

Jacek Juzwiszyn

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

ZAWIROWANY ŚWIAT EKONOMII – PRÓBA POMIARU WIRÓW RÓWNOWAGI

1. Wprowadzenie

W roku 1543 w Norymberdze zostało oddane do druku dzieło Mikołaja Kopernika *De Revolutionibus* [O obrotach kręgów niebieskich ksiąg sześć]. W poszczególnych księgach zawarte zostały fundamentalne dowody świadczące m.in. o tym, że: świat jest kulisty, że ruch ciał niebieskich jest jednostajny i kolisty nieustanny lub z ruchów kolistych złożony, jak również, że istnieje porządek w ruchu sfer niebieskich. W dziele zostały zdefiniowane takie zagadnienia, jak np. równomierne ruchy precesji, jak również średni ruch precesji. Po przestudiowaniu tego niezwykłego dzieła wydanego najprawdopodobniej w liczbie ok. 1000 egzemplarzy, nieliczni czytelnicy posiadli m.in. naukowy dowód związany z ruchem precesyjnym Ziemi. Pojęcie precesji dotyczy obiektów wirujących wokół własnej osi. Jak powszechnie wiadomo, Ziemia oprócz obrotów wokół własnej osi dokonuje również obrotów wokół Słońca. Ruch precesyjny polega na ruchu osi obrotu Ziemi, która w ciągu 25 700 lat (tzw. rok Platona) zakreśla powierzchnię boczną stożka. Wybierając za punkt odniesienia Słońce, można powiedzieć, że na Ziemi wszystko jest poddawane wpływowi ruchu wirowego – ponieważ ruch taki wykonuje nasza planeta. Znane są przykłady niezliczonych, bardzo spektakularnych kosmicznych wirów. Jako przykład można podać galaktykę spiralną NGC 4013, leżącą w gwiazdozbiornie Wielkiej Niedźwiedzicy. Jako przykłady ziemskich wirów na ogół przedstawia się wiry turbulencyjne o niezwykle dużej sile niszczenia. Autor ma tutaj na myśli wiry aerodynamiczne, takie jak np. huragany, cyklony, tajfuny, tornado, a także wielkie wiry hydrodynamiczne. Laminarny wirowy proces wzrostu można zaobserwować u ponad 60% populacji wszystkich roślin. Dodać również należy, że nasz gatunek ludzki wszystkie tajemnice życia skrywa w wirowej strukturze DNA. O odkryciu M. Kopernika, świadczącym o tym, że Ziemia obraca się

wokół własnej osi i dodatkowo wiruje wokół Słońca, wiedzą obecnie wszyscy zacy opuszczający szkolne mury. Wszyscy absolwenci wyższych uczelni ekonomicznych bardzo dobrze znają linie poligonalne, które są płaskimi zygzakami ilustrującymi zmieniające się kursy giełdowych akcji. Nieliczni natomiast wiedzą o fakcie, że płaskie zygzaki powstają z rzutu ortogonalnego wiru (linii śrubowej nawiniętej na stożek) na płaszczyznę przechodzącą przez oś stożka. Okazuje się bowiem, że ruch wirowy dominuje w ekonomii, w której rozpatruje się trajektorię wektorów o składowych: cena, ilość, czas. Zgodnie z prawem Newtona w fizyce ciała wirują wokół wspólnego środka ciężkości, w ekonomii natomiast ruch wirowy odbywa się wokół punktu równowagi. Hipoteza o ruchu wirowym stanu giełdy została empirycznie zweryfikowana przez autora wniosku w jego dysertacji doktorskiej. Podniesienie wymiaru o jeden i przejście do przestrzeni trójwymiarowej pokazało, że ekonomiczny wektor o wspomnianych trzech składowych wykonuje ruch wirowy i zakreśla stożek. Cała przyroda jest w równowadze dynamicznej. Praktycznie w przyrodzie wszystko wiruje wokół środka ciężkości. Ruch jest skutkiem zasady równowagi, można powiedzieć, że wszystkie sekrety równowagi są ukryte w ruchu. Sekrety równowagi ekonomicznej są ukryte w ruchu wirowym i ruchu precesyjnym wyznaczającym poziomy cenowe i ilościowe dowolnych wektorów ekonomicznych.

Próby tworzenia różnych definicji pojęcia równowagi w ekonomii trwają nieprzerwanie. Sam termin „równowaga” ma wiele znaczeń, których interpretacje zostały zapożyczone z wielu dziedzin życia i nauki. W tym krótkim artykule nie sposób wymienić wszystkich tych, którzy wnieśli trwały wkład w rozwój teorii równowagi, ale za pierwsze wyrażone *explicite* definicje równowagi uważa się te, które zostały podane przez Gottfrieda Wilhelma von Leibniza w XVII wieku [Siedlecki 1995, s. 85]¹. Obecnie w ekonomii termin „równowaga” najczęściej utożsamiany jest ze stanem równości pomiędzy popytem i podażą, co sprawia, że równowaga ekonomiczna pojmowana jest jako równowaga rynkowa. W przypadku, gdy zrównanie się wielkości popytu i podaży dotyczy wszystkich dóbr, to stan taki określamy mianem równowagi ogólnej. Równowaga cząstkowa natomiast to równość pomiędzy podażą i popytem na jedno lub kilka wyróżnionych dóbr. Krzywe opisujące podaż i popyt przedstawiane są w dwuwymiarowych układach kartezjańskich, których osiami współrzędnych są ilość dobra i cena dobra. Dokładając do wspomnianego dwuwymiarowego układu trzecią oś czasu, otrzymujemy kartezjański układ trójwymiarowy².

¹ Historyczny rozwój teorii równowagi ekonomicznej, jak również wyjaśnienie uniwersalności samego pojęcia równowagi można znaleźć m.in. w pracach J. Siedleckiego [1992 (w pracy tej m.in. omawiana jest równowaga: fizyczna, chemiczna, termodynamiczna, ekologiczna, społeczna czy też równowaga w naukach matematycznych); 2000; 1995 (zob. rozdział 2, p. 2.1. Retrospekcja historyczna)].

² $\mathbf{R}^3_+$, w sumie z początkiem układu współrzędnych jest zdefiniowany tutaj jako 1/8 układu $\mathbf{R}^3$.

$$R_+^3 = Q \times P \times T \quad (1)$$

Umieszczając w powyżej zdefiniowanym układzie wektory (q_i, p_i, t_i) , gdzie $i \in N \cup 0$, można zauważyć, że są one wprowadzane w ruch wirowy. Ruch wirowy wektora odbywa się wokół pewnej osi, której wektor kierunkowy zasadniczo zgodny jest z kierunkiem wektora osi czasu T . Taki ruch punktu (q_i, p_i, t_i) to skutek oddziaływania nań rynkowych sił podaży i popytu. Trajektoria, jaką zakresła poruszający się punkt, jest trójwymiarową trajektorią wirowo-spiralną.

Okazuje się, że ten rodzaj ruchu punktu, jak również trajektorii, którą ów punkt zakresła, jest wspólny dla wszystkich przypadków, w których analizowane są czasowe zmiany wolumenów i cen. Trójwymiarowe trajektorie wirowo-spiralne są dostrzegalne na wykresach przedstawiających np.: wolumeny i wartości indeksów giełdowych, ilości i ceny sprzedawanych zbóż, ilości kupowanych mieszkań – uzależnione od średniej ceny m² powierzchni, ceny i ilości wydobycia węgla kamiennego itp. Wart zaznaczenia w tym miejscu jest również przykład występowania trajektorii wirowo-spiralnej w momencie przedstawiania zależności między bezrobociem a inflacją, podany w pracy [Dorbusch, Fischer 1981, s. 420]³.

Trajektorie wyznaczone przez ruch wektora (q_i, p_i, t_i) zachowują swój wirowo-spiralny charakter niezależnie od tego, w jakich układach czasowych są analizowane. Dotyczy to wykresów tworzonych zarówno w skalach krótkookresowych (np. minutowej, godzinowej, dziennej), jak i długookresowych (tygodniowej, miesięcznej, rocznej etc.).

Potwierdzeniem samego faktu istnienia trójwymiarowych – wirowo-spiralnych trajektorii rynkowych, są płaskie, dwuwymiarowe wykresy. Powstają one w wyniku ortogonalnych rzutów trajektorii na trzy wzajemnie prostopadłe do siebie płaszczyzny. Poniższe trzy przekształcenia wzoru (2) przedstawiają ortogonalne rzuty trajektorii. Rzuty takie zostały zilustrowane na rys. 1.

$$\begin{aligned} p: R_+^3 &\rightarrow R_+^2, & p: (Q \times P \times T) &\rightarrow (P \times T), \\ q: R_+^3 &\rightarrow R_+^2, & q: (Q \times P \times T) &\rightarrow (Q \times T), \\ s: R_+^3 &\rightarrow R_+^2, & s: (Q \times P \times T) &\rightarrow (Q \times P) \end{aligned} \quad (2)$$

W rezultacie dwóch pierwszych przekształceń p i q otrzymujemy wykresy funkcji segmentowych, natomiast w wyniku zrealizowania trzeciego przekształcenia s otrzymujemy krzywą przypominającą swoim kształtem spiralę. Sam fakt wykorzystywania trajektorii spiralnych do opisu zjawisk cyklicznych w ekonomii jest

³ Autorzy na płaskim dwuwymiarowym wykresie przedstawiają procentowe zależności między bezrobociem i inflacją w latach 1963-1979. Wykres ten, przedstawiający płaskie spirale, powstaje w wyniku ortogonalnego rzutu trójwymiarowej trajektorii wirowo-spiralnej na płaszczyznę opisaną osiami przedstawiającymi bezrobocie i inflację (rys. 13. *Inflation and unemployment*).

ogólnie znany [Siedlecka 1993, s. 136]⁴. Jednak we wszystkich znanych autorowi przypadkach, wspomniana trajektoria spiralna jest dwuwymiarowa (płaska). W artykule został omówiony związek między różnowymiarowymi wirowymi trajektoriami oraz przedstawiona została propozycja ich pomiaru – wyceny.

2. Trójwymiarowa trajektoria rynkowa

Spirala logarytmiczna jest krzywą przestępną mającą tę własność, że kąt utworzony pomiędzy styczną w dowolnym punkcie i promieniem wodzącym – wychodzącym z jej ogniska jest w każdym punkcie spirali stały [Leja 1961, s. 157]. Spirala logarytmiczna posiada szereg innych ciekawych własności geometrycznych, niektóre z nich są wykorzystywane np. podczas prób wyjaśniania (pojawiania się) na płaskich wykresach giełdowych tzw. liczb Fibonacciego czy też złotej proporcji – współczynnika (χ) $\chi = 0,5(\sqrt{5} - 1)$. Na podstawie złotej proporcji R.N. Elliott opracował prognostyczną zasadę giełdowych fal, która, pomimo że do dnia dzisiejszego wzbudza szereg kontrowersji, jest zasadą używaną w analizie technicznej.

Równanie spirali logarytmicznej we współrzędnych biegunowych jest następującej postaci:

$$r = ae^{\lambda\varphi} \quad (3)$$

gdzie: r – promień wodzącym,
 $a > 0$ – stała długość podstycznej biegunowej,
 $\lambda > 0$ – stała wartość cotangensa kąta ψ , jaki tworzy styczna do spirali z promieniem wodzącym r , w dowolnym jej punkcie,
 φ – wartość kąta jaki tworzy promień wodzący z osią odciętych Ox .

Dowolny punkt płaskiej spirali logarytmicznej daje się przedstawić jako para współrzędnych:

$$(x, y) = (x_\varphi, y_\varphi) = (ae^{\lambda\varphi} \cos \varphi, ae^{\lambda\varphi} \sin \varphi) \quad (4)$$

Jeżeli w układzie R^3_+ spiralę logarytmiczną (4) nawiniemy na stożek (5)

$$\frac{x^2}{s^2} + \frac{y^2}{s^2} = \frac{z^2}{l^2} \quad (5)$$

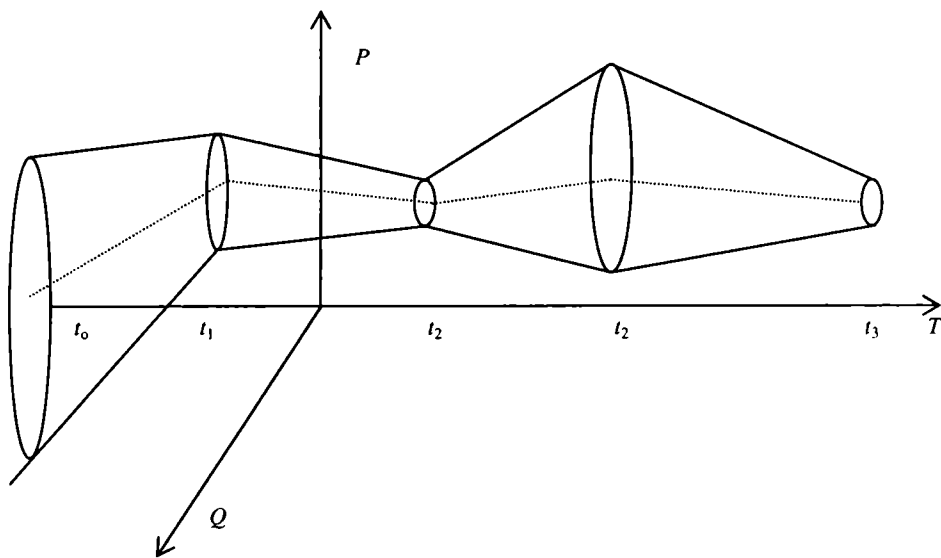
to dowolny punkt powstałej trójwymiarowej trajektorii zadany będzie jako

⁴ W pracy tej m.in. Autorka wskazuje na celowość estymacji parametrów trajektorii spiralnych, które opisują cykliczne zależności dynamicznych (rys. 5.8 (Trajektorie zależności zmiennych)).

$$(x, y, z) = (x_\varphi, y_\varphi, z_\varphi) = \left(ae^{\lambda\varphi} \cos \varphi, ae^{\lambda\varphi} \sin \varphi, a \frac{l}{s} e^{\lambda\varphi} \right) \quad (6)$$

Dysponując wektorem danych typu $(q_i, p_i, t_i) \in Q \times P \times T$ (wolumen, ilość, czas) (por. [Juzwiszyn 2004])⁵, można posłużyć się metodą najmniejszych kwadratów i wyznaczyć trzy parametry trójwymiarowej spirali, tj.: a – długość podstycznej biegunowej, λ – wartość cotangensa kąta ψ , jaki tworzy styczna do spirali z promieniem wodzącym r , oraz wartość s , która jest długością promienia stożka utworzonego przez spiralę rynkową w R^3_+ . Wartości wyestymowanych parametrów: a , λ , s umożliwiają opisywanie toru ruchu wektora (q_i, p_i, t_i) za pomocą trójwymiarowej trajektorii wirowo-spiralnej $S_L(\varphi) = (ae^{\lambda\varphi} \cos \varphi, ae^{\lambda\varphi} \sin \varphi, a \frac{l}{s} e^{\lambda\varphi})$. Spiralna linia regresji wektora (q_i, p_i, t_i) wyznacza w przestrzeni $R^3_+ = Q \times P \times T$ stożek (rodzinę stożków).

Na rysunku 1 został przedstawiony przykład rodziny stożków wygenerowanych przez trajektorie wirowo-spiralne wektora o składowych: wolumen, cena, czas.



Rys. 1. Rodzina stożków wyznaczona przez trajektorie wirowo-spiralne w przestrzeni trójwymiarowej
Źródło: opracowanie własne.

⁵ Rzut trójwymiarowej trajektorii na płaszczyznę opisaną osiami ilości i ceny jest płaską spiralą, która swoim kształtem przypomina model pajęczynowy. Biegun – punkt asymptotyczny modelu pajęczynowego traktowany jest jako poziom równowagi chwilowej rynku.

3. Estymacja trajektorii wirowo-spiralnej

Zadajmy parametrycznie w przestrzeni trójwymiarową krzywą wirowo-spiralną

$$S_L(\varphi) = \left(ae^{\lambda\varphi} \cos \varphi, ae^{\lambda\varphi} \sin \varphi, a \frac{l}{s} e^{\lambda\varphi} \right) \quad (7)$$

i określmy ΔS_L jako

$$\Delta S_L(\varphi) = \left[\sum_{i=1}^n \left(ae^{\lambda\varphi} \cos \varphi, ae^{\lambda\varphi} \sin \varphi, a \frac{l}{s} e^{\lambda\varphi} \right) - (q, p, t) \right]^2 \rightarrow \min \quad (8)$$

gdzie dla uproszczenia zapisu pomija się iterację, która przebiega po p, q, t i φ ;

$\varphi_i = \arctg \frac{q_i}{p_i}$ (zależność ta zostanie pokazana w dalszej części artykułu).

Parametry: a, λ, s powinniśmy otrzymać z rozwiązań jednorodnego układu równań

$$\left(\frac{\partial \Delta S_L(\varphi)}{\partial a}, \frac{\partial \Delta S_L(\varphi)}{\partial \lambda}, \frac{\partial \Delta S_L(\varphi)}{\partial s} \right) = 0 \quad (9)$$

przyrównując wartość pierwszej pochodnej cząstkowej do zera, otrzymujemy równanie

$$\frac{\partial \Delta S_L(\varphi)}{\partial a} = 2 \left[\sum_{i=1}^n \left(ae^{\lambda\varphi} \cos \varphi - q, ae^{\lambda\varphi} \sin \varphi - p, a \frac{l}{s} e^{\lambda\varphi} - t \right) \left(e^{\lambda\varphi} \cos \varphi, e^{\lambda\varphi} \sin \varphi, \frac{l}{s} e^{\lambda\varphi} \right) \right] = 0.$$

$$\sum_{i=1}^n \left(ae^{2\lambda\varphi} \cos^2 \varphi - qe^{\lambda\varphi} \cos \varphi + ae^{2\lambda\varphi} \sin^2 \varphi - pe^{\lambda\varphi} \sin \varphi + a \frac{l^2}{s^2} e^{2\lambda\varphi} - t \frac{l}{s} e^{\lambda\varphi} \right) = 0 \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n \left[ae^{2\lambda\varphi} \left(1 + \frac{l^2}{s^2} \right) - e^{\lambda\varphi} \left(q \cos \varphi + p \sin \varphi + t \frac{l}{s} \right) \right] = 0 \quad (11)$$

z którego wyznaczamy wartość parametru a

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n e^{\lambda\varphi} \left(q \cos \varphi + p \sin \varphi + t \frac{l}{s} \right)}{\left(1 + \frac{l^2}{s^2} \right) \sum_{i=1}^n e^{2\lambda\varphi}} \quad (12)$$

Przyrównując kolejną pochodną cząstkową do zera, mamy

$$\frac{\partial S_L(\varphi)}{\partial \lambda} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial \Delta S_L(\varphi)}{\partial \lambda} = 2 \sum_{i=1}^n \left[\left(ae^{\lambda\varphi} \cos \varphi - q, ae^{\lambda\varphi} \sin \varphi - p, a \frac{l}{s} e^{\lambda\varphi} - t \right) \right. \\ \left. \left(a\varphi e^{\lambda\varphi} \cos \varphi, a\varphi e^{\lambda\varphi} \sin \varphi, a\varphi \frac{l}{s} e^{\lambda\varphi} \right) \right] = 0 \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(a^2 \varphi e^{2\lambda\varphi} \cos^2 \varphi - qa\varphi e^{\lambda\varphi} \cos \varphi + a^2 \varphi e^{2\lambda\varphi} \sin^2 \varphi - \right. \\ \left. - pa\varphi e^{\lambda\varphi} \sin \varphi + a^2 \varphi \frac{l^2}{s^2} e^{2\lambda\varphi} - ta\varphi \frac{l}{s} e^{\lambda\varphi} \right) = 0 \quad (15)$$

$$a \left(1 + \frac{l^2}{s^2} \right) \sum_{i=1}^n \varphi e^{2\lambda\varphi} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda\varphi} \left(q \cos \varphi + p \sin \varphi + t \varphi \frac{l}{s} \right) \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^n \varphi e^{2\lambda\varphi} = \frac{\sum_{i=1}^n e^{\lambda\varphi} \left(q \cos \varphi + p \sin \varphi + t \varphi \frac{l}{s} \right)}{a \left(1 + \frac{l^2}{s^2} \right)} \quad (17)$$

Ostatnim z warunków układu (9) jest:

$$\frac{\partial S_L(\varphi)}{\partial s} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial \Delta S_L(\varphi)}{\partial s} = 2 \sum_{i=1}^n \left[\left(ae^{\lambda\varphi} \cos \varphi - q, ae^{\lambda\varphi} \sin \varphi - p, a \frac{l}{s} e^{\lambda\varphi} - t \right) \left(0, 0, -a \frac{l}{s^2} e^{\lambda\varphi} \right) \right] = 0 \quad (19)$$

$$s = \frac{al \sum_{i=1}^n e^{2\lambda\varphi}}{\sum_{i=1}^n t e^{\lambda\varphi}} \quad (20)$$

Poniższy układ (21) tworzą nieliniowe równania: (12), (17) i (20).

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{\sum_{i=1}^n e^{\lambda \varphi_i} \left(q \cos \varphi_i + p \sin \varphi_i + t_i \frac{l}{s} \right)}{\left(1 + \frac{l^2}{s^2} \right) \sum_{i=1}^n e^{2\lambda \varphi_i}} \\
 \sum_{i=1}^n \varphi_i e^{2\lambda \varphi_i} &= \frac{\sum_{i=1}^n e^{\lambda \varphi_i} \left(q \cos \varphi_i + p \sin \varphi_i + t_i \frac{l}{s} \right)}{a \left(1 + \frac{l^2}{s^2} \right)} \\
 s &= \frac{a l \sum_{i=1}^n e^{2\lambda \varphi_i}}{\sum_{i=1}^n t_i e^{\lambda \varphi_i}}
 \end{aligned} \tag{21}$$

Jak widać, w układzie tym parametry trajektorii są wzajemnie od siebie zależne. Dodatkowo łatwo zauważyć podobieństwo między dwoma pierwszymi równaniami układu (21). Rugując z obu równań parametr a , otrzymujemy równość

$$\frac{\sum_{i=1}^n e^{\lambda \varphi_i} \left(q \cos \varphi_i + p \sin \varphi_i + t_i \frac{l}{s} \right)}{\left(1 + \frac{l^2}{s^2} \right) \sum_{i=1}^n e^{2\lambda \varphi_i}} = \frac{\sum_{i=1}^n e^{\lambda \varphi_i} \left(q \cos \varphi_i + p \sin \varphi_i + t_i \frac{l}{s} \right)}{\left(1 + \frac{l^2}{s^2} \right) \sum_{i=1}^n \varphi_i e^{2\lambda \varphi_i}} \tag{22}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n \varphi_i e^{2\lambda \varphi_i}}{\sum_{i=1}^n e^{2\lambda \varphi_i}} = \frac{\sum_{i=1}^n e^{\lambda \varphi_i} \left(q \cos \varphi_i + p \sin \varphi_i + t_i \frac{l}{s} \right)}{\sum_{i=1}^n e^{\lambda \varphi_i} \left(q \cos \varphi_i + p \sin \varphi_i + t_i \frac{l}{s} \right)} \tag{23}$$

Jednoznaczne wyznaczenie wartości a , λ , s zależnych tylko od znanych wartości: q_i , p_i , t_i , φ_i i l jest niemożliwe dla tego typu spirali. Mniej skomplikowane równania regresji wirowo-spiralnej otrzymamy w przypadkach, gdy posłużymy się równaniami parametrycznymi spirali: hiperbolicznej $r = a\varphi^{-1}$, $S_H = \left(\frac{a}{\varphi} \cos \varphi, \frac{a}{\varphi} \sin \varphi, \frac{a}{\varphi} \frac{l}{s} \right)$

lub spirali Archimedesza $r = a\varphi$, $S_A = \left(a\varphi \cos \varphi, a\varphi \sin \varphi, a\varphi \frac{l}{s} \right)$ (zadanych oczywiście we współrzędnych biegunowych i wyznaczających stożek w układzie $Q \times P \times T$).

Wyjaśnienia wymaga jeszcze fakt związany z wartością kąta φ_i . Jeżeli przekroju trajektorii dokonamy płaszczyzną prostopadłą do osi czasu w chwili t_i , to otrzymany punkt (q_i, p_i) będzie miał współrzędne:

$$q_i = ae^{\lambda\varphi_i} \cos \varphi_i, \quad p_i = ae^{\lambda\varphi_i} \sin \varphi_i \quad (24)$$

z których wyznaczymy

$$e^{\lambda\varphi_i} = \frac{q_i}{a \cos \varphi_i} = \frac{p_i}{a \sin \varphi_i} \quad (25)$$

$$\frac{p_i}{q_i} = \frac{\sin \varphi_i}{\cos \varphi_i} = \operatorname{tg} \varphi_i \quad (26)$$

$$\varphi_i = \operatorname{arctg} \frac{p_i}{q_i} \quad (27)$$

Zatem znane wartości q_i i p_i pozwalają na obliczenie wartości kąta φ_i . Kąt ten zawarty jest pomiędzy promieniem wodzącym trajektorii r i osią OQ (osią wolumentu). Wartość długości promienia wodzącego (wyznaczonego przez trajektorię w chwili t_i) obliczamy ze wzoru

$$r_i = \sqrt{q_i^2 + p_i^2} \quad (28)$$

4. Estymacja stożków równowagi

Wirowanie wektora (q_i, p_i, t_i) wyznacza trajektorię spiralną. Jednak niezależnie od powstawania trajektorii, tor ruchu wektora wyznacza powierzchnie stopnia drugiego. Można przypuszczać, że trajektoria wirowa jest nawijana na takie powierzchnie, z których należy wymienić np.: stożek, walec, elipsoidę, paraboloidę, hiperboloidę, pseudosferę etc. Zakładamy, że powierzchnie te zmieniają się w czasie trwania ruchu wirowego punktu (q_i, p_i, t_i) .

Jeżeli teraz ograniczymy nasze główne założenie tylko do stożków, będzie to oznaczało, że po upływie pewnego okresu i wyznaczenia w tym przedziale stożka, trajektoria punktu rozpoczyna wyznaczanie nowego stożka etc⁶.

⁶ Obserwacje szeregow czasowych w $R_*^3 = Q \times P \times T$ (poczynione przez autora w ostatnim czasie) ośmielają go do postawienia jeszcze jednej hipotezy dotyczącej ruchu wektora o składowych (q_i, p_i, t_i) . Otóż stożki wyznaczone przez trajektorię w pewnych przedziałach czasowych również wykazują tendencję do wirowania wokół pewnej hipotetycznej linii. To kinematyczne zjawisko swoich charakterem przypomina ruch precesyjny (precesję), który występujący wtedy, gdy ciało obracające się dookoła osi zostanie poddane momentowi siły posiadającemu składową prostopadłą do momentu pędu. Wówczas to oś obrotu ciała zaczyna wykonywać ruch, kreśląc sobą powierzchnię w kształcie bocznej powierzchni stożka. Precesja jest odpowiedzialna za stabilność wirujących obiektów. Precesji może towarzyszyć nutacja, a wówczas pojawiają się dodatkowe „wahnięcia”, drgania,

Stożek przedstawiony w równaniu (5) zadajmy we współrzędnych biegunowych (29)

$$\frac{q^2}{s^2} + \frac{p^2}{s^2} = \frac{t^2}{l^2} \quad ((5))$$

$$g_\varphi = (s \cos \varphi, s \sin \varphi, l) \quad (29)$$

Postępując analogicznie jak w przypadku próby estymacji trajektorii, skorzystajmy raz jeszcze z MNK dla Δg_φ

$$\Delta g_\varphi = \sum_{i=1}^n [(s \cos \varphi, s \sin \varphi, l) - (q_i, p_i, t_i)]^2 \rightarrow \min \quad (30)$$

i obliczmy

$$\left(\frac{\partial \Delta g_\varphi}{\partial s}, \frac{\partial \Delta g_\varphi}{\partial l} \right) = 0 \quad (31)$$

Podobnie jak powyżej, pomijamy iterację dla q_i, p_i, t_i, φ_i .

$$\frac{\partial \Delta g_\varphi}{\partial s} = 0 \Rightarrow 2 \sum_{i=1}^n (s \cos \varphi - q, s \sin \varphi - p, l - t)(\cos \varphi, \sin \varphi, 0) = 0 \quad (32)$$

$$\sum_{i=1}^n (s \cos^2 \varphi - q \cos \varphi + s \sin^2 \varphi - p \sin \varphi) = 0 \quad (33)$$

$$s = \sum_{i=1}^n (q \cos \varphi + p \sin \varphi) \quad (34)$$

gdzie:

$$\varphi_i = \arccotg \frac{q_i}{p_i} = \arccos \frac{q_i}{\sqrt{q_i^2 + p_i^2}} \quad (35)$$

Z warunku $\frac{\partial \Delta g_\varphi}{\partial l} = 0$ wynika, że

$$l = \sum_{i=1}^n t \quad (36)$$

Dla znanych wartości parametrów stożka s i l możemy określić położenie punktów, przez które przechodzi jego oś. Współrzędne te są nam potrzebne do wyznaczenia równania parametrycznego prostej w $\mathbf{R}^3_+$ (osi stożka, wokół której wirują wektory).

które to powodują podtrzymywanie ruchu wirowego obiektu. Sam fakt precesyjnego wirowania stożków j należy utożsamiać ze stanami równowagi ogólnej, natomiast oś stożka wyznaczonego przez trajektorię wirowo-spiralną będzie nazywana osią równowagi chwilowej (zaobserwowanej w przedziale czasu, w którym stożek został wyznaczony).

Z geometrii wiemy, że prosta przechodząca przez punkty (q_1, p_1, t_1) i (q_2, p_2, t_2) jest zadana równaniami parametrycznym:

$$q = q_1 + (q_2 - q_1)b, \quad p = p_1 + (p_2 - p_1)b, \quad t = t_1 + (t_2 - t_1)b \quad (37)$$

Odwrotnie: trzy równania parametryczne postaci

$$q = q_0 + cb, \quad p = p_0 + db, \quad t = t_0 + eb \quad (38)$$

gdzie c, d, e nie są jednocześnie zerami, przedstawiają prostą przechodzącą przez punkty

$$R_1(q_0, p_0, t_0), \quad R_2(q_0 + c, p_0 + d, t_0 + e) \quad (39)$$

co wynika ze wzorów (37).

Rugując parametr b z równań (38), otrzymamy dwa równania przedstawiające oś stożka równowagi ekonomicznej

$$\frac{q - q_0}{c} = \frac{p - p_0}{d} = \frac{t - t_0}{e} \quad (40)$$

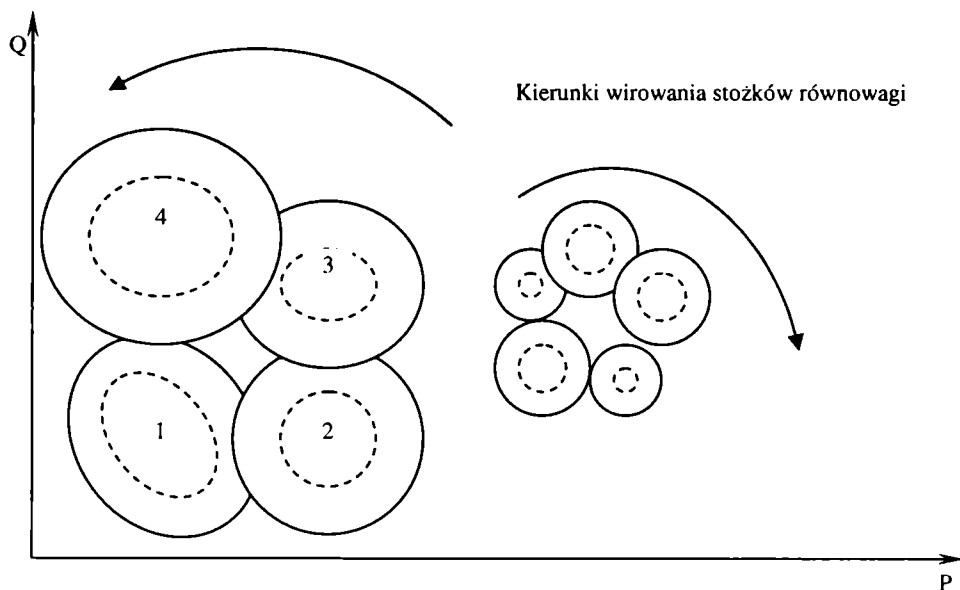
Jeżeli więc punkt (q_i, p_i, t_i) leży na prostej $R_1 R_2$ przedstawionej równaniami (38), to jego współrzędne spełniają równania prostej (40) i tym samym wyznaczają położenie punktu równowagi ekonomicznej w chwili t_i .

5. Pomiar płaskich wirów równowagi

Obserwacje kinematyki wektorów o składowych: wolumen, cena różnych dóbr ekonomicznych pozwalają dostrzec pewną regularność w ich fizycznym ruchu. Owa regularność wyrażona jest poprzez podwójne wirowanie wektorów w $\mathbf{R}^3_+$.

Wirowo-spiralne trójwymiarowe trajektorie wyznaczają w pewnych przedziałach czasu stożki, które również wirują. Ortogonalne rzuty takich stożków przedstawione zostały na rys. 2. Jak widać, tworzą one pewną rodzinę okręgów (elips), które zdaniem autora mogą być podawane wycenie – pomiarowi. Po pierwsze należy zauważyć, iż każda skończona rodzina punktów na płaszczyźnie (nie leżących na jednej prostej) może być aproksymowana okręgiem [Antoniewicz 1988]⁷.

⁷ Twierdzenie o aproksymacji okręgiem: Dla każdego skończonego układu punktów płaszczyzny nie leżących na jednej prostej w rodzinie wszystkich okręgów tej płaszczyzny istnieje tylko jeden okrąg najlepiej aproksymujący dany układ punktów.



Rys. 2. Schematyczna rodzina stożków równowagi zrzutowana na płaszczyznę $P \times Q$

Źródło: opracowanie własne.

Ponadto pomiar wirów oparty na geometrycznej analizie wartości wolumenów i cen dóbr to nic innego, jak tylko pomiar dynamiki ich zmian. Krótko, pomiar wiru jest ściśle związany z położeniem i promieniem okręgu, który dany wir aproksymuje. Okręgi o niewielkich promieniach będą więc opisywały dobra, których dynamika cen i wolumenów jest stosunkowo niewielka – stabilna⁸. Natomiast okręgi o dużych promieniach będą aproksymowały wiry, które opisują niestabilne, wręcz turbulencyjne zmiany cen i ilości wytwarzanych dóbr. Położenia okręgów, którymi aproksymujemy wiry równowagi, mogą udzielać odpowiedzi na dwa podstawowe pytania związane z cenami i wolumenami produkcji dóbr. A mianowicie: Czy należy produkować niewielką ilość towaru dużej wartości? Czy też dużą ilość towaru niewielkiej wartości? Na szczęście rynek jak zawsze „bardzo szybko” pozwala sformułować odpowiedzi na tak postawione pytania.

6. Podsumowanie

Śledząc w układach trójwymiarowych zmieniające się położenie punktu opisanego takimi współrzędnymi, jak: wolumen, cena, czas, można zauważyć, że powstająca w wyniku ruchu tego punktu trajektoria, jest trójwymiarową trajektorią

⁸ W pracy [Juzwiszyn, Krzywicki 2005] omawiane są zagadnienia stabilności trajektorii oraz niestabilności – turbulencji trajektorii, mierzonej przy pomocy tzw. ekonomicznego wskaźnika Reynoldsa.

wirowo-spiralną. Trajektoria ta, wirując wokół osi czasu, wyznacza w R_+^3 stożki. Ortogonalne rzuty trójwymiarowej trajektorii wirowo-spiralnej tworzą na płaszczyznach przechodzących przez oś stożka dwuwymiarowe wykresy funkcji segmentowych. Wykresy te powstają w układach: cena – czas, wolumen – czas.

Prostopadły rzut trójwymiarowej trajektorii na płaszczyznę prostopadłą do osi stożka swoim kształtem przypomina dwuwymiarową spiralę (płaski wir). Poniżej przedstawione są trzy równania zadane we współrzędnych biegunowych (41). Równania te opisują modelową trójwymiarową trajektorię, która powstaje w wyniku nawijania spirali logarytmicznej na stożek, którego osią jest czas. Estymacja parametrów a i λ trójwymiarowej trajektorii doprowadza nas do nieliniowych równań, których rozwiązania są skomplikowane. Natomiast próba estymacji parametrów stożków wygenerowanych przez trajektorię w R_+^3 prowadzi do równań, których rozwiązania w sposób jednoznaczny wyznaczają stożek:

$$\begin{aligned}x(\varphi) &= a \cos \varphi \exp(\lambda \varphi), \\y(\varphi) &= a \sin \varphi \exp(\lambda \varphi), \\z(\varphi) &= sl^{-1} \exp(\lambda \varphi)\end{aligned}\tag{41}$$

gdzie: $\varphi, a \in R_+$,

$\lambda = \operatorname{ctg} \psi = \operatorname{const.}$,

s, l – wartości odpowiednio promienia i długości stożka.

W przypadku gdy $z(\varphi) = 0$, otrzymujemy równanie spirali logarytmicznej w R^2 (we współrzędnych biegunowych), tj. $r = a \exp(\lambda \varphi)$.

Znając wartości parametrów stożka, wyznaczonego w wyniku ruchu wirowego punktów $(q_i, p_i, t_i) \in Q \times P \times T = R_+^3$, stwierdzamy że punkty te wirują wokół osi stożka. Osie utworzonych stożków nazywać będziemy liniami wirowej równowagi ekonomicznej. Kończąc, warto sformułować łatwą do empirycznego zweryfikowania hipotezę. Dynamika zmieniających się wartości wolumenów i cen wektorów w trójwymiarowym świecie ekonomii sprawia, że świat ten jest pełen zawirowań.

Literatura

- Antoniewicz R., *Metoda najmniejszych kwadratów dla zależności niejawnych i jej zastosowania w ekonomii*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej nr 445. Seria: Monografie i Opracowania nr 49, Wrocław 1988.
- Do Carmo M., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, Englewood Cliffs 1976.
- Dorbusch R., Fischer S., *Macro-economics*, McGraw-Hill Book Co., New York 1981.
- Hansen B., *Przegląd systemów równowagi ogólnej*, PWN, Warszawa 1976.

- Hellwig Z., *Równowaga ekonomiczna. Pojęcie kontrowersyjne*, „Ekonomista” 1999 nr 3-4 (przedruk [w:] *Metody ilościowe w ekonomii. Pisma wybrane*, Wyd. AE, Wrocław 1981).
- Juzwiszyn J., *Concerning the Revolution of Financial Spheres. Applications of Physics in Financial Analyses 4*, University of Technology, Warsaw 2003.
- Juzwiszyn J., *Trójwymiarowa kinematyka rynku*, [w:] *Zastosowania statystyki i matematyki w ekonomii*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej nr 1006, Wrocław 2003.
- Juzwiszyn J., *Spiralna ekstrapolacja rynków finansowych*, Wyd. AE, Katowice 2003.
- Juzwiszyn J., *Estymacja stożków równowagi*, Wyd. AE, Katowice 2004.
- Juzwiszyn J., *Wirowo-spiralne krzywe giełdowe*, Wyd. AE, Wrocław 2005.
- Juzwiszyn J., Krzywicki A., *Równania hydrodynamiki a modele ekonomiczne*, Wyd. AE, Wrocław 2005.
- Leja F., *Geometria analityczna*, PWN, Warszawa 1961.
- Opera J., *Geometria różniczkowa i jej zastosowania*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.
- Siedlecka U., *Prognozy ostrzegawcze*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej nr 651. Seria: Monografie i Opracowania nr 99, Wrocław 1993.
- Siedlecki J., *Szkice o równowadze gospodarczej*, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław-Warszawa-Kraków 1995.
- Siedlecki J., *Równowaga a wzrost gospodarczy*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa-Wrocław 2000.
- Siedlecki J., *Równowaga binarna w ekonomii*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej nr 612, Seria: Monografie i Opracowania nr 89, Wrocław 1992.
- Smoluk A., *Giełda, fale Elliotta, stożki i walce*, [w:] *Dynamiczne modele ekonometryczne*, red. T. Kufel, M. Piłatowska, UMK, Toruń 2003.
- Smoluk A., Zamorski J., *Współczynniki warunków ekstremalności uogólnionych funkcji spiralnych*, Roczniki PTM, Seria I, Prace Matematyczne, Wrocław 1962.
- Taylor E., *Historia rozwoju ekonomiki*, t. 1 i 2, Wyd. „Delfin”, Lublin 1991.

THE SPINNING WORLD OF ECONOMY – AN ATTEMPT MEASURING EQUILIBRIUM VORTICES

Summary

While observing the development of market indexes in the three-dimensional space in the system (price – value, volume – time), a rotational spiral curve is encountered. This curve traces cones in R_+^3 . Orthogonal projections of this curve onto the planes going through the cone axis are two-dimensional stock market zigzags in systems (price – time, volume – time). The shape of the orthogonal projection of the trajectory onto the plane perpendicular to the cone's axis resembles logarithmic spiral or, known from economics, so called arachnoic model formed in the system (volume – price). The model parametric equation of rotational spiral market trajectory is of the following form:

$$x(\varphi) = a \cos \varphi \exp(\lambda \varphi),$$

$$y(\varphi) = a \sin \varphi \exp(\lambda \varphi),$$

$$z(\varphi) = sl^{-1} \exp(\lambda \varphi).$$

Where $a, \lambda \in R_+$, $\lambda = \operatorname{ctg} \psi = \operatorname{const}$, l, s – the values of, respectively, the radius and the altitude of the cone. When $z(\varphi) = 0$, we obtain a logarithmic spiral equation in R^2 (in polar coordinates) i.e. $r = a \exp(\lambda \varphi)$. Determining the parameters of market trajectories in R_+^3 allows market to be represented by cones whose axes form the trajectory of market equilibrium.