frac{h_l^*}{h_l} \left(\frac{z_{in} + z_l}{z_{in}^* + z_l^*} \right), \quad i = 2, \dots, n \quad (5.86)$$

były analityczne w obszarze $\operatorname{Re} p > 0$.

Dla czwórnika nieodwracalnego N_i związek pomiędzy czynnikami $K_i(p)$ i $H_i(p)$ można zapisać w formie:

$$K_i = H_{im} \Phi_i, \quad (5.87)$$

gdzie $H_{im}(p)$ jest minimalnofazowym czynnikiem otrzymanym z faktoryzacji $Ev w_i(p)$, natomiast $\Phi_i(p)$ jest dowolną funkcją typu RA. W rozpatrywanym przypadku zawsze można uczynić wyrażenie

$$D_i = \frac{H_i}{K_{i*}} = s_{i1} \frac{(z_{in} + z_l)}{2 h_l H_{im*}} \Phi_i, \quad i = 2, \dots, n \quad (5.88)$$

analitycznym w obszarze $Re p > 0$, poprzez właściwy wybór funkcji $\Phi_i(p)$. W rezultacie dla czwórnika nieodwracalnego warunek regularności macierzy $S^{(i)}(p)$ jest równoważny postulatowi, aby funkcje

$$H_i = (0.5 s_{i1}/h_l) \cdot (z_{in} + z_l), \quad i = 2, \dots, n \quad (5.89)$$

były regularne.

W obu rozpatrywanych przypadkach regularność macierzy $S^{(i)}(p)$ nie jest wystarczająca, aby macierze $S^{(i)}(p)$ były macierzami rozproszenia czwórników N_i połączonych w strukturę multipleksa zakończonego impedancjami $z_i(p)$, Rys. 5.4. W oparciu o Lemat 5.2., można ustalić warunki konieczne i wystarczające na to aby macierze $S^{(i)}(p)$ były macierzami rozproszenia czwórników N_i połączonych w konfigurację multipleksa, który obciążony impedancjami PR $z_i(p)$ $i=1, \dots, n$, realizuje zadane wzmocnienia napięciowe $s_{i1}(p)$ $i=2, \dots, n$. W przypadku czwórnika odwracalnego zachodzi równość $s_{12}^{(i)}(p) = s_{21}^{(i)}(p)$, zatem w punkcie 2. Lematu 5.2. wystarczy zweryfikować tylko analityczność w obszarze $Re p > 0$ funkcji $s_{21}^{(i)}(p)/h_i(p)$. Na podstawie równania (5.76) staje się oczywiste, że analityczność w obszarze $Re p > 0$ funkcji $s_{21}^{(i)}(p)/h_i(p)$ jest równoważna analityczności w obszarze $Re p > 0$ funkcji $s_{i1}(p)/[h_l(p)h_i(p)]$. Dodatkowo zauważamy, że dla czwórnika nieodwracalnego analityczność w obszarze $Re p > 0$ wyrażenia $s_{12}^{(i)}(p)/h_i(p)$ można zawsze zapewnić przez właściwy wybór funkcji RA $\Phi_i(p)$.

W rezultacie przeprowadzono dowód następującego twierdzenia.

Twierdzenie 5.4. Niech $s_{i1}(p)$, $i = 2, \dots, n$ będą danymi wzmocnieniami BR spełniającymi nierówność (5.69) i niech $z_{in}(p)$, wyznaczone zgodnie z (5.82) będzie impedancją PR dla wybranej, w oparciu o ograniczenia Youli [78], funkcji RA $\eta(p)$. Wzmocnienia $s_{i1}(p)$, $i = 2, \dots, n$ są realizowalne w multipleksie z Rys. 5.4. zakończonym niefosterowskimi impedancjami PR $z_i(p)$, $i = 1, \dots, n$ wtedy i tylko wtedy gdy:

- 1) funkcje $H_i = \frac{s_{i1}}{2 h_l} (z_{in} + z_l)$, $i = 2, \dots, n$ są regularne,
- 2) funkcje $s_{i1}/(h_l h_i)$, $i = 2, \dots, n$ są analityczne w obszarze $Re p > 0$,
- 3) funkcje $z_{ei} = 2 h_l^2 \left(h_i/h_{i*} - s_{22}^{(i)} \right)^{-1} - z_i$, $i = 2, \dots, n$, są impedancjami PR ($s_{22}^{(i)}$ określono w (5.83)),
- 4) jeżeli multipleks N jest odwracalny, to dodatkowo funkcje $D_i(p)$, $i = 2, \dots, n$, (5.86) są analityczne w obszarze $Re p > 0$.

Zastosowanie Twierdzenia 5.4. do realizacji zadanych wzmocnień napięciowych zilustrowano w poniższym przykładzie. Dla zmniejszenia liczby koniecznych obliczeń ograniczamy liczbę wrót multipleksa z Rys. 5.4. do $n=3$. Niech impedancje obciążeń będą opisane funkcjami:

$$z_1(p) = p+1, \quad z_2(p) = 12/(p+2), \quad z_3(p) = 24/(p+2).$$

Przyjmijmy, że wymagane wzmocnienia napięciowe mają formę:

$$\frac{V_2}{E} = \frac{1}{\Delta(p)} \frac{(p-1)}{(p+1)}, \quad \frac{V_3}{E} = \frac{1}{\Delta(p)} \frac{(p-0.5)}{(p+0.5)},$$

gdzie

$$\Delta(p) = 0.5p^2 + p + 1.$$

Z (5.67, 5.68) wyznaczamy funkcje:

$$h_1(p) = 1, \quad h_2(p) = \frac{2\sqrt{6}}{p+2}, \quad h_3(p) = \frac{4\sqrt{3}}{p+2},$$

$$s_{21}(p) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\Delta(p)} \frac{(p-1)}{(p+1)}, \quad s_{31}(p) = \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{1}{\Delta(p)} \frac{(p-0.5)}{(p+0.5)}.$$

Łatwo sprawdzić, że rozważane wzmocnienia są funkcjami BR spełniającymi nierówność (5.69). Z ograniczeń Youli [78] w odniesieniu do zer transmisji impedancji $z_1(p)$ można ustalić, że dla wyboru funkcji $\eta(p) \equiv 1$, impedancja PR $z_{in}(p)$ wynosi $z_{in}(p) = 1/(p+1)$. Następnie z (5.78) wyznaczamy funkcje

$$H_2(p) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{(p-1)}{(p+1)^2}, \quad H_3(p) = \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{(p-0.5)}{(p+0.5)} \frac{1}{(p+1)},$$

które są funkcjami regularnymi. Zgodnie z punktem 2) tezy Twierdzenia 5.4. stwierdzamy, że wyrażenia:

$$\frac{s_{21}(p)}{h_1(p) h_2(p)} = \frac{1}{6} \frac{(p+2)}{\Delta(p)} \frac{(p-1)}{(p+1)}, \quad \frac{s_{31}(p)}{h_1(p) h_3(p)} = \frac{1}{12} \frac{(p+2)}{\Delta(p)} \frac{(p-0.5)}{(p+0.5)}$$

są analityczne w obszarze $\text{Re } p > 0$. Ponadto na podstawie (5.88) ustalamy, że zależności:

$$D_2(p) = -\frac{(p-1)^2}{(p+1)^2} \Phi_2(p), \quad D_3(p) = -\frac{(p-1)(p-0.5)}{(p+1)(p+0.5)} \Phi_3(p).$$

są analityczne w obszarze $\text{Re } p > 0$ dla dowolnego wyboru funkcji Φ_2 i Φ_3 . Dla wyznaczonych $H_i(p)$ $i=2,3$, obliczamy $Ev w_i(p)$ $i = 2,3$, a następnie obliczamy poszukiwane impedancje:

$$w_2(p) = \frac{2}{3} \frac{1}{(p+1)}, \quad w_3(p) = \frac{1}{3} \frac{1}{(p+1)}.$$

Zauważmy, że otrzymane impedancje są funkcjami minimalnej reaktancji. Następnie korzystając z ograniczeń Youli [78] (patrz również Rozdział 3) wyznaczamy impedancje $z_{e2}(p)$, $z_{e3}(p)$ jako funkcje PR na następującej drodze. Impedancje $z_2(p)$, $z_3(p)$ mają jednokrotne zero transmisji w nieskończoności, klasy 2. Youli. Niech:

$$\Phi_2(p) = \prod_{k=1}^{n_2} \frac{p - \mu_{2k}}{p + \mu_{2k}}, \quad \text{Re}(\mu_{2k}) > 0, \quad \Phi_3(p) = \prod_{k=1}^{n_3} \frac{p - \mu_{3k}}{p + \mu_{3k}}, \quad \text{Re}(\mu_{3k}) > 0$$

będą dowolnymi funkcjami RA. Ograniczenia Youli dla impedancji $z_2(p)$, $z_3(p)$ w punkcie $p = \infty$ przyjmują postać:

$$0 \geq \sum_{k=1}^{n_2} \text{Re}(\mu_{2k}) \quad \text{dla } N_2,$$

$$\frac{1}{2} \geq \sum_{k=1}^{n_3} \text{Re}(\mu_{3k}) \quad \text{dla } N_3.$$

Powyższe ograniczenia dla czwórnika N_2 mogą zostać spełnione jedynie przy $\Phi_2 \equiv 1$, zatem czwórnik N_2 można zrealizować tylko w układzie nieodwracalnym. Z ograniczeń Youli w odniesieniu do czwórnika N_3 wynika, że czwórnik N_3 może być zrealizowany w układzie odwracalnym jak i nieodwracalnym. Załóżmy, że N_3 jest czwórnikiem odwracalnym, zatem:

$$\Phi_3(p) = \frac{p - 0.5}{p + 0.5}$$

i ograniczenia Youli dla czwórnika N_3 są spełnione ze znakiem równości. Wypełnienie ograniczeń Youli dla impedancji $z_2(p)$, $z_3(p)$ gwarantuje, że impedancje $z_{e2}(p)$, $z_{e3}(p)$ są PR (punkt 4 tezy Twierdzenia 5.4). Ostatecznie macierze rozproszenia czwórników N_2 , N_3 (5.83) przyjmują formę:

$$S^{(2)}(p) = \frac{1}{p + \frac{5}{3}} \begin{bmatrix} -(p + \frac{1}{3}) & 2\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{(p-1)}{(p+1)} & \frac{-(p - \frac{1}{3})(p-1)}{(p+1)} \end{bmatrix},$$

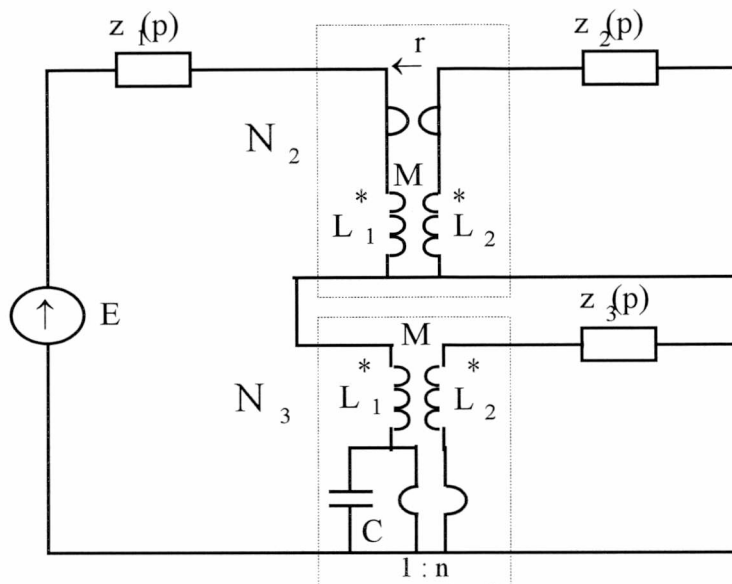
$$S^{(3)}(p) = \frac{1}{p + \frac{4}{3}} \begin{bmatrix} -(p + \frac{2}{3}) & 2\sqrt{\frac{1}{3}} \frac{(p-0.5)}{(p+0.5)} \\ 2\sqrt{\frac{1}{3}} \frac{(p-0.5)}{(p+0.5)} & \frac{-(p - \frac{2}{3})(p-0.5)^2}{(p+0.5)^2} \end{bmatrix}.$$

Dla rozpatrywanych tutaj czwórników istnieją także macierze impedancyjne:

$$Z_N^{(2)}(p) = \begin{bmatrix} \frac{p}{3} & 2(p+1) \\ 2(p-1) & 12p \end{bmatrix} \quad \text{dla } N_2,$$

$$Z_N^{(3)}(p) = \begin{bmatrix} \frac{2}{27} \frac{(2p^2+1)}{p} & \frac{4}{9} \frac{(4p^2-1)}{p} \\ \frac{4}{9} \frac{(4p^2-1)}{p} & \frac{8}{3} \frac{(8p^2+1)}{p} \end{bmatrix} \quad \text{dla } N_3.$$

Wyznaczone macierze zrealizowano metodą Cauera [2,40], Rys. 5.6.



Rys. 5.6. Realizacja przykładu obliczeniowego. Wartości elementów czwórników wynoszą:

a) dla czwórnika N_2 : $r = 2 \Omega$, $L_1 = 1/3 \text{ H}$, $L_2 = 12 \text{ H}$, $M = 2 \text{ H}$.

b) dla czwórnika N_3 : $C = 27/2 \text{ F}$, $L_1 = 4/27 \text{ H}$, $L_2 = 64/3 \text{ H}$, $M = 16/9 \text{ H}$, $n = -6$.

Jeżeli impedancja $z_{in}(p)$ nie jest funkcją minimalnej reaktancji, to istnieje dodatkowy stopień swobody przy wyznaczaniu impedancji $w_1(p)$. W pewnych przypadkach może być to pomocne, np. dla uczynienia impedancji $z_{ei}(p)$ funkcjami PR.

5.4. Podsumowanie rozdziału

W niniejszym rozdziale rozważano problemy realizacji wzmacnień napięciowych w układach trójwrotowych oraz w układzie n-wrotowego multipleksa.

W części pierwszej Rozdziału 5 ustalono warunki konieczne i wystarczające realizacji wzmacnień napięciowych w bezstratnym, odwracalnym trójwrotniku o dowolnej strukturze, przy dodatkowym założeniu, że impedancje obciążeń są rezystancjami.

W części drugiej Rozdziału 5 ustalono warunki konieczne i wystarczające realizacji pary wzmacnień napięciowych o jednakowych fazach, w trójwrotniku o dowolnej konfiguracji. Rozpatrzono również realizację pary wzmacnień napięciowych spełniających warunki subiektywnego braku zniekształceń sygnału przy odsłuchu stereofonicznym. W rozważanych zagadnieniach przyjmowano, że obciążenia trójwrotnika są rezystancyjne.

W części trzeciej Rozdziału 5 ustalono warunki konieczne i wystarczające realizacji wzmacnień napięciowych w układzie n-wrotowym o strukturze multipleksa. Przyjęto założenie, że obciążenia multipleksa są częstotliwościowo uzależnione, tzn. obciążeniami są impedancje PR nie będące funkcjami reaktancji.

Otrzymane warunki realizowalności wzmacnień napięciowych zostały przedstawione w postaci czterech twierdzeń, których dowody zamieszczono również w niniejszym rozdziale.

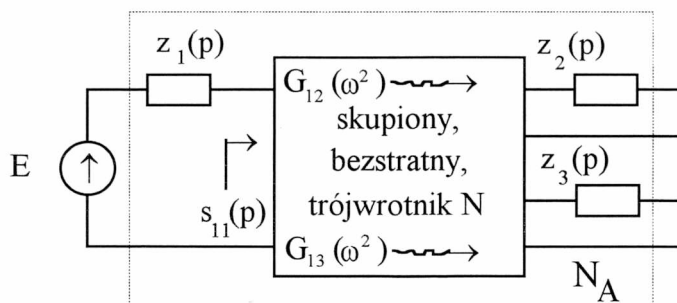
6. WYZNACZANIE MACIERZY ROZPROSZENIA TRÓJWROTOWYCH UKŁADÓW DOPASOWUJĄCYCH

W niniejszym rozdziale podane są metody wyznaczania pewnej klasy macierzy paraunitarnych rzeczywistych ograniczonych $S(p)$ (ang. bounded real BR). Poszukiwana klasa macierzy $S(p)$ charakteryzuje się tym, że zawiera jako podklasę wszystkie macierze rozproszenia, fizycznie realizowalnych, bezstratnych trójwrotników, które obciążone zadanymi niefosterowskimi impedancjami PR (ang. positive real), posiadają wymagane skuteczne wzmacnienia mocy. Wyznaczenie pożądanej klasy macierzy $S(p)$ prowadzi w przypadku ogólnym, do złożonego zagadnienia interpolacji macierzami BR, czyli do tzw. problemu Nevanlinny-Pick'a. Jak dotychczas znane są tylko częściowe rozwiązania wzmiankowanego problemu [43,44,45,83]. Dodatkowym utrudnieniem w konstruowaniu macierzy $S(p)$ jest konieczność interpolacji nie tylko samą macierzą $S(p)$ lecz również macierzami kolejnych pochodnych. W dalszej części Rozdziału 6. rozpatrywane będą macierze paraunitarne $S(p)$ o wymiarach 3×3 .

6.1. Konstrukcja macierzy rozproszenia trójwrotowego układu dopasowującego o dowolnej konfiguracji

Problem dopasowania szerokopasmowego został sformułowany w Rozdziale 3. jako zagadnienie wyznaczenia co najmniej jednej macierzy rozproszenia bezstratnego układu n-wrotowego (tutaj trójwrotowego), który będąc obciążony zadanymi niefosterowskimi impedancjami PR, realizuje założone skuteczne wzmacnienia mocy. Warunki konieczne i wystarczające na to, aby dana wymierna macierz rzeczywista $S(p)$ była macierzą rozproszenia bezstratnego układu n-wrotowego o wymaganych właściwościach, zostały sformułowane w Twierdzeniu 3.2 z Rozdziału 3. Problemem jak dotąd nie w pełni rozwiązany jest wyznaczanie najbardziej ogólnej formy macierzy $S(p)$ w danym zagadnieniu dopasowania, czyli konstrukcji klasy wszystkich wymiernych macierzy rzeczywistych $S(p)$ spełniających postulaty 1)-7) z Rozdziału 3.2.1. Spośród postulatów 1)-7) z Rozdziału 3.2.1. projektant ma wpływ jedynie na postulaty 1), 4), 5). Pozostałe postulaty powinny zostać spełnione przez dane projektowe. Przed przystąpieniem do dalszych rozważań wprowadzone zostaną niezbędne wielkości.

Niech $z_i(p)$ $i=1,2,3$ są danymi niefosterowskimi impedancjami PR, Rys. 6.1. Niech $G_{1i}(\omega^2)$ $i=2,3$ oznaczają wymagane skuteczne wzmacnienia mocy, będące wymiernymi, rzeczywistymi, parzystymi i nieujemnymi funkcjami pulsacji ω .



Rys. 6.1. Schemat trójwrotowego układu dopasowującego. Funkcja BR $s_{11}(p)$ jest współczynnikiem odbicia we wrotach nr. 1. N_A jest pasywnym trójwrotnikiem dołączonym.

Niech funkcja $h_i(p)$ $i=1,2,3$ będzie faktoryzacją części parzystej impedancji $z_i(p)$ $i=1,2,3$:

$$\text{Ev } z_i(p) = \frac{1}{2} [z_i(p) + z_{i*}(p)] = h_i(p)h_{i*}(p) \quad i=1,2,3, \quad (6.1)$$

gdzie czynniki $h_i(p)$ oraz $1/h_{i*}(p)$ są analityczne w obszarze $\text{Re } p > 0$, ponadto $h_i(p)$ jest minimalnego stopnia. Tak przeprowadzona faktoryzacja staje się jednoznaczna z dokładnością do stałej ± 1 . Co więcej, funkcja

$$\frac{h_i(p)}{h_{i*}(p)} = A_i(p)B_i(p) \quad i=1,2,3, \quad (6.2)$$

jest funkcją regularną wszechprzepustową (ang. regular allpass RA), przy czym funkcję $A_i(p)$ typu RA utworzono ze wszystkich biegunów $\text{Ev } z_i(p)$ leżących w obszarze $\text{Re } p > 0$, natomiast funkcję $B_i(p)$, również typu RA, zbudowano ze wszystkich zer $\text{Ev } z_i(p)$ położonych w obszarze $\text{Re } p > 0$. Przypomnijmy postulaty 1)-7) z Rozdziału 3.2.1. definiujące najbardziej ogólną klasę macierzy $S(p)$, ponieważ postulaty te będą wykorzystywane w niniejszym rozdziale.

Postulat 1. Macierz $S(p)$ o wymiarach 3×3 jest wymierną macierzą paraunitarną BR:

$$S(p)S_*(p) = S_*(p)S(p) = \mathbf{1}_3. \quad (6.3)$$

Postulat 2. Zachodzą następujące równości:

$$\rho_{21}(p)\rho_{21*}(p) = G_{12}(-p^2), \quad \rho_{31}(p)\rho_{31*}(p) = G_{13}(-p^2), \quad (6.4)$$

$$\rho_{11}(p)\rho_{11*}(p) = 1 - G_{12}(-p^2) - G_{13}(-p^2). \quad (6.5)$$

Postulat 3. Dla każdego ω spełniona jest nierówność:

$$G_{12}(\omega^2) + G_{13}(\omega^2) \leq 1. \quad (6.6)$$

Postulat 4. Elementy głównej przekątnej macierzy $S(p)$ (współczynniki odbicia) mają postać:

$$s_{ii}(p) = \rho_{ii}(p)B_i(p)\eta_{ii}(p) \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.7)$$

Funkcja BR $\rho_{ii}(p)$ jest minimalnofazową częścią współczynnika odbicia $s_{ii}(p)$, zaś $\eta_{ii}(p)$ jest funkcją RA taką, że $(\eta_{ii}, B_i A_i) = 1 \quad i=1, \dots, n$, co oznacza, że żadne zero funkcji $\eta_{ii}(p)$ nie jest zerem funkcji $B_i(p)$ ani funkcji $A_i(p)$.

Postulat 5. Współczynniki transmisji macierzy $S(p)$ mają postać:

$$s_{ij}(p) = \rho_{ij}(p)B_i(p)B_j(p)\eta_{ij}(p) \quad i \neq j \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (6.8)$$

Funkcja $\rho_{ij}(p)$ jest minimalnofazową częścią współczynnika transmisji $s_{ij}(p)$, natomiast funkcja $\eta_{ij}(p)$ jest funkcją RA.

Postulat 6. Jeżeli w punkcie $p=p_0$, $\text{Re } p_0 > 0$, każda impedancja $z_i(p) \quad i=1, \dots, n$ posiada zero transmisji klasy 1 krotności k_i , to funkcja

$$G_{ij}^{(k)}(-p^2)|_{p=p_0} = 0, \quad k=0,1,2,\dots,k_i+k_j-1, \quad (6.9)$$

będąca kontynuacją analityczną skutecznego wzmocnienia mocy, ma zero krotności co najmniej k_i+k_j . Symbol $f^{(k)}(p)$ oznacza k -tą pochodną względem p funkcji $f(p)$.

Postulat 7. Niech $2k_1, 2k_i$ będą krotnościami zer $\text{Re } z_1(j\omega)$, $\text{Re } z_i(j\omega)$ w punkcie $p=j\omega_0$, w którym impedancje $z_i(p)$, $z_1(p)$ mają zero transmisji klasy 2. lub klasy 3. lub klasy 4. W każdym punkcie $p=j\omega_0$ zachodzi:

a) Jeżeli w punkcie $p=j\omega_0$ impedancja $z_1(p)$ ma zero transmisji klasy 4., natomiast impedancja $z_i(p)$ nie ma zera transmisji w tym punkcie, to dla pulsacji $\omega=\omega_0$ skuteczne wzmocnienia mocy $G_{1i}(\omega^2)$ i $G_{i1}(\omega^2)$ mają zero krotności co najmniej $2(k_1+1)$, gdzie $k_1 \geq 0$.

Jeżeli w punkcie $p=j\omega_0$ impedancja $z_i(p)$ ma zero transmisji klasy 4., natomiast impedancja $z_1(p)$ nie ma zera transmisji w tym punkcie, to dla pulsacji $\omega=\omega_0$ skuteczne wzmocnienia mocy $G_{1i}(\omega^2)$ i $G_{i1}(\omega^2)$ mają zero krotności co najmniej $2(k_i+1)$, gdzie $k_i \geq 0$.

- b) Jeżeli w punkcie $p=j\omega_0$ impedancja $z_1(p)$ ma zero transmisji klasy 4., natomiast impedancja $z_i(p)$ ma zero transmisji klasy 2. lub klasy 3. w tym punkcie, to dla pulsacji $\omega=\omega_0$ skuteczne wzmocnienia mocy $G_{1i}(\omega^2)$ i $G_{i1}(\omega^2)$ osiągają zero krotności co najmniej $2(k_1+k_i)$, gdzie $k_1 \geq 0$ i $k_i > 0$.
 Jeżeli w punkcie $p=j\omega_0$ impedancja $z_i(p)$ ma zero transmisji klasy 4., natomiast impedancja $z_1(p)$ ma zero transmisji klasy 2. lub klasy 3. w tym punkcie, to dla pulsacji $\omega=\omega_0$ skuteczne wzmocnienia mocy $G_{1i}(\omega^2)$ i $G_{i1}(\omega^2)$ mają zero krotności co najmniej $2(k_1+k_i)$, gdzie $k_i \geq 0$ i $k_1 > 0$.
- c) Jeżeli w punkcie $p=j\omega_0$ impedancje $z_1(p)$ i $z_i(p)$ mają zero transmisji klasy 4., to dla pulsacji $\omega=\omega_0$ skuteczne wzmocnienia mocy $G_{1i}(\omega^2)$, $G_{i1}(\omega^2)$ osiągają zero krotności co najmniej $2(k_1+k_i+1)$, gdzie $k_1 \geq 0$ i $k_i \geq 0$.
- d) Jeżeli w punkcie $p=j\omega_0$ impedancja $z_1(p)$ ma zero transmisji klasy 2. lub klasy 3., natomiast impedancja $z_i(p)$ nie ma zera transmisji w tym punkcie, to dla pulsacji $\omega=\omega_0$ skuteczne wzmocnienia mocy $G_{1i}(\omega^2)$ i $G_{i1}(\omega^2)$ mają zero krotności co najmniej $2(k_1+1)$, gdzie $k_1 > 0$.
 Jeżeli w punkcie $p=j\omega_0$ impedancja $z_i(p)$ ma zero transmisji klasy 2. lub klasy 3., natomiast impedancja $z_1(p)$ nie ma zera transmisji w tym punkcie, to dla pulsacji $\omega=\omega_0$ skuteczne wzmocnienia mocy $G_{1i}(\omega^2)$ i $G_{i1}(\omega^2)$ osiągają zero krotności co najmniej $2(k_i+1)$, gdzie $k_i > 0$.
- e) Jeżeli w punkcie $p=j\omega_0$ impedancje $z_1(p)$ i $z_i(p)$ mają zero transmisji klasy 2. lub klasy 3., to dla pulsacji $\omega=\omega_0$ skuteczne wzmocnienia mocy $G_{1i}(\omega^2)$ i $G_{i1}(\omega^2)$ przyjmują wartość zero krotności co najmniej $2(k_1+k_i-1)$, gdzie $k_1 > 0$ i $k_i > 0$.

Funkcje $\rho_{11}(p)$, $\rho_{21}(p)$, $\rho_{31}(p)$, $h_i(p)$, $B_i(p)$, $A_i(p)$ $i=1,2,3$ są jednoznacznie określone z danych projektowych (z dokładnością do stałej ± 1). Funkcje RA $\eta_{ij}(p)$, $\eta_{ii}(p)$ nie są znane na tym etapie projektowania. Dalsze rozważania wymagają założenia, że postulaty 2), 3) opisane równaniami (6.4-6.6) i postulat 7) są spełnione przez dane projektowe. W przeciwnym wypadku nie istnieje macierz $S(p)$ będąca macierzą rozproszenia fizycznie realizowalnego układu dopasowującego, Rys. 6.1.

Rozwiązanie równania macierzowego (6.3), przy założeniu, że dane są funkcje $s_{11}(p)$, $s_{21}(p)$, $s_{31}(p)$ (układ odwracalny) lub funkcje $s_{11}(p)$, $s_{21}(p)$, $s_{31}(p)$, $s_{12}(p)$, $s_{13}(p)$ (układ nieodwracalny) okazało się złożonym problemem. Równanie (6.3) analizowano trzema metodami. Każdą z metod analizy układu (6.3) opisano wraz z uzyskanymi rezultatami w Dodatku 3.

Metoda pierwsza polegała na bezpośrednim rozwiązaniu równań (6.3) poprzez eliminację kolejnych zmiennych. W rezultacie po żmudnych obliczeniach otrzymano równoważny układ równań (D3.28-D3.33) Dodatek 3. Niestety przydatność wzorów (D3.28-D3.33) do dalszej analizy jest praktycznie żadna. Analizując (D3.33) na osi $j\omega$ pod kątem wyznaczenia funkcji $s_{22}(j\omega)$ okazuje się, że z równania (D3.33) można jedynie podać złożony związek pomiędzy $\text{Re } s_{22}(j\omega)$ i $\text{Im } s_{22}(j\omega)$. Tym samym w rozwiązaniu układu równań (6.3) wystąpi dodatkowa funkcja $\text{Ev } s_{22}(p)$ lub $\text{Od } s_{22}(p)$. Jeżeli istnieje potrzeba wprowadzenia dodatkowej funkcji w celu rozwiązania układu równań (6.3), to lepiej jest tak analizować (6.3), aby dodatkowa funkcja posiadała możliwie jak najwięcej znanych projektantowi własności. Funkcją taką mógłby być przykładowo wyznacznik $\det S(p) = \Delta(p)$.

Druga metoda analizy (6.3) wykorzystuje pomysł Belevitcha [4,6], zakładający znajomość wyznacznika $\Delta(p)$, będącego funkcją RA zawierającą wszystkie zera transmisji trójwrotnika dołączonego N_A . Rozwiązanie układu równań (6.3) z pomocą wyznacznika $\Delta(p)$, zamieszczono w Dodatku 3 (D3.50-D3.55). Niestety w problemie dopasowania szerokopasmowego impedancji nie są znane wszystkie zera transmisji trójwrotnika N . Co więcej, nie ma przesłanek jak należy wybierać nieznane zera transmisji, aby elementy macierzy $S(p)$ były analityczne w obszarze $\text{Re } p > 0$ oraz miały postać (6.7,6.8). Sygnalizowane trudności zostały przezwyciężone dopiero w trzecim podejściu do problemu rozwiązania równań (6.3).

W Rozdziale 5.1. na podstawie [4], przeprowadzono już pewną konstrukcję macierzy rozproszenia $S(p)$ o wymiarach 3×3 , wykorzystując metodę realizacji danego współczynnika odbicia $s_{11}(p)$ w układzie o nieminimalnej liczbie wrót. W [4] wykazano, że klasa macierzy $S(p)$

skonstruowana omawianą metodą zawiera jako podklasę wszystkie macierze rozproszenia fizycznie realizowalnych bezstratnych n -wrotników (tutaj trójwrotników) posiadających wymagany współczynnik odbicia $s_{11}(p)$. Przyjmując, że w miejsce współczynnika odbicia $s_{11}(p)$ znane są funkcje $s_{21}(p)$, $s_{31}(p)$, $s_{12}(p)$, $s_{13}(p)$, skonstruowano w Dodatku 3, w oparciu o [4], klasę wszystkich macierzy paraunitarnych $S(p)$ posiadających dane wzmocnienia $s_{21}(p)$, $s_{31}(p)$, $s_{12}(p)$, $s_{13}(p)$. Stosowne wyprowadzenia oraz wyniki końcowe zamieszczono w Dodatku 3, wzory (D3.78-D3.83). Analogiczne do wzmiankowanych rezultaty uzyskano wcześniej w pracach [66,68]. Autor niniejszej rozprawy zmodyfikował konstrukcję macierzy rozproszenia daną w [66,68], zmniejszając liczbę funkcji niezbędnych do wyznaczenia macierzy $S(p)$. Otrzymane wyniki opublikowane zostały później w pracach [53,55]. Przeprowadzona poniżej metoda konstrukcji najbardziej ogólnej formy macierzy rozproszenia $S(p)$, stanowi rozwinięcie rozważań zawartych w [53,55,66,68].

Korzystając z wyprowadzonych w Dodatku 3 zależności (D3.78-D3.83), rozwiązanie układu równań (6.3) ma postać:

$$s_{22} = \frac{1}{\Theta^2} \left(V_0 \rho_{13} \rho_{31} \xi_1 \varphi_1 - s_{11*} \frac{\Theta}{\Theta_*} s_{12} s_{21} \right), \quad (6.10)$$

$$s_{33} = \frac{1}{\Theta^2} \left(V_0 \rho_{12} \rho_{21} \xi_2 \varphi_2 - s_{11*} \frac{\Theta}{\Theta_*} s_{13} s_{31} \right), \quad (6.11)$$

$$s_{23} = \frac{1}{\Theta^2} \left(V_0 \rho_{12} \rho_{31} \xi_1 \varphi_2 + s_{11*} \frac{\Theta}{\Theta_*} s_{13} s_{21} \right), \quad (6.12)$$

$$s_{32} = \frac{1}{\Theta^2} \left(V_0 \rho_{21} \rho_{13} \xi_2 \varphi_1 + s_{11*} \frac{\Theta}{\Theta_*} s_{12} s_{31} \right), \quad (6.13)$$

$$-\frac{s_{21*}}{s_{31*}} \xi_1 = \frac{\rho_{21}}{\rho_{31}} \xi_2, \quad (6.14)$$

$$-\frac{s_{12*}}{s_{13*}} \varphi_1 = \frac{\rho_{12}}{\rho_{13}} \varphi_2. \quad (6.15)$$

Funkcja $\Theta(p)$ jest minimalnofazową faktoryzacją wyrażenia:

$$\Theta(p)\Theta_*(p) = G_{12}(-p^2) + G_{13}(-p^2). \quad (6.16)$$

Funkcja $V_0(p)$ jest dodatkową, nieznaną na tym etapie konstrukcji funkcją wszechprzepustową, która może nie być funkcją regularną, tzn. analityczną w obszarze $\text{Re } p \geq 0$. Funkcje $\xi_1(p)$, $\xi_2(p)$, $\varphi_1(p)$, $\varphi_2(p)$ są pewnymi, również aktualnie nieznanymi funkcjami RA, spełniającymi równania (6.14,6.15). Klasa macierzy rozproszenia $S(p)$, postaci:

$$S(p) = \begin{bmatrix} \rho_{11}(p)B_1(p)\eta_{11}(p) & \rho_{21}(p)B_1(p)B_2(p)\eta_{21}(p) & \rho_{31}(p)B_1(p)B_3(p)\eta_{31}(p) \\ \rho_{12}(p)B_1(p)B_2(p)\eta_{12}(p) & s_{22}(p) & s_{23}(p) \\ \rho_{13}(p)B_1(p)B_3(p)\eta_{13}(p) & s_{32}(p) & s_{33}(p) \end{bmatrix}, \quad (6.17)$$

gdzie współczynniki $s_{22}(p)$, $s_{23}(p)$, $s_{32}(p)$, $s_{33}(p)$ określono w (6.10-6.13), zawiera wszystkie wymierne, rzeczywiste macierze paraunitarne o wymiarach 3×3 spełniające postulat 2), przy czym elementy $s_{11}(p)$, $s_{21}(p)$, $s_{31}(p)$, $s_{12}(p)$, $s_{13}(p)$ są funkcjami BR, spełniającymi ponadto postulaty 4), 5). Dodatkowo na podstawie równania (D3.35) z Dodatku 3, ustalamy:

$$s_{22}s_{33} - s_{23}s_{32} = -s_{11}^* \frac{\Theta}{\Theta^*} V_0 \xi_1 \varphi_1 \frac{s_{31}s_{13}}{\rho_{31}^* \rho_{13}^*} , \quad (6.18)$$

$$\det \mathbf{S} = \Delta = \frac{\Theta}{\Theta^*} V_0 \xi_1 \varphi_1 \frac{s_{31}s_{13}}{\rho_{31}^* \rho_{13}^*} . \quad (6.19)$$

Współczynniki $\rho_{11}(p)$, $\rho_{21}(p)$, $\rho_{31}(p)$, $\rho_{12}(p)$, $\rho_{13}(p)$ jako funkcje BR, mogą zawsze zostać zapisane w formie ilorazu następujących wielomianów:

$$\rho_{21}(p) = \frac{e_1(p)h_{21}(p)}{g(p)} , \quad \rho_{31}(p) = \frac{e_1(p)h_{31}(p)}{g(p)} , \quad (6.20)$$

$$\rho_{12}(p) = \frac{e_2(p)h_{12}(p)}{g(p)} , \quad \rho_{13}(p) = \frac{e_2(p)h_{13}(p)}{g(p)} , \quad (6.21)$$

$$\rho_{11}(p) = \frac{l(p)}{g(p)} . \quad (6.22)$$

Wielomian $g(p)$ jest wielomianem Hurwitza w ścisłym znaczeniu (SH), natomiast wielomiany $e_1(p)$, $e_2(p)$, $h_{12}(p)$, $h_{13}(p)$, $h_{21}(p)$, $h_{31}(p)$, $l(p)$ są wielomianami Hurwitza, przy czym $(e_1, g) = 1$, $(e_2, g) = 1$, $(h_{12}, h_{13}) = 1$, $(h_{21}, h_{31}) = 1$. Zdefiniujmy wielomiany $\gamma_1(p)$, $\gamma_2(p)$ jako wielomiany SH otrzymane przez faktoryzację równań:

$$\gamma_1 \gamma_{1^*} = h_{21} h_{21^*} + h_{31} h_{31^*} , \quad \gamma_2 \gamma_{2^*} = h_{12} h_{12^*} + h_{13} h_{13^*} . \quad (6.23)$$

Minimalnofazowa faktoryzacja $\Theta(p)$ równania (6.16), może zostać przy pomocy wyrażeń (6.20-6.23) zapisana jako:

$$\Theta(p) = \frac{\gamma(p)}{g(p)} , \quad (6.24)$$

gdzie $\gamma(p)$ jest wielomianem Hurwitza, przy czym:

$$\gamma(p) = e_1(p)\gamma_1(p) = e_2(p)\gamma_2(p) . \quad (6.25)$$

Na podstawie (6.5) obliczamy wielomian Hurwitza $l(p)$ przez faktoryzację następującego równania:

$$l(p)l^*(p) = g(p)g^*(p) - \gamma(p)\gamma^*(p) . \quad (6.26)$$

Z określonymi w powyższy sposób wielomianami można przystąpić do następnego etapu wyznaczania najbardziej ogólnej formy macierzy $\mathbf{S}(p)$. Przy pomocy równań (6.20,6.21) i postulatu 5, można rozwikłać równania (6.14,6.15) ze względu na funkcje $\xi_1(p)$, $\xi_2(p)$, $\varphi_1(p)$, $\varphi_2(p)$, w następujący sposób:

$$\xi_1 = \frac{h_{31}^*}{h_{31}} \cdot B_2 \cdot \eta_{21} \cdot \xi_a , \quad (6.27)$$

$$\xi_2 = -\frac{h_{21}^*}{h_{21}} \cdot B_3 \cdot \eta_{31} \cdot \xi_a , \quad (6.28)$$

$$\varphi_1 = \frac{h_{13}^*}{h_{13}} \cdot B_2 \cdot \eta_{12} \cdot \varphi_a , \quad (6.29)$$

$$\varphi_2 = -\frac{h_{12}^*}{h_{12}} \cdot B_3 \cdot \eta_{13} \cdot \varphi_a . \quad (6.30)$$

Funkcje $\xi_a(p)$, $\varphi_a(p)$ są funkcjami wszechprzepustowymi, wybieranymi tak, aby funkcje $\xi_1(p)$, $\xi_2(p)$, $\varphi_1(p)$, $\varphi_2(p)$ pozostawały funkcjami RA. Zauważmy, że funkcje $\xi_1(p)$, $\xi_2(p)$, $\varphi_1(p)$, $\varphi_2(p)$ określone równaniami (6.27-6.30) uwzględniają wszystkie możliwe redukcje zer pomiędzy funkcjami $s_{12}(p)$, $s_{13}(p)$ i funkcjami $s_{21}(p)$, $s_{31}(p)$. Przy pomocy równań (6.27-6.30) przekształcamy równania (6.10-6.13) do następującej postaci:

$$s_{22} = B_2 \hat{s}_{22}, \quad s_{33} = B_3 \hat{s}_{33}, \quad s_{23} = B_2 B_3 \hat{s}_{23}, \quad s_{32} = B_2 B_3 \hat{s}_{32}, \quad (6.31)$$

przy czym:

$$\hat{s}_{22} = \frac{-1}{\gamma_1 \gamma_2} B_2 \Psi \eta_{12} \eta_{21} (\rho_{11} h_{21} h_{12} - \Psi_* V \cdot h_{31*} h_{13*}), \quad (6.32)$$

$$\hat{s}_{33} = \frac{-1}{\gamma_1 \gamma_2} B_3 \Psi \eta_{13} \eta_{31} (\rho_{11} h_{31} h_{13} - \Psi_* V \cdot h_{21*} h_{12*}), \quad (6.33)$$

$$\hat{s}_{23} = \frac{-1}{\gamma_1 \gamma_2} \Psi \eta_{13} \eta_{21} (\rho_{11} h_{21} h_{13} + \Psi_* V \cdot h_{31*} h_{12*}), \quad (6.34)$$

$$\hat{s}_{32} = \frac{-1}{\gamma_1 \gamma_2} \Psi \eta_{12} \eta_{31} (\rho_{11} h_{31} h_{12} + \Psi_* V \cdot h_{21*} h_{13*}). \quad (6.35)$$

Ponadto:

$$V = V_0 \xi_a \varphi_a \quad (6.36)$$

jest dowolną funkcją wszechprzepustową, oraz:

$$\Psi = \Psi_0 \cdot \frac{\gamma}{\gamma_*}, \quad \Psi_0 = \frac{1}{l} \cdot B_1 \cdot \eta_{11*}. \quad (6.37)$$

Dodatkowo przy użyciu funkcji (6.31-6.37) przekształcamy równanie (6.18) do postaci:

$$s_{22} s_{33} - s_{23} s_{32} = -\rho_{11} \Psi_0 \frac{\gamma_*}{\gamma} V \eta_{21} \eta_{31} \eta_{12} \eta_{13} B_2^2 B_3^2 \frac{e_1 e_2}{e_{1*} e_{2*}}. \quad (6.38)$$

Macierze $S(p)$ postaci (6.17) z elementami $s_{22}(p)$, $s_{23}(p)$, $s_{32}(p)$, $s_{33}(p)$ danymi wzorami (3.31) spełniają postulaty 1, 4, 5 wtedy i tylko wtedy jeżeli funkcje (6.32-6.35) są analityczne w obszarze $\text{Re } p > 0$ oraz:

$$(\hat{s}_{22}, B_2) = 1, \quad (\hat{s}_{33}, B_3) = 1, \quad (6.39)$$

co oznacza, że żadne zero B_2 nie jest zerem $\hat{s}_{22}$, ani że żadne zero B_3 nie jest zerem $\hat{s}_{33}$. Jeżeli dodatkowo impedancje $z_i(p)$ $i=1,2,3$ i skuteczne wzmocnienia mocy $G_{li}(\omega^2)$ $i=2,3$ spełniają postulaty 2, 3, 6, 7, wówczas macierze $S(p)$ postaci (6.17) tworzą poszukiwaną najbardziej ogólną formę macierzy rozproszenia w danym problemie dopasowania szerokopasmowego. W dalszej części niniejszego rozdziału podany zostanie sposób doboru funkcji V , η_{21} , η_{31} , η_{11} , aby spełnić warunki dane w (6.39) dla trójwrotnika odwracalnego. Metodę analizy podaną niżej można zastosować również do układu nieodwracalnego lecz wówczas rośnie liczba koniecznych do rozważenia przypadków. W rezultacie analiza układu nieodwracalnego staje się dosyć złożona, tracąc przy tym na przejrzystości rozważań. W trójwrotniku odwracalnym macierz $S(p)$ jest symetryczna, zatem

$$\eta_{12} = \eta_{21}, \quad \eta_{13} = \eta_{31}, \quad e_2 = e_1, \quad \gamma_2 = \gamma_1. \quad (6.40)$$

Równania (6.32-6.35) przy założeniach (6.40), przyjmą formę:

$$\hat{s}_{22} = \frac{-1}{\gamma_1^2} B_2 \Psi \eta_{21}^2 (\rho_{11} h_{21}^2 - \Psi_* V \cdot h_{31*}^2) , \quad (6.41)$$

$$\hat{s}_{33} = \frac{-1}{\gamma_1^2} B_3 \Psi \eta_{31}^2 (\rho_{11} h_{31}^2 - \Psi_* V \cdot h_{21*}^2) , \quad (6.42)$$

$$\hat{s}_{23} = \hat{s}_{32} = \frac{-1}{\gamma_1^2} \Psi \eta_{31} \eta_{21} (\rho_{11} h_{21} h_{31} + \Psi_* V \cdot h_{31*} h_{21*}) . \quad (6.43)$$

Ponadto wyrażenie (6.38) uprości się do postaci:

$$s_{22}s_{33} - s_{23}s_{32} = -\rho_{11} \Psi_0 \frac{\gamma_*}{\gamma} V \eta_{21}^2 \eta_{31}^2 B_2^2 B_3^2 \frac{e_1^2}{e_{1*}^2} . \quad (6.44)$$

Z postulatu 4 wnioskujemy, że w każdym wspólnym zerze funkcji B_2 i B_3 krotności odpowiednio k_2 i k_3 , prawa strona równania (6.44) ma zero krotności dokładnie k_2+k_3 . Dodatkowo na podstawie równań (6.41-6.43) można wyznaczyć pomocniczą zależność:

$$\hat{c}_{23} h_{21} h_{31} = \hat{c}_{22} h_{31}^2 + \Psi_* V \cdot \gamma_1 \gamma_{1*} h_{31} h_{31*} = \hat{c}_{33} h_{21}^2 + \Psi_* V \cdot \gamma_1 \gamma_{1*} h_{21} h_{21*} , \quad (6.45)$$

gdzie:

$$\hat{c}_{22} = \rho_{11} h_{21}^2 - \Psi_* V \cdot h_{31*}^2 , \quad \hat{c}_{33} = \rho_{11} h_{31}^2 + \Psi_* V \cdot h_{21*}^2 , \quad \hat{c}_{23} = \rho_{11} h_{21} h_{31} - \Psi_* V \cdot h_{21*} h_{31*} . \quad (6.46)$$

Niech w punkcie $p=p_0$, $\text{Re } p_0 > 0$, funkcje $B_i(p)$ $i=2,3$ mają wspólne zero krotności k_i . Dla celów analizy macierzy $S(p)$ w punkcie $p=p_0$, wprowadzamy następujące oznaczenia:

funkcja	dopuszczalny typ osobliwości w punkcie $p=p_0$	krotność zera /bieguna/ w punkcie $p=p_0$
e_1 / e_{1*}	biegun	k_{e1}
γ_1 / γ_{1*}	biegun	$k_{\gamma1}$
l_* / l	zero	k
h_{21*}	zero	k_{210}
h_{31*}	zero	k_{310}
Ψ	zero lub biegun	k_{Ψ}
Ψ_0	zero lub biegun	$k_{\Psi0}$
V	zero lub biegun	k_V
$\Psi_* V$	zero lub biegun	k_r
η_{11}	zero	k_{11}
η_{21}	zero	k_{21}
η_{31}	zero	k_{31}
$\hat{c}_{22}$	zero	k_{c22}
$\hat{c}_{33}$	zero	k_{c33}
$\hat{c}_{23}$	zero	k_{c23}

Tabela. 6.1. Oznaczenia krotności zer lub biegunów rozważanych funkcji we wspólnych zerach transmisji klasy 1 obciążeń $z_i(p)$ $i=2,3$.

1) Załóżmy, że wielomiany h_{21*} i h_{31*} są różne od zera w punkcie $p=p_0$.

Przypuśćmy, że funkcja $\Psi_* V$ ma zero lub biegun krotności k_r w punkcie $p=p_0$. Z (6.46) wynika, że funkcje $\hat{c}_{22}$, $\hat{c}_{33}$, $\hat{c}_{23}$ są w punkcie $p=p_0$ różne od zera lub mają biegun krotności k_r . Z warunków (6.39) wnioskujemy, że zachodzą wówczas następujące zależności:

$$k_2 + 2k_{21} = k_{\Psi} + k_r , \quad (6.47)$$

$$k_3 + 2k_{31} = k_{\Psi} + k_r , \quad (6.48)$$

$$k_{21} + k_{31} \geq k_{\Psi} + k_r . \quad (6.49)$$

Dodając stronami równania (6.47,6.48) i wstawiając do (6.49) otrzymujemy sprzeczną nierówność:

$$k_2 + k_3 \leq 0 . \quad (6.50)$$

Wnioskujemy, że w rozpatrywanym przypadku funkcja $\Psi \cdot V$ jest analityczna i różna od zera w punkcie $p=p_0$. Ponadto, aby ograniczenia (6.39) mogły zostać spełnione, funkcja $\Psi(p)$ musi mieć biegun w punkcie $p=p_0$. Uwzględniając (6.39) oraz (6.44) ustalamy następujące zależności:

$$k_2 + 2k_{21} + k_{e22} + k_{\Psi 0} = k_{e1} + k_{\gamma 1} , \quad (6.51)$$

$$k_3 + 2k_{31} + k_{e33} + k_{\Psi 0} = k_{e1} + k_{\gamma 1} , \quad (6.52)$$

$$k_{21} + k_{31} + k_{e23} + k_{\Psi 0} \geq k_{e1} + k_{\gamma 1} , \quad (6.53)$$

$$2k_{\Psi 0} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_2 + k_3 = 2k_{e1} . \quad (6.54)$$

Z (6.54) wynika, że suma k_2+k_3 jest parzysta, czyli:

$$k_2 + k_3 = 2k_0 , \quad (6.55)$$

co oznacza, że:

$$k_{\Psi 0} + k_{21} + k_{31} + k_0 = k_{e1} . \quad (6.56)$$

Wstawiając (6.56) do (6.51-6.54), otrzymujemy:

$$k_2 + k_{21} + k_{e22} = k_{31} + k_0 + k_{\gamma 1} , \quad (6.57)$$

$$k_3 + k_{31} + k_{e33} = k_{21} + k_0 + k_{\gamma 1} , \quad (6.58)$$

$$k_{e23} \geq k_0 + k_{\gamma 1} . \quad (6.59)$$

Ponieważ $k_0 > 0$, zatem z (6.59) wynika, że $k_{e23} > k_{\gamma 1}$. Tym samym na podstawie (6.45) wnioskujemy, że $k_{e22} = k_{e33} = k_{\gamma 1}$. Uwzględniając zależności $k_{e22} = k_{e33} = k_{\gamma 1}$, ograniczenia (6.51-6.54) stają się równoważne warunkom:

$$k_{e1} - k_{\Psi 0} \geq \max(k_2, k_3) , \quad (6.60)$$

$$\text{suma } k_2 + k_3 \text{ jest parzysta} , \quad (6.61)$$

$$\text{suma } k_{e1} - k_{\Psi 0} - k_i \text{ jest parzysta, } i=2,3 , \quad (6.62)$$

$$k_{i1} = 0.5(k_{e1} - k_{\Psi 0} - k_i) , \quad i=2,3 , \quad (6.63)$$

$$k_{e23} \geq 0.5(k_2 + k_3) + k_{\gamma 1} , \quad (6.64)$$

$$k_v = k_{e1} - k_{\Psi 0} . \quad (6.65)$$

Komentarz: jeżeli w punkcie $p=p_0$ funkcja $B_1(p)$ jest różna od zera, wówczas aby spełnić warunki (6.60-6.65) należy dobrać liczbę $k_{\Psi 0} = k - k_{11}$ przez ustalenie odpowiedniej krotności zera funkcji RA $\eta_{11}(p)$, patrz (6.37), w punkcie $p=p_0$. Jeżeli w punkcie $p=p_0$ funkcja $B_1(p)$ jest równa zero

krotności k_1 , wówczas z (6.37) wynika, że $k_{\Psi_0} = k_1$ i warunki (6.60-6.62) muszą zostać spełnione przez dane projektowe.

2) Załóżmy, że wielomian h_{21*} jest różny od zera w punkcie $p=p_0$, natomiast wielomian h_{31*} ma zero krotności k_{310} w punkcie $p=p_0$. Z (6.23) wnioskujemy, że wielomian $\gamma_{1*}(p)$ jest różny od zera w punkcie $p=p_0$.

Przypuśćmy, że funkcja $\Psi*V$ jest analityczna w punkcie $p=p_0$. Z (6.46) wynika, że funkcje $\hat{c}_{22}$, $\hat{c}_{23}$ są w punkcie $p=p_0$ analityczne i różne od zera, natomiast funkcja $\hat{c}_{33}$ może mieć zero krotności $k_{e33} \geq 0$ w punkcie $p=p_0$. Z warunków (6.39) wnioskujemy, że zachodzą wówczas następujące zależności:

$$k_2 + 2k_{21} = k_{\Psi} , \quad (6.66)$$

$$k_3 + 2k_{31} + k_{e33} = k_{\Psi} , \quad (6.67)$$

$$k_{21} + k_{31} \geq k_{\Psi} . \quad (6.68)$$

Dodając stronami równania (6.66,6.67) i wstawiając do (6.68) otrzymujemy sprzeczną nierówność:

$$k_2 + k_3 + k_{e33} \leq 0 . \quad (6.69)$$

Przypuśćmy, że funkcja $\Psi*V$ ma biegun krotności $k_r > 2k_{310}$ w punkcie $p=p_0$. Z (6.46) wynika, że funkcja $\hat{c}_{22}$ ma biegun krotności $k_r - 2k_{310}$ w punkcie $p=p_0$, funkcja $\hat{c}_{23}$ ma biegun krotności $k_r - k_{310}$ w punkcie $p=p_0$, natomiast funkcja $\hat{c}_{33}$ ma biegun krotności k_r w punkcie $p=p_0$. Z warunków (6.39) wnioskujemy, że zachodzą wówczas następujące zależności:

$$k_2 + 2k_{21} + 2k_{310} = k_{\Psi} + k_r , \quad (6.70)$$

$$k_3 + 2k_{31} = k_{\Psi} + k_r , \quad (6.71)$$

$$k_{21} + k_{31} + k_{310} \geq k_{\Psi} + k_r . \quad (6.72)$$

Dodając stronami równania (6.70,6.71) i wstawiając do (6.72) otrzymujemy sprzeczną nierówność:

$$k_2 + k_3 \leq 0 . \quad (6.73)$$

Przypuśćmy, że funkcja $\Psi*V$ ma biegun krotności $k_r = 2k_{310}$ w punkcie $p=p_0$. Z (6.46) wynika, że funkcja $\hat{c}_{23}$ ma biegun krotności k_{310} w punkcie $p=p_0$, funkcja $\hat{c}_{33}$ ma biegun krotności $2k_{310}$ w punkcie $p=p_0$, natomiast funkcja $\hat{c}_{22}$ pozostaje analityczna i może mieć zero krotności $k_{e22} \geq 0$ w punkcie $p=p_0$. Z warunków (6.39) wnioskujemy, że zachodzą wówczas następujące zależności:

$$k_2 + 2k_{21} + k_{e22} = k_{\Psi} , \quad (6.74)$$

$$k_3 + 2k_{31} = k_{\Psi} + 2k_{310} , \quad (6.75)$$

$$k_{21} + k_{31} \geq k_{\Psi} + k_{310} . \quad (6.76)$$

Dodając stronami równania (6.74,6.75) i wstawiając do (6.76) otrzymujemy sprzeczną nierówność:

$$k_2 + k_3 + k_{e22} \leq 0 . \quad (6.77)$$

Przypuśćmy, że funkcja $\Psi*V$ ma biegun krotności $k_{310} < k_r < 2k_{310}$ w punkcie $p=p_0$. Z (6.46) wynika, że funkcja $\hat{c}_{22}$ jest analityczna i różna od zera w punkcie $p=p_0$. Aby zachodził warunek $(\hat{s}_{22}, B_2) = 1$, funkcja $\Psi(p)$ musi mieć w punkcie $p=p_0$ biegun krotności $k_{e1} - k_{\Psi_0}$. Ponadto z (6.46) wnioskujemy, że funkcja $\hat{c}_{33}$ ma biegun krotności k_r w punkcie $p=p_0$ oraz funkcja $\hat{c}_{23}$ ma biegun krotności $k_r - k_{310}$ w punkcie $p=p_0$. Uwzględniając (6.39) oraz (6.44) ustalamy następujące zależności:

$$k_2 + 2k_{21} + k_{\Psi 0} = k_{e1} , \quad (6.78)$$

$$k_3 + 2k_{31} + k_{\Psi 0} = k_{e1} + k_r , \quad (6.79)$$

$$k_{21} + k_{31} + k_{\Psi 0} + k_{310} \geq k_{e1} + k_r , \quad (6.80)$$

$$2k_{\Psi 0} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_2 + k_3 - k_r = 2k_{e1} . \quad (6.81)$$

Z (6.81) wynika, że suma $k_2 + k_3 - k_r$ jest parzysta, czyli:

$$k_2 + k_3 - k_r = 2k_0 , \quad (6.82)$$

co oznacza, że:

$$k_{\Psi 0} + k_{21} + k_{31} + k_0 = k_{e1} . \quad (6.83)$$

Wstawiając (6.83) do (6.78-6.80), otrzymujemy:

$$k_2 + k_{21} = k_{31} + k_0 , \quad (6.84)$$

$$k_3 + k_{31} = k_{21} + k_0 + k_r , \quad (6.85)$$

$$k_{301} \geq k_0 + k_r . \quad (6.86)$$

Po uwzględnieniu założenia $k_{310} < k_r < 2k_{310}$, ograniczenia (6.83-6.86) stają się równoważne warunkom:

$$k_{310} > k_2 + k_3 , \quad (6.87)$$

$$2k_{310} - k_2 - k_3 \geq k_r > k_{310} , \quad (6.88)$$

$$k_{e1} - k_{\Psi 0} \geq k_2 , \quad (6.89)$$

$$\text{suma } k_r - k_2 - k_3 \text{ jest parzysta} , \quad (6.90)$$

$$\text{suma } k_{e1} - k_{\Psi 0} - k_2 \text{ jest parzysta} , \quad (6.91)$$

$$k_{21} = 0.5(k_{e1} - k_{\Psi 0} - k_2) , \quad (6.92)$$

$$k_{31} = 0.5(k_{e1} - k_{\Psi 0} - k_3 + k_r) , \quad (6.93)$$

$$k_v = k_r + k_{e1} - k_{\Psi 0} . \quad (6.94)$$

Przypuśćmy, że funkcja Ψ^*V ma biegun krotności $0 < k_r < k_{310}$ w punkcie $p=p_0$. Z (6.46) wynika, że funkcje $\hat{c}_{22}$ i $\hat{c}_{23}$ są analityczne i różne od zera w punkcie $p=p_0$, natomiast funkcja $\hat{c}_{33}$ ma biegun krotności k_r w punkcie $p=p_0$. Aby zachodził warunek $(\hat{s}_{22}, B_2) = 1$, funkcja $\Psi(p)$ musi mieć w punkcie $p=p_0$ biegun krotności $k_{e1} - k_{\Psi 0}$. Uwzględniając (6.39) oraz (6.44) ustalamy następujące zależności:

$$k_2 + 2k_{21} + k_{\Psi 0} = k_{e1} , \quad (6.95)$$

$$k_3 + 2k_{31} + k_{\Psi 0} = k_{e1} + k_r , \quad (6.96)$$

$$k_{21} + k_{31} + k_{\Psi 0} \geq k_{e1} , \quad (6.97)$$

$$2k_{\Psi 0} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_2 + k_3 - k_r = 2k_{e1} . \quad (6.98)$$

Z (6.98) wynika, że suma $k_2+k_3-k_r$ jest parzysta, czyli:

$$k_2 + k_3 - k_r = 2k_0 \quad , \quad (6.99)$$

co oznacza, że:

$$k_{\Psi 0} + k_{21} + k_{31} + k_0 = k_{e1} \quad . \quad (6.100)$$

Wstawiając (6.100) do (6.95-6.97), otrzymujemy:

$$k_2 + k_{21} = k_{31} + k_0 \quad , \quad (6.101)$$

$$k_3 + k_{31} = k_{21} + k_0 + k_r \quad , \quad (6.102)$$

$$0 \geq k_0 \quad . \quad (6.103)$$

Po uwzględnieniu założenia $0 < k_r < k_{310}$, ograniczenia (6.100-6.103) stają się równoważne warunkom:

$$k_{310} > k_2 + k_3 \quad , \quad (6.104)$$

$$k_{310} > k_r \geq k_2 + k_3 \quad , \quad (6.105)$$

$$k_{e1} - k_{\Psi 0} \geq k_2 \quad , \quad (6.106)$$

$$\text{suma } k_r - k_2 - k_3 \text{ jest parzysta} \quad , \quad (6.107)$$

$$\text{suma } k_{e1} - k_{\Psi 0} - k_2 \text{ jest parzysta} \quad , \quad (6.108)$$

$$k_{21} = 0.5(k_{e1} - k_{\Psi 0} - k_2) \quad , \quad (6.109)$$

$$k_{31} = 0.5(k_{e1} - k_{\Psi 0} - k_3 + k_r) \quad , \quad (6.110)$$

$$k_v = k_r + k_{e1} - k_{\Psi 0} \quad . \quad (6.111)$$

Porównując ograniczenia (6.87-6.94) i (6.104-6.111) staje się oczywiste, że w obu rozpatrywanych przypadkach, zależności (6.87-6.94) i (6.104-6.111) można zapisać wspólnie, jako:

$$k_{310} \geq 0.5(k_r + k_2 + k_3) > k_2 + k_3 \quad , \quad (6.112)$$

$$k_r \neq k_{310} \quad , \quad (6.113)$$

$$\text{suma } k_r + k_2 + k_3 \text{ jest parzysta} \quad , \quad (6.114)$$

$$k_{e1} - k_{\Psi 0} \geq k_2 \quad , \quad (6.115)$$

$$\text{suma } k_{e1} - k_{\Psi 0} - k_2 \text{ jest parzysta} \quad , \quad (6.116)$$

$$k_{21} = 0.5(k_{e1} - k_{\Psi 0} - k_2) \quad , \quad (6.117)$$

$$k_{31} = 0.5(k_{e1} - k_{\Psi 0} - k_3 + k_r) \quad , \quad (6.118)$$

$$k_v = k_r + k_{e1} - k_{\Psi 0} \quad . \quad (6.119)$$

Komentarz: jeżeli w punkcie $p=p_0$ funkcja $B_1(p)$ jest różna od zera, wówczas aby spełnić warunki (6.115-6.116) należy dobrać liczbę $k_{\Psi 0} = k - k_{11}$ przez ustalenie odpowiedniej krotności zera funkcji

RA $\eta_{11}(p)$, patrz (6.37), w punkcie $p=p_0$. Jeżeli w punkcie $p=p_0$ funkcja $B_1(p)$ jest równa zero krotności k_1 , wówczas z (6.37) wynika, że $k_{\Psi_0} = k_1$ i warunki (6.115-6.116) muszą zostać spełnione przez dane projektowe.

Przypuśćmy, że funkcja $\Psi * V$ ma biegun krotności $k_r = k_{310}$ w punkcie $p=p_0$. Z (6.46) wynika, że funkcja $\hat{c}_{22}$ jest analityczna i różna od zera w punkcie $p=p_0$, funkcja $\hat{c}_{33}$ ma biegun krotności k_{310} w punkcie $p=p_0$, natomiast funkcja $\hat{c}_{23}$ jest analityczna i może być równa zero krotności k_{c23} w punkcie $p=p_0$. Aby zachodził warunek $(\hat{s}_{22}, B_2) = 1$, funkcja $\Psi(p)$ musi mieć w punkcie $p=p_0$ biegun krotności $k_{e1} - k_{\Psi_0}$. Uwzględniając (6.39) oraz (6.44) ustalamy następujące zależności:

$$k_2 + 2k_{21} + k_{\Psi_0} = k_{e1} , \quad (6.120)$$

$$k_3 + 2k_{31} + k_{\Psi_0} = k_{e1} + k_{310} , \quad (6.121)$$

$$k_{21} + k_{31} + k_{c23} + k_{\Psi_0} \geq k_{e1} , \quad (6.122)$$

$$2k_{\Psi_0} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_2 + k_3 - k_{310} = 2k_{e1} . \quad (6.123)$$

Z (6.123) wynika, że suma $k_2 + k_3 - k_{310}$ jest parzysta, czyli:

$$k_2 + k_3 - k_{310} = 2k_0 , \quad (6.124)$$

co oznacza, że:

$$k_{\Psi_0} + k_{21} + k_{31} + k_0 = k_{e1} . \quad (6.125)$$

Wstawiając (6.125) do (6.120-6.122), otrzymujemy:

$$k_2 + k_{21} = k_{31} + k_0 , \quad (6.126)$$

$$k_3 + k_{31} = k_{21} + k_0 + k_{310} , \quad (6.127)$$

$$k_{c23} \geq k_0 . \quad (6.128)$$

Po uwzględnieniu założenia $k_r = k_{310}$, ograniczenia (6.125-6.128) stają się równoważne warunkom:

$$k_{e1} - k_{\Psi_0} \geq \max(k_2, k_3 - k_{310}) , \quad (6.129)$$

$$\text{suma } k_2 + k_3 - k_{310} \text{ jest parzysta} , \quad (6.130)$$

$$\text{suma } k_{e1} - k_{\Psi_0} - k_2 \text{ jest parzysta} , \quad (6.131)$$

$$k_{21} = 0.5(k_{e1} - k_{\Psi_0} - k_2) , \quad (6.132)$$

$$k_{31} = 0.5(k_{e1} - k_{\Psi_0} - k_3 + k_{310}) , \quad (6.133)$$

$$k_{c23} \geq 0.5(k_2 + k_3 - k_{310}) , \quad (6.134)$$

$$k_v = k_{310} + k_{e1} - k_{\Psi_0} . \quad (6.135)$$

Komentarz: jeżeli w punkcie $p=p_0$ funkcja $B_1(p)$ jest różna od zera, wówczas aby spełnić warunki (6.129,6.131) należy dobrać liczbę $k_{\Psi_0} = k - k_{11}$ przez ustalenie odpowiedniej krotności zera funkcji RA $\eta_{11}(p)$, patrz (6.37), w punkcie $p=p_0$. Jeżeli w punkcie $p=p_0$ funkcja $B_1(p)$ jest równa zero krotności k_1 , wówczas z (6.37) wynika, że $k_{\Psi_0} = k_1$ i warunki (6.129,6.131) muszą zostać spełnione przez dane projektowe.

3) Przypadek, kiedy wielomian h_{31*} jest różny od zera w punkcie $p=p_0$, natomiast wielomian h_{21*} ma zero krotności k_{210} w punkcie $p=p_0$ jest analogiczny do rozpatrywanego wyżej przypadku 2.

W pozostałych punktach obszaru $\text{Re } p > 0$ analityczność macierzy $S(p)$ wraz ze spełnieniem warunków (6.39) można łatwo osiągnąć poprzez wybór odpowiednio wysokich krotności zer funkcji $\eta_{21}(p)$ i $\eta_{31}(p)$. Zauważmy ponadto, że punkty braku analityczności w obszarze $\text{Re } p > 0$ macierzy $S(p)$ pochodzące od biegunów funkcji $V(p)$ nie będących wspólnymi zerami funkcji $B_i(p)$ $i=2,3$, można łatwo zredukować, również posługując się wyborem odpowiednio wysokich krotności zer funkcji $\eta_{21}(p)$ i $\eta_{31}(p)$.

Wyniki przeprowadzonej analizy zostały zebrane w formie Wniosku 6.1.

Wniosek 6.1.

Symetryczna macierz $S(p)$ postaci (6.17), gdzie elementy $s_{22}(p)$, $s_{33}(p)$, $s_{23}(p)$ zostały określone wzorami (6.31, 6.41-6.44) spełnia postulaty 1, 4, 5 wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym wspólnym zerze transmisji $p=p_0$ klasy 1 krotności k_i niefosterowskiej impedancji PR $z_i(p)$ $i=2,3$, spełnione są następujące warunki (znaczenie użytych symboli opisano w Tabeli 6.1).

1. Przypadek, gdy w punkcie $p=p_0$ wielomiany $h_{21*}(p)$ i $h_{31*}(p)$ są różne od zera, wówczas:

$$k_{e1} - k_{\Psi 0} \geq \max(k_2, k_3) , \quad (6.136)$$

$$k_2, k_3, k_{e1} - k_{\Psi 0} \text{ są jednocześnie parzyste lub nieparzyste} , \quad (6.137)$$

$$k_{i1} = 0.5(k_{e1} - k_{\Psi 0} - k_i) , \quad i=2,3 , \quad (6.138)$$

$$k_{e23} \geq 0.5(k_2 + k_3) + k_{\gamma 1} , \quad (6.139)$$

$$k_v = k_{e1} - k_{\Psi 0} , \quad (6.140)$$

przy czym:

$$k_{\Psi 0} = \begin{cases} k - k_{11} & \text{jeżeli } B_1(p_0) \text{ jest różne od zera} \\ k_1 & \text{jeżeli } B_1(p_0) \text{ jest równe zero krotności } k_1 \end{cases} . \quad (6.141)$$

2. Przypadek, gdy w punkcie $p=p_0$ wielomian $h_{j1*}(p)$ jest równy zero krotności k_{j10} $j=2,3$, wówczas:

$$k_i, k_j + k_r, k_{e1} - k_{\Psi 0} \text{ są jednocześnie parzyste lub nieparzyste} , \quad i \neq j \quad i,j=2,3 , \quad (6.142)$$

$$k_{i1} = 0.5(k_{e1} - k_{\Psi 0} - k_i) , \quad (6.143)$$

$$k_{j1} = 0.5(k_{e1} - k_{\Psi 0} - k_j + k_r) , \quad (6.144)$$

$$k_v = k_r + k_{e1} - k_{\Psi 0} . \quad (6.145)$$

przy czym:

$$k_{\Psi 0} = \begin{cases} k - k_{11} & \text{jeżeli } B_1(p_0) \text{ jest różne od zera} \\ k_1 & \text{jeżeli } B_1(p_0) \text{ jest równe zero krotności } k_1 \end{cases} , \quad (6.146)$$

2a)

$$k_{e1} - k_{\Psi 0} \geq k_1 , \quad (6.147)$$

$$k_{j10} \geq 0.5(k_r + k_2 + k_3) > k_2 + k_3 , \quad k_r \neq k_{j10} , \quad (6.148)$$

lub

2b)

$$k_{e1} - k_{p0} \geq \max(k_i, k_j - k_{j10}) , \quad k_r = k_{j10} . \quad (6.149)$$

Przechodzimy do syntezy odwracalnego trójwrotnika N, Rys. 6.1. Niech dane są niefosterowskie impedancje PR $z_i(p)$ $i=1,2,3$ oraz skuteczne wzmocnienia mocy $G_{12}(\omega^2)$, $G_{13}(\omega^2)$, spełniające postulaty 3, 6, 7. Przy pomocy równań (6.1,6.2) wyznaczamy funkcje RA $A_i(p)$, $B_i(p)$ $i=1,2,3$ oraz korzystając z zależności (6.4) obliczamy funkcje minimalnofazowe $\rho_{21}(p)$, $\rho_{31}(p)$. Następnie z równań (6.20) wyznaczamy wielomiany $e_i(p)$, $h_{21}(p)$, $h_{31}(p)$, $g(p)$. Z równania (6.23) obliczamy wielomian $\gamma_1(p)$, oraz z równania (6.26) wyznaczamy wielomian $l(p)$. Przy pomocy obliczonych funkcji tworzymy macierz $S(p)$ postaci (6.17), gdzie elementy $s_{22}(p)$, $s_{33}(p)$, $s_{23}(p)$ zostały określone wzorami (6.31,6.41-6.44). Następnie korzystając z Wniosku 6.1 ustalamy część zer funkcji RA $\eta_{11}(p)$, $\eta_{21}(p)$, $\eta_{31}(p)$ oraz funkcji wszechprzepustowej $V(p)$. Otrzymana w powyższy sposób klasa macierzy paraunitarnych $S(p)$ spełnia postulaty 4, 5. Aby uczynić macierz $S(p)$ macierzą BR, konieczne jest już tylko zapewnienie analityczności macierzy $S(p)$ wraz ze spełnieniem warunków (6.39) w pozostałych punktach obszaru $\text{Re } p > 0$, co można łatwo osiągnąć poprzez wybór odpowiednio wysokich krotności zer funkcji $\eta_{21}(p)$ i $\eta_{31}(p)$. Zauważmy ponadto, że punkty braku analityczności w obszarze $\text{Re } p > 0$ macierzy $S(p)$ pochodzące od biegunów funkcji $V(p)$ nie będących wspólnymi zerami funkcji $B_i(p)$ $i=2,3$, można łatwo zredukować, również posługując się wyborem odpowiednio wysokich krotności zer funkcji $\eta_{21}(p)$ i $\eta_{31}(p)$. Tym sposobem skonstruowana została klasa macierzy $S(p)$ spełniająca postulaty 1-7, co oznacza, że klasa macierzy $S(p)$ zawiera jako podklasę macierze rozproszenia wszystkich fizycznie realizowalnych w danym zagadnieniu dopasowania szerokopasmowego, bezstratnych i odwracalnych trójwrotników. Pozostałe zera funkcji $\eta_{11}(p)$, $\eta_{21}(p)$, $\eta_{31}(p)$ nie są wciąż określone na tym etapie projektowania. Funkcje $\eta_{11}(p)$, $\eta_{21}(p)$, $\eta_{31}(p)$ zostaną ostatecznie ustalone po zastosowaniu Twierdzenia 3.2 w stosunku do skonstruowanej w powyższy sposób klasy macierzy $S(p)$. Jeżeli teza Twierdzenia 3.2 jest spełniona, wówczas dany problem dopasowania posiada rozwiązanie. W przeciwnym przypadku mamy pewność, że nie istnieje rozwiązanie tak postawionego problemu dopasowania szerokopasmowego. Tym samym zaproponowana w niniejszym rozdziale metoda dopasowania szerokopasmowego impedancji, polegająca na wyznaczeniu najbardziej ogólnej formy macierzy rozproszenia $S(p)$, pozwala jednoznacznie rozstrzygnąć istnienie rozwiązania danego zagadnienia dopasowania.

Zaprezentowana metoda jest w aktualnie jedyną metodą rozwiązania problemu dopasowania szerokopasmowego impedancji w układach trójwrotowych w przypadku ogólnym, tzn. bez określania konfiguracji układowej trójwrotnika. Przedstawiona metoda konstrukcji macierzy $S(p)$ jest zdaniem autora najważniejszym zadaniem zrealizowanym w ramach niniejszej rozprawy, w części dotyczącej dopasowania szerokopasmowego impedancji przy użyciu bezstratnych trójwrotników.

Dla ilustracji omawianego zagadnienia zostanie przedstawiony przykład obliczeniowy.

Niech dane będą niefosterowskie impedancje PR:

$$z_i(p) = 2 \frac{p+2}{2p+1} \quad i=1,2,3, \quad (6.150)$$

oraz skuteczne wzmocnienia mocy:

$$G_{12}(\omega^2) = G_{13}(\omega^2) = \frac{(\omega^2 + 1)^2}{2(\omega^4 + 14\omega^2 + 1)} . \quad (6.151)$$

Należy znaleźć bezstratny, odwracalny trójwrotnik N, Rys. 6.1., który obciążony impedancjami (6.150) realizuje wzmocnienia mocy (6.151).

Na wstępie sprawdzamy, że nierówność (6.6) jest spełniona dla wzmocnień (6.151). Następnie wyznaczamy przy użyciu równań (6,1,6.2) wymagane funkcje:

$$h_i(p) = \pm\sqrt{2} \frac{p-1}{2p+1}, \quad B_i(p) = \frac{p-1}{p+1}, \quad A_i(p) = \frac{2p-1}{2p+1} \quad i=1,2,3. \quad (6.152)$$

Na podstawie (6.152) stwierdzamy, że impedancje $z_i(p)$ mają tylko jednokrotne zero transmisji klasy 1 w punkcie $p_0=1$. W rozważanym przypadku postulat 7 jest zatem spełniony. Sprawdzamy, że zachodzi również postulat 6. Ponadto dla impedancji (6.150) teza Twierdzenia 3.2 sprowadza się do spełnienia następujących warunków:

$$A_i(p_0) = \rho_{ii}(p_0) \eta_{ii}(p_0) \quad i=1,2,3. \quad (6.153)$$

Zgodnie z (6.4) faktoryzujemy wzmocnienia $G_{12}(-p^2)$, $G_{13}(-p^2)$, otrzymując minimalnofazowe współczynniki transmisji $\rho_{21}(p)$, $\rho_{31}(p)$:

$$\rho_{21}(p) = \rho_{31}(p) = \frac{(p+1)^2}{\sqrt{2}(p^2+4p+1)}. \quad (6.154)$$

Z równań (6.20,6.23,6.26), wyznaczamy wielomiany:

$$e_1(p) = (p+1)^2 / \sqrt{2}, \quad h_{21}(p) = h_{31}(p) = 1, \quad \gamma_1(p) = \sqrt{2}, \quad (6.155)$$

$$l(p) = 2\sqrt{3}p, \quad g(p) = p^2 + 4p + 1, \quad (6.156)$$

oraz:

$$\Theta(p) = \frac{(p+1)^2}{p^2+4p+1}. \quad (6.157)$$

Przy pomocy tak obliczonych funkcji tworzymy symetryczną macierz $S(p)$ postaci (6.17), gdzie elementy $s_{22}(p)$, $s_{33}(p)$, $s_{23}(p)$ zostały określone wzorami (6.31,6.41-6.44). W rezultacie otrzymujemy:

$$\Psi(p) = -\frac{p+1}{p-1} \cdot \eta_{11*}(p), \quad (6.158)$$

$$V(p) = \frac{p+1}{p-1} \cdot V_1(p), \quad (6.159)$$

$$s_{11}(p) = \frac{2\sqrt{3}p}{p^2+4p+1} \cdot \frac{p-1}{p+1} \cdot \eta_{11}(p), \quad (6.160)$$

$$s_{21}(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(p-1)^2}{p^2+4p+1} \cdot \eta_{21}(p), \quad (6.161)$$

$$s_{31}(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(p-1)^2}{p^2+4p+1} \cdot \eta_{31}(p), \quad (6.162)$$

$$s_{22}(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{p-1}{p+1} \cdot \eta_{11*}(p) \eta_{21}^2(p) \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}p}{p^2+4p+1} + \eta_{11}(p) V_1(p) \right), \quad (6.163)$$

$$s_{33}(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{p-1}{p+1} \cdot \eta_{11*}(p) \eta_{31}^2(p) \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}p}{p^2+4p+1} + \eta_{11}(p) V_1(p) \right), \quad (6.164)$$

$$s_{23}(p) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{p-1}{p+1} \right)^2 \cdot \eta_{11*}(p) \eta_{21}(p) \eta_{31}(p) \cdot \frac{p+1}{p-1} \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}p}{p^2+4p+1} - \eta_{11}(p) V_1(p) \right), \quad (6.165)$$

przy czym $V_1(p)$ jest dowolną funkcją wszechprzepustową analityczną i różną od zera w punkcie $p=1$. Warunki zawarte we Wniosku 6.1 (punkt 1) sprowadzają się do spełnienia następującego warunku interpolacyjnego:

$$V_1(p_0) = \rho_{11}(p_0) / \eta_{11}(p_0) \quad (6.166)$$

Równanie (6.166) przy użyciu zależności (6.153) staje się równoważne następującemu wyrażeniu:

$$V_1(p_0) = \rho_{11}(p_0) \cdot \frac{\rho_{11}(p_0)}{\eta_{11}(p_0)} = 1 \quad (6.167)$$

Wnioskujemy, że $V_1(p) \equiv 1$. Dla $V_1(p) \equiv 1$ warunki (6.153) przy uwzględnieniu równań (6.160, 6.163, 164) implikują:

$$\eta_{21}(p_0) = \eta_{31}(p_0) = \pm 1/\sqrt{3}, \quad \text{oraz} \quad \eta_{11}(p_0) = 1/\sqrt{3} \quad (6.168)$$

Można zatem przyjąć: $\eta_{21}(p) = \eta_{31}(p) = \eta_{11}(p)$. Niech funkcja $\eta_{11}(p)$ będzie funkcją RA pierwszego stopnia, wówczas:

$$\eta_{11}(p_0) = \frac{p-\alpha}{p+\alpha} \Big|_{p=p_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (6.169)$$

czyli $\alpha = 2 - \sqrt{3}$. Ostatecznie macierz rozproszenia $\mathbf{S}(p)$ oraz macierz admitancyjna trójwrotnika dołączonego $\mathbf{N}_A \mathbf{Y}_A(p)$ (wzór 3.16) przyjmują postać:

$$\mathbf{S}(p) = \frac{1}{2(p^2+4p+1)} \cdot \frac{p-1}{p+1} \cdot \frac{p-\alpha}{p+\alpha} \cdot \begin{bmatrix} 4\sqrt{3}p & \sqrt{2}(p-1)^2 & \sqrt{2}(p-1)^2 \\ \sqrt{2}(p-1)^2 & p^2+4\sqrt{3}p-1 & -(p-1)^2 \\ \sqrt{2}(p-1)^2 & -(p-1)^2 & p^2+4\sqrt{3}p-1 \end{bmatrix}, \quad (6.170)$$

$$\mathbf{Y}_A(p) = \frac{2p+1}{16(p^2+4p+1)(p+\alpha)} \cdot \begin{bmatrix} 2[2p^2+(6\alpha-1)p+\alpha] & -\sqrt{2}(p-\alpha)(2p+1) & -\sqrt{2}(p-\alpha)(2p+1) \\ -\sqrt{2}(p-\alpha)(2p+1) & 2p^2+(14\alpha-3)p+3\alpha & (p-\alpha)(2p+1) \\ -\sqrt{2}(p-\alpha)(2p+1) & (p-\alpha)(2p+1) & 2p^2+(14\alpha-3)p+3\alpha \end{bmatrix}. \quad (6.171)$$

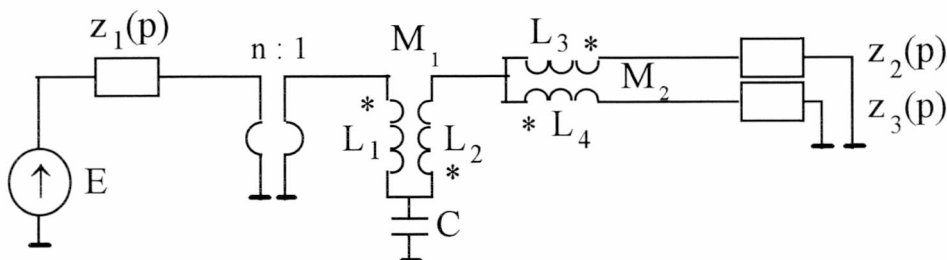
W rozpatrywanym przykładzie istnieje również macierz impedancyjna $\mathbf{Z}_N(p)$ bezstratnego trójwrotnika N. Macierz $\mathbf{Z}_N(p)$ obliczamy z równania (3.18), otrzymując:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(p) &= \frac{1}{p} \cdot \begin{bmatrix} L \cdot p^2 + 1 & (L \cdot p^2 - 1)/\sqrt{2} & (L \cdot p^2 - 1)/\sqrt{2} \\ (L \cdot p^2 - 1)/\sqrt{2} & (3L \cdot p^2 + 1)/2 & (L \cdot p^2 - 1)/2 \\ (L \cdot p^2 - 1)/\sqrt{2} & (L \cdot p^2 - 1)/2 & (3L \cdot p^2 + 1)/2 \end{bmatrix} = \\ &= L \cdot p \cdot \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 & -1 \\ \sqrt{2} & -1 & 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{C \cdot p} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= L \cdot p \cdot \mathbf{T}_\infty^T \mathbf{T}_\infty + \frac{1}{C \cdot p} \cdot \mathbf{T}_0^T \mathbf{T}_0, \end{aligned} \quad (6.172)$$

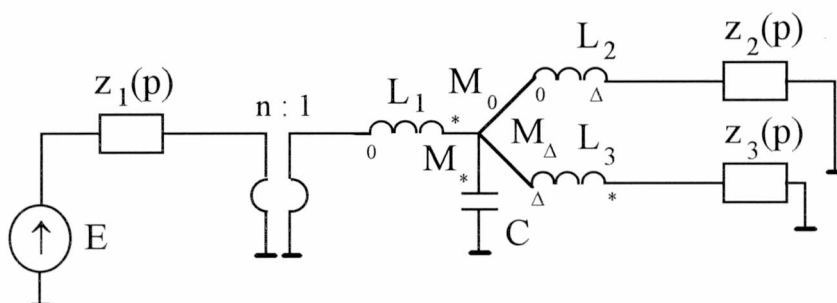
przy czym:

$$L = (7 + 4\sqrt{3})/2, \quad C = 2, \quad \mathbf{T}_\infty = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_0 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.173)$$

Strukturę trójwrotnika N wyznaczono przez realizację macierzy $\mathbf{Z}_N(p)$ metodą daną w [40]. Dwie alternatywne konfiguracje układowe trójwrotnika N zaprezentowano na Rys. 6.2 a), b).



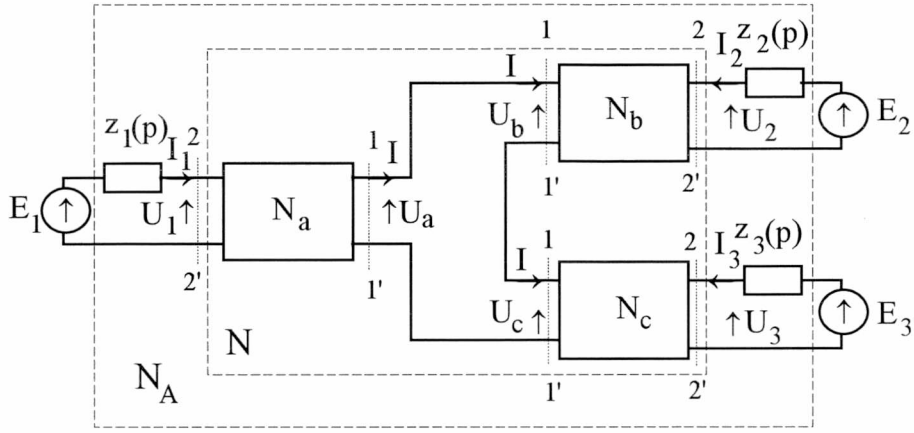
Rys. 6.2 a). Realizacja przykładu obliczeniowego. Wartości elementów wynoszą:
 $L_1 = L_2 = M_1 = 0.5L_0$, $L_3 = L_4 = M_2 = L_0$, $C = 2 \text{ F}$, $L_0 = 7 + 4\sqrt{3} \text{ H}$, $n = -\sqrt{2}$.



Rys. 6.2 b). Alternatywna realizacja trójwrotnika N. Wartości elementów wynoszą:
 $L_1 = 0.5L_0$, $L_2 = L_3 = 1.5L_0$, $M_0 = M_\Delta = M_* = -0.5L_0$, $C = 2 \text{ F}$, $L_0 = 7 + 4\sqrt{3} \text{ H}$, $n = -\sqrt{2}$.

6.2. Konstrukcja macierzy rozproszenia trójwrotnika złożonego z trzech czwórników połączonych w 'gwiazdę'

Konstrukcja macierzy rozproszenia przeprowadzona w Rozdziale 6.1 znajduje przeważnie zastosowanie przy rozpatrywaniu różnych aspektów problemu dopasowania szerokopasmowego na gruncie teoretycznym. Klasa macierzy $\mathbf{S}(p)$ otrzymana w poprzednim rozdziale jest jednak mało przydatna dla realizacji układowych. Zdecydowanie bardziej praktyczne układy dopasowujące można otrzymać ograniczając strukturę trójwrotnika N, Rys. 6.1 do wybranych konfiguracji. Rozważmy dla celów dopasowania szerokopasmowego konstrukcję klasy macierzy rozproszenia $\mathbf{S}(p)$ bezstratnego trójwrotnika o strukturze jak na Rys. 6.3. Impedancje $z_i(p)$ $i=1,2,3$ są jak poprzednio niefosterowskimi impedancjami PR. Poszukiwana klasa macierzy $\mathbf{S}(p)$ dla układów jak na Rys. 6.3, powinna oczywiście spełniać postulaty 1)-7) z Rozdziału 6.1.



Rys. 6.3. Układ trzech czwórników połączonych w "gwiazdę".

Przeprowadzimy krótką analizę powyższego układu. Czwórniki N_a , N_b , N_c opisane macierzami $\mathbf{Z}_x = [z_{xij}(p)]$ $x=a,b,c$, $i,j=1,2$ są układami skupionymi i bezstratnymi, $\mathbf{Z}(p) = \text{diag}[z_i(p)]$ $i=1,2,3$ jest macierzą zadanych niefosterowskich PR impedancji obciążeń, $\mathbf{Z}_n(p) = [z_{nij}(p)]$ $i,j=1,2,3$ jest macierzą skupionego, bezstratnego trójwrotnika N oraz $\mathbf{Y}_A(p) = [y_{Aij}(p)]$ $i,j=1,2,3$ jest macierzą trójwrotnika dołączonego N_A . Ponadto macierz $\mathbf{S}(p) = [s_{ij}(p)]$ $i,j=1,2,3$ jest macierzą rozproszenia trójwrotnika N , znormalizowaną względem macierzy $\mathbf{Z}(p)$. Korzystając z podstawowych zależności:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_a(p) \begin{pmatrix} -I(p) \\ I_1(p) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} U_a(p) \\ E_1(p) - I_1(p)z_1(p) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Z}_b(p) \begin{pmatrix} I(p) \\ I_2(p) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} U_b(p) \\ E_2(p) - I_2(p)z_2(p) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Z}_c(p) \begin{pmatrix} I(p) \\ I_3(p) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} U_c(p) \\ E_3(p) - I_3(p)z_3(p) \end{pmatrix}, \\ U_a(p) &= U_b(p) + U_c(p), \end{aligned} \quad (6.174)$$

w odniesieniu do układu z Rys. 6.3 oraz korzystając z definicji macierzy admitancyjnej, wyznaczamy następujące zależności:

$$y_{A11}(p) = \frac{1}{z_a(p)} - \frac{z_b(p)z_c(p)z_{a12}(p)z_{a21}(p)}{z_a(p) \cdot \Delta(p)}, \quad (6.175)$$

$$y_{A22}(p) = \frac{1}{z_b(p)} - \frac{z_a(p)z_c(p)z_{b12}(p)z_{b21}(p)}{z_b(p) \cdot \Delta(p)}, \quad (6.176)$$

$$y_{A33}(p) = \frac{1}{z_c(p)} - \frac{z_a(p)z_b(p)z_{c12}(p)z_{c21}(p)}{z_c(p) \cdot \Delta(p)}, \quad (6.177)$$

$$y_{A21}(p) = \frac{z_c(p)z_{a12}(p)z_{b21}(p)}{\Delta(p)}, \quad (6.178)$$

$$y_{A12}(p) = \frac{z_c(p)z_{b12}(p)z_{a21}(p)}{\Delta(p)}, \quad (6.179)$$

$$y_{A31}(p) = \frac{z_b(p)z_{a12}(p)z_{c21}(p)}{\Delta(p)}, \quad (6.180)$$

$$y_{A13}(p) = \frac{z_b(p)z_{c12}(p)z_{a21}(p)}{\Delta(p)} , \quad (6.181)$$

$$y_{A32}(p) = -\frac{z_a(p)z_{b12}(p)z_{c21}(p)}{\Delta(p)} , \quad (6.182)$$

$$y_{A23}(p) = -\frac{z_a(p)z_{c12}(p)z_{b21}(p)}{\Delta(p)} , \quad (6.183)$$

gdzie

$$z_a(p) = z_1(p) + z_{a22}(p) , \quad z_b(p) = z_2(p) + z_{b22}(p) , \quad z_c(p) = z_3(p) + z_{c22}(p) , \quad (6.184)$$

$$\Delta(p) = z_a(p)z_b(p)z_{c12}(p)z_{c21}(p) + z_a(p)z_c(p)z_{b12}(p)z_{b21}(p) + z_b(p)z_c(p)z_{a12}(p)z_{a21}(p) - \\ - z_a(p)z_b(p)z_c(p)(z_{a11}(p) + z_{b11}(p) + z_{c11}(p)) . \quad (6.185)$$

Z przekształcenia równań (6.175,6.178-6.183) wynikają następujące związki:

$$y_{A32}(p) \left(y_{A11} - \frac{1}{z_1(p) + z_{a22}(p)} \right) = y_{A12}(p)y_{A31}(p) , \quad (6.186)$$

$$y_{A23}(p) \left(y_{A11} - \frac{1}{z_1(p) + z_{a22}(p)} \right) = y_{A13}(p)y_{A21}(p) . \quad (6.187)$$

Równania (6.186,6.187) pozostają prawdziwe niezależnie od tego czy istnieje macierz $\mathbf{Z}_n(p)$, ponieważ macierz $\mathbf{Y}_A(p)$ jest zawsze dobrze określona [14,80]. Korzystając z równań (3.15,3.16) z Rozdziału 3.1.2., wyrażamy zależności (6.186,6.187) przez elementy macierzy rozproszenia $\mathbf{S}(p)$ trójwrotnika N z Rys. 6.3, otrzymując:

$$s_{23}(p)\varphi(p) = -s_{21}(p)s_{13}(p) , \quad (6.188)$$

$$s_{32}(p)\varphi(p) = -s_{12}(p)s_{31}(p) , \quad (6.189)$$

gdzie

$$\varphi(p) = \frac{h_1(p)}{h_{1*}(p)} V_t(p) - s_{11}(p) , \quad (6.190)$$

$$V_t(p) = \frac{z_{a22}(p) - z_{1*}(p)}{z_{a22}(p) + z_1(p)} . \quad (6.191)$$

Funkcje $h_i(p)$, $A_i(p)$, $B_i(p)$ $i=1,2,3$ zdefiniowano w (6.1,6.2), natomiast funkcja $z_{a22}(p)$ jest pewną funkcją reaktancji. Dla przeprowadzenia dalszej analizy układu z Rys. 6.3 konieczne jest odwołanie się do równań (D3.50-D3.55) wyprowadzonych w Dodatku 3. Wstawiając wyznaczone z równań (6.188,6.189) funkcje $s_{23}(p)$, $s_{32}(p)$ do równań (D3.52,D3.53), przy jednoczesnym wykorzystaniu zależności (D3.54,D3.55), otrzymujemy:

$$s_{21}(p)s_{21*}(p) = s_{12}(p)s_{12*}(p) , \quad (6.192)$$

$$s_{31}(p)s_{31*}(p) = s_{13}(p)s_{13*}(p) . \quad (6.193)$$

Ponadto przy użyciu (6.188) można wyznaczyć z (D3.52) wyznacznik $\Delta(p)$ macierzy $\mathbf{S}(p)$, który po wstawieniu do równań (D3.50,D3.51) umożliwia wyznaczenie następujących zależności:

$$s_{22}(p) = \frac{s_{21}(p)}{s_{12*}(p)} \frac{h_1(p)}{h_{1*}(p)} V_t(p) \frac{\varphi_*(p)}{\varphi(p)} - \frac{s_{12}(p)s_{21}(p)}{\varphi(p)} =$$

$$= \frac{s_{21}(p)}{s_{12*}(p)} \left[\frac{s_{31}(p)s_{31*}(p)}{\varphi(p)} - s_{11*}(p) \right] , \quad (6.194)$$

$$s_{33}(p) = \frac{s_{31}(p)}{s_{13*}(p)} \frac{h_1(p)}{h_{1*}(p)} V_t(p) \frac{\varphi_*(p)}{\varphi(p)} - \frac{s_{13}(p)s_{31}(p)}{\varphi(p)} =$$

$$= \frac{s_{31}(p)}{s_{13*}(p)} \left[\frac{s_{21}(p)s_{21*}(p)}{\varphi(p)} - s_{11*}(p) \right] . \quad (6.195)$$

Równania (D3.4,D3.10) z Dodatku 3 przy wykorzystaniu (6.193) pozwalają ustalić ponadto:

$$s_{23}(p)s_{23*}(p) = s_{32}(p)s_{32*}(p) . \quad (6.196)$$

Rozpatrzmy własności funkcji $V_t(p)$, (6.191). Ponieważ $z_{a22}(p)$ jest funkcją reaktancji, zatem $V_t(p)V_{t*}(p) = 1$, co oznacza, że $V_t(p)$ jest funkcją wszechprzepustową. Ponadto bieguny $V_t(p)$ w obszarze $\text{Re } p > 0$ są dokładnie biegunami $Ez z_1(p)$ w obszarze $\text{Re } p > 0$, czyli zerami funkcji RA $A_1(p)$. Co więcej:

$$V_t(p) = \frac{z_{a22}(p) + z_1(p) - 2Ev z_1(p)}{z_{a22}(p) + z_1(p)} = 1 - \frac{2Ev z_1(p)}{z_{a22}(p) + z_1(p)} . \quad (6.197)$$

Wnioskujemy, że w każdym zerze transmisji $p=p_0$ krotności k_1 impedancji $z_1(p)$, funkcja $V_t(p_0)=1$ oraz $V_t^{(n)}(p)|_{p=p_0} = 0$ $n=1,2,\dots,k_1-1$, gdzie $V_t^{(n)}(p)$ oznacza n -tą pochodną funkcji $V_t(p)$, (pojęcie zer transmisji obciążen wprowadzono w Rozdziale 3.1.4, wzór (3.29)). Na podstawie przeprowadzonej analizy możemy ustalić także własności funkcji $\varphi(p)$, wzór (6.190). Na podstawie równań (6.1,6.2,6.197) wnioskujemy, że funkcja $\varphi(p)$ jest analityczna w obszarze $\text{Re } p \geq 0$. Jeżeli w punkcie $p=j\omega_0$ funkcja $\varphi(p)$ ma zero krotności k_φ , wówczas $\left| \frac{h_1}{h_{1*}} V_t \right|_{p=j\omega_0} = 1$ oraz $|s_{11}|_{p=j\omega_0} = 1$, zatem

$1 - s_{11}s_{11*}|_{p=j\omega_0} = 0$. W konsekwencji funkcje $s_{21}(p)$, $s_{31}(p)$ mają zero w punkcie $p=j\omega_0$ krotności odpowiednio k_{210} , k_{310} , przy czym $k_\varphi = \min\{k_{210}, k_{310}\}$. Ponadto także funkcje $s_{12}(p)$, $s_{13}(p)$ mają zero w punkcie $p=j\omega_0$ krotności odpowiednio k_{120} , k_{130} , przy czym $k_\varphi = \min\{k_{120}, k_{130}\}$. Z ograniczeń Youli z Rozdziału 3.1.4 nałożonych na współczynnik odbicia $s_{11}(p)$ wynika, że funkcja:

$$\frac{2h_1^2(p)}{\frac{h_1(p)}{h_{1*}(p)} - s_{11}(p)} \quad (6.198)$$

jest funkcją PR, tym samym mianownik (6.198) ma postać:

$$\frac{h_1(p)}{h_{1*}(p)} - s_{11}(p) = B_1^2(p)\Psi_1(p) , \quad (6.199)$$

gdzie $\Psi_1(p)$ jest funkcją minimalnofazową. Ponieważ w każdym zerze transmisji $p=p_0$ krotności k_1 impedancji $z_1(p)$, funkcja $V_t(p_0)=1$ oraz $V_t^{(n)}(p)|_{p=p_0} = 0$ $n=1,2,\dots,k_1-1$, tak więc funkcja $\varphi(p)$ ma w punkcie $p=p_0$ zero krotności $2k_1$. Reasumując wnioskujemy, że funkcje

$$\frac{s_{21}s_{13}}{\varphi} , \quad \frac{s_{12}s_{31}}{\varphi} , \quad \frac{s_{21}s_{21}}{\varphi} , \quad \frac{s_{31}s_{31}}{\varphi} \quad (6.200)$$

są analityczne na osi $j\omega$, oraz są analityczne w każdym zerze transmisji klasy 1 impedancji $z_1(p)$ dla dowolnie wybranej funkcji reaktancji $z_{a22}(p)$. Ponadto z przeprowadzonych rozważań wynika, że funkcja $\varphi(p)$ jest analityczna w obszarze $\text{Re } p \geq 0$. Wykorzystując równania (6.188, 6.189, 6.194, 6.195) ustalamy:

$$\begin{aligned} s_{22}s_{33} - s_{23}s_{32} &= -s_{11*}V_t \frac{h_1}{h_{1*}} \cdot \frac{\varphi_*}{\varphi} \cdot \frac{s_{12}s_{31}}{s_{21*}s_{13*}} = \\ &= -\rho_{11} \frac{l_*}{l} \eta_{11*} B_{1*} V_t \frac{h_1}{h_{1*}} \cdot \frac{\varphi_*}{\varphi} \cdot \frac{h_{21}h_{31}}{h_{21*}h_{31*}} \cdot \left(\frac{e_1}{e_{1*}} \right)^2 (B_2 B_3)^2 \eta_{12} \eta_{13} \eta_{21} \eta_{31} . \end{aligned} \quad (6.201)$$

We wspólnym zerze transmisji $p=p_0$ klasy 1 impedancji $z_i(p)$ $i=1,2,3$ wyrażenie $-\rho_{11} \frac{l_*}{l} \eta_{11*} B_{1*} V_t \frac{h_1}{h_{1*}} \cdot \frac{\varphi_*}{\varphi}$ jest analityczne i różne od zera, zatem uwzględniając (6.194, 6.195, 6.201) można ustalić następujące zależności (oznaczenia krotności zer odpowiednich funkcji w punkcie $p=p_0$ podano w Tabeli 6.1):

$$\begin{aligned} k_{e1} + k_{210} &= k_1 + k_a , \quad k_a \geq k_2 , \\ k_{e1} + k_{310} &= k_1 + k_b , \quad k_b \geq k_3 , \\ k_{12} + k_{21} &= k_a - k_2 , \\ k_{13} + k_{31} &= k_b - k_3 . \end{aligned} \quad (6.202)$$

W przypadku, gdy impedancje $z_2(p)$ i $z_3(p)$ mają w punkcie $p=p_0$ wspólne zero transmisji klasy 1, natomiast impedancja $z_1(p)$ nie ma tam zera transmisji, dobieramy tak funkcje $\eta_{11}(p)$ oraz $z_{22a}(p)$, aby iloczyn $-\rho_{11} \frac{l_*}{l} \eta_{11*} B_{1*} V_t \frac{h_1}{h_{1*}} \cdot \frac{\varphi_*}{\varphi}$ był analityczny i różny od zera w punkcie $p=p_0$. Krotności zer pozostałych funkcji przyjmujemy analogicznie jak we wzorach (6.202). Tym sposobem konstrukcja macierzy rozproszenia trójwrotnika w układzie trzech czwórników połączonych w 'gwiazdę' została zakończona.

W praktyce prawie zawsze klasa macierzy $S(p)$ rozważana w niniejszym rozdziale zawiera co najmniej jedną macierz rozproszenia, fizycznie realizowalnego trójwrotnika, dla danego problemu dopasowania szerokopasmowego impedancji. W przeciwnym przypadku aby ostatecznie rozstrzygnąć, czy dane zagadnienie dopasowania posiada rozwiązanie, konieczne jest skonstruowanie najbardziej ogólnej formy macierzy $S(p)$ w oparciu o metodę przedstawioną w poprzednim rozdziale.

Czasami jednak trójwrotnik o strukturze pokazanej na Rys. 6.3 jest jednak nadal zbyt złożony dla realizacji układowych. Rozważania prowadzone w niniejszym rozdziale pozostaną obowiązujące jeżeli wprowadzimy pewne dodatkowe założenie odnośnie układu z Rys. 6.3, upraszczające konfigurację trójwrotnika. Zakładamy, że czwórnik N_a jest trywialny, tzn. składa się z pary przewodników. Dla przyjętego założenia reaktancja $z_{a22}(p) \equiv \infty$, zatem $V_t(p) \equiv 1$. W rezultacie funkcja $\varphi(p)$ uprości się do postaci:

$$\varphi(p) = \frac{h_1(p)}{h_{1*}(p)} - s_{11}(p) . \quad (6.203)$$

Pozostałe równania pozostaną niezmiennione. Układ z Rys. 6.3. zredukowany zostanie do układu szeregowego dupleksa. W przypadku dupleksa, funkcja $\varphi(p)$ jest regularna i nie posiada w obszarze $\text{Re } p \geq 0$ innych zer niż zera funkcji $B_1(p)$ podwojonej krotności, ponieważ fizycznie realizowalny współczynnik odbicia $s_{11}(p)$ spełnia ograniczenia Youli w zerach transmisji impedancji $z_1(p)$. Zastosowanie bezstratnego dupleksa dla potrzeb dopasowania szerokopasmowego lub do celów realizacji wzmocnień napięciowych omówione zostanie w następnym rozdziale.

6.3. Wykorzystanie bezstratnego dipleksera do rozwiązywania problemów transmisji sygnałów

Trójwrotnik o strukturze szeregowego (równoległego) dipleksera jest niewątpliwie układem najbardziej przydatnym do praktycznych zastosowań spośród wszystkich dostępnych struktur bezstratnych trójwrotników. Użyciem dipleksera do przeprowadzania wymaganej filtracji sygnałów zajmowało się wielu autorów [5,6,8,26,39,82]. W cytowanych pracach do wyznaczania koniecznych dla celów syntezy funkcji niezbędna było odwołanie się do procedur numerycznych. Jedynie w pracy [82] ustalono pewne analityczne zależności pomiędzy wielomianami tworzącymi macierz rozproszenia dipleksera. Również prace [19,71,72] dotyczące dopasowania szerokopasmowego impedancji w układzie dipleksera, wymagały zastosowania obliczeń numerycznych dla wyznaczenia poszukiwanych współczynników odbicia. Zastosowanie dipleksera do przeprowadzenia filtracji sygnału oraz do rozwiązywania zagadnień dopasowania szerokopasmowego było także tematem prac [53,56,58,59,61] autora niniejszej rozprawy.

Konstrukcja najbardziej ogólnej formy macierzy rozproszenia układu o strukturze dipleksera w danym problemie dopasowania szerokopasmowego, wynika z rozważań zawartych w Rozdziale 6.2. Stosując oznaczenia identyczne z oznaczeniami używanymi w poprzednim rozdziale, poszukiwane elementy macierzy rozproszenia $S(p)$ układu dopasowującego w konfiguracji dipleksera, można zapisać w następującej formie:

$$s_{23}(p) = -s_{21}(p)s_{13}(p) / \varphi(p) , \quad (6.204)$$

$$s_{32}(p) = -s_{12}(p)s_{31}(p) / \varphi(p) , \quad (6.205)$$

$$s_{22}(p) = \frac{s_{21}(p)}{s_{12*}(p)} \cdot \frac{h_1(p)}{h_{1*}(p)} \cdot \frac{\varphi_*(p)}{\varphi(p)} - \frac{s_{12}(p)s_{21}(p)}{\varphi(p)} , \quad (6.206)$$

$$s_{33}(p) = \frac{s_{31}(p)}{s_{13*}(p)} \cdot \frac{h_1(p)}{h_{1*}(p)} \cdot \frac{\varphi_*(p)}{\varphi(p)} - \frac{s_{13}(p)s_{31}(p)}{\varphi(p)} , \quad (6.207)$$

gdzie funkcje $h_i(p)$ $i=1,2,3$ określono w (6.1) oraz:

$$\varphi(p) = \frac{h_1(p)}{h_{1*}(p)} - s_{11}(p) . \quad (6.208)$$

Ponadto:

$$s_{21}(p)s_{21*}(p) = s_{12}(p)s_{12*}(p) , \quad (6.209)$$

$$s_{31}(p)s_{31*}(p) = s_{13}(p)s_{13*}(p) , \quad (6.210)$$

$$s_{23}(p)s_{23*}(p) = s_{32}(p)s_{32*}(p) . \quad (6.211)$$

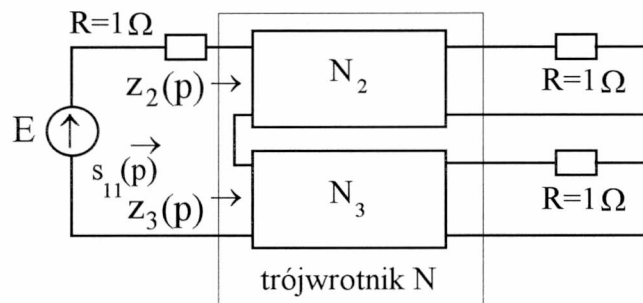
Funkcja $\varphi(p)$ spełnia ograniczenia Youli w zerach transmisji impedancji $z_1(p)$, zatem w fizycznie realizowalnym układzie funkcję $\varphi(p)$ zawsze można przedstawić w postaci:

$$\frac{h_1(p)}{h_{1*}(p)} - s_{11}(p) = B_1^2(p)\Psi_1(p) , \quad (6.212)$$

gdzie $\Psi_1(p)$ jest funkcją minimalnofazową, natomiast funkcję RA $B_1(p)$ zdefiniowano w (6.2). Wymaganą klasę macierzy $S(p)$ konstruuje się w oparciu o metodę podaną w Rozdziale 6.2. W sytuacjach praktycznych, zazwyczaj funkcje $B_i(p)$ $i=1,2,3$ nie posiadają wspólnych zer, a najczęściej

impedancje obciążeń $z_i(p)$ $i=1,2,3$ mają zera transmisji położone tylko na osi $j\omega$, tzn. $B_i(p) \equiv 1$, $i=1,2,3$. W omawianych przypadkach jedynym ograniczeniem nakładanym na konstruowaną klasę macierzy $S(p)$ jest wymaganie zachowania analityczności w obszarze $\text{Re } p > 0$ przez elementy macierzy $S(p)$. Analityczność macierzy $S(p)$ na osi $j\omega$ zapewni spełnienie przez tę klasę macierzy postulatów 6) z Rozdziału 3.2.1. Jak widać stosunkowo złożone warunki z Rozdziału 6.1. dotyczące konstrukcji macierzy rozproszenia, zostały w rozważanym przypadku zredukowane do zapewnienia regularności macierzy $S(p)$.

Rozważmy teraz zastosowanie trójwrotnika w konfiguracji dipleksera do realizacji wzmocnień napięciowych lub do przeprowadzenia wymaganej filtracji sygnału. Zakładamy, że obciążeniami bezstratnego dipleksera są jednostkowe rezystory, Rys. 6.4. Dodatkowo ze względów praktycznych przyjmujemy, że diplekser N , Rys. 6.4 jest odwracalny.



Rys. 6.4. Filtr trójwrotnowy o strukturze dipleksera, gdzie N_2, N_3 są odwracalnymi i bezstratnymi czwórnikami.

Ponieważ impedancje obciążeń zredukowane zostały do rezystancji, zatem funkcje $h_i(p)$, $B_i(p)$ $i=1,2,3$ (6.1,6.2) są tożsamościowo równe jeden. W świetle przyjętych założeń równania (6.204-6.207) uproszczą się do postaci:

$$s_{32}(p) = s_{23}(p) = -\frac{s_{21}(p)s_{31}(p)}{1-s_{11}(p)}, \quad (6.213)$$

$$s_{22}(p) = \frac{s_{21}(p)}{s_{21}^*(p)} \cdot \frac{1-s_{11}^*(p)}{1-s_{11}(p)} - \frac{s_{21}^2(p)}{1-s_{11}(p)}, \quad (6.214)$$

$$s_{33}(p) = \frac{s_{31}(p)}{s_{31}^*(p)} \cdot \frac{1-s_{11}^*(p)}{1-s_{11}(p)} - \frac{s_{31}^2(p)}{1-s_{11}(p)}. \quad (6.215)$$

Współczynnik odbicia $s_{11}(p)$ jest funkcją BR, tym samym funkcja $1-s_{11}(p)$ jest PR. Powyższe stwierdzenie można prosto zilustrować w odniesieniu do układu z Rys. 6.4, gdzie:

$$\frac{2}{1-s_{11}(p)} = z_2(p) + z_3(p) + 1. \quad (6.216)$$

Funkcje PR $z_2(p)$ i $z_3(p)$ są impedancjami wejściowymi odpowiednich czwórników zakończonych jednostkowymi rezystorami. Co więcej, jeżeli $1-s_{11}(p)$ jest równe zero krotności k_1 , co może mieć miejsce jedynie na osi $j\omega$ np. w punkcie $p=j\omega_0$, (funkcja $s_{11}(p)$ jest BR), wówczas z warunku paraunitarności macierzy rozproszenia dipleksera N , Rys. 6.4, wynika:

$$|s_{21}(j\omega)|^2 = |s_{31}(j\omega)|^2 = 0, \quad (6.217)$$

krotności odpowiednio k_2, k_3 , przy czym $k_1 = \min(k_2, k_3)$. W świetle powyższych stwierdzeń, funkcje

$$\frac{s_{21}^2(p)}{1-s_{11}(p)}, \quad \frac{s_{31}^2(p)}{1-s_{11}(p)}, \quad \frac{s_{31}(p)s_{21}(p)}{1-s_{11}(p)} \quad (6.218)$$

są regularne w fizycznie realizowalnym diplekserze, zatem przy rozwiązywaniu danego zagadnienia filtracji lub realizacji wzmacnień napięciowych, weryfikacji wymaga jedynie warunek analityczności w obszarze $\text{Re } p > 0$ następujących wyrażeń:

$$\frac{s_{21}(p)}{s_{21}^*(p)} \cdot \frac{1-s_{11}(p)}{1-s_{11}^*(p)}, \quad \frac{s_{31}(p)}{s_{31}^*(p)} \cdot \frac{1-s_{11}(p)}{1-s_{11}^*(p)} \quad (6.219)$$

Przyjmujemy, że dane są skuteczne wzmacnienia mocy $G_{12}(\omega^2)$, $G_{13}(\omega^2)$ spełniające warunek (6.6). Tym samym z (6.4,6.5) można jednoznacznie obliczyć minimalnofazowe funkcje BR $\rho_{11}(p)$, $\rho_{21}(p)$, $\rho_{31}(p)$. Zapisując wzmiarkowane funkcje w formie ilorazu odpowiednich wielomianów (6.20-6.26), a następnie wstawiając je do zależności (6.219), otrzymujemy następujące wyrażenia:

$$\eta_{21}^2 \cdot \frac{e_1}{e_{1*}} \cdot \frac{h_{21}}{h_{21*}} \cdot \eta_{11*} \cdot \frac{n_{11*}g_* - l_* \cdot n_{11}}{n_{11}g - l \cdot n_{11*}}, \quad \eta_{31}^2 \cdot \frac{e_1}{e_{1*}} \cdot \frac{h_{31}}{h_{31*}} \cdot \eta_{11*} \cdot \frac{n_{11*}g_* - l_* \cdot n_{11}}{n_{11}g - l \cdot n_{11*}}, \quad (6.220)$$

przy czym

$$s_{11}(p) = \frac{l(p)}{g(p)} \eta_{11}(p), \quad s_{21}(p) = \frac{e_1(p)h_{21}(p)}{g(p)} \eta_{21}(p), \quad s_{31}(p) = \frac{e_1(p)h_{31}(p)}{g(p)} \eta_{31}(p). \quad (6.221)$$

Funkcje $\eta_{21}(p)$, $\eta_{31}(p)$, $\eta_{11}(p) = n_{11*}(p)/n_{11}(p)$ są funkcjami RA, zatem wielomian $n_{11}(p)$ jest wielomianem Hurwitza w ścisłym znaczeniu (SH). Zależności (6.220) muszą być analityczne w obszarze $\text{Re } p > 0$, jeżeli diplekser N obciążony rezystancjami, realizuje wymagane wzmacnienia mocy $G_{12}(\omega^2)$, $G_{13}(\omega^2)$. Ponadto jeżeli $s_{11}(p)$ jest funkcją BR, to wielomian $n_{11}g - l \cdot n_{11*}$ jest wielomianem Hurwitza (WH) dla dowolnie wybranej funkcji $\eta_{11}(p)$. W rezultacie wnioskujemy, że w fizycznie realizowalnym diplekserze N, wyrażenia (6.220) są funkcjami typu RA. Co więcej, ponieważ wielomiany Hurwitza $h_{21}(p)$ i $h_{31}(p)$ są względnie pierwsze, zatem każde zero funkcji $\eta_{11}(p)$ nie będące zerem wielomianu $l_*(p)$ jest zerem $\eta_{21}^2(p)$ i $\eta_{31}^2(p)$. Zauważmy, że wystarczy przyjąć

$$\eta_{21} = \frac{e_{1*}}{e_1} \cdot \frac{h_{21*}}{h_{21}} \cdot \eta_{11*}, \quad \eta_{31} = \frac{e_{1*}}{e_1} \cdot \frac{h_{31*}}{h_{31}} \cdot \eta_{11*}, \quad (6.222)$$

i wówczas funkcje (6.220) są funkcjami RA dla dowolnych wielomianów Hurwitza $e_1(p)$, $h_{21}(p)$, $h_{31}(p)$, $n_{11}(p)$. Udowodniono w ten sposób następujący wniosek.

Wniosek 2.

Każda para skutecznych wzmacnień mocy $G_{12}(\omega^2)$, $G_{13}(\omega^2)$ spełniająca warunek (6.6) jest realizowalna w układzie bezstratnego, odwracalnego dipleksera, obciążonego rezystorami, Rys. 6.4.

Uzupełnieniem Wniosku 2, będzie podanie metody syntezy wzmacnień mocy w układzie dipleksera. Korzystając z definicji skutecznego wzmacnienia mocy (3.1) w odniesieniu do układu z Rys. 6.4, można łatwo ustalić, że skuteczne wzmacnienia mocy w diplekserze z Rys. 6.4 mają postać:

$$G_{1i}(\omega^2) = \frac{4 \text{Re } z_i(j\omega)}{|1 + z_2(j\omega) + z_3(j\omega)|^2}, \quad i = 2, 3. \quad (6.223)$$

Funkcje $z_2(p)$, $z_3(p)$ są impedancjami wejściowymi czwórników N_2 , N_3 , Rys. 6.4. Wstawiając (6.216) do zależności będącą analityczną kontynuacją (6.223) na całą płaszczyznę zespoloną, otrzymujemy w rezultacie poszukiwany związek:

$$\text{Ev } z_i(p) = \frac{G_{ii}(-p^2)}{[1 - s_{11}(p)][1 - s_{11}^*(p)]}, \quad i = 2, 3, \quad (6.224)$$

gdzie $\text{Ev } z_i(p) = 0.5[z_i(p) + z_{i*}(p)]$ $i=2,3$ są częściami parzystymi impedancji $z_2(p)$, $z_3(p)$, Rys. 6.4. W praktyce dla syntezy dipleksera wystarczy obliczyć współczynnik odbicia $s_{11}(p)$, postaci (6.221). Następnie impedancje $z_i(p)$ $i=2,3$ można wyznaczyć z zależności (6.224) np. metodą Gewertza [2] (z dokładnością do funkcji reaktancji). Jeśli dodatkowo wzmocnienia $G_{12}(\omega^2)$, $G_{13}(\omega^2)$ nie posiadają wspólnych zer na osi $j\omega$, wówczas impedancje $z_i(p)$ $i=2,3$ są funkcjami minimalnej reaktancji, co staje się oczywiste w świetle własności funkcji (6.216, 6.217). We wzmiankowanej sytuacji, impedancje $z_i(p)$ $i=2,3$ można wyznaczyć z (6.224) w jednoznaczny sposób. Obliczone impedancje $z_i(p)$ $i=2,3$ realizuje się klasyczną metodą Darlingtona [2, 74]. Zaprezentowana metoda syntezy jest również słuszną dla realizacji wzmocnień mocy w układzie równoległego dipleksera, przy czym wówczas macierz $S(p)$ jest macierzą rozproszenia równoległego dipleksera, znormalizowaną względem macierzy jednostkowych konduktancji.

W praktycznych realizacjach układu dipleksera, często wymagane jest, aby czwórniki tworzące diplekser posiadały strukturę bezstratnych drabinek L,C. W takim przypadku wszystkie zera transmisji dipleksera N , położone są na osi urojonej. Powyższe założenie implikuje, że współczynniki transmisji macierzy rozproszenia dipleksera obciążonego rezystorami są funkcjami minimalnofazowymi (wynika to z faktu, iż macierz $Y_A(p)$ (3.16) trójwrotnika dołączonego ma wszystkie zera transmisji położone na osi $j\omega$). W rozważanej sytuacji funkcje $\eta_{21}(p) = \eta_{31}(p) \equiv 1$. Zauważmy, że żadne zero wielomianu $e_1(p)$ w obszarze $\text{Re } p > 0$ nie może być zerem wielomianu $n_{11}g - l \cdot n_{11}^*$, ponieważ wówczas $s_{11}(p) = 1$ w obszarze $\text{Re } p > 0$, co jest sprzeczne z koniecznym założeniem, że funkcja $s_{11}(p)$ jest BR. Ponieważ dodatkowo wielomiany $e_1(p)$ i $g(p)$ oraz $h_{21}(p)$ i $h_{31}(p)$ są względnie pierwsze, zatem analityczność funkcji (6.220) w obszarze $\text{Re } p > 0$ wymaga spełnienia niżej wymienionych warunków:

- Wielomian $e_1(p) = \hat{e}(p)$, gdzie wielomian $\hat{e}(p)$ ma zera położone wyłącznie na osi $j\omega$.
- Każde zero wielomianu $SH \ n_{11}(p)$ jest zerem wielomianu $l(p)$, tzn. $l(p) = l_1(p)n_{11}(p)$, gdzie wielomian $l_1(p)$ jest WH.
- Każde zero iloczynu $h_{21}(p)h_{31}(p)$ w $\text{Re } p > 0$ jest zerem $1 - s_{11}(p)$, tzn.

$$n_{11}(p)g(p) - l(p)n_{11}^*(p) = n_{11}(p)[g(p) - l_1(p)n_{11}^*(p)] \cdot h_{210}(p)h_{310}(p),$$

gdzie

$$h_{21}(p) = \hat{h}_{21}(p)h_{210}(p), \quad h_{31}(p) = \hat{h}_{31}(p)h_{310}(p),$$

przy czym wielomiany $\hat{h}_{21}(p)$, $\hat{h}_{31}(p)$ mają zera położone tylko na osi $j\omega$.

Warunki konieczne dla realizacji wzmocnień mocy w diplekserze o strukturze szeregowo (równoległe) połączonych drabinek L,C zebrano we Wniosku 3.

Wniosek 3.

Warunkami koniecznymi realizacji danych wzmocnień mocy $G_{12}(\omega^2)$, $G_{13}(\omega^2)$ spełniających warunek (6.6), w układzie bezstratnego, odwracalnego dipleksera o strukturze szeregowo (równoległe) połączonych drabinek L,C, są następujące warunki.

1) Wzmocnienia mocy mają postać:

$$G_{12}(\omega^2) = \left| \frac{\hat{e}(j\omega)\hat{h}_{21}(j\omega)h_{210}(j\omega)}{g(j\omega)} \right|^2, \quad G_{13}(\omega^2) = \left| \frac{\hat{e}(j\omega)\hat{h}_{31}(j\omega)h_{310}(j\omega)}{g(j\omega)} \right|^2, \quad (6.225)$$

gdzie wielomiany $\hat{e}(p)$, $\hat{h}_{21}(p)$, $\hat{h}_{31}(p)$ mają zera położone tylko na osi $j\omega$, wielomiany $g(p)$, $h_{210}(p)$, $h_{310}(p)$ są SH, oraz $(\hat{h}_{21}h_{210}, \hat{h}_{31}h_{310}) = 1$, co oznacza, że dane wielomiany są względnie pierwsze.

2) Każde zero iloczynu $h_{210}(p)h_{310}(p)$ jest zerem $g(p) - l_1(p)n_{11*}(p)$ co najmniej tej samej krotności, gdzie wielomian Hurwitza $l(p) = l_1(p)n_{11}(p)$ oblicza się przez faktoryzację wyrażenia:

$$l(p)l_*(p) = g(p)g_*(p) - \hat{e}(p)\hat{e}_*(p) \left[\hat{h}_{21}(p)h_{210}(p)\hat{h}_{21*}(p)h_{210*}(p) + \hat{h}_{31}(p)h_{310}(p)\hat{h}_{31*}(p)h_{310*}(p) \right] \quad (6.226)$$

Warunki dostateczne realizowalności danych wzmocnień mocy w bezstratnych układach drabinkowych nie są niestety znane (nawet dla czwórnika). Jeżeli jednak ograniczymy rozważania do układów drabinkowych, których zera transmisji położone są wyłącznie w zerze lub nieskończoności lub do układów drabinkowych o strukturach danych przez Fuisawę [74], wówczas jeżeli wielomiany $\hat{e}(p)$, $\hat{h}_{21}(p)$, $\hat{h}_{31}(p)$, $l(p)$, $g(p)$ spełniają dodatkowe warunki [74], to wzmocnienia postaci (6.225) będą realizowalne w układzie bezstratnego dipleksera bez użycia induktorów sprzężonych.

Zauważmy ponadto, że podział wielomianu $l(p)$ na wielomiany $l_1(p)$ i $n_{11}(p)$ jest arbitralny. Powyższa własność może być pomocna w spełnieniu przez wzmocnienia mocy (6.225) warunku 2) zawartego we Wniosku 3.

Rozważmy także warunki realizacji danych wzmocnień napięciowych $s_{21}(p)$, $s_{31}(p)$ w układzie bezstratnego, odwracalnego dipleksera obciążonego rezystorami, Rys. 6.4. Niech dane wzmocnienia napięciowe będą funkcjami BR, spełniającymi ponadto konieczny dla realizacji warunek (5.9). Analogicznie jak w (5.10) zapiszmy dane wzmocnienia napięciowe w formie ilorazu odpowiednich wielomianów:

$$s_{21}(p) = \frac{e(p)h_2(p)}{g(p)}, \quad s_{31}(p) = \frac{e(p)h_3(p)}{g(p)} \quad (6.227)$$

Wielomian $g(p)$ jest SH. Ponadto $(g, e) = 1$ i $(h_2, h_3) = 1$. Minimalnofazowy współczynnik odbicia $\rho_{11}(p)$, Rys. 6.4, wyznaczamy jak poprzednio, korzystając z warunku paraunitarności macierzy $S(p)$. W rezultacie współczynnik odbicia $s_{11}(p)$ można wyrazić w postaci:

$$s_{11}(p) = \frac{l(p)}{g(p)} \cdot \eta_{11}(p), \quad (6.228)$$

przy czym funkcja $\eta_{11}(p) = n_{11*}(p)/n_{11}(p)$ jest typu RA, gdzie wielomian $n_{11}(p)$ jest SH, natomiast wielomian $l(p)$ jest WH, otrzymanym przez faktoryzację równania:

$$l(p)l_*(p) = g(p)g_*(p) - e(p)e_*(p)[h_2(p)h_{2*}(p) + h_3(p)h_{3*}(p)] \quad (6.229)$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym realizacji wzmocnień (6.227) w układzie dipleksera jest aby funkcje (6.219) były analityczne w obszarze $\text{Re } p > 0$, ponieważ wzmiankowany warunek jest równoważny warunkowi regularności paraunitarnej macierzy $S(p)$, będącej macierzą rozproszenia układu z Rys. 6.4. Przekształcając zależności (6.219) przy użyciu (6.227, 6.228) otrzymujemy następujące wyrażenia:

$$\frac{e}{e_*} \cdot \frac{h_2}{h_{2*}} \cdot \eta_{11*} \cdot \frac{n_{11*}g_* - l_* \cdot n_{11}}{n_{11}g - l \cdot n_{11*}}, \quad \frac{e}{e_*} \cdot \frac{h_3}{h_{3*}} \cdot \eta_{11*} \cdot \frac{n_{11*}g_* - l_* \cdot n_{11}}{n_{11}g - l \cdot n_{11*}} \quad (6.230)$$

Tak jak poprzednio stwierdzamy, że żadne zero wielomianu $e(p)$ w obszarze $\text{Re } p > 0$ nie może być zerem wielomianu $n_{11}g - l \cdot n_{11*}$, ponieważ wówczas $s_{11}(p) = 1$ w obszarze $\text{Re } p > 0$, co byłoby sprzeczne z koniecznym założeniem, że funkcja $s_{11}(p)$ jest BR. Ponieważ ponadto $(h_2, h_3) = 1$, zatem wnioskujemy, że każde zero wielomianu $n_{11}(p)$ nie będące zerem wielomianu $l(p)$ musi być

zerem wielomianu $e(p)$. Dodatkowo, każde zero wielomianu $h_i(p)$ $i=2,3$ w obszarze $\text{Re } p > 0$ nie będące zerem wielomianu $h_{i*}(p)$ jest zerem wielomianu $e_*(n_{11}g - l \cdot n_{11*})$ co najmniej tej samej krotności. Wzmiankowane warunki są konieczne a zarazem wystarczające, aby funkcje (6.230) były analityczne w obszarze $\text{Re } p > 0$. Wyniki przeprowadzonej analizy zebrano we Wniosku 4.

Wniosek 4.

Dane wzmocnienia napięciowe $s_{21}(p)$, $s_{31}(p)$ postaci (6.227) i spełniające warunek (5.9), są realizowalne w układzie bezstratnego, odwracalnego dipלקסера obciążonego rezystorami, Rys. 6.4 wtedy i tylko wtedy, gdy:

1) Funkcja $e(p)/e_*(p)$ jest typu RA.

2) Współczynnik odbicia $s_{11}(p)$ ma postać (6.228), przy czym funkcja RA $\eta_{11}(p) = n_{11*}(p)/n_{11}(p)$ jest wybrana tak, aby wyrażenie:

$$\frac{e(p)}{e_*(p)} \cdot \frac{l_*(p)}{l(p)} \cdot \frac{n_{11}(p)}{n_{11*}(p)}$$

było także funkcją RA.

3) Każdy biegun w obszarze $\text{Re } p > 0$ wyrażenia:

$$\frac{h_2(p)}{h_{2*}(p)} \cdot \frac{h_3(p)}{h_{3*}(p)}$$

jest zerem funkcji

$$\frac{e(p)}{e_*(p)} \cdot \frac{n_{11*}(p)g_*(p) - l_*(p)n_{11}(p)}{n_{11}(p)g(p) - l(p)n_{11*}(p)}$$

co najmniej tej samej krotności.

W świetle Wniosku 4. jest zrozumiałe, że wzmocnienia napięciowe o jednakowych fazach, rozważane w Rozdziale 5.2 są realizowalne w układzie bezstratnego, odwracalnego dipלקסера, Rys. 6.4. Dla tego typu wzmocnień, zgodnie z tezami Twierdzeń 5.2, 5.3 zachodzą oczywiste związki:

$$\frac{h_2(p)h_3(p)}{h_{2*}(p)h_{3*}(p)} = 1 \quad \text{oraz} \quad \frac{e(p)}{e_*(p)} \text{ jest funkcją typu RA.}$$

Ponadto wypełnienie warunku z punktu 3) tezy Twierdzenia 5.2 lub punktu 4) tezy Twierdzenia 5.3 implikuje, że warunek 2) Wniosku 4. jest również spełniony. W rezultacie dla praktycznej realizacji wzmocnień napięciowych z Rozdziału 5.2 można ograniczyć się do syntezy tychże wzmocnień w układzie dipלקסера.

Na koniec w celu zilustrowania przeprowadzonych rozważań, zostanie podana realizacja układowa wzmocnień napięciowych (5.48) z Rozdziału 5.1. Wzmocnienia (5.48) postaci:

$$s_{21}(p) = \frac{1-p}{(p^2 + \sqrt{2} \cdot p + 1)\sqrt{2}}, \quad s_{31}(p) = \frac{p(1-p)}{(p^2 + \sqrt{2} \cdot p + 1)\sqrt{2}} \quad (6.231)$$

spełniają kryteria zawarte we Wniosku 4, zatem mogą być realizowane w układzie odwracalnego dipלקסера zakończonych jednostkowymi rezystorami, jak na Rys. 6.4. Przyjmijmy, że współczynnik odbicia $s_{11}(p)$ został wybrany jako minimalnofazowy, zatem:

$$s_{11}(p) = \frac{p^2 + 1}{(p^2 + \sqrt{2} \cdot p + 1)\sqrt{2}} \quad (6.232)$$

Przy użyciu (6.213-6.215) wyznaczamy poszukiwane elementy macierzy rozproszenia $S(p)$. W rezultacie macierz rozproszenia dipleksera z Rys. 6.4 przyjmie następującą postać:

$$s_{11}(p) = \frac{p^2 + 1}{\sqrt{2} \cdot m_1(p)} , \quad (6.233)$$

$$s_{21}(p) = s_{12}(p) = \frac{1 - p}{\sqrt{2} \cdot m_1(p)} , \quad (6.234)$$

$$s_{31}(p) = s_{13}(p) = \frac{(1 - p)p}{\sqrt{2} \cdot m_1(p)} , \quad (6.235)$$

$$s_{32}(p) = s_{23}(p) = \frac{(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})(1 - p)^2 p}{m_1(p)m_2(p)} , \quad (6.236)$$

$$s_{22}(p) = \frac{1 - p}{1 + p} \cdot \frac{[p^4 - (2 + \sqrt{2})p^3 - (1 + \frac{3}{\sqrt{2}})p^2 - (2 + \sqrt{2})p - \frac{1}{\sqrt{2}}]}{m_1(p)m_2(p)} , \quad (6.237)$$

$$s_{33}(p) = \frac{1 - p}{1 + p} \cdot \frac{p^4 + 2(1 + \sqrt{2})p^3 + (3 + \sqrt{2})p^2 + 2(1 + \sqrt{2})p - \sqrt{2}}{m_1(p)m_2(p)} . \quad (6.238)$$

przy czym:

$$m_1(p) = p^2 + \sqrt{2}p + 1 , \quad m_2(p) = p^2 + 2(\sqrt{2} + 1)p + 1 . \quad (6.239)$$

W rozpatrywanym przykładzie istnieje macierz impedancyjna $\mathbf{Z}_N(p)$ dipleksera z Rys. 6.4. Macierz $\mathbf{Z}_N(p)$ można w prosty sposób wyznaczyć posługując się zależnością (3.18), gdzie macierze $\mathbf{H}(p)$ i $\mathbf{Z}(p)$ są w naszym przypadku macierzami jednostkowymi trzeciego stopnia. Korzystając z (3.18) wyznaczono macierz impedancyjną bezstratnego dipleksera N , jako:

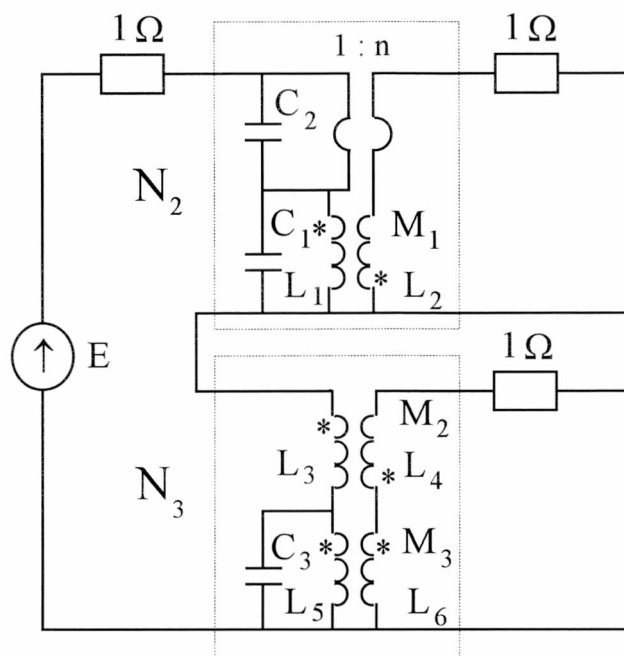
$$\mathbf{Z}_N(p) = \begin{bmatrix} z_{11a}(p) + z_{11b}(p) & z_{21a}(p) & z_{21b}(p) \\ z_{21a}(p) & z_{22a}(p) & 0 \\ z_{21b}(p) & 0 & z_{22b}(p) \end{bmatrix} , \quad (6.240)$$

gdzie macierze impedancyjne $\mathbf{Z}_a(p)$ i $\mathbf{Z}_b(p)$ czwórników N_2 i N_3 tworzących diplekser N , mają postać:

$$\mathbf{Z}_a(p) = \frac{1}{p} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} - 1 \\ \sqrt{2} - 1 & 3 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}p}{p^2 + 3 + 2\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} , \quad (6.241)$$

$$\mathbf{Z}_b(p) = p \cdot \begin{pmatrix} 1 & -(\sqrt{2} - 1) \\ -(\sqrt{2} - 1) & 3 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{(3\sqrt{2} - 4)p}{p^2 + 3 - 2\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} . \quad (6.242)$$

Realizację układową macierzy (6.241, 6.242) otrzymaną metodą Cauera [2, 40] przedstawiono na Rys. 6.5.



Rys. 6.5. Realizacja przykładu obliczeniowego. Wartości elementów wynoszą:

- dla czwórnika N_2 :

$$n = \sqrt{2} - 1, \quad C_1 = 1/\sqrt{2}, \quad C_2 = 1,$$

$$M_1 = 3\sqrt{2} - 4, \quad L_1 = 3\sqrt{2} + 4, \quad L_2 = 4(3\sqrt{2} + 4).$$

- dla czwórnika N_3 :

$$C_3 = 2 + 3/\sqrt{2},$$

$$M_2 = \sqrt{2} - 1, \quad L_3 = 1, \quad L_4 = 3 - 2\sqrt{2},$$

$$M_3 = \sqrt{2}, \quad L_5 = \sqrt{2}, \quad L_6 = 4\sqrt{2}.$$

6.4. Podsumowanie rozdziału

W niniejszym rozdziale rozważano problemy konstrukcji pewnych klas macierzy paraunitarnych BR, zastosowanych do rozwiązywania problemu dopasowania szerokopasmowego impedancji w układach trójwrotowych.

W części pierwszej Rozdziału 6 podana została metoda wyznaczania najbardziej ogólnej formy macierzy rozproszenia $S(p)$ dla danego zagadnienia dopasowania szerokopasmowego. Najbardziej ogólna forma macierzy rozproszenia $S(p)$ jest to klasa wszystkich wymiernych, rzeczywistych macierzy $S(p)$, spełniających postulaty 1)-7) z Rozdziału 6.1. Wyznaczona klasa macierzy $S(p)$ charakteryzuje się tym, że zawiera jako podklasę wszystkie macierze rozproszenia fizycznie realizowalnego, bezstratnego, odwracalnego układu trójwrotowego, który obciążony zadanymi niefosterowskimi impedancjami PR, posiada wymagane skuteczne wzmacnienia mocy.

W części drugiej Rozdziału 6 opisano konstrukcję klasy wszystkich wymiernych, rzeczywistych macierzy $S(p)$, spełniającą postulaty 1)-7) z Rozdziału 6.1, przy dodatkowym założeniu, że układ dopasowujący jest bezstratnym trójwrotnikiem o strukturze trzech czwórników połączonych w 'gwiazdę'.

W części trzeciej Rozdziału 6 rozważano zastosowanie bezstratnego trójwrotnika w konfiguracji szeregowego dupleksa, do rozwiązywania problemów dopasowania szerokopasmowego impedancji. Ponadto omówiono zastosowanie dupleksa zakończonego rezystancyjnymi

obciążeniami do realizacji wzmocnień napięciowych, jak i do przeprowadzania wymaganej filtracji sygnału. Podano warunki konieczne realizacji danych wzmocnień mocy w układzie odwracalnego dupleksa, którego czwórniki składowe posiadają strukturę drabinek L,C. W rozważanym przypadku obciążeniami dupleksa są rezystancje.

Wyniki otrzymane w niniejszym rozdziale zostały przedstawione w postaci czterech wniosków. Dowody konieczności wzmiankowanych wniosków zamieszczono również w niniejszym rozdziale (dla Wniosków 2,4 uzasadniono także ich dostateczność).

7. ZAGADNIENIA KONSTRUKCJI WZMOCNIEŃ MOCY DLA UKŁADÓW TRÓJWROTOWYCH

W poprzednich rozdziałach ustalono warunki realizacji danych wzmacnień napięciowych w układach trójwrotowych oraz podano metody wyznaczania pewnych klas macierzy paraunitarnych BR, zawierających wszystkie fizycznie realizowalne macierze rozproszenia trójwrotowych układów dopasowujących, dopuszczalnych w danym zagadnieniu dopasowania szerokopasmowego impedancji. Przy rozpatrywaniu wzmiarkowanych problemów zakładano, że dane są skuteczne wzmacnienia mocy lub wzmacnienia napięciowe. Narzucenie tychże wzmacnień w praktyce prowadzi do dużych trudności obliczeniowych, związanych z koniecznością analitycznego wyznaczania minimalnofazowego współczynnika odbicia $\rho_{11}(p)$. Ponieważ macierze rozproszenia bezstratnych układów n -wrotowych (tutaj trójwrotowych) są macierzami paraunitarnymi BR, zatem zachodzi jednoznaczny związek pomiędzy minimalnofazowymi współczynnikami transmisji $\rho_{21}(p)$, $\rho_{31}(p)$, a minimalnofazowym współczynnikiem odbicia $\rho_{11}(p)$, mianowicie:

$$\rho_{11}(p)\rho_{11}^*(p) = 1 - \rho_{21}(p)\rho_{21}^*(p) - \rho_{31}(p)\rho_{31}^*(p) , \quad (7.1)$$

gdzie

$$G_{12}(\omega^2)_{|\omega^2=-p^2} = \rho_{21}(p)\rho_{21}^*(p) , \quad G_{13}(\omega^2)_{|\omega^2=-p^2} = \rho_{31}(p)\rho_{31}^*(p) . \quad (7.2)$$

Funkcje $G_{12}(\omega^2)$, $G_{13}(\omega^2)$ są wymaganymi skutecznymi wzmacnieniami mocy. Z równania (7.1) wynika, że wzmacnienia (7.2) spełniają konieczny warunek:

$$1 - G_{12}(\omega^2) - G_{13}(\omega^2) \geq 0 \quad \text{dla każdego } \omega. \quad (7.3)$$

Analityczne wyznaczenie funkcji $\rho_{11}(p)$ z równania (7.1), przy danych wzmacnieniach (7.2) jest poważnym problemem obliczeniowym. Dla efektywnego posługiwania się metodami realizacji wzmacnień mocy lub wzmacnień napięciowych, koniecznym wydaje się znalezienie pewnych klas wzmacnień (7.2), które umożliwią analityczne obliczenie funkcji $\rho_{11}(p)$ dla stopnia wzmacnienia $n=1,2,3,\dots$ traktowanego jako parametr i dla stałej wzmacnienia $K \in (0,1]$, traktowanej również jako parametr. Ponadto w praktyce konieczne jest uwzględnienie dodatkowych własności wzmacnień (7.2). Przeważnie dodatkowym wymaganiem stawianym wzmacnieniom (7.2) jest możliwość arbitralnego wyboru poziomu tłumienia na przecięciu charakterystyk częstotliwościowych takich wzmacnień. Własność powyższa wpływa bezpośrednio na przeprowadzenie odpowiedniej filtracji sygnału (rozdzielenie pasm częstotliwości) w układach realizujących wzmacnienia (7.2). W niniejszym rozdziale zaproponowane zostaną dwie klasy wzmacnień mocy spełniające w znacznej mierze wymienione wyżej postulaty.

7.1. Konstrukcja pary maksymalnie płaskich wzmacnień mocy

Ze względu na omówione trudności analitycznego określania minimalnofazowego współczynnika odbicia $\rho_{11}(p)$ podstawowymi metodami projektowania filtrów trójwrotowych były jak dotąd metody numeryczne, np. [1,9,26,27,28,39]. Rozwiązania analityczne problemu realizacji wzmacnień mocy w układach trójwrotowych ograniczały się zazwyczaj do projektów filtrów stałorezystancyjnych, dla których $\rho_{11}(p)=\text{const.}$, a zatem tłumienie na przecięciu charakterystyk częstotliwościowych takich wzmacnień wynosiło -3 dB, co często stanowiło zbyt małą wartość tłumienia. Dopiero niedawno ukazały się prace rozpatrujące wzmiarkowany problem na drodze analitycznej [5,6]. Równocześnie zaproponowano kilka nowych metod syntezy trójwrotowych duplekserów [19,38,73,75,84]. W cytowanych pracach brakowało jednak propozycji klas wzmacnień mocy, które pozwalają analitycznie wyznaczyć minimalnofazowy współczynnik odbicia $\rho_{11}(p)$.

Próbie konstrukcji wzmacnień o pożądanych cechach podjęto w [82], jednak również w pracy [82] wyznaczenie wzmacnień (7.2) wymagało użycia procedur numerycznych. Ponadto stała wzmacnienia K , ustalona została w [82] na z góry przyjętym poziomie $K=1$, co w praktyce wyklucza użycie takich wzmacnień do rozwiązywania problemów dopasowania szerokopasmowego impedancji.

W niniejszym rozdziale wprowadzona zostanie klasa maksymalnie płaskich wzmacnień mocy $G_{12}(\omega^2)$, $G_{13}(\omega^2)$, dla których można analitycznie wyznaczyć minimalnofazowy współczynnik odbicia $\rho_{11}(p)$. Ponadto stałe wzmacnienia, pulsacje graniczne pasm przenoszenia oraz stopnie wzmacnienia przyjmowane są arbitralnie.

Niech wzmacnienia $G_{12}(\omega^2)$, $G_{13}(\omega^2)$ są dolno i górnoprzepustową parą wzmacnień Butterwortha stopnia $2n$:

$$G_{12}(\omega^2) = \frac{K_2}{1 + \left(\frac{\beta_2}{\omega_2} \omega\right)^{2n}}, \quad G_{13}(\omega^2) = \frac{K_3 \left(\frac{\omega}{\beta_3 \omega_3}\right)^{2n}}{1 + \left(\frac{\omega}{\beta_3 \omega_3}\right)^{2n}} \quad (7.4)$$

gdzie K_2 , K_3 są stałymi wzmacnienia $K_i \in (0,1]$ $i=2,3$, ω_2 , ω_3 są pulsacjami granicznymi pasm przenoszenia, $\omega_2 < \omega_3$. Stałe β_2 , β_3 określają minimalny poziom wzmacnienia w granicach pasm przenoszenia, tzn:

$$\beta_i = \sqrt[n]{t_i^{-1} - 1}, \quad i = 2,3 \quad (7.5)$$

gdzie stałe $t_i \in (0,1)$ $i=2,3$, porównaj (4.25), oznaczają dopuszczalny spadek wzmacnienia w wymaganym pasmie częstotliwości. Załóżmy, że dane są ω_i , t_i $i=2,3$. Poszukujemy minimalnofazowego współczynnika odbicia $\rho_{11}(p)$ związanego ze wzmacnieniami (7.4) zależnością (7.1). Stopień wzmacnienia $n=1,2,3,\dots$ oraz stałe K_i $i=2,3$ są traktowane jako parametry. Warunek (7.3) w odniesieniu do wzmacnień (7.4) implikuje nierówność:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \geq 0, \quad (7.6)$$

gdzie

$$x = \omega^{2n}, \quad a = (1 - K_3) \left(\frac{\beta_2}{\omega_2}\right)^{2n}, \quad b = 1 - K_2 - K_3 + \left(\frac{\beta_2 \beta_3 \omega_3}{\omega_2}\right)^{2n}, \quad c = (1 - K_2) (\beta_3 \omega_3)^{2n}. \quad (7.7)$$

Jeżeli nierówność (7.6) jest spełniona dla każdego ω , wówczas wielomian występujący w (7.6) nie posiada rzeczywistych pierwiastków nieparzystej krotności dla $x \geq 0$. Ponieważ zawsze $a \geq 0$ i $c \geq 0$, zatem jeżeli $a=0$ lub $c=0$ lub $b=0$ to spełnienie nierówności (7.6) wymaga $b \geq 0$. Jeżeli a, b, c są niezerowe, wówczas spełnienie nierówności (7.6) implikuje $b \geq 0$ lub $b^2 \leq 4ac$. Rozpatrzone ograniczenia mogą zatem zostać opisane jedną nierównością: $-2\sqrt{a \cdot c} \leq b$. Zapisując jawnie nierówność $-2\sqrt{a \cdot c} \leq b$, otrzymujemy warunek równoważny ograniczeniu (7.6):

$$(\beta_2 \beta_3 \omega_3 / \omega_2)^n \geq \sqrt{K_2 K_3} - \sqrt{(1 - K_2)(1 - K_3)}. \quad (7.8)$$

Tym samym spełnienie ograniczenia (7.3) przez wzmacnienia (7.4) jest równoważne zachodzeniu nierówności (6.13). Najczęściej $K_2=K_3=K$, wówczas (7.8) redukuje się do postaci:

$$K \leq \frac{1}{2} \left[1 + (\beta_2 \beta_3 \omega_3 / \omega_2)^n \right]. \quad (7.9)$$

Dodatkowo w praktyce przy realizacji filtru zakończonego rezystancjami zakłada się maksymalizację stałej wzmacnienia, wówczas $K=1$. Ponadto zazwyczaj przyjmowane są jako równe, dopuszczalne zmiany wzmacnienia w pasmach przenoszenia, czyli $\beta_2=\beta_3=\beta$. Po uwzględnieniu obydwu powyższych założeń, ograniczenie (7.9) przyjmuje formę:

$$\omega_2 / \omega_3 \leq \beta^2. \quad (7.10)$$

Pulsację ω_0 przy której przecinają się charakterystyki częstotliwościowe wzmocnień (7.4) wyznacza się z warunku $G_0 = G_{12}(\omega_0^2) = G_{13}(\omega_0^2)$, stąd:

$$\omega_0^{2n} = \frac{K_2 - K_3}{2K_2} \left(\frac{\omega_2}{\beta_2} \right)^{2n} + \sqrt{\left(\frac{K_2 - K_3}{2K_2} \left(\frac{\omega_2}{\beta_2} \right)^{2n} \right)^2 + \frac{K_2}{K_3} \left(\frac{\beta_3}{\beta_2} \omega_3 \omega_2 \right)^{2n}} , \quad (7.11)$$

przy czym:

$$G_0 = \frac{2K_2 K_3}{K_2 + K_3 + \sqrt{(K_2 - K_3)^2 + 4K_2 K_3 (\beta_2 \beta_3 \omega_3 / \omega_2)^{2n}}} . \quad (7.12)$$

Jeżeli $K_2 = K_3 = K$, wówczas:

$$\omega_0^2 = \omega_2 \omega_3 \beta_3 / \beta_2 , \quad G_0 = \frac{K}{1 + (\beta_2 \beta_3 \omega_3 / \omega_2)^n} . \quad (7.13)$$

W praktyce należy uwzględnić dodatkowy warunek $\omega_2 < \omega_0 < \omega_3$ implikujący rozdział obu pasm częstotliwości. Powyższy warunek z uwzględnieniem (7.11) prowadzi po kilku przekształceniach algebraicznych do nierówności:

$$(1 + \beta_2^{2n}) / (1 + (\beta_3 \omega_3 / \omega_2)^{2n}) < K_2 / K_3 < (1 + (\beta_2 \omega_3 / \omega_2)^{2n}) / (1 + \beta_3^{2n}) . \quad (7.14)$$

Jeżeli $K_2 = K_3 = K$ wówczas (7.14) redukuje się do nierówności:

$$\omega_2 / \omega_3 < \beta_3 / \beta_2 < \omega_3 / \omega_2 . \quad (7.15)$$

Na podstawie zależności (7.1, 7.2) wyznaczony zostanie minimalnofazowy współczynnik odbicia

$$\rho_{11}(p) = l(p) / m(p) , \quad (7.16)$$

przy czym $l(p)$ jest wielomianem Hurwitza (WH). Wielomian $m(p)$, będący wielomianem Hurwitza w ścisłym znaczeniu (SH), wynosi:

$$m(p) = B_n(p\beta_2/\omega_2) B_n[p/(\beta_3\omega_3)] . \quad (7.17)$$

Wielomian $B_n(y)$ jest wielomianem Butterwortha stopnia n względem zmiennej 'y'. Z (7.1) przy użyciu wzmocnień (7.4), otrzymujemy równanie:

$$l(p)l_*(p) = (\beta_3 \omega_3)^{-2n} [a \cdot p^{4n} + (-1)^n b \cdot p^{2n} + c] , \quad (7.18)$$

gdzie stałe a, b, c zdefiniowano w (7.7). W dalszych rozważaniach przyjęto a, b, c niezerowe. Jeżeli którykolwiek współczynnik a, b, c jest zerem, wówczas faktoryzacja Hurwitza równania (7.18) staje się oczywista. Rozważmy dwa przypadki.

W przypadku pierwszym niech $b^2 \geq 4ac$, zatem na podstawie ograniczenia (7.8) wnioskujemy, że $b \geq 0$. W rozpatrywanej sytuacji zależność (7.18) jest równoważna następującemu równaniu:

$$\begin{aligned} l(p)l_*(p) &= \\ &= (1 - K_2)[(-1)^n (A_1 p)^{2n} + 1][(-1)^n (A_2 p)^{2n} + 1] = \\ &= (1 - K_2) B_n(A_1 p) B_n(A_2 p) B_n(-A_1 p) B_n(-A_2 p) , \end{aligned} \quad (7.19)$$

gdzie

$$A_1^{2n} = (b + \sqrt{b^2 - 4a \cdot c}) / (2c) , \quad A_2^{2n} = (b - \sqrt{b^2 - 4a \cdot c}) / (2c) . \quad (7.20)$$

Ostatecznie na podstawie (7.19) wyznaczamy wielomian $l(p)$ jako:

$$l(p) = \pm \sqrt{1 - K_2} \cdot B_n(A_1 p) B_n(A_2 p) . \quad (7.21)$$

W przypadku drugim zakładamy, że $b^2 < 4ac$, wówczas:

$$\begin{aligned}
l(p)l_*(p) &= \\
&= (1 - K_2)[(-1)^n (Ap)^{2n} + 1][(-1)^n (\bar{A}p)^{2n} + 1] = \\
&= (1 - K_2)B_n(Ap)B_n(\bar{A}p)B_n(-Ap)B_n(-\bar{A}p) \quad , \quad (7.22)
\end{aligned}$$

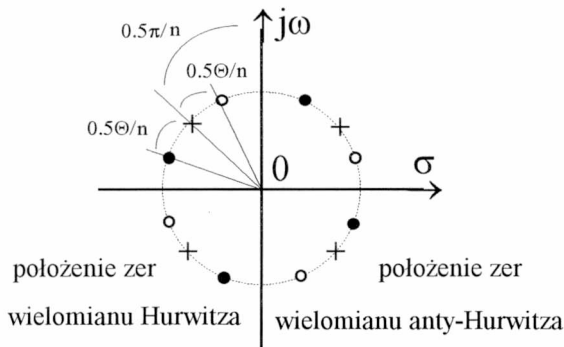
przy czym:

$$A^{2n} = 2a \cdot \exp(j \cdot \Theta), \quad \Theta = \arctg \sqrt{4a \cdot c / b^2 - 1} \quad . \quad (7.23)$$

Symbol $\bar{A}$ oznacza liczbę sprzężoną z A . Przypuśćmy, że wielomian $l(p)$ ma postać:

$$l(p) = \pm \sqrt{1 - K_2} \cdot B_n(Ap)B_n(\bar{A}p) \quad . \quad (7.24)$$

Zostanie uzasadnione, że równanie (7.24) faktycznie określa pewien rzeczywisty wielomian Hurwitza. Jeżeli $b^2 < 4ac$, wówczas kąt $\Theta \in (0, \pi/2)$. Gdy $\Theta \rightarrow 0$ wtedy wielomiany w (7.24) stają się wielomianami Butterwortha względem zmiennej $y = \sqrt[2n]{2a} \cdot p$. Dla $\Theta > 0$ zera wielomianów w (7.24) są przesunięte o kąt $\pm 0.5\Theta/n$ względem zer wielomianu $B_n(\sqrt[2n]{2a} \cdot p)$. W wielomianie Butterwortha stopnia n , kąt pomiędzy zerem leżącym najbliżej osi $j\omega$, a samą osią $j\omega$ wynosi $0.5\pi/n$. Tak więc wielomiany określone w (7.24) będą wielomianami Hurwitza (o współczynnikach zespolonych!) jeżeli $0.5\pi/n - 0.5\Theta/n > 0$. Ostatnia nierówność jest prawdziwa, ponieważ kąt Θ zawiera się w przedziale $\Theta \in (0, \pi/2)$. Zauważmy ponadto, że każdemu zeru wielomianu $B_n(Ap)$ odpowiada sprzężone zero wielomianu $B_n(\bar{A}p)$. Tym samym iloczyn (7.24) wyznacza wielomian o rzeczywistych współczynnikach i zerach leżących w obszarze $\text{Re } p < 0$. Poglądową ilustrację powyższych rozważań przedstawiono na Rys. 7.1.



- 1) '+' zera wielomianu $p^4 + 1$,
- 2) 'o' zera wielomianu $p^4 e^{j\Theta} + 1$,
- 3) '•' zera wielomianu $p^4 e^{-j\Theta} + 1$.

Rys. 7.1. Przykładowy diagram położenia zer wielomianów, występujących w (7.24), $n=2$, $a=0.5$.

Faktoryzacja (7.24) dla wielomianów zaprezentowanych na Rys. 7.1. wyniesie:

$$B_2(e^{j\Theta/4}p)B_2(e^{-j\Theta/4}p) = p^4 + 2\sqrt{2} \cos \frac{\Theta}{4} \cdot p^3 + 4 \cos^2 \frac{\Theta}{4} \cdot p^2 + 2\sqrt{2} \cos \frac{\Theta}{4} \cdot p + 1.$$

Konstrukcja pary maksymalnie płaskich wzmocnień mocy została tym samym zakończona.

Zauważmy, że wzmocnienia (7.4) nie spełniają warunków zawartych we Wniosku 3 z Rozdziału 6.3. W konsekwencji nie można przy użyciu wzmocnień (7.4) zrealizować czwórników N_2 , N_3 , wchodzących w skład konfiguracji dupleksera Rys. 6.4, jako układów o strukturze drabinek L, C obciążonych rezystorami. Jeżeli jednak zera wielomianów $B_n(p\beta_2/\omega_2)$, $B_n[p/(\beta_3\omega_3)]$ są zerami części parzystych, impedancji PR $z_{20}(p)$, $z_{30}(p)$, dołączonych do rozpatrywanego dupleksa w miejsce rezystancji, wtedy wzmocnienia (7.4) można z powodzeniem zastosować do celów dopasowania szerokopasmowego tych impedancji.

Otrzymane tutaj wzmocnienia mogą nie być dogodne w syntezie filtrów trójwrotowych, ponieważ nie są one realizowalne w bezstratnym, odwracalnym dupleksie bez użycia indukcyjności sprzężonych. Wzmocnienia (7.4) są jak można przypuszczać przydatne do celów dopasowania szerokopasmowego, dlatego, że dla spełnienia warunków realizowalności układu dopasowującego

(Twierdzenie 3.2), bardzo często wymagane jest użycie funkcji typu RA i co z tym się wiąże, zastosowanie w procesie syntezy indukcyjności sprzężonych. Jeśli jest możliwe, należy wówczas jako zera poszukiwanych funkcji RA wybierać zera będące odbiciem względem osi $j\omega$, zer wielomianów $B_n(p\beta_2/\omega_2)$, $B_n[p/(\beta_3\omega_3)]$. Takie postępowanie nie powoduje wzrostu liczby elementów układu dopasowującego, ponieważ nie wzrasta wówczas stopień współczynników transmisji $s_{21}(p)$, $s_{31}(p)$.

7.2 Konstrukcja wzmocnień mocy o arbitralnie regulowanym tłumieniu

W pracy [82] podano szereg własności jakimi powinny charakteryzować się wymagane skuteczne wzmocnienia mocy, aby można było takie wzmocnienia zastosować w praktyce do przeprowadzenia filtracji sygnału w układzie trójwrotowym o strukturze dupleksera, Rys. 6.4. Niemniej jednak w [82] nie udało się otrzymać wzmocnień mocy o pożądanych cechach bez odwołania się do procedur numerycznych. Autor niniejszej rozprawy wychodząc z podobnych jak w [82] założeń, skonstruował w sposób całkowicie analityczny klasę wzmocnień mocy, przydatną do realizacji w układzie bezstratnego dupleksa nie zawierającego induktorów sprzężonych [58,59,61]. Zaproponowana klasa wzmocnień mocy, charakteryzuje się możliwością dowolnego wyboru poziomu tłumienia na przecięciu charakterystyk częstotliwościowych. Ponadto poziom tłumienia jest niezależny od stopnia wzmocnienia.

Na wstępie wprowadzimy postulaty podobne do założeń przyjmowanych w [82], które to postulaty powinny zostać spełnione przez poszukiwane skuteczne wzmocnienia mocy $G_{12}(\omega^2)$, $G_{13}(\omega^2)$, będące parą wzmocnień dolno i górnoprzepustowych. Wymagane wzmocnienia mocy $G_{12}(\omega^2)$, $G_{13}(\omega^2)$ powinny posiadać następujące cechy:

- 1) $G_{12}(\omega^2)=0$ tylko dla $\omega=\infty$,
- 2) stopień $G_{12}(\omega^2)$ wynosi $4n$,
- 3) $G_{12}(\omega^2)$ jest płaskie dla $\omega=0$ rzędu $2n$,
- 4) $G_{13}(\omega^2)=G_{12}(1/\omega^2)$,
- 5) zera transmisji obu wzmocnień leżą tylko w punktach $p=\infty$ lub w $p=0$,
- 6) wzmocnienie na przecięciu charakterystyk częstotliwościowych $G_0 = G_{12}(\omega_0^2) = G_{13}(\omega_0^2)$ można ustalić arbitralnie przez wybór dodatniego parametru k_0 .

Rozważmy co wynika z przyjętych wyżej założeń. Warunek 4) implikuje, że oba wzmocnienia mają wspólny mianownik będący wielomianem o współczynnikach symetrycznych z obu stron. Z warunku 5) wynika, że liczniki obu wzmocnień są względnie pierwsze i każde zero $G_{12}(-p^2)$, $G_{13}(-p^2)$ różne od $p=0$ jest zerem $[1-s_{11}(p)][1-s_{11}^*(p)]$, patrz wzór (6.231). Dla wypełnienia powyższych warunków zakładamy, że licznik $G_{12}(\omega^2)$ jest stałą równą K . Tym samym postulaty 2),4) implikują postać licznika $G_{13}(\omega^2)$ jako $K\omega^{4n}$. Ostatecznie poszukiwane wzmocnienia mocy mają formę:

$$G_{12}(\omega^2) = K / M(\omega^2) \quad , \quad G_{13}(\omega^2) = K\omega^{4n} / M(\omega^2) \quad , \quad (7.25)$$

$M(\omega^2)$ jest wielomianem stopnia $4n$ o współczynnikach symetrycznych z obu końców i $0 < K \leq 1$. Ze względu fakt, że K jest parametrem, można bez strat dla ogólności przyjąć wielomian $M(\omega^2)$ jako moniczny. Postulat 3) implikuje, iż $M(\omega^2)-1=0$ krotności $2n$ w punkcie $\omega=0$. Analogicznie uwzględniając postulat 2) wnioskujemy, że $M(\omega^2)-\omega^{4n}=0$ krotności $2n$ w punkcie $\omega=\infty$. W konsekwencji wielomian $M(\omega^2)$ musi mieć formę

$$M(\omega^2) = \omega^{4n} + k_0\omega^{2n} + 1 \quad , \quad (7.26)$$

przy czym $k_0 > -2$, co jest konieczne dla faktoryzacji $M(-p^2)$ na wielomian SH i wielomian anty-Hurwitza. Łatwo zauważyć, że dla $k_0=0$ wzmocnienia $G_{12}(\omega^2)$ i $G_{13}(\omega^2)$ stają się klasyczną parą

stałorezystancyjnych wzmocnień Butterwortha o 3 dB tłumieniu na przecięciu charakterystyk częstotliwościowych. Z użyciem (7.26) wzmocnienia (7.25) można zapisać w postaci:

$$G_{12}(\omega^2) = \frac{K}{\omega^{4n} + k_0 \omega^{2n} + 1}, \quad G_{13}(\omega^2) = \omega^{4n} G_{12}(\omega^2). \quad (7.27)$$

Stała wzmocnienia $K \in (0,1]$. Spełnienie warunku (7.3) przez wzmocnienia (7.27) wymaga, aby $k_0 \geq -2\sqrt{1-K}$. Jednak stosowanie wzmocnień (7.27) z parametrem $k_0 \leq 0$ jest niecelowe, gdyż wtedy wzmocnienie mocy na przecięciu charakterystyk częstotliwościowych wynosi: $G_0 \geq 0.5K$, (-3 dB). W dalszych rozważaniach przyjmuje się $k_0 > 0$. Dla pulsacji $\omega_0=1$ z równań (7.27) otrzymujemy:

$$G_0 = K / (2 + k_0) < K / 2. \quad (7.28)$$

Z (7.28) wynika, że wzmocnienie G_0 monotonicznie maleje wraz ze wzrostem parametru k_0 . Częstotliwości graniczne pasm przenoszenia wyznaczamy z (7.27) przy zadanej dopuszczalnej zmianie wzmocnienia w pasmie przenoszenia, oznaczonej jako $t \in (0,1)$. Dla poziomu $t \cdot K$, pulsacja graniczna wzmocnienia $G_{12}(\omega^2)$ wyniesie:

$$\omega_2 = \sqrt[n]{\sqrt{(0.5k_0)^2 + t^{-1} - 1} - 0.5k_0}, \quad \omega_3 = \omega_2^{-1}. \quad (7.29)$$

Warunek rozdziału pasm, tzn. $\omega_2 < \omega_3$, implikuje:

$$t > 1 / (2 + k_0). \quad (7.30)$$

Wielomian SH $m(p)$ i wielomian Hurwitza $l(p)$, tworzące minimalnofazowy współczynnik odbicia (7.16) wyznaczamy analogicznie jak wielomian faktoryzowany w (7.18), tzn. jako faktoryzację Hurwitza następujących wyrażeń:

$$m(p)m_*(p) = p^{4n} + (-1)^n k_0 p^{2n} + 1, \quad (7.31)$$

$$l(p)l_*(p) = (1-K)p^{4n} + (-1)^n k_0 p^{2n} + 1 - K. \quad (7.32)$$

Niech $k_0 \geq 2$, wówczas na podstawie (7.31) otrzymujemy:

$$m(p) = B_n(p/\omega_a)B_n(p \cdot \omega_a), \quad (7.33)$$

przy czym:

$$\omega_a^{2n} = k_0 / 2 + \sqrt{(k_0 / 2)^2 - 1}. \quad (7.34)$$

Wielomian $B_n(p/\omega_a)$ jest wielomianem Butterwortha stopnia n względem zmiennej p/ω_a .

Niech $k_0 \in (0,2)$, wówczas równanie (7.31) faktoryzowane analogicznie jak (7.18,7.21), pozwala ustalić następującą postać wielomianu $m(p)$:

$$m(p) = B_n(p \cdot e^{j\Theta/2n})B_n(p \cdot e^{-j\Theta/2n}), \quad (7.35)$$

gdzie:

$$\Theta = \arctg \sqrt{(2/k_0)^2 - 1}. \quad (7.36)$$

Wyznaczanie wielomianu $l(p)$ z faktoryzacji wyrażenia (7.32) przeprowadza się analogicznie.

W efekcie przeprowadzone rozumowanie pozwala sformułować poniższe równania.

1) Faktoryzacja mianownika $\rho_{11}(p)$ wynosi:

$$m(p) = \begin{cases} B_n(p/\omega_a)B_n(p \cdot \omega_a), & k_0 > 2 \\ B_n^2(p), & k_0 = 2 \\ B_n(p \cdot e^{j\frac{\Theta}{2n}})B_n(p \cdot e^{-j\frac{\Theta}{2n}}), & k_0 \in (0,2) \end{cases}, \quad (7.37)$$

przy czym ω_a oraz Θ dane są wzorami (7.34,7.36).

2) Faktoryzacja licznika $\rho_{11}(p)$ wynosi:

$$l(p) = \begin{cases} \pm\sqrt{k_0} \cdot p^n, & K = 1, k_0 > 0, \\ \pm\sqrt{1-K} \cdot B_n(p/\omega_t) B_n(p \cdot \omega_t), & K \in (0,1), k_0 > 2, \\ \pm\sqrt{1-K} \cdot B_n^2(p), & K \in (0,1), k_0 = 2, \\ \pm\sqrt{1-K} \cdot B_n(p \cdot e^{j\frac{\Theta_t}{2n}}) B_n(p \cdot e^{-j\frac{\Theta_t}{2n}}), & K \in (0,1), k_0 \in (0,2). \end{cases} \quad (7.38)$$

Wielkości ω_t , Θ_t wyznaczamy tak jak stałe ω_a , Θ , z tym, że we wzorach (7.34,7.36) zastępujemy k_0 przez $k_0/(1-K)$.

W świetle Własności 5 z Rozdziału 6.3 jest oczywiste, że wzmocnienia (7.27) są realizowalne w układzie dipleksera bez stosowania induktorów sprzężonych. Wzmocnienia (7.27) są ponadto przydatne do rozwiązywania problemów dopasowania szerokopasmowego impedancji, ponieważ umożliwiają obliczenie na drodze analitycznej minimalnofazowego współczynnika odbicia $\rho_{11}(p)$, dla poziomu wzmocnienia K oraz stopnia wzmocnienia n , traktowanych jako parametr. W zastosowaniach praktycznych istotną cechą wzmocnień (7.27) jest możliwość arbitralnego wyboru poziomu tłumienia na przecięciu charakterystyk częstotliwościowych.

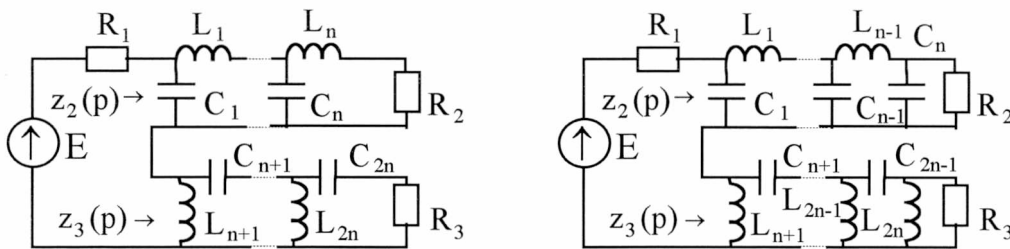
Realizację układową wzmocnień (7.27) w układzie dipleksera, bez induktorów sprzężonych, zakończonych ponadto jednostkowymi rezystancjami, zilustrowano na Rys. 7.2. Wzmocnienia (7.27) nie posiadają wspólnych zer na osi $j\omega$, zatem impedancje $z_i(p)$ $i=2,3$ są minimum reaktancji i mogą być wyznaczone z wzorów (6.231) w sposób jednoznaczny dla współczynnika odbicia $s_{11}(p)$ postaci:

$$s_{11}(p) = \frac{l_1(p)n_{11}(p)}{g(p)}, \quad (7.39)$$

gdzie wielomian Hurwitza $l_1(p)$ i wielomian SH $n_{11}(p)$ są częściami wielomianu $l(p)$, (7.38), tzn:

$$l(p) = l_1(p)n_{11}(p). \quad (7.40)$$

Podział wielomianu $l(p)$ na wielomiany $l_1(p)$ i $n_{11}(p)$ jest arbitralny.



Rys. 7.2 a, b. Struktura dipleksera realizującego wzmocnienia (7.27)
dla n -parzystych i n -nieparzystych.

W rzeczywistości, stosując wzmocnienia (7.27) operujemy zmienną p/ω_0 zamiast zmiennej p . Załóżmy, że dane są wielkości t_a , t_b , ω_0 oraz n . Szukamy takiego k_0 , aby pasma dolno i górno-przepustowe były rozdzielone. Ponadto należy określić pulsacje graniczne obu pasm ω_a i ω_b . Przez obliczenie pochodnej wzmocnień $G_{12}(\omega^2)$ i $G_{13}(\omega^2)$, (7.27) łatwo jest stwierdzić, że dla $\omega > 0$ wzmocnienie $G_{12}(\omega^2)$ jest malejącą, zaś $G_{13}(\omega^2)$ rosnącą funkcją ω . Korzystając z faktu monotoniczności wzmocnień (7.27) i biorąc pod uwagę (7.28), staje się oczywiste, że koniecznym i wystarczającym warunkiem rozdziału pasm jest warunek:

$$\min(t_a, t_b) > 1/(2 + k_0). \quad (7.41)$$

Dla ustalonego zgodnie z (7.41) parametru k_0 , z równań (7.27) można wyznaczyć poszukiwane pulsacje:

$$\left(\frac{\omega_a}{\omega_0}\right)^{2n} = -0.5k_0 + \sqrt{(0.5k_0)^2 + t_a^{-1} - 1}, \quad \left(\frac{\omega_b}{\omega_0}\right)^{2n} = [0.5k_0 + \sqrt{(0.5k_0)^2 + t_b^{-1} - 1}] / (t_b^{-1} - 1) . \quad (7.42)$$

W praktyce interesujące jest również nieco inne sformułowanie zadania projektowego. Zakładamy, że dane są wielkości t_a , t_b , n , oraz ω_a , ω_b , w miejsce ω_0 . Szukamy takich parametrów k_0 i ω_0 aby pasma były rozdzielone. Z (7.27) wyznaczamy k_0 jako:

$$k_0 = \frac{t_a^{-1} - 1 - (\omega_a / \omega_0)^{4n}}{(\omega_a / \omega_0)^{2n}} = \frac{(t_b^{-1} - 1)(\omega_a / \omega_0)^{4n} - 1}{(\omega_b / \omega_0)^{2n}} . \quad (7.43)$$

Założenie $k_0 > 0$ implikuje wówczas:

$$t_a^{-1} - 1 > (\omega_a / \omega_0)^{4n}, \quad t_b^{-1} - 1 > (\omega_b / \omega_0)^{4n} . \quad (7.44)$$

Z równań (7.43) po kilku przekształceniach algebraicznych otrzymujemy wyrażenie na wartość pulsacji ω_0 , która wyniesie:

$$\omega_0^{4n} = \omega_a^{2n} \omega_b^{2n} \frac{(\omega_a / \omega_b)^{2n} + t_b^{-1} - 1}{(\omega_a / \omega_b)^{2n} + t_a^{-1} - 1} . \quad (7.45)$$

Uwzględniając (7.45), ograniczenia (7.44) transformują się w pojedynczą nierówność:

$$(t_a^{-1} - 1)(t_b^{-1} - 1) > (\omega_a / \omega_b)^{4n} . \quad (7.46)$$

Warunek rozdziału pasm częstotliwości: $\omega_a < \omega_0 < \omega_b$ staje się przy użyciu (7.46) równoważny nierówności:

$$(\omega_a / \omega_b)^{2n} < \min_{i,j=a,b} \{1 - 0.5 / t_i + \sqrt{(1 - 0.5 / t_i)^2 + t_j^{-1} - 1}\} . \quad (7.47)$$

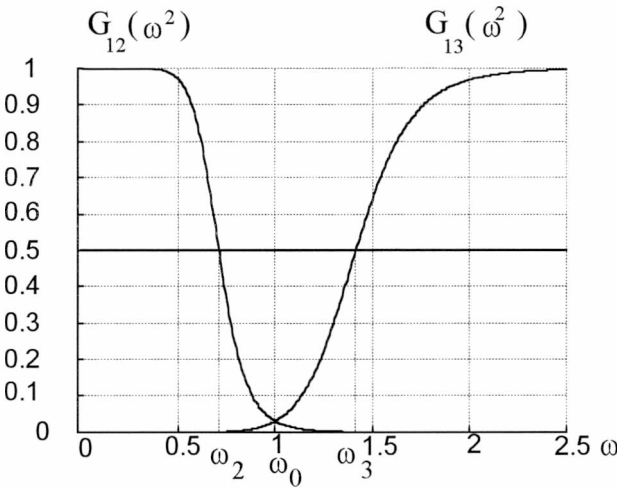
Reasumując, jeżeli zadane wielkości t_a , t_b , ω_a , ω_b , n spełniają nierówności (7.46, 7.47) to poszukiwane wielkości k_0 i ω_0 obliczamy z równań (7.43, 7.45). W rezultacie pasma przenoszenia obu wzmacnień są rozdzielone oraz tłumienie na przecięciu charakterystyk częstotliwościowych rozważanych wzmacnień jest większe od 3 dB.

Wzmocnienia mocy omówione w niniejszym rozdziale posiadają kilka zalet w stosunku do wzmacnień mocy otrzymywanych przy użyciu metod ściśle numerycznych. Wzmocnienia te umożliwiają wybór apriori poziomu tłumienia na przecięciu charakterystyk częstotliwościowych lub wybór szerokości wymaganych pasm przenoszenia. Dodatkową zaletą jest traktowanie stałych wzmacnienia jako parametrów, co staje się istotną cechą przy użyciu wzmiankowanych wzmacnień do rozwiązywania problemów dopasowania szerokopasmowego impedancji. Ponadto zaproponowane wzmacnienia zapewniają zazwyczaj wymaganą filtrację sygnału już dla niewielkich wartości parametru n . Analityczne rozwiązanie problemu faktoryzacji współczynnika odbicia $\rho_{11}(p)$ jest rozwiązaniem całkowicie autorskim. Wzmocnienia mocy (7.27) zapewniają szersze pasma przenoszenia i lepsze tłumienie sygnału poza pasmem niż wzmacnienia rozpatrywane w [82] (na drodze analityczno-numerycznej). Zaproponowane wzmacnienia mocy są również przydatne przy numerycznym projektowaniu filtrów trójwrotowych, choćby jako dogodny punkt startowy procedury optymalizacyjnej.

7.3. Przykłady

Na Rys. 7.3. pokazano przykładowe wykresy wzmocnień (7.4) z parametrami:

$$K_2=K_3=1, \beta_2=\beta_3=1, \omega_0 = 1, \omega_2 = 1/\sqrt{2}, \omega_3 = \sqrt{2}, n=5.$$

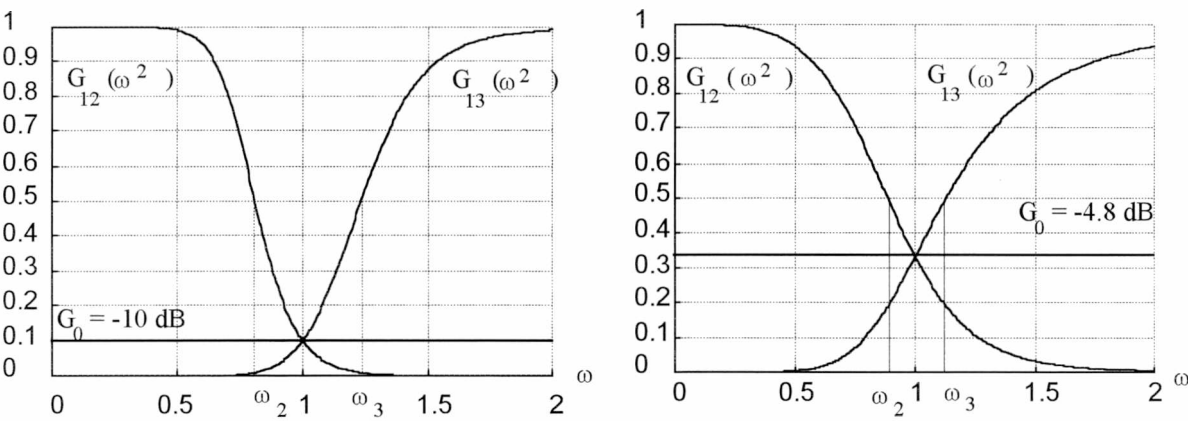


Rys. 7.3. Wykresy wzmocnień (7.4) kreślone dla n=5,

n	G_0 [dB]
2	-7
5	-15
10	-30

Tabela 7.1. Tabela zmian poziomu wzmocnienia G_0 w funkcji n dla wzmocnień z Rys. 7.3.

Na Rys. 7.4. przedstawiono wykresy wzmocnień (7.27) z parametrami $K=1, t=0.5$.



Rys. 7.4. Wykresy funkcji (7.27) kreślone dla n=5 i $k_0=8$ oraz dla n=2 i $k_0=1$.

Tabela 7.2. ilustruje zależność pulsacji ω_2 dla różnych wartości n, k_0 oraz $t=0.5$ dla użytych wzmocnień postaci (7.27).

k_0	G_0 (dB)	n	ω_1	n	ω_1	n	ω_1	n	ω_1
1	-4.8	2	0.887	3	0.923	5	0.953	10	0.976
2	-6.0	2	0.802	3	0.863	5	0.916	10	0.957
8	-10.0	2	0.592	3	0.705	5	0.811	10	0.901
98	-20.0	2	0.318	3	0.466	5	0.632	10	0.795
998	-30.0	2	0.178	3	0.316	5	0.501	10	0.708

Tabela 7.2. Zależność pulsacji ω_2 w funkcji parametrów n, k_0 dla wzmocnień (7.27).

Dla wzmocnień (7.4) zostanie zaprezentowany przykład obliczeniowy dotyczący możliwości użycia wzmiankowanych wzmocnień dla celów dopasowania szerokopasmowego prostych impedancji PR.

Dane są impedancje PR

$$z_{20}(p) = (4p + 10)/(p + 10) \quad , \quad z_{30}(p) = (2p + 12)/(2p + 3) \quad . \quad (7.48)$$

Należy dopasować impedancje (7.48) do generatora o rezystancji wewnętrznej $R_1 = 1 \, \Omega$ w pasmach $(0, 3]$ i $[5, \infty)$ stosując wzmocnienia (7.4). Dla prostoty obliczeń przyjmijmy najniższy z możliwych stopień wzmocnienia tzn. $n=1$. Pasma przenoszenia definiujemy na poziomie -3 dB. Przy powyższych założeniach wzmocnienia (7.4) przyjmą formę

$$G_{12}(\omega^2) = 9K/(9 + \omega^2) \quad , \quad G_{13}(\omega^2) = K\omega^2/(25 + \omega^2) \quad . \quad (7.49)$$

Korzystając z (7.13) wyznaczamy: $\omega_0 = \sqrt{15}$, $G_0 = \frac{3}{8}K$. Sprawdzamy, że dane wzmocnienia spełniają warunek rozdziału pasm częstotliwości (7.15). Zgodnie z (7.18) obliczamy licznik $l(p)$ minimalnofazowego współczynnika odbicia $\rho_{11}(p)$, jako:

$$l(p) = \begin{cases} 4p & \text{dla } K = 1 \\ \sqrt{1-K}(p^2 + d \cdot p + 225) & \text{dla } K \in (0, 1) \end{cases} \quad , \quad (7.50)$$

gdzie:

$$d = \left(\sqrt{17 - 9K - 4\sqrt{(1+3K)(4-3K)}} + \sqrt{17 - 9K + 4\sqrt{(1+3K)(4-3K)}} \right) / \sqrt{1-K} \quad . \quad (7.51)$$

Na podstawie równań (6.20-6.26) wyznaczamy niezbędne wielomiany:

$$\begin{aligned} e_1(p) &= \sqrt{K} \quad , \quad h_{21}(p) = 3(p+5) \quad , \quad h_{31}(p) = p(p+3), \\ g(p) &= (p+3)(p+5) \quad , \quad \gamma_1(p) = p^2 + 4\sqrt{3}p + 15 \quad . \end{aligned} \quad (7.52)$$

Impedancje (7.48) posiadają jednokrotne zera transmisji klasy I Youli, (3.29) Rozdział 3.1.4, w punktach odpowiednio $p_2=5$ i $p_3=3$. Dla znalezionych z pomocą (3.29) zer transmisji obciążeń, z równań (6.1, 6.2) obliczamy wymagane funkcje:

$$h_2(p) = \frac{2(p-5)}{p+10} \quad , \quad h_3(p) = \frac{2(p-3)}{2p+3} \quad , \quad (7.53)$$

$$B_2(p) = \frac{p-5}{p+5} \quad , \quad B_3(p) = \frac{p-3}{p+3} \quad , \quad (7.54)$$

$$A_2(p) = \frac{p-10}{p+10} \quad , \quad A_3(p) = \frac{2p-3}{2p+3} \quad . \quad (7.55)$$

Ponadto dla rezystancji $z_1(p) \equiv 1$, ustalamy:

$$h_1(p) = A_1(p) = B_1(p) = 1 \quad . \quad (7.56)$$

Następnie wykorzystując wzory (6.204-6.207) i równania (7.50, 7.52-7.46) wyznaczamy klasę macierzy paraunitarnych BR, bezstratnego, odwracalnego trójwrotnika N w konfiguracji dipleksera:

$$s_{11}(p) = \frac{l(p)}{g(p)} \cdot \eta_{11}(p) \quad , \quad (7.57)$$

$$s_{12}(p) = s_{21}(p) = B_2(p) \frac{3\sqrt{K}}{p+3} \cdot \eta_{21}(p) \quad , \quad (7.58)$$

$$s_{13}(p) = s_{31}(p) = B_3(p) \frac{p\sqrt{K}}{p+5} \cdot \eta_{31}(p) , \quad (7.59)$$

$$s_{23}(p) = s_{32}(p) = B_2(p)B_3(p) \frac{-K \cdot p}{1-s_{11}(p)} \cdot \eta_{21}(p)\eta_{31}(p) , \quad (7.60)$$

$$s_{22}(p) = B_2(p)\hat{s}_{22}(p) , \quad s_{33}(p) = B_3(p)\hat{s}_{33}(p) , \quad (7.61)$$

przy czym:

$$\hat{s}_{22}(p) = -\eta_{21}^2(p) \left[\frac{g^*(p)}{g(p)} \cdot \frac{1-s_{11}^*(p)}{1-s_{11}(p)} + \frac{9K}{(p+3)^2(1-s_{11}(p))} \cdot B_2(p) \right] , \quad (7.62)$$

$$\hat{s}_{33}(p) = \eta_{31}^2(p) \left[\frac{g^*(p)}{g(p)} \cdot \frac{1-s_{11}^*(p)}{1-s_{11}(p)} + \frac{p^2 K}{(p+5)^2(1-s_{11}(p))} \cdot B_3(p) \right] . \quad (7.63)$$

Funkcje $\eta_{11}(p)$, $\eta_{21}(p)$, $\eta_{31}(p)$ są dowolnymi funkcjami typu RA. Ponieważ impedancje (7.48) nie posiadają zer transmisji na osi $j\omega$, zatem postulat 7) z Rozdziału 6.1 jest spełniony. Aby macierz paraunitarna $\mathbf{S}(p)$ postaci (7.57-7.61) była macierzą rozproszenia fizycznie realizowalnego dipleksera, czyli aby macierz $\mathbf{S}(p)$ spełniała tezy Twierdzenia 3.2, muszą zachodzić poniższe warunki.

1) $\mathbf{S}(p)$ jest macierzą analityczną w obszarze $\text{Re } p > 0$.

2)

$$A_i(p)|_{p=p_i} - \hat{s}_{ii}(p)|_{p=p_i} = 0 \quad i=2,3 . \quad (7.64)$$

Warunki 1) 2) można spełnić dla różnego wyboru stałej K oraz rozmaitego wyboru funkcji $\eta_{11}(p)$, $\eta_{21}(p)$, $\eta_{31}(p)$. Łatwo jest sprawdzić, że maksymalizując K , czyli ustalając $K=1$, funkcje $\eta_{11}(p)$, $\eta_{21}(p)$, $\eta_{31}(p)$ muszą zostać wybrane jako: $\eta_{11}(p) = \eta_{21}(p) = \eta_{31}(p) \equiv 1$. Macierz rozproszenia $\mathbf{S}(p)$ bezstratnego, odwracalnego dipleksera N , przyjmuje wówczas formę:

$$s_{11}(p) = \frac{4p}{p^2 + 8p + 15} , \quad (7.65)$$

$$s_{21}(p) = \frac{3(p-5)}{p^2 + 8p + 15} , \quad (7.66)$$

$$s_{31}(p) = \frac{p(p-3)}{p^2 + 8p + 15} , \quad (7.67)$$

$$s_{23}(p) = \frac{-3p(p-5)(p-3)}{(p^2 + 8p + 15)(p^2 + 4p + 15)} , \quad (7.68)$$

$$s_{22}(p) = \frac{-p(p^2 - p + 12)(p-5)}{(p^2 + 8p + 15)(p^2 + 4p + 15)} , \quad (7.69)$$

$$s_{33}(p) = \frac{(4p^2 - 5p + 75)(p-3)}{(p^2 + 8p + 15)(p^2 + 4p + 15)} . \quad (7.70)$$

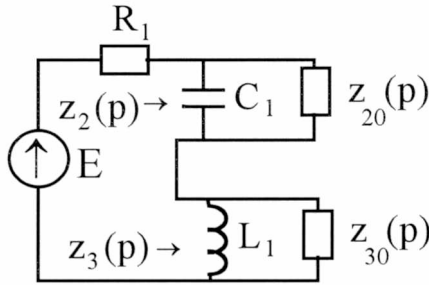
Macierz admitancyjną $\mathbf{Y}_A(p)$ trójwrotnika dołączonego N_A , można wyznaczyć z równania (3.16). W rozpatrywanym przykładzie istnieje również macierz impedancyjna $\mathbf{Z}_N(p)$ dipleksera N . Macierz $\mathbf{Z}_N(p)$ wyznaczamy przy pomocy zależności (3.17), otrzymując:

$$\mathbf{Z}_N(p) = \begin{bmatrix} z_{11a}(p) + z_{11b}(p) & z_{21a}(p) & z_{21b}(p) \\ z_{21a}(p) & z_{22a}(p) & 0 \\ z_{21b}(p) & 0 & z_{22b}(p) \end{bmatrix}, \quad (7.71)$$

przy czym macierze impedancyjne $\mathbf{Z}_a(p)$ i $\mathbf{Z}_b(p)$ czwórników N_2 i N_3 tworzących diplexer N , mają postać:

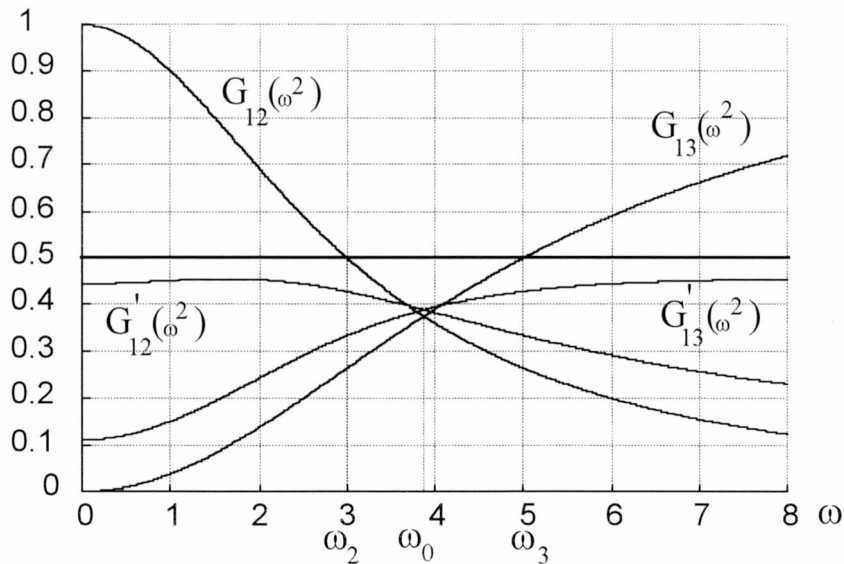
$$\mathbf{Z}_a(p) = \frac{6}{p} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}_b(p) = \frac{2p}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.72)$$

Realizację układową macierzy (7.72), przedstawiono na Rys. 7.5.



Rys. 7.5. Realizacja układowa przykładu. Wartości elementów wynoszą: $L_1=2/5$, $C_1=1/6$.

Wykresy wzmocnień mocy przed i po zastosowaniu układu dopasowującego zilustrowano na Rys. 7.6.



$G_{12}(\omega^2)$, $G_{13}(\omega^2)$ - wzmocnienia mocy po zastosowaniu układu dopasowującego,
 $G'_{12}(\omega^2)$, $G'_{13}(\omega^2)$ - wzmocnienia mocy przed zastosowaniem układu dopasowującego.

Rys. 7.6. Wykresy wzmocnień mocy przed i po zastosowaniu układu dopasowującego, $n=1$.

Powyższy przykład wskazuje, że po zastosowaniu nawet najprostszego układu dopasowującego istotnie polepszyło się przenoszenie mocy w wymaganych pasmach częstotliwości, zapewniając jednocześnie wymaganą filtrację sygnału.

Na koniec zilustrowany zostanie przykład użycia wzmocnień (7.27) do przeprowadzenia wymaganej filtracji sygnału w układzie bezstratnego diplexera, obciążonego rezystancjami.

Przyjmijmy, że wymagamy realizacji wzmocnień mocy postaci (7.27) z parametrami: $n=2$, $k_0=1$, $K=1$, $t=0.5$ (-3 dB), $\omega_0=1$. Z równania (7.28) obliczamy wzmocnienie na przecięciu charakterystyk częstotliwościowych: $G_0=1/3$ (-4.8 dB), natomiast z równań (7.29) wyznaczamy pulsacje graniczne pasm przenoszenia: $\omega_2=0.887$ i $\omega_3=1.127$. Następnie przy pomocy (7.36) obliczamy $\Theta=\pi/3$, oraz z (7.37,7.38) obliczamy wielomiany współczynnika odbicia $s_{11}(p)$, jako:

$$m(p) = B_2(p \cdot e^{j\frac{\pi}{12}})B_2(p \cdot e^{-j\frac{\pi}{12}}) = p^4 + (\sqrt{3}+1)p^3 + (\sqrt{3}+2)p^2 + (\sqrt{3}+1)p + 1, \quad (7.73)$$

$$l(p) = \pm p^2. \quad (7.74)$$

Zgodnie ze wzorami (6.224) znajdujemy części parzyste impedancji $Ev \ z_i(p) = 0.5[z_i(p) + z_{i*}(p)]$ $i=2,3$:

$$Ev \ z_3(p) = p^8 Ev \ z_2(p), \quad (7.75)$$

$$Ev \ z_2(p) = [p^4 + (\sqrt{3}+1)p^3 + (\sqrt{3}+2)p^2 + (\sqrt{3}+1)p + 1]^{-1} \cdot [p^4 - (\sqrt{3}+1)p^3 + (\sqrt{3}+2)p^2 - (\sqrt{3}+1)p + 1]^{-1}, \quad (7.76)$$

gdzie impedancje $z_2(p)$, $z_3(p)$, są impedancjami wejściowymi czwórników tworzących diplexer Rys. 6.4., zakończonych jednostkowymi rezystorami. Stosując procedurę Gewertza [2] wyznaczamy poszukiwane impedancje $z_2(p)$, $z_3(p)$:

$$z_3(p) = z_2\left(\frac{1}{p}\right), \quad z_2(p) = \frac{c \cdot p^3 + d \cdot p^2 + f \cdot p + 1}{p^4 + a \cdot p^3 + b \cdot p^2 + a \cdot p + 1}, \quad (7.77)$$

gdzie stałe a, b, c, d, f są obliczone dla dwóch przypadków.

1) przypadek $l(p) = p^2$, wówczas:

$$a = b = \sqrt{3} + 1, \quad c = 0.5\sqrt{3}, \quad d = 0.5(\sqrt{3} + 3), \quad f = 0.5\sqrt{3} + 1. \quad (7.78)$$

2) przypadek $l(p) = -p^2$, wówczas:

$$a = \sqrt{3} + 1, \quad b = \sqrt{3} + 3, \quad c = 0.5, \quad d = 0.5(\sqrt{3} + 1), \quad f = \sqrt{3} + 0.5. \quad (7.79)$$

Wartości elementów drabinek L, C wyznaczone zostały dla przypadku 1):

- drabinka FDP:

$$C_1 = 2\sqrt{3}/3, \quad L_1 = 3/2, \quad C_2 = \sqrt{3}/3 + 1, \quad L_2 = (\sqrt{3} - 1)/2, \quad (7.80)$$

- drabinka FGP:

$$L_3 = \sqrt{3}/2, \quad C_3 = 2/3, \quad L_4 = (3 - \sqrt{3})/2, \quad C_4 = \sqrt{3} + 1. \quad (7.81)$$

Wykresy wzmocnień mocy zamieszczono na Rys. 7.4b), natomiast struktura układowa jest identyczna jak na Rys. 7.2a).

7.4. Podsumowanie rozdziału

W Rozdziale 7. zostały wprowadzone nowe klasy par wzmocnień mocy, które pozwalają na analityczne wyznaczenie minimalnofazowego współczynnika odbicia $s_{11}(p)$ dla dowolnego stopnia wzmocnienia n i dla stałej wzmocnienia K traktowanej jako parametr. Konstrukcja prezentowanych wzmocnień jest całkowicie nowa i nie ma odpowiednika w dostępnej literaturze. Użycie omawianych wzmocnień pozwala w wielu wypadkach na praktyczne rozwiązywanie zagadnień filtracji oraz rozwiązywanie problemów dopasowania szerokopasmowego w układach trójwrotowych. Wprowadzone wzmocnienia umożliwiają zazwyczaj efektywną konstrukcję wymaganej klasy macierzy rozproszenia $S(p)$, trójwrotnika o strukturze bezstratnego, odwracalnego diplexera. Co więcej, wzmocnienia rozważane w Rozdziale 7.2 pozwalają ustalić tłumienie na

przecięciu charakterystyk częstotliwościowych wzmacnień mocy, na arbitralnie wybranym poziomie. Ponadto tłumienie na przecięciu charakterystyk częstotliwościowych wzmacnień mocy nie zależy od stopni wzmacnienia.

8. PODSUMOWANIE PRACY

Celem niniejszej rozprawy było podanie nowych, analitycznych metod szerokopasmowego dopasowania impedancji w układach dwu i trójwrotowych. Cel pracy został w Rozdziale 2 przedstawiony w formie czterech zagadnień:

1. W ramach opracowania nowych procedur szerokopasmowego dopasowania impedancji w układach dwuwrotowych, wykorzystując dwa kryteria dopasowania szerokopasmowego:
 - kryterium maksymalizacji minimalnego poziomu skutecznego wzmocnienia mocy w danym pasmie częstotliwości, oraz
 - kryterium maksymalizacji stałej wzmocnienia przy zadanym stosunku maksymalnego skutecznego wzmocnienia mocy do minimalnego skutecznego wzmocnienia mocy w wymaganym pasmie częstotliwości,

zrealizowano następujące zadania.

- a) Opracowano nowe procedury dopasowania szerokopasmowego dla impedancji składającej się z równoległego obwodu RC z szeregowo dołączoną indukcyjnością L. Udowodniono, że dopasowanie jest zawsze możliwe z użyciem funkcji regularnej wszechprzepustowej pierwszego stopnia dla pasmowo-przepustowych wzmocnień mocy typu Butterwortha i Czebyszewa. Dotychczasowe formuły dopasowania wymagały zastosowania funkcji regularnej wszechprzepustowej drugiego stopnia.
- b) Podano procedury dopasowania szerokopasmowego dla innych mających zastosowanie praktyczne modeli obciążeń: dwójników złożonych z równoległego obwodu RC lub szeregowego obwodu RL oraz dla impedancji, które są modelami stratnych obwodów rezonansowych RLC (szeregowych i równoległych).

2. W zakresie opracowania metod szerokopasmowego dopasowania impedancji w układach trójwrotowych, ze szczególnym uwzględnieniem układów o strukturze dipleksera otrzymano niżej wymienione wyniki.

- a) Skonstruowano klasę macierzy paraunitarnych $BR\ S(p)$, zawierającą jako podklasę wszystkie macierze rozproszenia fizycznie realizowalnego, bezstratnego, odwracalnego trójwrotnika, posiadającego wymagane skuteczne wzmocnienia mocy przy zadanych, częstotliwościowo uzależnionych obciążeniach.
- b) Rozwiązano problem konstrukcji klasy macierzy rozproszenia $S(p)$ dla trójwrotowego układu dopasowującego, w konfiguracji trzech czwórników połączonych w "gwiazdę".
- c) Opracowano konstrukcję klasy macierzy rozproszenia $S(p)$ w zagadnieniu dopasowania szerokopasmowego pary czwórników, tworzących strukturę dipleksera.

3. W ramach opracowania metod realizacji wzmocnień napięciowych ze szczególnym uwzględnieniem trójwrotnika o strukturze dipleksera, uzyskano następujące rezultaty.

Podano warunki konieczne i wystarczające realizowalności:

- a) skutecznych wzmocnień napięciowych w układzie trójwrotowym o dowolnej konfiguracji (Twierdzenie 5.1),
- b) pary skutecznych wzmocnień napięciowych o jednakowych charakterystykach fazowych (Twierdzenie 5.2),
- c) pary skutecznych wzmocnień napięciowych spełniających warunek subiektywnego braku zniekształceń amplitudowych i fazowych (Twierdzenie 5.3),
- d) skutecznych wzmocnień napięciowych w n-wrotowym multiplekserze obciążonym danymi impedancjami PR (Twierdzenie 5.4).

4. W zakresie opracowania nowych klas skutecznych wzmocnień mocy, przydatnych do przeprowadzania wymaganej filtracji lub do rozwiązywania zagadnień dopasowania szerokopasmowego w układach trójwrotowych, zrealizowano wymienione niżej zadania.

- a) Skonstruowano parę płaskich skutecznych wzmacnień mocy o regulowanym tłumieniu na przecięciu charakterystyk częstotliwościowych i o arbitralnie ustalonej stałej wzmacnienia z przedziału $(0,1]$.
- b) Rozwiązano problem konstrukcji pary maksymalnie płaskich skutecznych wzmacnień mocy dolno i górno-przepustowych, które nie są wzmacnieniami stałorezystancyjnymi, tzn. tłumienie na przecięciu charakterystyk częstotliwościowych jest większe niż 3 dB.

Konstrukcje macierzy rozproszenia z punktów 2b), 2c) mogą być również stosowane do realizacji filtrów trójwrotowych. Także wzmacnienia wymienione w punkcie 4a) można stosować do projektowania filtrów. Wykorzystanie wzmacnień z punktu 4b) do realizacji filtrów trójwrotowych jest w praktyce niewskazane, ponieważ filtr z tego typu wzmacnieniami posiadałby zera transmisji poza osią $j\omega$. Wzmacnienia wymienione w punktach 3b), 3c) mające zastosowanie w zagadnieniach stereofonii, można wykorzystać również do szerokopasmowego dopasowania impedancji. Należy wówczas użyć jedynie modułów omawianych wzmacnień.

Prezentowane wyniki z zakresu opracowania nowych metod dopasowania szerokopasmowego impedancji i metod projektowania filtrów trójwrotowych są rozwiązaniami w pełni autorskimi. Wyniki pracy przedstawione w punktach 1a), 2a), 3a), 4a), 4b) nie znalazły jak dotąd odpowiednika w ogólnie dostępnej literaturze przedmiotu. Cel rozprawy określony w Rozdziale 2 i zrealizowany w formie omówionych tutaj zadań, został zdaniem autora osiągnięty.

Oczywiście niniejsza rozprawa nie obejmuje wszystkich aspektów problemu dopasowania szerokopasmowego impedancji w układach dwuwrotowych i trójwrotowych. Istotnym, a jak dotąd nie rozwiązany problemem jest analityczna konstrukcja pary pasmowo-przepustowych skutecznych wzmacnień mocy, nie będących wzmacnieniami stałorezystancyjnymi. Próba skonstruowania powyższych wzmacnień nie przyniosła spodziewanych rezultatów, głównie z powodu matematycznych trudności pojawiających się podczas faktoryzacji wielomianów tworzących tego typu wzmacnienia. Następnym nie w pełni rozwiązany zagadnieniem jest konstrukcja dopuszczalnej w danym problemie dopasowania szerokopasmowego, klasy macierzy $S(p)$, zawierającej wszystkie macierze rozproszenia fizycznie realizowalnych bezstratnych, nieodwracalnych trójwrotników.

Wspomniane problemy będą w przyszłości tematem dalszych badań, podejmowanych przez autora niniejszej rozprawy.

DODATEK 1

W niniejszym dodatku podano rozkłady w szeregi potęgowe w otoczeniu zera i nieskończoności dla współczynnika odbicia typu Butterwortha i Czebyszewa. Zapiszmy wyrażenia będące kontynuacją analityczną skutecznego wzmocnienia mocy Butterwortha i Czebyszewa względem zmiennej zespolonej x :

$$G(-x^2) = \frac{K}{1 + (-1)^n (\beta \cdot x)^{2n}} \quad , \quad (D1.1)$$

$$G(-x^2) = \frac{K}{1 + \varepsilon^2 C_{Vn}^2(-jx)} \quad , \quad (D1.2)$$

gdzie:

$$x = p / \omega_d \quad (D1.3)$$

dla wzmocnień dolnoprzepustowych (FDP) i pasmie przepustowym $[0, \omega_d]$, ponadto

$$x = \omega_g / p \quad (D1.4)$$

dla wzmocnień górnoprzepustowych (FGP) i pasmie przepustowym $[\omega_g, \infty)$ oraz

$$x = \frac{\omega_0}{W} \left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p} \right) = \frac{p^2 + \omega_0^2}{W \cdot p} \quad (D1.5)$$

dla wzmocnień pasmowoprzepustowych (FPP) i pasmie przepustowym $[\omega_d, \omega_g]$, $\omega_g > \omega_d$. Zmienna $p = \sigma + j\omega$ jest pulsacją zespoloną. Stała W :

$$W = \omega_g - \omega_d$$

jest szerokością pasma przenoszenia, natomiast stała

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_d \omega_g}$$

jest pulsacją środkową pasma przenoszenia, n oznacza liczbę naturalną, K jest stałą wzmocnienia z przedziału $K \in (0, 1]$. Niech D oznacza minimalny poziom wzmocnienia w pasmie przenoszenia, $D \in (0, K)$. Dodatnią stałą β można wyznaczyć ze wzoru (D1.1) jako:

$$\beta = \sqrt[n]{K/D - 1} \quad . \quad (D1.6)$$

Analogicznie, dodatnią stałą ε można wyznaczyć ze wzoru (D1.2):

$$\varepsilon = \sqrt{K/D - 1} \quad . \quad (D1.7)$$

Dodatkowo symbol $C_{Vn}(-jx)$ oznacza wielomian Czebyszewa 1-go rodzaju stopnia n względem zmiennej x . W układzie bezstratnego czwórnika zakończonych rezystorami lub ogólniej niefosterowskimi impedancjami PR, związek pomiędzy skutecznym wzmocnieniem mocy, a minimalnofazowym współczynnikiem odbicia $\rho(x)$ wynosi

$$\rho(x)\rho(-x) = 1 - G(-x^2) \quad . \quad (D1.8)$$

Z (D1.8) i (D1.1) otrzymujemy

$$\rho(x) = \pm \delta^n \frac{B_n(\beta \cdot x / \delta)}{B_n(\beta \cdot x)} \quad , \quad (D1.9)$$

natomiast z (D1.8) i (D1.2) mamy

$$\rho(x) = \pm \frac{\hat{C}_n(x)}{C_n(x)} . \quad (D1.10)$$

We wzorze (D1.9) użyto następujących oznaczeń:

$$\delta = \sqrt[n]{1-K} ,$$

oraz

$$B_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \dots + 1$$

jest wielomianem Butterwortha stopnia n względem zmiennej x , przy czym

$$a_{n-1} = 1/\sin \gamma , \quad a_{n-2} = 0.5 \cdot a_{n-1}^2 , \quad a_{n-3} = 0.5 \cdot a_{n-1}^2 \cos 2\gamma / \sin 3\gamma , \quad \gamma = 0.5\pi/n . \quad (D1.11)$$

Podobnie, we wzorze (D1.10) użyto oznaczeń:

$$\begin{aligned} C_n(x) &= x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-3}x^{n-3} + \dots + b_0 , \\ \hat{C}_n(x) &= x^n + \hat{b}_{n-1}x^{n-1} + \hat{b}_{n-2}x^{n-2} + \hat{b}_{n-3}x^{n-3} + \dots + \hat{b}_0 , \end{aligned} \quad (D1.12)$$

gdzie $C_n(x)$, $\hat{C}_n(x)$ są wielomianami Hurwitza w ścisłym znaczeniu (SH), stopnia n , oraz

$$\begin{aligned} \gamma &= 0.5\pi/n , \quad b_{n-1} = \sinh\left(\frac{1}{n} \operatorname{ar} \sinh \frac{1}{\varepsilon}\right) / \sin \gamma , \quad b_{n-2} = 0.5 \cdot b_{n-1}^2 + 0.25n \\ b_{n-3} &= 0.5 \cdot b_{n-1}^3 \sin \gamma \cos 2\gamma / \sin 3\gamma + b_{n-1} \left(0.25 \cdot n - \sin \gamma \cos^2 \gamma / \sin 3\gamma\right) . \end{aligned} \quad (D1.13)$$

Ponadto:

$$b_0 = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1} \cdot \varepsilon} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \frac{1}{2^{n-1} \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1}} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases} . \quad (D1.14)$$

Współczynniki wielomianu $\hat{C}_n(x)$ otrzymamy przez zastąpienie zmiennej ε we wzorach (D1.13) i (D1.14) zmienną

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon / \sqrt{1-K} .$$

Niech

$$\rho(p) = \frac{L(p)}{M(p)} ,$$

gdzie $L(p)$ i $M(p)$ są wielomianami. Dla otrzymania rozkładu $\rho(p)$ w szereg potęgowy w otoczeniu zera wykorzystano następujące zależności

$$\rho = \frac{L}{M} , \quad \rho' = \frac{L'}{M} - \frac{L \cdot M'}{M^2} , \quad \rho'' = \frac{L''}{M} - 2 \frac{L' \cdot M'}{M^2} + 2 \frac{L \cdot (M')^2}{M^3} - \frac{L \cdot M''}{M^2} , \quad (D1.15)$$

$$\rho''' = \frac{L'''}{M} - 3 \frac{L'' \cdot M'}{M^2} - 3 \frac{L' \cdot M''}{M^2} + 6 \frac{L' \cdot (M')^2}{M^3} - 6 \frac{L \cdot (M')^3}{M^4} + 6 \frac{L \cdot M' \cdot M''}{M^3} - \frac{L \cdot M'''}{M^2} , \quad (D1.16)$$

gdzie indeksy ', ', ''' oznaczają kolejne pochodne. Rozkład $\rho(p)$ w szereg potęgowy w otoczeniu nieskończoności uzyskano poprzez rozkład w szereg potęgowy w otoczeniu zera, funkcji $\rho(1/p)$.

Przy rozkładzie w szeregi potęgowe funkcji $\rho(p)$ wykorzystano dodatkowo poniższe zależności. Niech dany będzie rozkład funkcji $f(x)$ w szereg potęgowy w otoczeniu punktu $x=x_0$. Poszukujemy elementów nowego szeregu otrzymanego przez zamianę zmiennej $x = p/\tau$, gdzie τ jest stałą normalizującą. Wykorzystujemy do tego celu wzory:

$$f'(p) = \frac{df(x)}{dx} \frac{dx(p)}{dp} = f'(x) \frac{1}{\tau} \quad \text{oraz} \quad \frac{d^i x(p)}{dp^i} = 0, \quad i = 2, 3, \dots \quad (D1.17)$$

Przez indukcję łatwo można wykazać równość:

$$\frac{d^i f(p)}{dp^i} = \frac{d^i f(x)}{dx^i} \frac{1}{\tau^i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (D1.18)$$

w każdym punkcie x w otoczeniu którego istnieje pochodna $x'(p)$.

Rozkład funkcji $f(x)$ w szereg potęgowy w otoczeniu nieskończoności otrzymamy rozkładając $f(1/x)$ w otoczeniu zera i powracając do starej zmiennej x . Tym samym $x^{-1} = \tau/p$ oraz

$$\frac{d(x^{-1})}{d(p^{-1})} = \tau.$$

Ostatecznie przez analogię do wzorów (D1.17, D1.18) otrzymujemy zależność

$$\frac{d^i f(p)}{d(p)^i} = \frac{d^i f(x)}{d(x)^i} \cdot \tau^i, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (D1.19)$$

obowiązującą w otoczeniu nieskończoności.

Po uwzględnieniu zależności (D1.15-D1.19) w odniesieniu do (D1.9, D1.10), otrzymano następujące rozkłady w szeregi potęgowe współczynników odbicia Butterwortha i Czebyszewa w otoczeniu zera i nieskończoności względem zmiennej zespolonej p .

1) Rozkład w szereg potęgowy w otoczeniu nieskończoności dla $\rho(p)$ typu FDP:

$$\rho(p) = \rho_0^{(\infty)} + \rho_1^{(\infty)} p^{-1} + \rho_2^{(\infty)} p^{-2} + \rho_3^{(\infty)} p^{-3} + \dots = \pm \left\{ 1 - \varphi_1 \left(\frac{\omega_d}{p} \right) + 0.5 \varphi_1^2 \left(\frac{\omega_d}{p} \right)^2 - 0.5 \varphi_1^3 \varphi_2 \left(\frac{\omega_d}{p} \right)^3 + \dots \right\} \quad (D1.20)$$

2) Rozkład w szereg potęgowy w otoczeniu zera dla $\rho(p)$ typu FGP:

$$\rho(p) = \rho_0^{(0)} + \rho_1^{(0)} p + \rho_2^{(0)} p^2 + \rho_3^{(0)} p^3 + \dots = \pm \left\{ 1 - \varphi_1 \left(\frac{p}{\omega_g} \right) + 0.5 \varphi_1^2 \left(\frac{p}{\omega_g} \right)^2 - 0.5 \varphi_1^3 \varphi_2 \left(\frac{p}{\omega_g} \right)^3 + \dots \right\} \quad (D1.21)$$

3) Rozkład w szereg potęgowy w otoczeniu nieskończoności dla $\rho(p)$ typu FPP:

$$\begin{aligned} \rho(p) &= \rho_0^{(\infty)} + \rho_1^{(\infty)} p^{-1} + \rho_2^{(\infty)} p^{-2} + \rho_3^{(\infty)} p^{-3} + \dots = \\ &= \pm \left\{ 1 - \varphi_1 \left(\frac{w}{p} \right) + 0.5 \varphi_1^2 \left(\frac{w}{p} \right)^2 - \varphi_1 \left[0.5 \varphi_1^2 \varphi_2 - \left(\frac{\omega_0}{w} \right)^2 \right] \left(\frac{w}{p} \right)^3 + \dots \right\} \end{aligned} \quad (D1.22)$$

4) Rozkład w szereg potęgowy w otoczeniu zera dla $\rho(p)$ typu FPP:

$$\begin{aligned} \rho(p) &= \rho_0^{(0)} + \rho_1^{(0)} p + \rho_2^{(0)} p^2 + \rho_3^{(0)} p^3 + \dots = \\ &= \pm \left\{ 1 - \varphi_1 \left(\frac{w}{\omega_0} \right) \left(\frac{p}{\omega_0} \right) + 0.5 \varphi_1^2 \left(\frac{w}{\omega_0} \right)^2 \left(\frac{p}{\omega_0} \right)^2 - \varphi_1 \left[0.5 \varphi_1^2 \varphi_2 - \left(\frac{\omega_0}{w} \right)^2 \right] \left(\frac{w}{\omega_0} \right)^3 \left(\frac{p}{\omega_0} \right)^3 + \dots \right\} \end{aligned} \quad (D1.23)$$

Wielkości φ_1, φ_2 dla współczynników odbicia typu Butterwortha wynoszą

$$\varphi_1 = \frac{1 - \delta}{\beta \cdot \sin \gamma}, \quad \varphi_2 = \frac{1 - 2 \sin^2 \gamma}{3 - 4 \sin^2 \gamma} - \frac{\delta}{(1 - \delta)^2} \cdot \frac{2 \sin^2 \gamma}{3 - 4 \sin^2 \gamma} \quad (D1.24)$$

Wielkości φ_1, φ_2 dla współczynników odbicia typu Czebyszewa wynoszą

$$\varphi_1 = b_{n-1} - \hat{b}_{n-1}, \quad \varphi_2 = \frac{1 - 2 \sin^2 \gamma}{3 - 4 \sin^2 \gamma} - 2 \frac{\cos^2 \gamma + \hat{b}_{n-1} b_{n-1} \cdot \sin^2 \gamma}{(3 - 4 \sin^2 \gamma)(b_{n-1} - \hat{b}_{n-1})^2} \quad (D1.25)$$

Otrzymane rozkłady w szeregi potęgowe współczynników odbicia typu Butterwortha i Czebyszewa zostały wykorzystane w Rozdziale 4. przy ustalaniu warunków dopasowania wybranych impedancji PR w układach dwuwrotowych.

DODATEK 2

Niniejszy dodatek zawiera wyprowadzenia wzorów dla rozkładu rzeczywistej funkcji wszechprzepustowej, analitycznej w $\text{Re } p \geq 0$ (ang. regular allpass RA), w szereg potęgowy w otoczeniu zera i nieskończoności. Ogólna postać wymiernej funkcji RA jest następująca

$$\eta(p) = \pm \prod_{i=1}^{n_1} \frac{p - \alpha_i}{p + \alpha_i} \cdot \prod_{j=1}^{n_2} \frac{(p - \sigma_j)^2 + \omega_j^2}{(p + \sigma_j)^2 + \omega_j^2} = \pm \hat{\eta}(p) \quad (\text{D2.1})$$

gdzie: n_1, n_2 - liczby naturalne, oraz $\alpha_i, i=1, \dots, n_1, \sigma_j, \omega_j, j=1, \dots, n_2$ są nieujemnymi stałymi. Do przeprowadzenia rozkładu w szereg potęgowy funkcji $\eta(p)$ wykorzystane zostaną tożsamości:

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(\ln f(x)) , \\ f'(x) &= f(x) \cdot (\ln f(x))' , \\ f''(x) &= f(x) \cdot [(\ln f(x))']^2 + (\ln f(x))'' , \\ f'''(x) &= f(x) \cdot [(\ln f(x))']^3 + (\ln f(x))''' + 3(\ln f(x))'(\ln f(x))'' \end{aligned} \quad (\text{D2.2})$$

gdzie ', ', ''' oznaczają kolejne pochodne funkcji $f(x)$. Po podstawieniu $f(x) = \hat{\eta}(p)$, w punkcie $p=0$ otrzymamy

$$(\ln \hat{\eta}(p))\big|_{p=0} = -2\varphi_{a0} , \quad (\ln \hat{\eta}(p))'\big|_{p=0} = 0 , \quad (\ln \hat{\eta}(p))'''\big|_{p=0} = -4\varphi_{b0} + 24\varphi_{c0} , \quad (\text{D2.3})$$

gdzie:

$$\varphi_{a0} = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{1}{\alpha_i} + 2 \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\sigma_j}{\sigma_j^2 + \omega_j^2} , \quad \varphi_{b0} = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{1}{\alpha_i^3} + 2 \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\sigma_j^3}{(\sigma_j^2 + \omega_j^2)^3} , \quad \varphi_{c0} = \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\sigma_j \omega_j^2}{(\sigma_j^2 + \omega_j^2)^3} . \quad (\text{D2.4})$$

Po wykorzystaniu zależności (D1.15-D1.19) z Dodatku 1. oraz wzorów (D2.3, D2.4) dostaniemy następujący rozkład w szereg potęgowy funkcji $\eta(p)$ w otoczeniu zera

$$\begin{aligned} \eta(p) &= \eta_0^{(0)} + \eta_1^{(0)} p + \eta_2^{(0)} p^2 + \eta_3^{(0)} p^3 + \dots = \\ &= \pm (-1)^{n_1} \{ 1 - 2\varphi_{a0} p + 2(\varphi_{a0})^2 p^2 - \left[\frac{4}{3}(\varphi_{a0})^3 + \frac{2}{3}\varphi_{b0} - 4\varphi_{c0} \right] p^3 + \dots \} . \end{aligned} \quad (\text{D2.5})$$

Rozkład $\eta(p)$ w otoczeniu nieskończoności otrzymamy poprzez rozkład funkcji $\eta(1/p)$ w zerze. Analogicznie jak poprzednio obliczamy

$$(\ln \hat{\eta}(p))\big|_{p=\infty} = -2\varphi_{a\infty} , \quad (\ln \hat{\eta}(p))'\big|_{p=\infty} = 0 , \quad (\ln \hat{\eta}(p))'''\big|_{p=\infty} = -4\varphi_{b\infty} + 24\varphi_{c\infty} , \quad (\text{D2.6})$$

gdzie

$$\varphi_{a\infty} = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i + 2 \sum_{j=1}^{n_2} \sigma_j , \quad \varphi_{b\infty} = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i^3 + 2 \sum_{j=1}^{n_2} \sigma_j^3 , \quad \varphi_{c\infty} = \sum_{j=1}^{n_2} \sigma_j \omega_j^2 . \quad (\text{D2.7})$$

Ostatecznie rozkład w szereg potęgowy funkcji $\eta(p)$ w otoczeniu nieskończoności przyjmuje formę

$$\begin{aligned} \eta(p) &= \eta_0^{(\infty)} + \eta_1^{(\infty)} p^{-1} + \eta_2^{(\infty)} p^{-2} + \eta_3^{(\infty)} p^{-3} + \dots = \\ &= \pm \{ 1 - 2\varphi_{a\infty} p^{-1} + 2(\varphi_{a\infty})^2 p^{-2} - \left[\frac{4}{3}(\varphi_{a\infty})^3 + \frac{2}{3}\varphi_{b\infty} - 4\varphi_{c\infty} \right] p^{-3} + \dots \} . \end{aligned} \quad (\text{D2.8})$$

W literaturze przedmiotu [14] wykorzystuje się także rozkłady w szeregi potęgowe funkcji RA $\eta(p)$ poddanej uprzednio przekształceniom reaktancyjnym (wzmiankowane przekształcenia reaktancyjne zamieszczono w Dodatku 1). Zastępując zmienną p przez ω_g / p we wzorze (D2.1), otrzymamy następujący rozkład funkcji $\eta(p)$ w szereg potęgowy w otoczeniu zera

$$\eta(p) = \eta_0^{(0)} + \eta_1^{(0)} p + \eta_2^{(0)} p^2 + \eta_3^{(0)} p^3 + \dots =$$

$$\pm(-1)^{n_1} \{1 - 2\varphi_{a'0} p + 2(\varphi_{a'0})^2 p^2 - \left[\frac{4}{3}(\varphi_{a'0})^3 + \frac{2}{3}\varphi_{b'0} - 4\varphi_{c'0} \right] p^3 + \dots\} \quad (D2.9)$$

Stałe $\varphi_{a'0}$, $\varphi_{b'0}$, $\varphi_{c'0}$ utworzono ze stałych $\varphi_{a\infty}$, $\varphi_{b\infty}$, $\varphi_{c\infty}$ określonych we wzorach (D2.7) przez podstawienie

$$\alpha_i \rightarrow \alpha_i / \omega_g, \quad \sigma_j \rightarrow \sigma_j / \omega_g, \quad \omega_j \rightarrow \omega_j / \omega_g.$$

Podobnie zastępując zmienną p przez p/ω_d we wzorze (D2.1), otrzymamy następujący rozkład funkcji $\eta(p)$ w szereg potęgowy w otoczeniu nieskończoności

$$\eta(p) = \eta_0^{(\infty)} + \eta_1^{(\infty)} p^{-1} + \eta_2^{(\infty)} p^{-2} + \eta_3^{(\infty)} p^{-3} + \dots =$$

$$\pm \{1 - 2\varphi_{a'\infty} p^{-1} + 2(\varphi_{a'\infty})^2 p^{-2} - \left[\frac{4}{3}(\varphi_{a'\infty})^3 + \frac{2}{3}\varphi_{b'\infty} - 4\varphi_{c'\infty} \right] p^{-3} + \dots\} \quad (D2.10)$$

Stałe $\varphi_{a'\infty}$, $\varphi_{b'\infty}$, $\varphi_{c'\infty}$ utworzono ze stałych określonych we wzorach (D2.7) przez podstawienie

$$\alpha_i \rightarrow \omega_d \alpha_i, \quad \sigma_j \rightarrow \omega_d \sigma_j, \quad \omega_j \rightarrow \omega_d \omega_j.$$

Ostatnim rozważanym przekształceniem reaktancyjnym funkcji (D2.1) jest przekształcenie

$$p \rightarrow \frac{p^2 + \omega_0^2}{W \cdot p},$$

gdzie

$$W = \omega_g - \omega_d$$

jest szerokością pasma przenoszenia oraz

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_g \omega_d}$$

jest pulsacją środkową pasma przenoszenia. Po dokonaniu powyższego przekształcenia reaktancyjnego, rozkład funkcji $\eta(p)$ w szereg potęgowy w otoczeniu zera jest następujący

$$\eta(p) = \eta_0^{(0)} + \eta_1^{(0)} p + \eta_2^{(0)} p^2 + \eta_3^{(0)} p^3 + \dots =$$

$$\pm \{1 - 2\varphi_{a'0} p + 2(\varphi_{a'0})^2 p^2 - \left[\frac{4}{3}(\varphi_{a'0})^3 + \frac{2}{3}\varphi_{b'0} - 4\varphi_{c'0} - 2\varphi_{a'0} / \omega_0^2 \right] p^3 + \dots\} \quad (D2.11)$$

Stałe $\varphi_{a'0}$, $\varphi_{b'0}$, $\varphi_{c'0}$ utworzono ze stałych $\varphi_{a\infty}$, $\varphi_{b\infty}$, $\varphi_{c\infty}$ określonych we wzorach (D2.7) przez podstawienie

$$\alpha_i \rightarrow \alpha_i \frac{W}{\omega_0^2}, \quad \sigma_j \rightarrow \sigma_j \frac{W}{\omega_0^2}, \quad \omega_j \rightarrow \omega_j \frac{W}{\omega_0^2}.$$

Analogicznie otrzymuje się rozkład w szereg potęgowy w otoczeniu nieskończoności, dla funkcji $\eta(p)$ poddanej pasmowo-przepustowemu przekształceniu reaktancyjnemu

$$\eta(p) = \eta_0^{(\infty)} + \eta_1^{(\infty)} p^{-1} + \eta_2^{(\infty)} p^{-2} + \eta_3^{(\infty)} p^{-3} + \dots =$$

$$\pm \{1 - 2\varphi_{a'\infty} p^{-1} + 2(\varphi_{a'\infty})^2 p^{-2} - \left[\frac{4}{3}(\varphi_{a'\infty})^3 + \frac{2}{3}\varphi_{b'\infty} - 4\varphi_{c'\infty} - 2\varphi_{a'\infty} \omega_0^2 \right] p^{-3} + \dots\} \quad (D2.12)$$

Stałe $\varphi_{a'\infty}$, $\varphi_{b'\infty}$, $\varphi_{c'\infty}$ utworzono ze stałych określonych we wzorach (D2.7) przez podstawienie

$$\alpha_i \rightarrow W \alpha_i, \quad \sigma_j \rightarrow W \sigma_j, \quad \omega_j \rightarrow W \omega_j.$$

Otrzymane rozkłady w szeregi potęgowe funkcji RA wraz z rozkładami w szeregi potęgowe współczynników odbicia typu Butterwortha i Czebyszewa (Dodatek 1.) zostały wykorzystane w Rozdziale 4. przy ustalaniu warunków dopasowania wybranych impedancji PR w układach dwuwrotowych.

Następnie zostaną podane rozkłady w szeregi potęgowe w dowolnym punkcie p_0 w $\text{Re } p \geq 0$ dla nieminimalnofazowego rzeczywistego, ograniczonego (ang. bounded real BR) współczynnika odbicia $s(p)$. Ogólną postać współczynnika odbicia $s(p)$ w i -tych wrotach n -wrotnika N określa wyrażenie

$$s(p) = \rho(p)\eta(p) , \quad (\text{D2.13})$$

gdzie $\rho(p)$ - pewien minimalnofazowy współczynnik odbicia BR i $\eta(p)$ - dowolna funkcja RA. Rozkłady funkcji $s(p)$, $\rho(p)$, $\eta(p)$ w szeregi potęgowe w otoczeniu dowolnego punktu p_0 w $\text{Re } p \geq 0$ przyjmują następującą formę, ($p_0 \neq \infty$):

$$\begin{aligned} s(p) &= s_0 + s_1(p - p_0) + s_2(p - p_0)^2 + s_3(p - p_0)^3 + \dots , \\ \rho(p) &= \rho_0 + \rho_1(p - p_0) + \rho_2(p - p_0)^2 + \rho_3(p - p_0)^3 + \dots , \\ \eta(p) &= \eta_0 + \eta_1(p - p_0) + \eta_2(p - p_0)^2 + \eta_3(p - p_0)^3 + \dots . \end{aligned} \quad (\text{D2.14})$$

Jeżeli punkt $p_0 = \infty$, to we wzorach (D2.14) należy podstawić: $(p - p_0) \rightarrow p^{-1}$. Tym samym z użyciem (D2.13, D2.14) współczynniki rozkładu funkcji $s(p)$ w szereg potęgowy w otoczeniu dowolnego punktu p_0 w $\text{Re } p \geq 0$, wynoszą

$$\begin{aligned} s_0 &= \rho_0 \eta_0 , \\ s_1 &= \rho_0 \eta_1 + \rho_1 \eta_0 , \\ s_2 &= \rho_0 \eta_2 + \rho_1 \eta_1 + \rho_2 \eta_0 , \\ s_3 &= \rho_0 \eta_3 + \rho_1 \eta_2 + \rho_2 \eta_1 + \rho_3 \eta_0 . \end{aligned} \quad (\text{D2.15})$$

Wzory (D2.15) wykorzystano w Rozdziale 4. dla ustalenia warunków dopasowania wybranych impedancji PR, przy użyciu bezstratnych czwórników.

DODATEK 3

Niniejszy dodatek zawiera wybrane przekształcenia macierzy paraunitarnych. Niech $S(p)$ będzie wymierną paraunitarną macierzą rzeczywistą ograniczoną (ang. bounded real BR) o wymiarach 3×3 , zatem

$$S(p)S_*(p) = S_*(p)S(p) = \mathbf{1}_3, \quad S_*(p) = S^T(-p), \quad S(p) = [s_{ij}(p)], \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (D3.1)$$

gdzie $\mathbf{1}_3$ jest macierzą jednostkową stopnia $n=3$ oraz symbol T oznacza transpozycję macierzy. Zakładamy, że znane są funkcje s_{21} , s_{12} , s_{31} , s_{13} w macierzy $S(p)=[s_{ij}(p)]$ $i, j=1, 2, 3$. Naszym celem jest wyrażenie pozostałych elementów macierzy $S(p)$ przez wzmiankowane funkcje. Zapiszmy równania $S(p)S_*(p) = S_*(p)S(p) = \mathbf{1}_3$ w sposób jawny:

$$s_{11}s_{11*} + s_{12}s_{12*} + s_{13}s_{13*} = 1, \quad (D3.2)$$

$$s_{22}s_{22*} + s_{21}s_{21*} + s_{23}s_{23*} = 1, \quad (D3.3)$$

$$s_{33}s_{33*} + s_{31}s_{31*} + s_{32}s_{32*} = 1, \quad (D3.4)$$

$$s_{11}s_{21*} + s_{12}s_{22*} + s_{13}s_{23*} = 0, \quad (D3.5)$$

$$s_{11}s_{31*} + s_{12}s_{32*} + s_{13}s_{33*} = 0, \quad (D3.6)$$

$$s_{21}s_{31*} + s_{22}s_{32*} + s_{23}s_{33*} = 0, \quad (D3.7)$$

$$s_{11}s_{11*} + s_{21}s_{21*} + s_{31}s_{31*} = 1, \quad (D3.8)$$

$$s_{22}s_{22*} + s_{12}s_{12*} + s_{32}s_{32*} = 1, \quad (D3.9)$$

$$s_{33}s_{33*} + s_{13}s_{13*} + s_{23}s_{23*} = 1, \quad (D3.10)$$

$$s_{11*}s_{12} + s_{21*}s_{22} + s_{31*}s_{32} = 0, \quad (D3.11)$$

$$s_{11*}s_{13} + s_{21*}s_{23} + s_{31*}s_{33} = 0, \quad (D3.12)$$

$$s_{12*}s_{13} + s_{22*}s_{23} + s_{32*}s_{33} = 0. \quad (D3.13)$$

Z (D3.2,D3.8) otrzymujemy

$$1 - s_{11}s_{11*} = s_{21}s_{21*} + s_{31}s_{31*}, \quad (D3.14)$$

$$s_{12}s_{12*} + s_{13}s_{13*} = s_{21}s_{21*} + s_{31}s_{31*}. \quad (D3.15)$$

Z (D3.5,D3.6) i z (D3.11,D3.12) wyznaczamy

$$s_{23} = -\frac{1}{s_{13*}}(s_{11*}s_{21} + s_{12*}s_{22}), \quad (D3.16)$$

$$s_{32} = -\frac{1}{s_{12*}}(s_{11*}s_{31} + s_{13*}s_{33}), \quad (D3.17)$$

$$s_{33} = -\frac{1}{s_{31*}}(s_{11*}s_{12} + s_{21*}s_{22}), \quad (D3.18)$$

$$s_{23} = -\frac{1}{s_{21*}}(s_{11*}s_{13} + s_{31*}s_{33}) \quad (D3.19)$$

Z równań (D3.3,D3.4) mamy

$$1 - s_{22}s_{22*} = s_{21}s_{21*} + s_{23}s_{23*} \quad (D3.20)$$

$$1 - s_{33}s_{33*} = s_{31}s_{31*} + s_{32}s_{32*} \quad (D3.21)$$

Przekształcając (D3.9) z pomocą (D3.3) otrzymujemy

$$s_{21}s_{21*} + s_{23}s_{23*} = s_{12}s_{12*} + s_{32}s_{32*} \quad (D3.22)$$

Podstawiając (D3.16,D3.17) do (D3.7) dostajemy

$$(1 - s_{11}s_{11*})s_{22}s_{33*} = s_{12}s_{21}s_{13*}s_{31*} - s_{11}s_{22}s_{13*}s_{31*} - s_{11*}s_{33*}s_{12}s_{21} \quad (D3.23)$$

Równanie (D3.13) przy użyciu (D3.18,D3.19) przechodzi w (D3.23), zatem (D3.13) nie jest równaniem niezależnym. Po wstawieniu (D3.16) do (D3.20) oraz (D3.17) do (D3.21) otrzymujemy

$$0 = s_{11}s_{22}s_{12*}s_{21*} + s_{11*}s_{22*}s_{12}s_{21} + s_{21}s_{21*}(1 - s_{12}s_{12*}) + (1 - s_{11}s_{11*})s_{22}s_{22*} - s_{13}s_{13*} \quad (D3.24)$$

$$0 = s_{11}s_{33}s_{13*}s_{31*} + s_{11*}s_{33*}s_{13}s_{31} + s_{31}s_{31*}(1 - s_{13}s_{13*}) + (1 - s_{11}s_{11*})s_{33}s_{33*} - s_{12}s_{12*} \quad (D3.25)$$

Następnie podstawiamy (D3.16) do (D3.19) otrzymując równanie

$$s_{33} = \frac{s_{11*}(s_{21}s_{21*} - s_{13}s_{13*}) + s_{22}s_{21*}s_{12*}}{s_{31*}s_{13*}} \quad (D3.26)$$

Równanie (D3.18) z użyciem (D3.17) staje się identyczne z (D3.26), zatem (D3.18) jest równaniem zależnym. Podobnie, wstawiając (D3.26) do równania (D3.23) otrzymujemy tożsamość, równanie (D3.23) jest zatem równaniem zależnym. Przekształcamy (D3.17), podstawiając do niego (D3.26), w rezultacie dostajemy

$$s_{32} = -\frac{1}{s_{31*}}(s_{11*}s_{12} + s_{21*}s_{22}) \quad (D3.27)$$

Następnie podstawiamy (D3.26) do (D3.25). W rezultacie otrzymujemy równanie (D3.24), zatem (D3.25) jest równaniem zależnym. Analogicznie po wstawieniu (D3.27,D3.16) do (D3.22) otrzymuje się równanie (D3.24). Równanie (D3.22) jest zatem równaniem zależnym. Ostatecznie niezależny układ równań ma postać

$$1 - s_{11}s_{11*} = s_{21}s_{21*} + s_{31}s_{31*} \quad (D3.28)$$

$$s_{12}s_{12*} + s_{13}s_{13*} = s_{21}s_{21*} + s_{31}s_{31*} \quad (D3.29)$$

$$s_{23} = -\frac{1}{s_{13*}}(s_{11*}s_{21} + s_{12*}s_{22}) \quad (D3.30)$$

$$s_{32} = -\frac{1}{s_{31*}}(s_{11*}s_{12} + s_{21*}s_{22}) \quad (D3.31)$$

$$s_{33} = \frac{s_{11*}(s_{21}s_{21*} - s_{13}s_{13*}) + s_{22}s_{21*}s_{12*}}{s_{31*}s_{13*}} \quad (D3.32)$$

$$0 = s_{11}s_{22}s_{12*}s_{21*} + s_{11*}s_{22*}s_{12}s_{21} + s_{21}s_{21*}(1 - s_{12}s_{12*}) + (1 - s_{11}s_{11*})s_{22}s_{22*} - s_{13}s_{13*} \quad (D3.33)$$

Jeżeli $S(p)=S^T(p)$, wówczas rozpatrywany układ równań zredukowany zostanie do czterech równań. Niestety bezpośrednia metoda rozwiązania powyższego układu równań nie jest znana.

Analogicznie jak w pracy [4] rozważmy problem rozwiązania układu równań (D3.1) przy zadanych współczynnikach s_{21} , s_{12} , s_{31} , s_{13} macierzy $S(p)$ i przy założeniu, że znamy wyznacznik:

$$\det S(p) = \Delta(p) \quad . \quad (D3.34)$$

Wyznacznik $\Delta(p)$ jest funkcją typu RA [4]. Równania $S(p)S_*(p) = S_*(p)S(p) = \mathbf{1}_3$ implikują równość $S_*(p) = S^{-1}(p)$, zatem

$$s_{11*}\Delta = s_{22}s_{33} - s_{23}s_{32} \quad , \quad (D3.35)$$

$$s_{22*}\Delta = s_{11}s_{33} - s_{13}s_{31} \quad , \quad (D3.36)$$

$$s_{33*}\Delta = s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21} \quad , \quad (D3.37)$$

$$s_{21*}\Delta = s_{13}s_{32} - s_{12}s_{33} \quad , \quad (D3.38)$$

$$s_{31*}\Delta = s_{12}s_{23} - s_{13}s_{22} \quad , \quad (D3.39)$$

$$s_{32*}\Delta = s_{13}s_{21} - s_{23}s_{11} \quad , \quad (D3.40)$$

$$s_{12*}\Delta = s_{31}s_{23} - s_{21}s_{33} \quad , \quad (D3.41)$$

$$s_{13*}\Delta = s_{21}s_{32} - s_{31}s_{22} \quad , \quad (D3.42)$$

$$s_{23*}\Delta = s_{31}s_{12} - s_{32}s_{11} \quad . \quad (D3.43)$$

Z równań (D3.36) wyznaczamy s_{22} i po wstawieniu do (D3.37) otrzymujemy wyrażenie na s_{33} :

$$s_{33} = -\frac{s_{11*}s_{13}s_{31} + s_{12*}s_{21*}\Delta}{1 - s_{11}s_{11*}} \quad . \quad (D3.44)$$

Do uzyskania powyższego rezultatu wykorzystano dodatkowo własność RA wyznacznika $\Delta(p)$, to znaczy $\Delta(p)\Delta_*(p) = 1$. Równanie (D3.36) z zastosowaniem (D3.44) przyjmie formę

$$s_{22} = -\frac{s_{11*}s_{12}s_{21} + s_{13*}s_{31*}\Delta}{1 - s_{11}s_{11*}} \quad . \quad (D3.45)$$

Analogicznie, z (D3.40) wyznaczamy s_{32} i wstawiamy do (D3.43) otrzymując równanie

$$s_{23} = -\frac{s_{11*}s_{13}s_{21} - s_{31*}s_{12*}\Delta}{1 - s_{11}s_{11*}} \quad . \quad (D3.46)$$

Równanie (D3.40) z zastosowaniem (D3.46) przyjmie formę

$$s_{32} = -\frac{s_{11*}s_{12}s_{31} - s_{13*}s_{21*}\Delta}{1 - s_{11}s_{11*}} \quad . \quad (D3.47)$$

Następnie wstawiamy (D3.44,D3.47) do (D3.38) oraz (D3.45,D3.46) do (D3.39) dostając jednakowe równanie

$$1 - s_{11}s_{11*} = s_{12}s_{12*} + s_{13}s_{13*} \quad . \quad (D3.48)$$

Podobnie wstawiając (D3.45,D3.47) do (D3.42) oraz (D3.44,D3.46) do (D3.41) otrzymujemy jednakowe równanie

$$1 - s_{11}s_{11*} = s_{21}s_{21*} + s_{31}s_{31*} \quad . \quad (D3.49)$$

Równanie (D3.35) z użyciem (D3.44,D3.45,D3.46,D3.47) staje się tożsamością. Ostatecznie niezależny układ równań równoważny równaniom (D3.35-D3.43) ma następującą postać

$$s_{33} = -\frac{s_{11*}s_{13}s_{31} + s_{12*}s_{21*}\Delta}{1 - s_{11}s_{11*}} , \quad (D3.50)$$

$$s_{22} = -\frac{s_{11*}s_{12}s_{21} + s_{13*}s_{31*}\Delta}{1 - s_{11}s_{11*}} , \quad (D3.51)$$

$$s_{23} = -\frac{s_{11*}s_{13}s_{21} - s_{31*}s_{12*}\Delta}{1 - s_{11}s_{11*}} , \quad (D3.52)$$

$$s_{32} = -\frac{s_{11*}s_{12}s_{31} - s_{13*}s_{21*}\Delta}{1 - s_{11}s_{11*}} , \quad (D3.53)$$

$$1 - s_{11}s_{11*} = s_{21}s_{21*} + s_{31}s_{31*} , \quad (D3.54)$$

$$1 - s_{11}s_{11*} = s_{12}s_{12*} + s_{13}s_{13*} . \quad (D3.55)$$

Dla macierzy symetrycznej $\mathbf{S}(p)=\mathbf{S}^T(p)$ powyższe równania redukują się do czterech równań.

Ostatni prezentowany sposób konstrukcji macierzy paraunitarnej BR oparty jest o podaną przez Belevitcha [4] metodę realizacji współczynnika odbicia $s_{11}(p)$ w układzie n-wrotowym. Metodę tę opisano poniżej. Zapiszmy macierz paraunitarną $\mathbf{S}(p)$ o wymiarach $n \times n$ w formie:

$$\mathbf{S}(p) = \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ s_{11}(p) & \mathbf{T}_{12}^T(p) \\ \mathbf{T}_{21}(p) & \mathbf{S}_{22}(p) \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ n-1 \end{matrix} , \quad (D3.56)$$

gdzie

$$\mathbf{T}_{12}(p) = [s_{12}(p), \dots, s_{1n}(p)]^T , \quad (D3.57)$$

$$\mathbf{T}_{21}(p) = [s_{21}(p), \dots, s_{n1}(p)]^T , \quad (D3.58)$$

są wektorami kolumnowymi, zaś $\mathbf{S}_{22}(p)$ jest podmacierzą o wymiarach $(n-1) \times (n-1)$ macierzy $\mathbf{S}(p)$. Zapiszmy jawnie równania $\mathbf{S}(p)\mathbf{S}_*(p) = \mathbf{S}_*(p)\mathbf{S}(p) = \mathbf{1}_n$ wykorzystując (D3.56):

$$s_{11}s_{11*} + \mathbf{T}_{12}^T \mathbf{T}_{12*}^T = 1 , \quad (D3.59)$$

$$\mathbf{T}_{21} \mathbf{T}_{21*} + \mathbf{S}_{22} \mathbf{S}_{22*} = \mathbf{1}_{n-1} , \quad (D3.60)$$

$$s_{11} \mathbf{T}_{21*} + \mathbf{T}_{12}^T \mathbf{S}_{22*} = \mathbf{0}_{1,n-1} , \quad (D3.61)$$

$$s_{11*} \mathbf{T}_{21} + \mathbf{S}_{22} \mathbf{T}_{12*}^T = \mathbf{0}_{n-1,1} , \quad (D3.62)$$

$$s_{11}s_{11*} + \mathbf{T}_{21*} \mathbf{T}_{21} = 1 , \quad (D3.63)$$

$$\mathbf{T}_{12*}^T \mathbf{T}_{12}^T + \mathbf{S}_{22*} \mathbf{S}_{22} = \mathbf{1}_{n-1} , \quad (D3.64)$$

$$s_{11*} \mathbf{T}_{12}^T + \mathbf{T}_{21*} \mathbf{S}_{22} = \mathbf{0}_{1,n-1} , \quad (D3.65)$$

$$s_{11} \mathbf{T}_{12*}^T + \mathbf{S}_{22*} \mathbf{T}_{21} = \mathbf{0}_{n-1,1} , \quad (D3.66)$$

gdzie

$$\mathbf{0}_{n-1,1} = [0,0,\dots,0]^T .$$

Z (D3.59,D3.63) wynika, że

$$1 - s_{11}s_{11}^* = \mathbf{T}_{21}^* \mathbf{T}_{21} = \mathbf{T}_{12}^* \mathbf{T}_{12} . \quad (\text{D3.67})$$

Niech funkcja BR $\Theta(p)$ będzie minimalnofazową faktoryzacją (D3.67), zatem

$$\Theta \Theta^* = 1 - s_{11}s_{11}^* . \quad (\text{D3.68})$$

Założmy, że dany jest współczynnik odbicia $s_{11}(p)$, który należy zrealizować w układzie n-wrotowym. Z (D3.68) wnioskujemy, że można zdefiniować wektor kolumnowy

$$\hat{\mathbf{T}}_{21} = \mathbf{T}_{21} / \Theta , \quad (\text{D3.69})$$

który jest analityczny w $\text{Re } p \geq 0$ i dodatkowo spełnia warunek

$$\hat{\mathbf{T}}_{21}^*(p) \hat{\mathbf{T}}_{21}(p) = 1 \text{ dla każdego } p. \quad (\text{D3.70})$$

Powyższe oznacza, że $\hat{\mathbf{T}}_{21}(p)$ można traktować jako pierwszą kolumnę pewnej paraunitarnej lecz niekoniecznie analitycznej w $\text{Re } p \geq 0$ macierzy $\mathbf{U}(p)$ o wymiarach $(n-1) \times (n-1)$, czyli

$$\hat{\mathbf{T}}_{21}(p) = \mathbf{U}(p) \cdot \hat{\mathbf{e}} , \quad (\text{D3.71})$$

gdzie

$$\hat{\mathbf{e}} = [1,0,0,0,\dots,0]^T$$

jest wektorem kolumnowym o wymiarach $(n-1) \times 1$. Analogicznie zdefiniujemy wektor

$$\hat{\mathbf{T}}_{12} = \mathbf{T}_{12} / \Theta , \quad (\text{D3.72})$$

który można traktować jako pierwszą kolumnę pewnej paraunitarnej lecz niekoniecznie analitycznej w $\text{Re } p \geq 0$ macierzy $\mathbf{W}(p)$ o wymiarach $(n-1) \times (n-1)$, takiej, że

$$\hat{\mathbf{T}}_{12}(p) = \mathbf{W}(p) \cdot \hat{\mathbf{e}} . \quad (\text{D3.73})$$

Korzystając z własności paraunitarności macierzy $\mathbf{U}(p)$ i $\mathbf{W}(p)$ oraz z zależności (D3.69,D3.71,D3.72,D3.73) przekształcamy równania (D3.61,D3.62,D3.65,D3.66) otrzymując odpowiednio

$$-s_{11}^* \frac{\Theta}{\Theta_*} \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{U}_* \mathbf{S}_{22} \mathbf{W}_*^T \hat{\mathbf{e}} , \quad (\text{D3.74})$$

$$-s_{11}^* \frac{\Theta}{\Theta_*} \hat{\mathbf{e}}^T = \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{U}_* \mathbf{S}_{22} \mathbf{W}_*^T . \quad (\text{D3.75})$$

Rozwiązując równania (D3.74,D3.75) ze względu na $\mathbf{S}_{22}(p)$ dostajemy zależność

$$\mathbf{S}_{22} = \mathbf{U} \left[-s_{11}^* \frac{\Theta}{\Theta_*} \oplus \mathbf{V} \right] \mathbf{W}^T , \quad (\text{D3.76})$$

gdzie symbol $\oplus$ oznacza sumę prostą macierzy, zaś $\mathbf{V}(p)$ jest macierzą paraunitarną o wymiarach $(n-2) \times (n-2)$. Macierz $\mathbf{V}(p)$ może nie być analityczna w $\text{Re } p \geq 0$. Aby dowieść, że macierz $\mathbf{V}(p)$ jest paraunitarna wystarczy wstawić (D3.76) do równań (D3.60,D3.64) otrzymując warunki

$$\mathbf{V}(p) \mathbf{V}_*(p) = \mathbf{V}_*(p) \mathbf{V}(p) = \mathbf{1}_{n-2} .$$

Belevitch [4] dowodzi, że równanie (D3.76) generuje wszystkie macierze $\mathbf{S}_{22}(p)$ analityczne w obszarze $\text{Re } p \geq 0$, będące rozwiązaniem układu równań (D3.59-D3.66), dla ustalonego

współczynnika odbicia $s_{11}(p)$. Ponadto udowodniono [4], że bez strat dla ogólności rozważań, dla wyznaczenia $S_{22}(p)$ wystarczy użyć tylko paraunitarnych macierzy BR $U(p)$, $W(p)$.

Otrzymane rezultaty można wykorzystać do konstrukcji macierzy paraunitarnej $S(p)$ o wymiarach 3×3 . Z równań (D3.69, D3.71, D3.72, D3.73) i własności paraunitarności macierzy BR $U(p)$, $W(p)$ o wymiarach 2×2 można wnioskować, że macierze te mają postać

$$U = \begin{pmatrix} s_{21}/\Theta & \rho_{31}\xi_1/\Theta \\ s_{31}/\Theta & \rho_{21}\xi_2/\Theta \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} s_{12}/\Theta & \rho_{13}\varphi_1/\Theta \\ s_{13}/\Theta & \rho_{12}\varphi_2/\Theta \end{pmatrix}, \quad (D3.77)$$

gdzie funkcje $\rho_{ij}(p)$ $i, j = 1, 2, 3$ są minimalnofazowymi czynnikami odpowiednich współczynników $s_{ij}(p)$ macierzy $S(p)$, zaś $\xi_1(p)$, $\xi_2(p)$, $\varphi_1(p)$, $\varphi_2(p)$ są pewnymi funkcjami RA. Warunek paraunitarności macierzy $U(p)$ i $W(p)$ implikuje dodatkowe ograniczenia nałożone na funkcje $\xi_1(p)$, $\xi_2(p)$, $\varphi_1(p)$, $\varphi_2(p)$, mianowicie

$$-\frac{s_{21}^*}{s_{31}^*}\xi_1 = \frac{\rho_{21}}{\rho_{31}}\xi_2, \quad (D3.78)$$

$$-\frac{s_{12}^*}{s_{13}^*}\varphi_1 = \frac{\rho_{12}}{\rho_{13}}\varphi_2. \quad (D3.79)$$

W przypadku trójwrotnika, macierz paraunitarna $V(p)$ z równania (D3.76) redukuje się do funkcji wszechprzepustowej $V(p)$, która może nie być analityczna w $\text{Re } p \geq 0$. Wstawiając (D3.77) do (D3.76) ostatecznie otrzymujemy

$$s_{22} = \frac{1}{\Theta^2} \left(V\rho_{13}\rho_{31}\xi_1\varphi_1 - s_{11}^* \frac{\Theta}{\Theta_*} s_{12}s_{21} \right), \quad (D3.80)$$

$$s_{33} = \frac{1}{\Theta^2} \left(V\rho_{12}\rho_{21}\xi_2\varphi_2 - s_{11}^* \frac{\Theta}{\Theta_*} s_{13}s_{31} \right), \quad (D3.81)$$

$$s_{23} = \frac{1}{\Theta^2} \left(V\rho_{12}\rho_{31}\xi_1\varphi_2 - s_{11}^* \frac{\Theta}{\Theta_*} s_{13}s_{21} \right), \quad (D3.82)$$

$$s_{32} = \frac{1}{\Theta^2} \left(V\rho_{21}\rho_{13}\xi_2\varphi_1 - s_{11}^* \frac{\Theta}{\Theta_*} s_{12}s_{31} \right). \quad (D3.83)$$

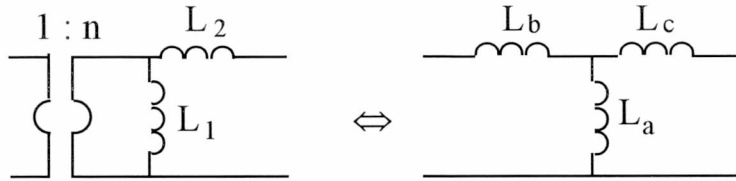
Z (D3.80-D3.83) wynika, że aby uczynić w/w funkcje analitycznymi w obszarze $\text{Re } p \geq 0$ należy odpowiednio dobrać funkcje BR $s_{12}(p)$, $s_{13}(p)$, $s_{21}(p)$, $s_{31}(p)$ oraz funkcje RA $\xi_1(p)$, $\xi_2(p)$, $\varphi_1(p)$, $\varphi_2(p)$, a także dobrać poprawnie funkcję wszechprzepustową $V(p)$ (niekoniecznie regularną). Obliczając wyznacznik $\det S(p) = \Delta(p)$ z wykorzystaniem (D3.80-D3.83) i (D3.78-D3.79) można pokazać, że równania (D3.80-D3.83) są równoważne równaniom (D3.50-D3.53).

Wzory (D3.78-D3.83) stanowią podstawę do wyznaczenia w Rozdziale 6 tzw. najbardziej ogólnej formy macierzy rozproszenia $S(p)$, dla danego problemu dopasowania szerokopasmowego impedancji w układach trójwrotowych.

DODATEK 4

W niniejszym dodatku zostały podane wybrane przekształcenia równoważne, tzw. przekształcenia Nortona. Prezentowane przekształcenia są przydatne do realizacji szerokopasowych układów dopasowujących, zwłaszcza przy syntezie układów dwuwrotowych, omówionych w Rozdziale 4.

1. Przekształcenie ilustruje Rys. D4.1.



Rys. D4.1. Przekształcenie 1.

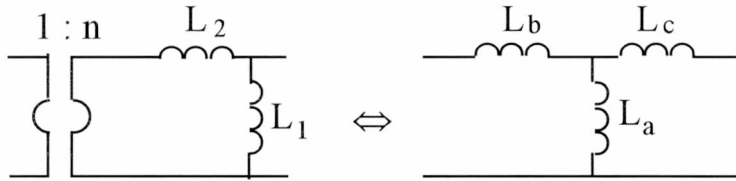
Warunki realizowalności przekształcenia:

$$L_2 / L_1 \geq 1/n - 1 > 0, \quad (D4.1)$$

ponadto

$$L_a = L_1 / n, \quad L_b = (1/n - 1) \cdot L_1 / n, \quad L_c = L_2 - (1/n - 1) \cdot L_1. \quad (D4.2)$$

2. Przekształcenie ilustruje Rys. D4.2.



Rys. D4.2. Przekształcenie 2.

Warunki realizowalności przekształcenia:

$$L_2 / L_1 \geq n - 1 > 0, \quad (D4.3)$$

gdzie

$$L_a = L_1 / n, \quad L_c = (1 - 1/n) \cdot L_1, \quad L_b = (L_2 - (n - 1) \cdot L_1) / n^2. \quad (D4.4)$$

3. Przekształcenie ilustruje Rys. D4.3.



Rys. D4.3. Przekształcenie 3.

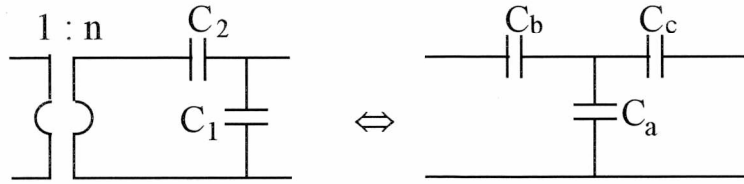
Warunki realizowalności przekształcenia:

$$C_1 / C_2 \geq 1/n - 1 > 0, \quad (D4.5)$$

przy czym

$$C_a = C_1 \cdot n, \quad C_b = C_1 n / (1/n - 1), \quad C_c = 1 / (1/C_2 - (1/n - 1)/C_1) . \quad (D4.6)$$

4. Przekształcenie ilustruje Rys. D4.4.



Rys. D4.4. Przekształcenie 4.

Warunki realizowalności przekształcenia:

$$C_1 / C_2 \geq n - 1 > 0 , \quad (D4.7)$$

gdzie

$$C_a = C_1 \cdot n, \quad C_c = C_1 / (1 - 1/n), \quad C_b = n^2 / (1/C_2 - (n - 1)/C_1) . \quad (D4.8)$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] Abrie L. D., *The Design of Impedance-Matching Networks for Radio-Frequency and Microwave Amplifiers*, Artech House, Inc., Dedham 1985.
- [2] Balabanian N., *Network Synthesis*, Prentice-Hall, 1958.
- [3] Balabanian N., Ho C. W., *Synthesis of Active and Passive Compatible Impedances*, IEEE Trans. on CT vol-14, 1967, pp 118÷128.
- [4] Belevitch V., *Classical Network Theory*, Holden-Day, San Francisco 1968.
- [5] Belevitch V., *On Filter Pairs with Butterworth Characteristic*, Int. J. Circuit Theory and Appl., vol. 15, 1987, pp 51÷60.
- [6] Belevitch V., *Synthesis of Nonconstant-Impedance Filter Pairs*, Philips J. Res., vol. 35, 1980, pp 104÷121.
- [7] Bennet B. J., *Broad-Band Impedance Matching of Ladder Loads*, IEEE Trans. on CAS, vol. cas-32, no 12, December 1985, pp 1201÷1208.
- [8] Carlin C., *Approximation Method for Decomposable Filter Pairs*, Int. J. Circuit Theory and Appl., vol. 10, 1982, pp 123÷138.
- [9] Carlin H., *A New Approach to Gain-Bandwidth Problems*, IEEE Trans. on CAS vol. cas-24, no 4, April 1977, pp 170 ÷ 175.
- [10] Carlin H. Amstutz P., *On Optimum Broadband Matching*, IEEE Trans. on CAS vol. cas-28, no 5, 1981, pp 401 ÷ 405.
- [11] Carlin H. J., Yarman B. S., *The Double Matching Problem: Analytic and Real Frequency Solutions*, IEEE Trans. on CAS vol. cas-30, no 1, 1983, pp 15 ÷ 28.
- [12] Chaisrakeo T., Chen W. K., *Explicit Formulas for The Synthesis of Optimum Bandpass Butterworth and Chebyshev Impedance-Matching Networks*, IEEE Trans. on CT and Systems vol. cas-27, no 10, 1980, pp 928 ÷ 942.
- [13] Chan Y. T., Kuh E. S., *A General Matching Theory and Application to Tunnel Diode Amplifiers*, IEEE Trans. on CT vol-13, no 1, March 1966, pp 6÷18.
- [14] Chen W. K., *Broadband Matching: Theory and Implementations*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore 1988.
- [15] Chen W. K., *Explicit Formulas for The Synthesis of Optimum Broad-Band Impedance-Matching Networks*, IEEE Trans. on CT and Systems vol. cas-24, no 4, 1977, pp 157 ÷ 169.
- [16] Chen W. K., *Mathematical Theory of Broadband Matching of Multiport Networks*, J. of the Franklin Inst., vol. 326, 1989, pp 737÷747.
- [17] Chen W. K., Zhu Y. S., *A Theorem on Complex-Normalized Reflection Coefficients and Its Application*, IEEE Trans. on CAS vol. cas-36, no 9, September 1989, pp 1238÷1244.
- [18] Chen W. K., Zhu Y. S., *Broad-Band Matching with Maximally Flat Group Delay Characteristic*, IEEE Trans. on CAS vol. cas-34, no 6, June 1987, pp 658÷667.
- [19] Chen W. K., Zhu Y. S., *On The Design of a Diplexer Having Butterworth Characteristics*, IEEE Trans. on CAS vol. cas-35, no 11, November 1988, pp 1455÷1457.
- [20] Chen W. K., Zhu Y. S., *Realizability of Lossless Reciprocal and Nonreciprocal Broadband Matching Networks*, J. of the Franklin Inst., vol. 319, no 3, 1985, pp 325÷340.

- [21] Chen W. K., Zhu Y. S., *Unified Theory of Compatibility Impedances*, IEEE Trans. on CAS vol. cas-35, no 6, June 1988, pp 667÷674.
- [22] Chien T. M., *A Theory of Broadband Matching of a Frequency-Dependent Generator and Load*, J. Franklin Inst. vol. 298, 1974, pp 181 ÷ 221.
- [23] Czawka G., *Projektowanie szerokopasmowych urządzeń radiokomunikacyjnych w.cz. i b.w.cz.*, (po rosyjsku), L. LETI 1991.
- [24] Czawka G., *Szerokopasmowe Dopasowanie Anten Systemów Radiokomunikacyjnych*, Krajowe Sympozjum Telekomunikacji, Bydgoszcz, Oct. 6-9, 1994.
- [25] Czawka G., *Szerokopasmowe Dopasowanie Radioodbiornika z Anteną*, (po rosyjsku), Elektroswjaz no. 12, Moskwa 1974.
- [26] Czawka G. (współautor, rozdz. IV), *Projektowanie Urządzeń Radionadawczych przy pomocy komputera*, (po rosyjsku), Radio i Swjaz, Moskwa 1987.
- [27] Dedieu H., Dehollain C., Neirynck J., Rhodes G., *A New Method for Solving Broadband Matching Problem*, IEEE Trans. on CAS-I vol. cas-49, no 9, September 1994, pp 561 ÷ 571.
- [28] Dehollain C., Neirynck J., *Simplified Impedance Broadband Matching by The Image Parameter Method: The RC Case*, Int. J. Circuit Theory and Appl., vol. 23, no 2, 1995, pp 91÷116.
- [29] Fano R. M., *Theoretical Limitations on The Broadband Matching of Arbitrary Impedances*, J. Franklin Inst. vol. 249, Jan. 1950, pp 57 ÷ 83 and Feb. 1950, pp 139 ÷ 154.
- [30] Fei Z., Chen W. K., *On a Complex Normalized Scattering Matrix and Its Application to Broadband Matching of Multiport Networks*, J. of the Franklin Inst., vol. 320, 1985, pp 175÷190.
- [31] Gudipati R., Chen W. K., *Explicit Formulas for Element Values of a Lossless Low-pass Ladder Network and Their Use in the Design of a Broadband Matching Network*, J. of the Franklin Inst., vol. 326, no 2, 1989, pp 167÷184.
- [32] Hazony D., *Elements of Network Synthesis*, Reinhold Publishing Corp., New York 1963.
- [33] Kendall L. Su, *Teoria układów aktywnych*, WNT, Wydanie 1, Warszawa 1969.
- [34] Kourounis K. G., Chen W. K., *Explicit Formulas for The Synthesis of Optimum Broad-Band Impedance-Matching Networks II*, IEEE Trans. on CT and Sys. vol. cas-25, no 8, 1978, pp 609÷620.
- [35] Kuratowski K., *Rachunek Różniczkowy i Całkowy*, PWN, wyd. IX., Warszawa 1978.
- [36] Lancaster P., *Theory of Matrices*, Academic Press, New York-London 1969.
- [37] Mostowski A., Stark M., *Algebra Liniowa*, PWN, wyd. VI., Warszawa 1977.
- [38] Neirynck J., Carlin C., *Synthesis of The Lossless Reciprocal Three-Port Based on a Canonic Form of Its Scattering Matrix*, IEEE Trans. on CAS vol. cas-28, no 7, July 1981, pp 736 ÷ 744.
- [39] Neirynck J., Carlin C., *Synthesis of Filter Pairs*, Proc. of European Conf. on Circuit Theory and Design, Hague Netherlands 25-28 Aug. 1981, pp 88÷94.
- [40] Newcomb R. W., *Linear Multiport Synthesis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.
- [41] Pauli R., *Darlington's Theorem and Complex Normalization*, Int. J. Circuit Theory and Appl., vol. 17, 1989, pp 429÷446.
- [42] Pauli R., *On Complex Normalized Scattering Matrices*, IEEE Trans. on CAS, vol. cas-37, no 11, November 1990, pp 1452÷1454.
- [43] Piekarski M., Uruski M., *A State Space Approach to The Tangential Interpolation Problem with Bounded Real Matrices*, Int. J. Circuit Theory and Appl., vol. 23, no 2, 1995, pp 83÷90.

- [44] Piekarski M., Uruski M., *Tangential Nevanlinna-Pick Interpolation Problem for Bounded Real Matrices-a Network Approach*, Int. J. Circuit Theory and Appl., vol. 21, 1993, pp 513÷538.
- [45] Piekarski M., Uruski M., *The Tangential Interpolation Problem with Bounded Real Matrices-State Space Approach*, XVII Nat. Conf. Circuit Theory and Electr. Circuits, Polanica-Zdrój 1994, pp 55÷60.
- [46] Ralston A., *Wstęp do analizy numerycznej*, wyd. III, P.W.N. Warszawa 1983.
- [47] Sabin W. E., Shoenicke E. W., *System and Circuits*, McGraw-Hill, Inc. 1987.
- [48] Satyanarayana C., Chen W. K., *Theory of Broadband Matching and the Problem of Compatible Impedances*, J. of the Franklin Inst., vol. 309, no 4, 1980, pp 267÷280.
- [49] Świętach Z., *On design of Butterworth networks in broadband matching of simple antenna models*, Raport wewnętrzny ITA-Politechnika Wrocławska, Wrocław 1994.
- [50] Świętach Z., *On Power Gain Limitations in Broadband Matching of LC Ladder Networks Loaded by Complex Impedance*, The XVIII-SPETO Conference, Gliwice, May 17-20, 1995, pp 193÷198.
- [51] Świętach Z., *Explicit Formulas for Butterworth Networks in Broadband Matching of Simple Antenna Models*, The XVIII-SPETO Conference, Gliwice, May 17-20, 1995, pp 207÷212.
- [52] Świętach Z., *Explicit Design of Butterworth Matching Networks Optimised in the Minimax Sense*, XVIII-th National Conference Circuit Theory and Electronic Networks, Łódź-Polana Zgorzelisko, Poland, October 25-28, 1995.
- [53] Świętach Z., *New Design of Broadband Matching Diplexer*, XVIII-th National Conference Circuit Theory and Electronic Networks, Łódź-Polana Zgorzelisko, Poland, October 25-28, 1995.
- [54] Świętach Z., *Projektowanie układów o charakterystyce Butterwortha lub Czebyszewa dopasowujących szerokopasmowo proste modele anten*, Krajowe Sympozjum Telekomunikacji, Bydgoszcz, Wrzesień 6-8, 1995, pp 255÷262.
- [55] Świętach Z., *The Construction of a Scattering Matrix of a Three-Port Broadband Matching Network*, VIII Nat. Symp. U.R.S.I., Wrocław 1996, pp.157-160.
- [56] Świętach Z., *The Design of a Broadband Matching Diplexer without Amplitude and Phase b Distortions*, The XIX-SPETO Conference, Gliwice, May , 1996, pp 409÷412, vol II.
- [57] Świętach Z., *The Realization of The Voltage or Power Gains in a Lossless Three-Port Network, Free from The Amplitude and Phase Distortions*, XIX-th National Conference Circuit Theory and Electronic Networks, Kraków-Krynica, Poland, October 23-26, 1996, pp 163-168.
- [58] Świętach Z., *Low-Pass and High-Pass Power Gains Having an Adjustable Attenuation in The Crossover Frequency*, The XX-SPETO Conference, Gliwice, May , 1997, pp 275-278.
- [59] Świętach Z., *Analityczna konstrukcja pary dolno i górnoprzepustowych wzmacnień mocy*, Krajowe Sympozjum Telekomunikacji, Bydgoszcz, Wrzesień, 1997, pp 159-167.
- [60] Świętach Z., *The broadband matching of RLC load*, XX-th National Conference Circuit Theory and Electronic Networks, Koszalin-Kołobrzeg, Poland, October 21-24, 1997, pp. 67-72.
- [61] Świętach Z., *Low/High-Pass Filter Pairs with an Adjustable Attenuation in The Crossover Frequency*, 3-th International Conf. on Advanced Methods in the Theory of Electrical Engineering, Plzen 9-11 September 1997, pp. 245-248.
- [62] Świętach Z., *Dopasowanie szerokopasmowe wybranych impedancji RLC w układach dwuwrotowych*, Raport wewnętrzny ITA-Politechnika Wrocławska, Wrocław 1998.

- [63] Świątach Z., Uruski M., *On realizability Conditions of The Voltage Gains with Lossless Reciprocal 3-Port Network*, XVI National Conf. Circuit Theory and Electronic Circuits, Kołobrzeg, Oct. 26-28, 1993, pp 162÷167.
- [64] Świątach Z., Uruski M., *Synthesis of The Voltage Gains with Lossless Multiplexers Loaded by Complex Impedances*, XVII-th National Conference Circuit Theory and Electronic Networks, Wrocław-Polanica Zdrój, Poland, October 19-21, 1994.
- [65] Uruski M., *Cascade Decomposition of a Passive 2n-Port Network*, Int. J. Circuit Theory and Appl., vol. 17, 1989, pp 55÷69.
- [66] Uruski M., *Parametrization of The Scattering Matrix of 3-Port Broadband Matching Networks*, XV Nat. Conf. Circuit Theory and Electr. Circuits, Szczyrk 1992, pp 19÷24.
- [67] Uruski M., *Realizability Conditions of Nonreciprocal Broadband Matching Networks*, Int. J. Circuit Theory and Appl., vol. 12, no 1, 1984, pp 47÷50.
- [68] Uruski M., *Synteza Trójwrotowego Układu Dopasowującego*, VII Nat. Symp. U.R.S.I., Gdańsk 1993, vol-C, pp 143÷146.
- [69] Uruski M., *Synthesis of Lossless Reciprocal Multiport Matching Networks in The Standard Multiplexer Configuration*, XVI Nat. Conf. Circuit Theory and Electr. Circuits, Kołobrzeg 1993, pp 162÷167.
- [70] Uruski M., *Wybrane Zagadnienia Syntezy Liniowych Wielowrotników Pasywnych*, Prace Naukowe ITA P. Wr., Monografia nr. 22, Wrocław 1983.
- [71] Wang Z. M., Chen W. K., *A Diplexer Configuration Composed of a Three-Port Circulator and Two Reciprocal Two-Port Networks*, J. of the Franklin Inst., vol. 326, no 6 1989, pp 773÷791.
- [72] Wang Z. M., Chen W. K., *Broadband Matching of Multiport Networks*, IEEE Trans. on CAS-31, no 9, 1984, pp 788 ÷ 796.
- [73] Wang Z. M., Chen W. K., *Design of a Symmetrical Diplexer Composed of Canonical Butterworth Two-Port Networks*, J. of the Franklin Inst., vol. 326, no 3 1989, pp 313÷327.
- [74] Weinberg L., *Network Analysis and Synthesis*, McGraw-Hill, Inc. 1962.
- [75] Winter F., *Equal Phase, Variable Crossover, Ladder Realizable, Diplexers Using the Butterworth Polynomial*, Proc. of IEEE-ISCAS Conf. 1994, pp 25÷28.
- [76] Wohlers M. R., *Complex Normalization of Scattering Matrices and The Problem of Compatible Impedances*, IEEE Trans. on CT vol-12, no 4, December 1965, pp 529÷535.
- [77] Wohlers M. R., *Lumped and Distributed Passive Networks*, Academic Press, New York and London, 1969.
- [78] Youla D. C., *A New Theory of Broadband Matching*, IEEE Trans. on CT vol-11, 1964, pp 30÷50.
- [79] Youla D. C., *A New Theory of Cascade Synthesis*, IRE Trans. on CT vol-8, 1961, pp 244÷259.
- [80] Youla D. C., *An Extension of the Concept of Scattering Matrix*, IEEE Trans. on CT vol-11, June 1964, pp 310÷312.
- [81] Youla D. C., Carlin H. J., Yarman B. S., *Double Broadband Matching and The Problem of Reciprocal Reactance 2n-Port Cascade Decomposition*, Int. J. Circuit Theory and Appl., vol. 12, 1984, pp 261÷281.
- [82] Youla D. C., Pillali U., Winter F., *Theory and Design of Maximally Flat Low-Pass and High-Pass Reactance Ladder Diplexers*, IEEE Trans. on CAS-I, vol. cas-39, no 5, May 1992, pp 337÷349.

- [83] Youla D. C., Saito M., *Interpolation with Positive-Real Functions*, J. Franklin Inst. vol. 284, no 2, August 1967, pp 77÷108.
- [84] Youla D. C., Winter F., *New Theorems in The Synthesis of Passive Multiplexers*, Int. J. Circuit Theory and Appl., vol. 19, 1991, pp 341÷364.
- [85] Zha Q. Z., Chen W. K., *Broad-Band Impedance Matching of The RLC Generator and Load*, Proc. of IEEE-ISCAS Conf. 1990, pp 2774÷2777.
- [86] Zha Q. Z., Chen W. K., *The Synthesis of Chebyshev Broad-band Impedance-matching Ladder Networks*, J. of the Franklin Inst., vol. 327, no 3, 1990, pp 377÷402.

