

Na prawach rękopisu

I N S T Y T U T I N Z Y N I E R I I L Ą D O W E J
P O L I T E C H N I K I W R O C Ł A W S K I E J

Raport serii PRE nr 33/90

WYBRANE ZAGADNIENIA
STOCHASTYCZNYCH DRGAŃ I NIEZAWODNOŚCI
MOSTU OBCIĄŻONEGO RUCHEM DROGOWYM

Róża Sieniawska

Praca doktorska

Promotor: prof. dr hab. inż. Paweł Śniady

Słowa kluczowe: mosty drogowe, dynamika stochastyczna,
model ruchu drogowego, modele obciążenia,
procesy stochastyczne, zmęczenie, problem
pierwszego przejścia, niezawodność

Wrocław 1990

1. WSTĘP

Wprowadzenie

Ze względu na swoje przeznaczenie, mosty stanowią kategorię ważnych i bardzo odpowiedzialnych konstrukcji inżynierskich. Działający na nie ruch drogowy lub kolejowy stanowi o dynamicznym i losowym charakterze ich pracy. Zwiększająca się w ostatnich latach prędkość ruchu pojazdów, ich ładowność oraz powstawanie nowych typów pojazdów wymuszają projektowanie coraz bardziej nowoczesnych konstrukcji mostowych przy równoczesnym zapewnieniu ich niezawodności i funkcjonalności. Powoduje to wzrost zainteresowania badaczy problemami związanymi z charakterem ruchu drogowego i kolejowego, pracą konstrukcji mostowych oraz mechanizmami powstawania uszkodzeń. Powstało wiele prac dotyczących stochastycznej dynamiki konstrukcji poddanych obciążeniom ruchomym np. [3,5,7,8, 15,21,22, 27,29,37,50,55,63,64,65,66].

Losowość obciążenia mostów drogowych wynika z przypadkowości chwil pojawiania się pojazdów na prześle, zróżnicowania ciężaru pojazdów, ich wielkości, prędkości poruszania się i nierówności nawierzchni. Również parametry fizyczne i geometryczne samego dźwigara mostowego mogą być traktowane jak losowo zmienne w czasie, jeśli uwzględni się wpływ korozji i zmian temperatury, odkształcenia plastyczne, starzenie się materiału itp. Przyjęcie losowego charakteru większości z wymienionych parametrów obciążenia i konstrukcji w analizie drgań i ocenie niezawodności wymaga budowy odpowiedniego modelu obciążenia i mostu, dokładnie odwzorowującego rzeczywistość. Ogólne i ścisłe rozwiązanie tak postawionego zadania jest bardzo skomplikowane i trudne. Wprowadza się więc szereg uproszczeń lub przeprowadza komputerowe badania symulacyjne, które są znacznie prostsze do wykonania, tańsze i mniej czasochłonne niż badania rzeczywistego obiektu.

Konieczność zapewnienia odpowiedniej niezawodności nowoczesnych, coraz lżejszych konstrukcji mostowych, o coraz większej rozpiętości prześel, poddanych równocześnie coraz większemu obciążeniu wpłynęła na wzrost zainteresowania metodami obliczania ich niezawodności i mechanizmami powstawania w nich uszkodzeń. Rozróż-

nia się niezawodność konstrukcji ze względu na tzw. "pierwsze przekroczenie" ustalonego poziomu przemieszczeń lub naprężeń i niezawodność ze względu na zmęczenie materiału. Zjawisko fizyczne zmęczenia materiału nie jest przy tym w pełni rozpoznane. Jak ważne jest jednak badanie niezawodności ze względu na zmęczenie materiału, widać z wyników badań dotyczących przyczyn zniszczenia konstrukcji metalowych: 80 ÷ 90% zniszczeń związanych jest ze zmęczeniem materiału i powstaniem pęknięć [14]. Szereg prac opublikowanych w ostatnich latach dotyczy badania wpływu zmęczenia materiału na trwałość mostów, np. [1,11,1417,19,24,31,33,38,39,48,58,59,67,73,74].

Większość opracowań dotyczących drgań stochastycznych zawiera również badanie czasu do pierwszego przekroczenia ustalonego poziomu. Metodami określania niezawodności dźwigarów mostowych ze względu na pierwsze przekroczenie zajmowano się między innymi w pracach: [4,6,9,10,23,25,35,36,51,52,54,57,60].

W związku ze strukturą niniejszej rozprawy, bardziej szczegółowy przegląd literatury dotyczącej stosowanych modeli matematycznych ruchu drogowego, modeli obciążenia mostu ruchem drogowym, analizy drgań stochastycznych i problemów związanych z określaniem niezawodności konstrukcji zostanie przedstawiony w rozdziałach dotyczących poszczególnych zagadnień będących przedmiotem rozważań. W tym miejscu omówimy jedynie niektóre prace o charakterze ogólnym oraz te, które uwzględniają w analizie drgań stochastycznych inne niż w niniejszej rozprawie parametry obciążenia lub konstrukcji.

W pracy [3] A. Barczenkow przedstawił bogaty przegląd literatury dotyczący stochastycznej dynamiki i niezawodności mostów drogowych i przeanalizował wiele problemów związanych z tym tematem. W obliczeniach wyróżnił on tzw. sytuacje obliczeniowe położenia obciążenia pojazdów na moście oraz stopnia ich załadowania. Prawdopodobieństwo znajdowania się w ustalonej chwili czasu na moście określonej liczby pojazdów opisane jest obciętym i skorygowanym rozkładem Poissona, nierówności nawierzchni są zmiennymi losowymi, modelem pojazdu jest masa podwójnie uresorowana o czterech stopniach swobody. Wykorzystując teorię korelacyjną i symulację cyfrową, autor uzyskał wartości oczekiwane i odchylenia stan-

dardowe ugięć, momentów zginających i naprężeń w dźwigarze mostowym. Zaproponował również sposób konstruowania stochastycznych linii wpływu tych wielkości i sposób oceny niezawodności mostu ze względu na zmęczenie materiału i przekroczenie ustalonego poziomu.

L. Fryba w swojej monografii [15] przedstawił sposób obliczania drgań belki obciążonej ruchomą pulsującą siłą i pulsującym obciążeniem rozłożonym poruszającym się ze stałą prędkością, oraz drgań belki nieskończonej spoczywającej na sprężystym podłożu, które opisane jest funkcją losową. Zadając funkcje korelacyjne obciążenia otrzymał wyrażenia pozwalające obliczyć wariancję procesu wyjściowego. W pracy [16] przeanalizował wpływ zmiany parametrów tłumienia belki i prędkości poruszania się losowej siły na wariancję ugięcia.

E. Bielewicz i W. Grzesiak przeanalizowali w pracy [5] wpływ szeregu rozkładów prawdopodobieństwa obciążenia, w postaci pulsującej siły poruszającej się ze stałą prędkością, na wartość oczekiwaną i wariancję amplitudy przemieszczenia punktu środkowego belki swobodnie podpartej. Założono, że iloraz częstości pulsowania i częstości podstawowej drgań własnych belki jest zmienną losową.

T. Chmielewski w monografii [8] przedstawił w sposób systematyczny drgania stochastyczne konstrukcji o jednym i wielu stopniach swobody oraz liniowych ciągłych układów sprężystych wywołane stacjonarnym i niestacjonarnym wymuszeniem. Praca ma charakter ogólny i nie jest ukierunkowana na konstrukcje mostowe. Wcześniejsza praca [7] tego autora dotyczy wpływu losowego wymuszenia będącego wynikiem poruszania się pojazdu po losowych nierównościach na drgania układu belka mostowa-pojazd. Jako schemat dynamiczny autor przyjął układ złożony z dwóch sprzężonych podukładów o jednym stopniu swobody z uwzględnieniem tłumienia lepkiego, nierówność drogi opisał stacjonarną, ergodyczną funkcją losową o rozkładzie normalnym. Analizował również wpływ losowych warunków początkowych na parametry stochastyczne odpowiedzi mostu.

Analogiczny jak w pracy [7], problem drgań mostu wywołanych poruszającym się pojazdem po nierównościach jezdni rozwiązywali w pracy [32] S. Komatsu i M. Kawatani. Jako model pojazdu przyjęli oni układ o dwóch stopniach swobody.

Drgania swobodnie podpartego rusztu skrzynkowego generowane przez przejazd pojazdu po nierównościach nawierzchni analizowali M.J. Inbanathan i M. Wieland w [26].

C.C. Tung w pracach [65,66,67] rozważał stochastyczne drgania belkowego dźwigara mostowego wywołane ruchem drogowym. Jako model ruchu drogowego przyjął on, jako jeden z pierwszych, punktowy proces stochastyczny i wyprowadził związki umożliwiające obliczenie funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa oraz szczytowej funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa odpowiedzi konstrukcji. Uzyskane związki pozwoliły na określenie niezawodności belki mostowej ze względu na "pierwsze przekroczenie" i zmęczenie materiału.

P. Śniady w swoich pracach [40,62,63] analizował drgania stochastyczne belki mostowej poddanej działaniu ruchu drogowego modelowanego punktowymi procesami stochastycznymi. Prędkość poruszania się pojazdów po moście przyjmował on jako zmienną zdeterminowaną lub losową. W wyniku przeprowadzonych rozważań wyprowadził związki pozwalające na określenie pełnej charakterystyki probabilistycznej odpowiedzi konstrukcji.

Przedmiot, cel i zakres pracy

Przedmiotem pracy jest dynamika stochastyczna belki mostowej obciążonej ruchem drogowym modelowanym punktowym procesem stochastycznym oraz analiza wpływu zmiany intensywności ruchu i prędkości poruszania się pojazdów na niezawodność konstrukcji ze względu na przekroczenie ustalonego poziomu przemieszczeń lub naprężeń oraz ze względu na zmęczenie materiału.

Celem pracy jest analiza stochastyczna drgań dźwigara mostowego w zakresie pełnego opisu probabilistycznego przemieszczeń i naprężeń oraz ocena niezawodności mostu ze względu na przekroczenie ustalonego poziomu przemieszczeń lub naprężeń i zmęczenie materiału.

Niniejsza rozprawa składa się z trzech głównych części:

- część I zawiera literaturowy przegląd modeli ruchu drogowego oraz probabilistycznych i półprobabilistycznych modeli obciążenia stosowanych w analizie mostów drogowych,

- część II zawiera opis przyjętego probabilistycznego modelu obciążenia mostu ruchem drogowym, opis przyjętego modelu konstrukcji mostu, wyprowadzenie związków opisujących drgania stochastyczne i parametry probabilistyczne odpowiedzi konstrukcji (wartość oczekiwana, wariancję, gęstość rozkładu prawdopodobieństwa ugięcia i naprężenia, dwu- i trójwymiarowe funkcje gęstości ugięcia, prędkości i przemieszczenia ugięcia), wyniki obliczeń niektórych z nich przy zastosowaniu pewnych uproszczeń w przedstawionym ogólnym algorytmie,
- część III poświęcona jest badaniu niezawodności konstrukcji. Opisano problemy związane ze zjawiskiem zmęczenia materiału takie jak hipotezy kumulacji uszkodzeń, modele zmęczenia i metody określania trwałości zmęczeniowej. Rozważono również zagadnienia występujące przy określaniu niezawodności ze względu na przekroczenie ustalonego poziomu przemieszczeń lub naprężeń. Wykorzystano związki wyprowadzone w części II. Przedstawiono wyniki obliczeń.

Teza pracy

Tezą niniejszej rozprawy jest, że zastosowanie teorii procesów stochastycznych - w szczególności punktowych - umożliwia wszechstronną analizę dynamiczną i ocenę niezawodności mostów poddanych działaniu obciążenia w postaci ruchu drogowego o złożonym modelu.

2. MODELE RUCHU I PROBABILISTYCZNE MODELE OBCIĄŻENIA

Przy projektowaniu budowli bardzo istotne znaczenie ma wybór odpowiedniego modelu matematycznego obiektu i jego obciążenia. Dąży się do doboru modeli, które jak najwierniej odzwierciedlałyby rzeczywistość. Dawno już stwierdzono, że dobrym modelem matematycznym obciążenia jest proces stochastyczny. Stosowanie modelu ogólnego prowadzi często do bardzo złożonych wzorów matematycznych, które sprawiają duże trudności obliczeniowe. Dlatego też często zawęża się rozpatrywane modele do procesów stacjonarnych.

W konstrukcjach mostów drogowych, podlegających przede wszystkim obciążeniom dynamicznym, zasadniczym problemem jest przestrzenne działanie obciążenia oraz współdziałanie pojazdu i mostu. Ze względu na sprzężenie drgań i krótkotrwałość oddziaływań, obciążenia nie można traktować ogólnie jako procesu stacjonarnego. Jak wynika z pracy [29], sprzężenie drgań pojazdu i konstrukcji jest pomijalnie małe w mostach stalowych o dużych rozpiętościach ($L > 40\text{m}$) i nowoczesnej konstrukcji przęseł, w mostach żelbetonowych wszystkich rozpiętości i ciężkich mostach stalowych o rozpiętości $L > 25\text{m}$.

W mostach drogowych można pominąć wpływ obciążeń poziomych ze względu na nieznaczne wartości wymuszeń i duże sztywności mostów w tej płaszczyźnie.

W modelu obciążenia konstrukcji mostowych należy uwzględnić charakter ruchu pojazdów. Budując matematyczny model obciążenia, powinno się wziąć pod uwagę następujące czynniki o charakterze losowym:

- parametry pojazdów takie jak: ciężar, rodzaj pojazdu, sztywność zawieszenia, parametry dynamiczne,
- parametry określające ruch pojazdów - prędkość, zagęszczenie w czasie i przestrzeni,
- profil nawierzchni,
- parametry mostu,
- sprzężenie drgań pojazdu i konstrukcji.

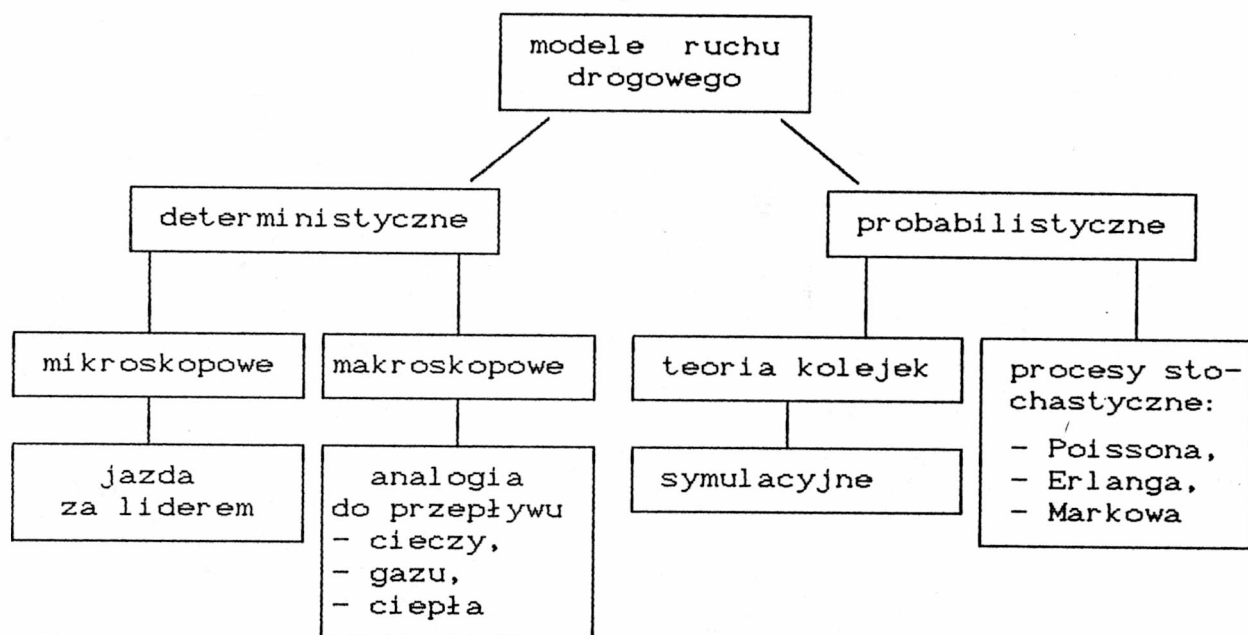
W związku z tym wydaje się celowe przedstawienie stosowanych w inżynierii ruchu modeli matematycznych ruchu drogowego.

2.1. Modele ruchu drogowego

Ruch drogowy charakteryzuje się pewnymi cechami, które odróżniają go od innych zagadnień, w których stosuje się teorię procesów stochastycznych. Cechy te to [61] :

- nieokreśloność - pojazdy poddane są pewnej kontroli indywidualnej wynikającej z unikania kolizji,
- skończoność - wymiary pojazdów są skończone i porównywalne z niektórymi elementami drogi, prędkość jest ograniczona ze względów konstrukcyjnych i swobody ruchu,
- konieczność rozróżnienia zmiennych przestrzennych od zmiennej czasowej.

Modele ruchu drogowego można podzielić następująco [61]:



Deterministyczne modele ruchu

Wyróżnione w modelach deterministycznych dwa podejścia wynikają z odmiennego sposobu rozpatrywania zjawiska ruchu. W podejściu mikroskopowym rozpatruje się zachowanie pojedynczego pojazdu poruszającego się w kolumnie zależnie od parametrów ruchu pojazdu poprzedzającego. Problem sprowadza się do układu równań różnicowo-

różniczkowych. Rozróżnia się tu modele liniowe i nieliniowe. Makroskopowe traktowanie zjawiska prowadzi do przyjęcia analogii między ruchem potoku pojazdów a ruchem cieczy, gazu lub rozprzeszczeniem się ciepła. Otrzymuje się wówczas tzw. ciągłe modele ruchu.

Model wykorzystujący analogię do przepływu cieczy nosi nazwę modelu hydrodynamicznego i został zastosowany przez Lighthilla i Withama [61]. Wykorzystuje się w nim cząstkowe równania różniczkowe wyrażające zachowanie masy i przyjmujące empiryczne zależności między przepływem (natężeniem ruchu, ilością pojazdów na godzinę) i gęstością. Model ten może być stosowany przy dużym natężeniu ruchu. Zastosowano go w analizie rozprzestrzeniania się zaburzeń natężenia ruchu, wykorzystując przy tym analogię do zjawiska rozchodzenia się fal zaburzeniowych.

R. Drew [13] zbudował model dla jednopasmowego ruchu pojazdów analogiczny do przepływu ciepła w długim, smukłym, izolowanym pręcie. W równaniu przepływu można uwzględnić takie zmiany ruchu jak natężenie, prędkość, gęstość. Z rozwiązania tego równania uzyskuje się wartości średnie charakteryzujące warunki na autostradzie np. zmienne geometryczne (krzywizny, rampy wjazdowe, zjazdowe itp)

Do opisu ruchu pojazdów w przestrzeni i czasie na wielopasmowym odcinku autostrady wykorzystano kinematyczną teorię gazów. W modelu tym analizuje się szczegółowo następujące zjawiska:

- proces spadku prędkości,
- proces opóźniania wynikający z sytuacji konfliktowych,
- proces uporządkowania dotyczący zanikania różnic wokół średniej prędkości.

Model ten umożliwia rozpatrywanie ruchu pojedynczych pojazdów oraz całego potoku ruchu a także stan przejścia pomiędzy nimi.

Probabilistyczne modele ruchu

Probabilistyczne modele ruchu powiązane są z teorią masowej obsługi, gdzie do opisu systemu wymagana jest znajomość charakterystyk dotyczących:

- procesu zgłoszeń,
- procesu obsługi.

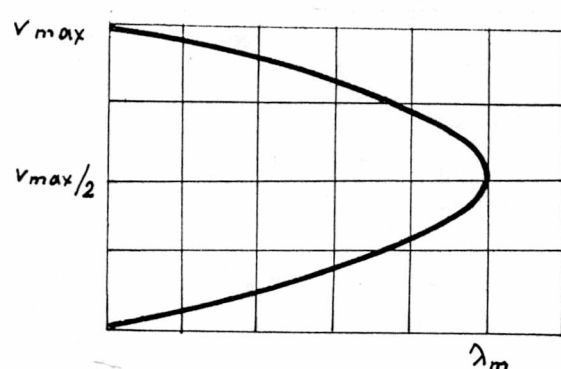
Z punktu widzenia badań pracy mostu drogowy interesujący jest dla nas sam proces zgłoszeń, który jest określony przez podanie rozkładu odstępów czasowych pomiędzy zgłoszeniami lub intensywności zgłoszeń λ (liczby pojazdów zgłaszających się w jednostce czasu). Intensywność zgłoszeń λ i związane z nią natężenie ruchu N_r (liczba pojazdów zgłaszających się w ciągu 1 godziny) są zmiennymi zależnymi od prędkości ruchu v . Często stosowana jest następująca zależność teoretyczna

$$\lambda(v) = 4 \lambda_m \frac{v}{v_{\max}} \left[1 - \frac{v}{v_{\max}} \right] \quad (2.1)$$

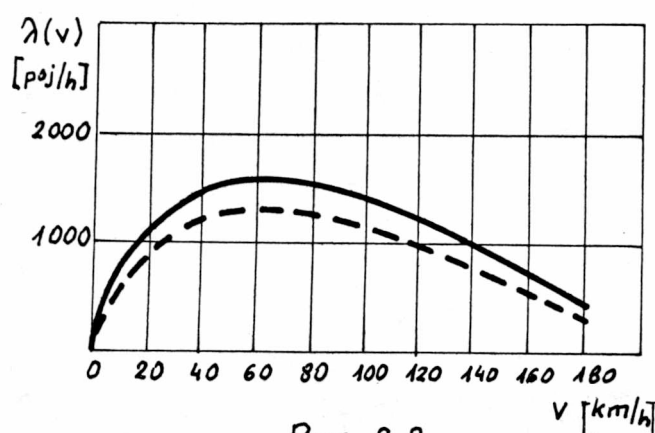
gdzie λ_m - maksymalna intensywność zgłoszeń (przepustowość drogi),

$v_{\max}$ - maksymalna prędkość pojazdów.

Na rys. 2.1 zilustrowano powyższą zależność teoretyczną, na rys. 2.2 pokazano zaś dwie krzywe doświadczalne [34].



Rys. 2.1



Rys. 2.2

W inżynierii ruchu wyróżnia się następujące rodzaje strumieni zgłoszeń przy założeniu, że poszczególne przyjazdy są od siebie niezależne [61]:

- a) Regularny strumień zgłoszeń - pojazdy zgłaszają się regularnie co $1/\lambda$ sekund.
- b) Dwumianowy strumień zgłoszeń - pojazdy zgłaszają się tylko w dyskretnych chwilach $k \Delta t$ (k -liczba całkowita).

W modelu tym przyjmuje się, że zgłoszenia pojazdów są zdarzeniami niezależnymi oraz istnieje $0 < \alpha < 1$, takie, że dla każdego k

$$P \left\{ \text{pojazd zgłosi się w chwili } k \Delta t \right\} = \alpha, \quad (2.2)$$

$$P \left\{ \text{pojazd nie zgłosi się w chwili } k \Delta t \right\} = 1 - \alpha.$$

Wówczas intensywność zgłoszeń wynosi $\lambda = \alpha / \Delta t$. Liczba a_N zgłoszeń w czasie t zawierającym N chwil ma rozkład dwumianowy

$$P \left\{ a_N = n \right\} = \binom{N}{n} \alpha^n (1 - \alpha)^{N-n}, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (2.3)$$

Odstępy h pomiędzy zgłoszeniami mają rozkład geometryczny

$$P \left\{ h = k \Delta t \right\} = (1 - \alpha)^{k-1} \alpha. \quad (2.4)$$

- c) Grupowy strumień zgłoszeń - w dyskretnych chwilach $k \Delta t$ pojawia się m pojazdów, gdzie m jest zmienną losową określoną przez funkcję tworzącą prawdopodobieństwa (zmiennej losowej całkowitoliczbowej)

$$\phi(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i s^i, \quad (2.5)$$

gdzie $\varphi_i = P \{ m=i \}$, $-1 \leq s \leq 1$.

- d) Strumień zgłoszeń Poissona

Zakłada się, że występuje

- pojedynczość zgłoszeń tzn. w przedziale czasu $(t, t+dt)$ prawdopodobieństwo, że zgłosi się więcej niż 1 pojazd wynosi $O(dt)$

$$P \left\{ dN(t) > 1 \right\} = O(dt) \quad (2.6)$$

gdzie N - liczba zgłoszeń w przedziale $(0, t)$,

- niezależność zdarzeń,
- jednorodność - liczba zgłoszeń nie zależy od położenia przedziału na osi czasu a jedynie od jego długości.

W modelu tym

$$P \left\{ N = k \right\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.7)$$

odstęp h pomiędzy zgłoszeniami ma rozkład wykładniczy

$$f_h(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$P \{ h \geq T \} = e^{-\lambda T}.$$

Model ten jest dobry przy małych i średnich natężeniach ruchu. Wadą tego modelu jest możliwość zgłoszeń dowolnie bliskich oraz fakt, że nie uwzględnia się braku swobody ruchu. Można wyeliminować powyższe wady modelu przez przyjęcie wykładniczo przesuniętego rozkładu odstępów między zgłoszeniami

$$P \left\{ h \geq t \right\} = \begin{cases} \exp [-(t-h_0) / \bar{h} - h_0], & t \geq h_0, \\ 1, & t < 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

gdzie

$\bar{h}$ - średni odstęp pomiędzy zgłoszeniami,

h_0 - minimalny możliwy odstęp pomiędzy zgłoszeniami

lub potraktowanie strumienia pojazdów jako złożenia strumienia pojazdów swobodnych i skrępowanych

$$P \left\{ h \geq t \right\} = \begin{cases} (1-\alpha) \exp(-t/\bar{h}_1) + \alpha \exp[-(t-h_0)/(\bar{h}_2-h_0)], & t \geq h_0, \\ 1, & t < h_0, \end{cases} \quad (2.10)$$

gdzie $\bar{h}_1, \bar{h}_2$ - odpowiednio średni odstęp między zgłoszeniami pojazdów swobodnych i skrępowanych,

$\alpha, (\alpha-1)$ - frakcje pojazdów skrępowanych i swobodnych.

e) Grupowy strumień zgłoszeń Poissona.

W modelu tym zakłada się, że pojazdy zgłaszają się w kolumnach, chwile zgłoszeń kolumn tworzą strumień Poissona a liczba pojazdów w kolumnie jest zmienną losową o znanej funkcji tworzącej $\phi(s)$ opisującej częstość pojawiania się różnych typów pojazdów. Funkcję tworzącą $A_T(s)$ liczby pojazdów zgłaszających się w czasie T oblicza się ze wzoru

$$A_T(s) = \exp \left[\lambda^T [\phi(s) - 1] \right], \quad (2.11)$$

λ - intensywność zgłoszeń kolumn.

g) Rozrzedzony strumień Poissona.

Model ten otrzymuje się ze strumienia Poissona przy następujących ograniczeniach:

- pojazdy nie mogą się wyprzedzać,
- w czasie jazdy wymagany jest minimalny odstęp h_0 .

Prawdopodobieństwo, że dokładnie n pojazdów jedzie za sobą w odległości h_0 (tworzą kolumnę) wynosi

$$P_n = \frac{(n h_o \lambda)^{n-1}}{n!} \exp(-\lambda n h_o) \quad (2.12)$$

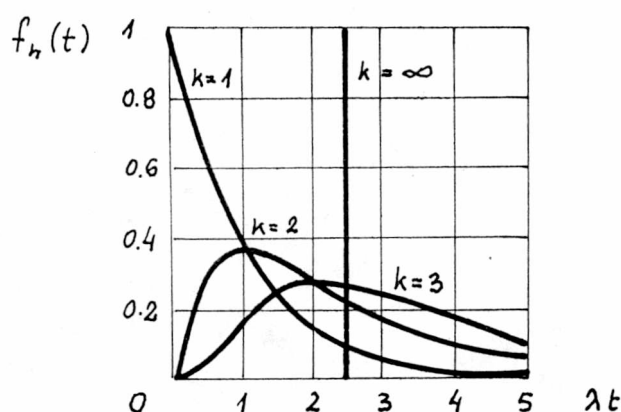
Rozkład odstępów między kolumnami jest wykładniczy o intensywności λ .

g) Strumień zgłoszeń Erlanga.

W modelu tym odstęp pomiędzy zgłoszeniami ma rozkład Erlanga (Pearsona III typu, gamma z parametrem naturalnym). Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa odstępu h wyraża się wzorem

$$f_h(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \lambda^k e^{-\lambda t}, \quad k = 1, 2, \dots - \text{parametr.} \quad (2.13)$$

Przyjmując $k = 1$ otrzymujemy strumień zgłoszeń Poissona, przyjmując $k = \infty$ otrzymujemy strumień zgłoszeń Palma (deterministyczny, rys. 2.3).



Rys. 2.3

2.2. Modele obciążenia

W pracy [22] wyróżniono 4 stany pracy wytrzymałościowej mostu oraz cztery jakościowo i ilościowo różne poziomy obciążeń użytkowych:

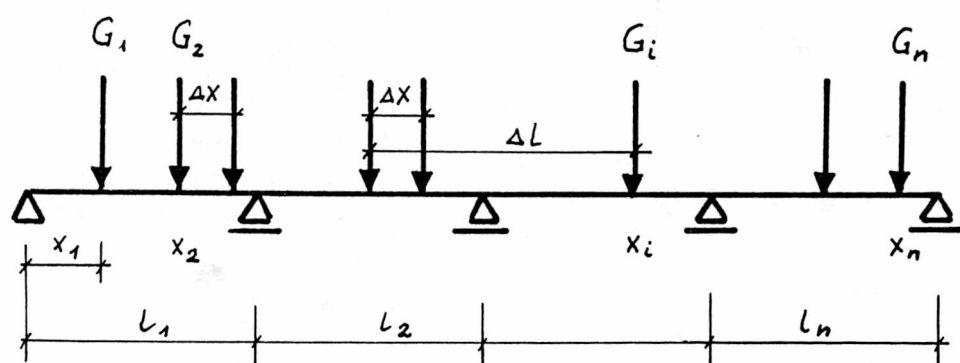
- poziom I - obciążenia statyczne występujące w przypadku zatoru na moście lub przejazdu z małymi prędkościami ciężkich zestawów transportowych,
- poziom II - obciążenia dynamiczne,
- poziom III - obciążenia zmienne powodujące zmęczenie materiału na ogół mniejsze niż w poziomie I i II, działające w dostatecznie długim czasie; szczególne znaczenie mają one w mostach stalowych o małej rozpiętości,

- poziom IV - obciążenia uwzględniane przy analizie trwałości mostu. W tym przypadku funkcja obciążenia jest bardzo złożona. Należy uwzględnić wzrost wszystkich rodzajów obciążenia w długim okresie czasu wynikający między innymi z wprowadzania nowych typów pojazdów, zwiększania ich ładowności, itp., jak również zmianę cech materiałowych konstrukcji (starzenie się, uszkodzenia korozyjne).

Powstało wiele różnych modeli obciążeń uwzględniających różne poziomy obciążenia konstrukcji, różne typy mostów oraz charakter ruchu drogowego. Omówimy niektóre z nich, stosowane w obliczeniach konstrukcji mostowych.

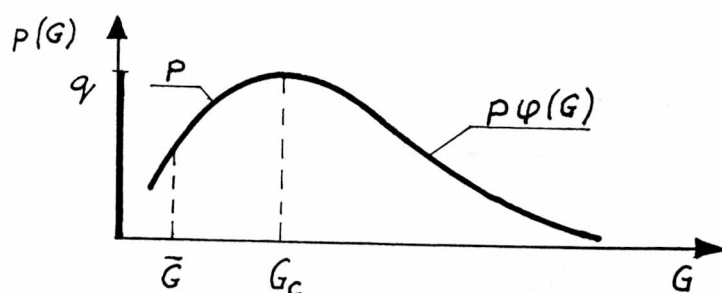
2.2.1 Dyskretny uogólniony model obciążenia

W pracach [45, 47, 69] jako model obciążenia użytkowego mostu J. Murzewski i A. Winiarz przyjęli jednorodną funkcję losową o argumentie dyskretnym i wartościach niezależnych (wykorzystano teorię procesów stochastycznych o przyrostach niezależnych). Obciążenie potraktowano jako sekwencję Markowa losowych ciężarów pojazdów G_i , stochastycznie niezależnych, działających na konstrukcję w punktach $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ (rys.2.4).



Rys. 2.4

Rozkład prawdopodobieństw ciężarów losowych przyjęto taki jak pokazano na rys.2.5.



Rys. 2.5

gdzie q - prawdopodobieństwo braku obciążenia $G_1 = 0$,

$\varphi(G_1)$ - gęstość warunkowa dla $G_1 \neq 0$, może ona być scharakteryzowana rozkładem normalnym, rozkładem gamma lub innym,

$$p + q = 1.$$

Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa obciążenia zastępczego $g = G/t$ ma postać

$$f(g) = q \delta(g) + p \int_0^{\infty} \varphi(gt) f(t) t dt \quad (2.14)$$

W powyższym wzorze $f(t)$ oznacza gęstość rozkładu prawdopodobieństwa odstępów między pojedynczymi obciążeniami, $t = x_{i+1} - x_i$. O zmiennych losowych G_1 oraz t założono, że są niezależne. Do opisu odstępów między pojazdami modelowanymi ciężarami G przyjęto:

- a) rozkład Poissona,
- b) rozkład Erlanga,
- c) rozkład Palma.

Przyjmując strumień ruchu Poissona, autorzy uzyskali funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa obciążenia zastępczego g w postaci następującego wyrażenia

$$f(g) = q \delta(g) + \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \varphi(gt) t dt \quad (2.15)$$

2.2.2. Dyskretny model obciążenia mostów wieloprzęsłowych

Przedstawiony poniżej model obciążenia ([46]) został opracowany przez J. Murzewskiego do wymiarowania dźwigarów głównych mostów wieloprzęsłowych. Przyjęto, że modelem obciążenia konstrukcji jest wektorowe pole stochastyczne $Q(x,t)$, w którym

$$-L/2 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t \leq T,$$

gdzie L - długość mostu,

T - przewidywany czas użytkowania obiektu.

Założono również, że

- funkcja losowa $Q(x,t)$ jest typu Gaussa,
- efekty czasu i przestrzeni są rozłączne,
- proces $Q(x,t)$ jest stacjonarny w czasie i przestrzeni.

Przy powyższych założeniach rozważano dwuwymiarowy ciąg maksimów lokalnych funkcji $Q(x,t)$ i zdefiniowano prawdopodobieństwo przeciążenia

$$\omega = 1 - \Pr \left\{ \max_j Q_{j,-M} < P_{-M}, \dots, \max_j Q_{j,k} < P_k, \dots, \max_j Q_{j,M} < P_M \right\} \quad (2.16)$$

gdzie

$j = 1, 2, \dots, N_k$ - liczba losowych przedziałów czasu ΔT między szczytami obciążeń w czasie T ,

$k = -M, -M+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N$,

M - liczba przęseł,

$P_k = P_0 \varphi(k \Delta L)$ - obciążenie graniczne k -tego przęsła.

Niecentralnie standaryzowany szczyt obciążenia przyjęto następująco:

$$Y_{jk} = \frac{Q_{jk} - P_k}{\mu'_0} \quad (2.17)$$

gdzie

$\mu'_0 = \text{const}$, odchylenie standardowe szczytów obciążenia środkowego przęsła mostu.

Tak zdefiniowany proces stochastyczny jest stacjonarny w czasie i przestrzeni. Jednak zmienne Y_{jk} są stochastycznie zależne, przez co trudno jest wyznaczyć empirycznie wielowymiarową funkcję korelacyjną i obliczyć prawdopodobieństwo przeciążenia

$$\omega = 1 - \Pr \left\{ \max_j \max_k Y_{jk} < 0 \right\}. \quad (2.18)$$

W celu ominięcia tej niedogodności wprowadzono próby krótkoterminowe, w których czas $\tau > \Delta T$ tak dobrano, aby szczyty obciążenia z poszczególnych prób można traktować jako zmienne losowe niezależne. Ekstremalny szczyt obciążeń brano z odcinka mostu o długości $\xi = \text{const}$, $\Delta L < \xi < L$.

Standaryzowane niecentralne szczyty obciążeń ekstremalnych dla prób krótkoterminowych tworzą stacjonarny ciąg dwuwymiarowy

$$Z_{jk} = \frac{Q_{jk} - P_k}{\mu_0''} \quad (2.19)$$

gdzie $J = 1, 2, \dots, n$,

$$n = T/\tau,$$

$$K = -m, -m+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, m,$$

$$m = L/2\xi,$$

μ_0'' - odchylenie standardowe maksymalnej koncentracji obciążeń krótkoterminowych w środkowym odcinku mostu.

Przy tak zdefiniowanych zmiennych losowych prawdopodobieństwo przeciążenia wynosi

$$\omega = \left[F(Z_{jk} = 0) \right]^{mn} \quad (2.20)$$

i dla dużych wartości mn można stosować rozkłady asymptotyczne wartości ekstremalnych. Korzystając ze wzoru (2.20) można wyznaczyć skupione obciążenie obliczeniowe

$$P_0 = \bar{Q}_0'' + \zeta \mu_0'' \quad (2.21)$$

gdzie

$\bar{Q}_0''$ - wartość oczekiwana koncentracji obciążeń w próbach krótkoterminowych w środkowym odcinku mostu,

$$\zeta = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \ln \frac{mn e^{-0.57722\dots}}{\ln [1/(1-\omega)]} \approx 0.7797 \ln \frac{0.5612 LT}{\xi \tau \omega}.$$

Równomiernie rozłożone obciążenie obliczeniowe przypadające na poszczególne przęsła mostu oblicza się następująco

$$P_k = P_0 \frac{M}{L} \varphi \left(k \frac{L}{M} \right) \quad (2.22)$$

Powyższy model obciążenia uogólniono na przypadek dwuwymiarowy w pracy [69].

2.2.3. Dyskretny model obciążenia C.C. Tunga

C.C. Tung modelował obciążenie mostu ruchem drogowym przez przyjęcie ruchomej serii sił skupionych o tym samym ciężarze, poruszających się po dźwigarze mostowym ze stałą prędkością v . W pracy [65] zastosowano strumień ruchu w postaci procesu Poissona, w pracy [66] w postaci procesu Pearsona III typu. Tak skonstruowany model obciążenia wykorzystano do określenia funkcji gęstości prawdopodobieństwa odpowiedzi konstrukcji, wartości oczekiwanej liczby przekroczeń określonego progu oraz do określenia trwałości zmęczeniowej mostów drogowych [67].

2.2.4. Półprobabilistyczny model obciążenia mostu drogowego

K. Kluk w pracy [30] zastosował półprobabilistyczny model obciążenia wzorowany na modelu opisanym przez Asplunda w [2] i rozkładach ekstremów. W przyjętym modelu założono, że na moście powstaje zator pojazdów na wszystkich pasach ruchu na całej długości mostu. Wprowadzono pojazdy zastępcze o długości 10m i jednokowym ciężarze $\bar{G}_{10}$ (wartość średnia). Przyjęto, że wśród tych pojazdów może się pojawić na moście, z określonym prawdopodobieństwem, k ciężkich pojazdów o ciężarze G_d . Prawdopodobieństwo wystąpienia k pojazdów ciężkich G_d na moście o długości $n \times s$ (gdzie s - długość pojazdu zastępczego, n - liczba pojazdów zastępczych, które się zmieszczą na długości przęsła) wynosi:

$$Pr = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad (2.23)$$

gdzie

p - prawdopodobieństwo wystąpienia pojazdu ciężkiego o ciężarze większym od G_d .

Założono także, że proces obciążenia jest stacjonarny i ergodyczny. Okres eksploatacji konstrukcji T podzielono na d okresów elementarnych tak, aby szczyty obciążenia z poszczególnych okresów były zmiennymi losowymi niezależnymi. Przy dużej liczbie okresów elementarnych d można do określenia maksymalnej wartości obciążenia zastosować asymptotyczny rozkład ekstremów.

Prawdopodobieństwo obciążenia mniejszego niż G_d określono ze wzoru

$$F(G_d) = \left[F_1(G_d) \right]^T \quad (2.24)$$

gdzie T - liczba niezależnych powtórzeń obciążenia,

$F_1(G_d)$ - dystrybuanta dotycząca elementarnego przedziału.

Wykorzystując parametry obciążenia w przedziale elementarnym wyprowadzono wzory pozwalające określić parametry obciążenia w całym przedziale eksploatacji przy zastosowaniu rozkładu Gumbela. Parametry te umożliwiają określenie wartości obliczeniowej obciążenia G_d

$$F_{\max}(G_d) = 1 - p, \quad (2.25)$$

$$G_d = \bar{G} \left(1 + \frac{u}{\mu_T} \right)$$

gdzie $\bar{G}$ - wartość charakterystyczna rozkładu Gumbela,

$$\bar{G}_T = \bar{G} - \frac{C\sqrt{6}}{\pi} \mu_T, \quad \bar{G}_T = \bar{G}_1 + \frac{\sqrt{6} \ln 10}{\pi} \mu_1 \log T,$$

$\bar{G}_T$ - wartość średnia,

$\mu_T = \mu_1$ - odchylenia standardowe,

u - gumbelowski współczynnik zmienności,

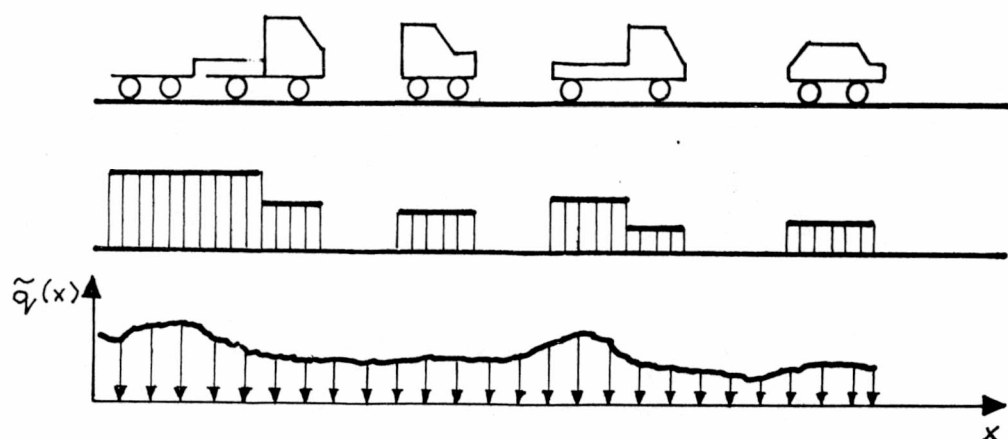
$$u = \frac{\mu_T / \bar{G}_T}{1.2825 - C(\mu_T / \bar{G}_T)}$$

Powyższy model rozszerzono dla mostów wielopasmowych.

2.2.5. Symulacyjny model obciążenia

W Japoni zbudowano model symulacyjny do określenia zastępczego obciążenia równomiernie rozłożonego tworzącego słabo stacjonarny proces stochastyczny w obszarze współrzędnych $\tilde{q}(x)$. W potoku ruchu wyróżniono kilka (3 lub 4) klas pojazdów ([54],[64]. Założono, że ciężary każdego typu pojazdów mają rozkład normalny ucięty, odstępy między pojazdami są stałe i równe 50 cm. Przyjęto także, że obciążenie działa na most quasistatycznie.

Schematycznie rozważany model obciążenia można przedstawić następująco (rys. 2.6):



Rys. 2.6

W pracach [54 i 64] symulacyjnie obliczono charakterystyki probabilistyczne zastępczego obciążenia $\tilde{q}(x)$, przy założeniu odpowiedniej frakcji udziału każdego typu pojazdów w strumieniu. Symulacyjną krzywą korelacji $K_q(\tau)$ aproksymowano wzorem

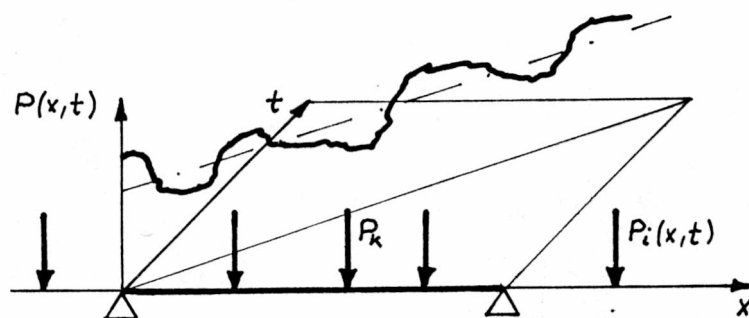
$$K_q(\tau) = D_q e^{-\alpha|\tau|} \quad (2.26)$$

gdzie α - stała dodatnia,

D_q - wariancja.

2.2.6. Modele obciążenia w postaci punktowych procesów stochastycznych

Model obciążenia zaproponowany przez C.C. Tunga rozbudowano i zastosowano w pracach [28,62,55,63]. Modelem obciążenia mostu drogowego jest tam ruchoma seria sił skupionych o losowych amplitudach (ciężarach) poruszających się po moście ze stałą [28,55] lub losową [62] prędkością. Przyjęto, że strumień ruchu jest procesem Poissona lub Erlanga. Schematycznie model ten pokazano na rys. 2.7.



Rys. 2.7

Obciążenie dźwigara można przedstawić w następującej postaci

$$P(x,t) = \sum_{k=1}^{N(0,t)} A_k S(t-t_k) \delta[x-v_k(t-t_k)] \quad (2.27)$$

gdzie A_k - zmienne losowe niezależne,
 $S(t-t_k)$ - funkcja deterministyczna lub losowa opisująca zmianę siły w czasie,
 $N(0,t)$ - punktowy proces o intensywności $\lambda(t)$,
 v_k - deterministyczna lub losowa prędkość poruszania się pojazdów.

Uogólnienie tego modelu przedstawiono w pracy [40], w której obciążenie opisano następującym wzorem

$$F(\tilde{x},t) = \sum_{i=1}^{N(t)} A_i \tilde{p}(x,\gamma_i) s(t,t_i,T) \quad (2.28)$$

w którym

funkcje $\tilde{p}(x,\gamma_i)$ i $s(t,t_i,T)$ są ciągłymi procesami losowymi

opisującymi kształt impulsów ($i = 1, 2, \dots, N$) odpowiednio w przestrzeni i w czasie, pojawiających się w losowym czasie t_1 i w losowym punkcie struktury $B_0(\gamma_1) \in B$,

T_1 - losowy czas działania i-tego impulsu,

A_1 - losowa amplituda,

$\gamma_1 = \gamma(t_1) = \{\gamma_1(t_1), \gamma_2(t_1), \dots, \gamma_k(t_1)\} \in \Gamma$ - ciąg zmiennych opisujących położenie $B_0(\gamma_1) = B_{01}$ i-tego impulsu na płaszczyźnie,

$N(t)$ - ogólny punktowy proces liczący.

Założono, że procesy $p(\tilde{x}, \gamma_1)$, $s(t, t_1, T)$, $N(t)$ oraz zmienne A_1 , γ_1 , T_1 są niezależne. Amplitudy A_1 mają ten sam rozkład i znane są ich charakterystyki probabilistyczne. Przyjęto również, że skończone czasy działania impulsów T_1 mają jednakowy rozkład prawdopodobieństwa i znane są funkcja gęstości prawdopodobieństwa $a_1(T)$ oraz dwuwymiarowa punktowa funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $a_2(T_1, T_2) = a_1(T_1)a_1(T_2)$. Lokalizację impulsu na konstrukcji określają funkcja gęstości prawdopodobieństwa $b_1(\gamma)$ i punktowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa $b_2(\gamma_1, \gamma_2)$.

O punktowym procesie liczącym $N(t)$ założono, że występuje pojedynczość zgłoszeń.

3. STOCHASTYCZNE DRGANIA MOSTU

3.1 Model obciążenia

Analogicznie jak w pracach [27,40,56,63], skonstruowano model obciążenia mostu drogowego, w którym przyjęto, że potok pojazdów poruszających się po moście tworzy ogólny punktowy proces stochastyczny $N(t)$ o intensywnościach (gęstościach produktowych) $f_1(t)$, $f_2(t_1, t_2)$, ..., $f_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$. W modelu tym, podobnie jak w rozdziale 2, przez $N(t)$ oznaczono liczbę pojazdów pojawiających się w przedziale czasu $(0, t)$, przez $dN(t)$ liczbę pojazdów pojawiających się w przedziale czasu $(t, t+dt)$ w określonym odcinku drogi. Ponieważ w dalszych rozważaniach wykorzystuje się własności ogólnego punktowego procesu stochastycznego, wydaje się celowe przytoczenie ich [37,63].

Prawdopodobieństwo zgłoszenia się pojazdu w każdym z przedziałów czasu (t_1, t_1+dt_1) , (t_2, t_2+dt_2) , ..., (t_k, t_k+dt_k) jest proporcjonalne do dt_1 , dt_2 , ..., dt_k . Własność ta nosi nazwę *pojedynczości zgłoszeń*. Można ją przedstawić w postaci następujących związków

$$P \{ dN(t) = 1 \} = f_1(t)dt + O(dt), \quad (3.1)$$

$$P \{ N(t) > 1 \} = O(dt), \quad (3.2)$$

$$P \left\{ [dN(t_1) = 1] \cap [dN(t_2) = 1] \cap \dots \cap [dN(t_k) = 1] \right\} = f_k(t_1, t_2, \dots, t_k) dt_1 dt_2 \dots dt_k + O(dt_1 \dots dt_k) \quad (3.3)$$

Wartości oczekiwane liczby pojazdów pojawiających się w przedziale czasu $(t, t+dt)$ wynoszą

$$E [dN(t)] = f_1(t) dt, \quad (3.4)$$

$$E [dN^n(t)] = f_n(t) dt + O(dt), \quad (3.5)$$

$$E [dN(t_1) \dots dN(t_k)] = f_k(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k, \quad (3.6)$$

$t_1 \neq t_2 \neq \dots \neq t_k.$

Z definicji gęstości produktowej, wynika, że między różnymi gęstościami produktowymi może zachodzić następujący związek:

$$0 \leq f_k(t_1, \dots, t_1, t_{1+1}, \dots, t_k) \leq f_1(t_1, \dots, t_1) f_{k-1}(t_{1+1}, \dots, t_k) \leq \prod_{j=1}^k f_1(t_j) \quad (3.7)$$

Przyjmijmy funkcję korelacji drugiego rzędu $g_2(t_1, t_2)$ jako różnicę pomiędzy gęstością produktową drugiego rzędu i iloczynu gęstości produktowych pierwszego rzędu

$$g_2(t_1, t_2) = f_2(t_1, t_2) - f_1(t_1)f_1(t_2). \quad (3.8)$$

Z nierówności (3.7) i definicji funkcji korelacyjnej $g_2(t_1, t_2)$ w postaci (3.8) wynika, że dla procesów punktowych może zachodzić nierówność

$$-f_1(t_1)f_1(t_2) \leq g_2(t_1, t_2) \leq 0. \quad (3.9)$$

Ma to istotne znaczenie, gdyż pozwala uwzględnić fakt, że prawdopodobieństwo zgłoszenia się kolejnego pojazdu tuż po zgłoszeniu się pojazdu jest bardzo małe.

W szczególności rozpatrzmy punktowy proces stochastyczny będący modelem ruchu pojazdów taki, że

$$f_1(t) = f_1 = \text{const} \quad \text{oraz} \quad f_2(t_1, t_2) = f_2(|t_2 - t_1|), \quad (3.10)$$

który przez analogię do procesów ciągłych można nazwać *stacjonarnym w szerszym sensie*.

Niech prawdopodobieństwo dwóch zgłoszeń w chwilach $t_1 + dt_1$ oraz $t_2 + dt_2$ maleje wykładniczo wraz ze wzrostem różnicy $|t_2 - t_1|$ wówczas funkcja $f_2(|t_2 - t_1|)$ może być zapisana następującym wzorem

$$f_2(|t_2 - t_1|) = f_1^2 - \sigma^2 \exp(-b|t_2 - t_1|) \quad (3.11)$$

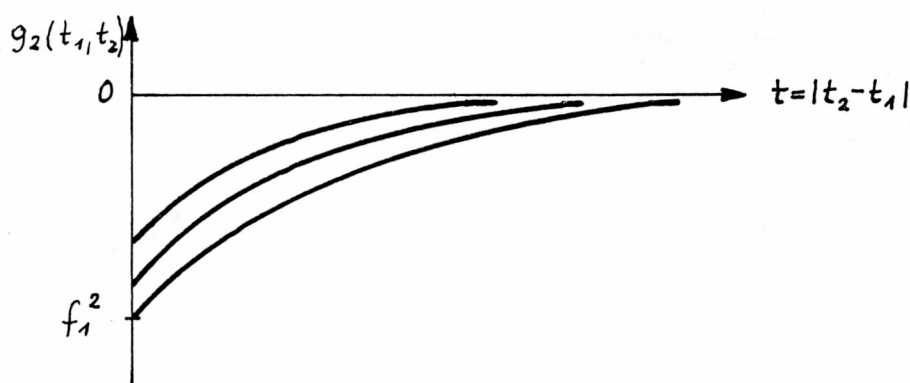
przy czym

$$\sigma^2 = \alpha^2 f_1^2 \leq f_1^2, \quad \alpha \leq 1 \quad (3.12)$$

W szczególnym przypadku, gdy $\sigma^2 = f_1^2$ i $t_1 \rightarrow t_2$ to $f_2(0) \rightarrow 0$. Na rys. 3.1 pokazano funkcję $f_2(|t_2 - t_1|)$.

Funkcja korelacyjna opisana wyrażeniem (3.8) przybiera postać

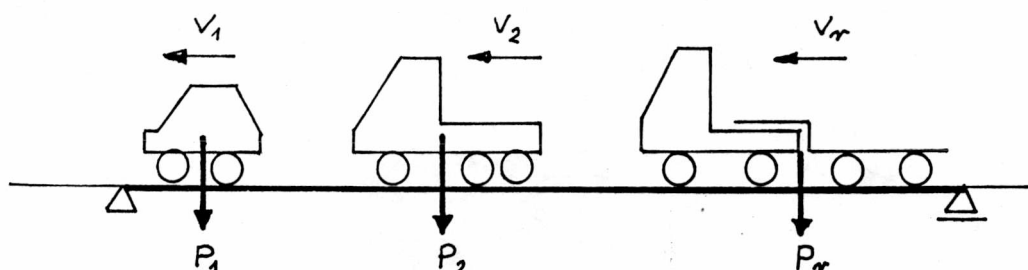
$$g_2(t_1, t_2) = -\alpha^2 f_1^2 \exp(-b|t_2 - t_1|) \quad (3.13)$$



Rys. 3.1

Opisany powyżej szczególny przypadek punktowego procesu stochastycznego wykorzystamy w dalszej części pracy przy analizie wpływu korelacji pomiędzy pojawiającymi się pojazdami na ugięcie dźwigara mostowego.

W potoku ruchu, modelowanego ogólnym punktowym procesem stochastycznym, wyróżniono rozłączne klasy pojazdów $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$ poruszających się po moście z prędkościami równymi odpowiednio $v_1, v_2, \dots, v_r$ (rys. 3.2). Prędkości v_1 poruszania się pojazdów z klasy ε_1 mogą być zdeterminowane lub losowe o znanych charakterystykach probabilistycznych, które mogą być jednakowe lub różne dla każdej klasy pojazdów.



Rys. 3.2

Liczbę pojazdów należących do klasy ε_1 i pojawiających się w określonym przekroju drogi w przedziale czasu $(0, t)$ oznaczono przez $N_1(t, \varepsilon_1)$, intensywność ich pojawiania się - przez $f_1(t, \varepsilon_1)$. Całkowita liczba pojazdów pojawiających w określonym punkcie mostu w przedziale czasu $(0, t)$ jest sumą iloczynów liczby pojazdów należących do różnych klas i ich intensywności pojawiania się. Wobec tego można napisać następującą zależność

$$N(t) = \sum_{i=1}^k N_i(t, \varepsilon_i) \quad (3.14)$$

oraz wyrażenie na łączne intensywności pojawiania się pojazdów w postaci

$$f_1(t) = \sum_{i=1}^k f_1(t, \varepsilon_i) = \sum_{i=1}^k f_1(t) p_i, \quad (3.15)$$

$$f_2(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k f_2(t_1, t_2, \varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k f_2(t_1, t_2) p_{ij}, \quad (3.16)$$

$$f_n(t_1, t_2, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \dots \sum_{r=1}^k f_n(t_1, t_2, \dots, t_n, \varepsilon_i, \varepsilon_j, \dots, \varepsilon_r) = \quad (3.17)$$

$$= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \dots \sum_{r=1}^k f_n(t_1, t_2, \dots, t_n) p_{ij\dots r},$$

gdzie

p_i - prawdopodobieństwo pojawienia się pojazdu należącego do klasy ε_i ,

p_{ij} - prawdopodobieństwo pojawienia się w czasie $(t_1, t_1 + dt_1)$ pojazdu należącego do klasy ε_i oraz w czasie $(t_2, t_2 + dt_2)$ pojazdu należącego do klasy ε_j ,

$p_{ij\dots r}$ - prawdopodobieństwo pojawienia się w czasie $(t_1, t_1 + dt_1)$ pojazdu z klasy ε_i , w czasie $(t_2, t_2 + dt_2)$ pojazdu z klasy ε_j , ..., w czasie $(t_k, t_k + dt_k)$ pojazdu należącego do klasy ε_r .

W szczególnym przypadku, gdy ogólny punktowy proces stochastyczny $N(t)$ opisujący ruch drogowy jest niejednorodnym procesem Poissona, zgłoszenia poszczególnych pojazdów są niezależne, wobec

czego n -wymiarowa produktowa gęstość rozkładu prawdopodobieństwa $f_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ jest iloczynem gęstości produktowych pierwszego rzędu co można zapisać następująco:

$$f_n(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n = f_1(t_1) f_1(t_2) \dots f_1(t_n) dt_1 \dots dt_n \quad (3.18)$$

Prawdopodobieństwo pojawienia się w czasie (t_1, t_j) dokładnie k pojazdów można w tym szczególnym przypadku opisać związkiem

$$P \left\{ N(t_1, t_j) = k \right\} = \frac{\Lambda^k(t_1, t_j)}{k!} e^{-\Lambda(t_1, t_j)}, \quad (3.19)$$

gdzie

$$\Lambda(t_1, t_j) = \int_{t_1}^{t_j} f_1(\tau) d\tau. \quad (3.20)$$

W rozważanym potoku ruchu pojedynczy pojazd można modelować jedną siłą skupioną lub grupą sił skupionych.

W niniejszej pracy przyjęto, że modelem pojazdu jest pojedyncza siła skupiona lub grupa sił skupionych. W modelu tym przez $A(\tau, \varepsilon_1)$ oznaczono losowy ciężar pojazdu (nacisk na oś) należącego do klasy ε_1 , τ jest chwilą pojawienia się pojazdu na konstrukcji. Kształt impulsu opisuje funkcja $S(\varepsilon_1)$. Założono, że znane są charakterystyki probabilistyczne $A(\tau, \varepsilon_1)$, a mianowicie ich momenty n -tego rzędu $E[A^n(\tau, \varepsilon_1)]$, $n = 1, 2, \dots$ lub funkcje gęstości rozkładów prawdopodobieństwa $\zeta_1(A, \varepsilon_1)$. Przy takich założeniach matematyczny model obciążenia można zapisać następująco:

$$F(x, t) = \sum_{k=1}^{N(t, \varepsilon_1)} A_k(t_k, \varepsilon_1) S(\varepsilon_1) \delta[x - v(t - t_k)]. \quad (3.21)$$

lub wykorzystując całkę Stieltjesa

$$F(x, t) = \int_0^t A(\tau, \varepsilon_1) S(\varepsilon_1) \delta[x - v_1(t - \tau)] dN(\tau, \varepsilon_1) \quad (3.21a)$$

We wzorach tych przyjęto następujące oznaczenia:

δ - funkcja delta Diraca,

x - współrzędna położenia siły na dźwigarze,

τ - chwila pojawienia się obciążenia na konstrukcji.

3.2. Sformułowanie problemu

3.2.1 Ogólna postać problemu

Sformułowany powyżej model obciążenia mostu przy przyjętym probabilistycznym modelu ruchu zastosowano do analizy dynamicznej dźwigara mostowego. Przyjęto, że dźwigar mostowy jest układem sprężystym, liniowym o parametrach probabilistycznych. Sztywność giętą EI , współczynnik tłumienia C oraz intensywność masy M są zmiennymi losowymi o znanych charakterystykach probabilistycznych.

Drgania belkowego dźwigara mostowego opisuje znane równanie

$$EI w^{IV}(x,t) + C \dot{w}(x,t) + M \ddot{w}(x,t) = F(x,t), \quad (3.22)$$

gdzie

$w(x,t)$ - przemieszczenie dźwigara w miejscu x i chwili t ,

$F(x,t)$ - funkcja obciążenia opisana równaniem (3.17).

W równaniu tym przyjęto, że tłumienie ma charakter masowy. Przy przyjęciu innego typu tłumienia dalszy tok postępowania jest analogiczny do przedstawionego poniżej.

Niech $HC(x,t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | EI, C, MD)$ oznacza oddziaływanie mostu o losowych parametrach EI, C, M , w miejscu x i chwili t wywołane "standardowym" ("średnim") pojazdem pojawiającym się na moście w chwili τ i należącym do klasy ε_1 , dla którego $A_k(\tau, \varepsilon_1) = 1$. Oznaczmy dalej przez T_1 czas drgań mostu wywołanych przez ten pojazd. Funkcja $HC(x,t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | EI, C, MD)$ jest sumą dwóch składników, z których pierwszy opisuje drgania wymuszone, a drugi drgania swobodne dźwigara mostowego zanikające po czasie $\tau + T_1$.

$$HC(x,t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | EI, C, MD) = \begin{cases} H_1(x,t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | EI, C, MD), & 0 \leq t \leq \tau + T_1 \\ H_2(x,t-\tau-T_1, \varepsilon_1, T_1 | EI, C, MD), & t \geq \tau + T_1 \end{cases} \quad (3.23)$$

Funkcje te spełniają następujące równania różniczkowe

$$EI H_1^{IV}(x,t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | J) + C \dot{H}_1(x,t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | J) + M \ddot{H}_1(x,t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | J) = F(x,t) \quad (3.24)$$

$$EI \ddot{H}_2^{IV}(x, t-\tau-T_1, \varepsilon_1, T_1 | J) + C \dot{H}_2(x, t-\tau-T_1, \varepsilon_1, T_1 | J) + M \ddot{H}_2(x, t-\tau-T_1, \varepsilon_1, T_1 | J) = 0 \quad (3.25)$$

i odpowiednio następujące warunki początkowe i brzegowe

$$\begin{aligned} H_1(x, 0, \varepsilon_1, T_1 | J) &= 0, \\ \dot{H}_1(x, 0, \varepsilon_1, T_1 | J) &= 0, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} H_2(x, 0, \varepsilon_1, T_1 | J) &= H_1(x, T_1, \varepsilon_1, T_1 | J), \\ \dot{H}_2(x, 0, \varepsilon_1, T_1 | J) &= \dot{H}_1(x, T_1, \varepsilon_1, T_1 | J) \end{aligned} \quad (3.27)$$

W dalszych rozważaniach założono, że funkcje $H(x, t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | EI, C, M)$ nie zależą od drgań wywołanych przez inne pojazdy, a parametry belki są deterministyczne i równe $EI \in (e_j, e_j + \Delta e_j)$, $C \in (c, c + \Delta c)$, $M \in (m, m + \Delta m)$ wówczas

$$H(x, t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | J) = H(x, t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | EI, C, M). \quad (3.28)$$

Przy tych założeniach przemieszczenie belki $w(x, t | J)$ jest filtrowanym procesem punktowym i można je opisać stochastyczną całką Stieltjesa

$$\begin{aligned} w(x, t | J) &= \sum_{i=1}^k \int_0^t A(\tau, \varepsilon_1) H(x, t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | J) dN(\tau, \varepsilon_1) = \quad (3.29) \\ &= w_1(x, t | J) + w_2(x, t | J) = \sum_{i=1}^k \int_{t-T_1}^t A(\tau, \varepsilon_1) H_1(x, t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | J) dN(\tau, \varepsilon_1) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \int_0^{t-T_1} A(\tau, \varepsilon_1) H_2(x, t-\tau-T_1, \varepsilon_1, T_1 | J) dN(\tau, \varepsilon_1) \end{aligned}$$

W analogiczny sposób można przedstawić prędkość przemieszczenia i przyspieszenie przemieszczenia (drugą pochodną po czasie)

$$\dot{w}(x, t | J) = \sum_{i=1}^k \int_0^t A(\tau, \varepsilon_1) G(x, t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | J) dN(\tau, \varepsilon_1), \quad (3.30)$$

gdzie

$$\dot{G}(x, t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | J) = \frac{d}{dt} H(x, t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | J), \quad (3.31)$$

$$\ddot{w}(x, t | J) = \sum_{i=1}^k \int_0^t A(\tau, \varepsilon_1) \dot{G}(x, t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | J) dN(\tau, \varepsilon_1). \quad (3.32)$$

Powyższe wzory są prawdziwe przy założeniu, że funkcje $H(x, t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | J) \in C^2$, tj. są całkowalne w drugiej potęgze.

Wykorzystując własności procesów punktowych oraz fakt, że strumień zgłoszeń nie zależy od typu zgłaszających się pojazdów i funkcji H , otrzymano następujące wyrażenie na wartość oczekiwaną przemieszczenia dźwigara mostowego

$$E[w(x, t)] = \sum_{i=1}^k \int_0^t E[A(\tau, \varepsilon_1)] H(x, t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | J) f_1(\tau, \varepsilon_1) d\tau \quad (3.33)$$

Funkcja korelacyjna przemieszczenia ma postać

$$K_{ww}(x, t_1, t_2) = E[w(x, t_1 | J) w(x, t_2 | J)] = \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} E[A(\tau_1, \varepsilon_1) A(\tau_2, \varepsilon_j)] H(x, t-\tau_1, \varepsilon_1, T_1 | J) \\ &\quad H(x, t-\tau_2, \varepsilon_j, T_j | J) E[dN(\tau_1, \varepsilon_1) dN(\tau_2, \varepsilon_j)] = \\ &= \sum_{i=1}^k \int_0^{t=\min(t_1, t_2)} E[A^2(\tau, \varepsilon_1)] H^2(x, t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | J) f_1(\tau, \varepsilon_1) d\tau + \\ &+ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} E[A(\tau_1, \varepsilon_1) A(\tau_2, \varepsilon_j)] H(x, t-\tau_1, \varepsilon_1, T_1 | J) \\ &\quad H(x, t-\tau_2, \varepsilon_j, T_j | J) f(\tau_1, \tau_2, \varepsilon_1, \varepsilon_j) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

Analogicznie jak przemieszczenie belki (3.29), można opisać naprężenie $S(x, t | J)$ w przekroju belki, wykorzystując zależność pomiędzy przemieszczeniem a naprężeniem. W przypadku czystego zginania związek ten ma postać

$$S(x, t | J) = M(x, t | J) / W_x = EI w''(x, t | J) / W_x \quad (3.35)$$

We wzorze (3.35) przyjęto następujące oznaczenia

$M(x, t | J)$ - moment zginający w przekroju o współrzędnej x w chwili t ,

I, W_x - odpowiednio moment bezwładności przekroju i wskaźnik przekroju na zginanie,

$$w''(x, t | J) = \partial^2 w(x, t | J) / \partial x^2.$$

Wykorzystując wzór (3.29), otrzymujemy

$$S(x, t | J) = \sum_{i=1}^k \int_0^t A(\tau, \varepsilon_i) H(x, t-\tau, \varepsilon_i, T_1 | J) dN(\tau, \varepsilon_i) \quad (3.36)$$

gdzie

$$H(x, t-\tau, \varepsilon, T | J) = \frac{EI}{W_x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} H(x, t-\tau, \varepsilon, T | J) \quad (3.37)$$

jest funkcją wpływu dla naprężeń. Wstawiając we wzorach (3.33) i (3.34) zamiast funkcji wpływu dla przemieszczeń funkcję wpływu dla naprężeń (3.37) otrzymamy wyrażenie na wartość oczekiwaną i funkcję korelacji naprężeń

$$E[S(x, t)] = \sum_{i=1}^k \int_0^t E[A(\tau, \varepsilon_i)] H(x, t-\tau, \varepsilon_i, T_1 | J) f_1(\tau, \varepsilon_i) d\tau \quad (3.38)$$

$$K_{SS}(x, t_1, t_2) = \sum_{i=1}^k \int_0^{t=\min(t_1, t_2)} E[A^2(\tau, \varepsilon_i)] H^2(x, t-\tau, \varepsilon_i, T_1 | J) f_1(\tau, \varepsilon_i) d\tau + \quad (3.39)$$

$$+ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} E[A(\tau_1, \varepsilon_i) A(\tau_2, \varepsilon_j)] H(x, t-\tau_1, \varepsilon_i, T_1 | J) H(x, t-\tau_2, \varepsilon_j, T_j | J) f_2(\tau_1, \tau_2, \varepsilon_i, \varepsilon_j) d\tau_1 d\tau_2$$

3.2.2. Rozwiązania dla poissonowskiego strumienia zgłoszeń

Funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa przemieszczenia $p_w(w, x, t | J)$ można obliczyć ze wzoru

$$p_w(w, x, t | J) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iQw} \psi(Q, x, t | J) dQ, \quad (3.40)$$

w którym

$\psi(Q, x, t | J)$ - jest punktową funkcją charakterystyczną wielkości $w(x, t | J)$.

Między funkcją charakterystyczną $\psi(Q, x, t | J)$ a półniezmiennikami $\eta_n(x, t | J)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) istnieje zależność

$$\ln \psi(Q, x, t | J) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k(x, t | J)}{k!} (iQ)^k \quad (3.41)$$

Wykorzystując wzór (3.29) i przyjmując model ruchu w postaci niejednorodnego procesu Poissona można wykazać, że

$$\eta_n(x, t | J) = \sum_{i=1}^k \int_0^t E[A^n(\varepsilon_1, t) H^n(x, \varepsilon_1, t-\tau, T_1 | J) f_1(\tau, \varepsilon_1)] d\tau \quad (3.42)$$

Po podstawieniu wyrażenia (3.37) do wzoru (3.36) i po wykonaniu sumowania otrzymuje się wzór na obliczenie funkcji charakterystycznej

$$\psi(Q, x, t | J) = \exp \left\{ \sum_{j=1}^k \int_0^t \int_0^{\infty} \exp \left[iQ A(\tau, \varepsilon_j) H(x, t-\tau, \varepsilon_j, T_j | J) \right] \right. \\ \left. \zeta_j[A(\tau, \varepsilon_j)] f_1(\tau, \varepsilon_j) dA d\tau - \sum_{j=1}^k \int_0^t f_1(\tau, \varepsilon_j) d\tau \right\} \quad (3.43)$$

Znając funkcję charakterystyczną $\psi(Q, x, t | J)$, można ze wzoru (3.40) obliczyć funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa przemieszczenia $p_w(w, x, t | J)$. Funkcję tę można również obliczyć w inny sposób, a mianowicie wykorzystując szereg Grama-Charla analogicznie jak w [55]

$$p_w(w, x, t | J) = \sigma_w^{-1}(x, t | J) \theta^0 - \frac{\eta_3(x, t | J) \sigma_w^{-4}(x, t | J) \theta^3}{3!} +$$

$$+ \frac{\eta_4(x, t | J) \sigma_w^{-5}(x, t | J) \theta^4}{4!} + \dots \quad (3.44)$$

W powyższym wzorze przyjęto następujące oznaczenia:

$$\theta^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^n}{dz^n} \left[\exp \left(-\frac{z^2}{2} \right) \right],$$

$$z = \frac{w(x, t | J) - \eta_1(x, t | J)}{\sigma_w(x, t | J)}, \quad \left. \begin{aligned} E[w(x, t | J) - \eta_1(x, t | J)] &= 0 \\ \sigma_w^2(x, t | J) &= \eta_2(x, t | J) \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

W analizie niezawodności konstrukcji ze względu na pierwsze przekroczenie ustalonego poziomu wykorzystuje się łączną funkcję gęstości prawdopodobieństwa przemieszczenia i prędkości przemieszczenia $p_{ww}(w, \dot{w}, x, t | J)$ lub łączną funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa naprężenia i prędkości naprężenia $p_{SS}(S, \dot{S}, x, t | J)$. Można ją obliczyć wykorzystując dwuwymiarową funkcję charakterystyczną $\psi(Q_1, Q_2, x, t | J)$ ze wzoru

$$p_{ww}(w, \dot{w}, x, t | J) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(Q_1 w + Q_2 \dot{w})} \psi_{Q_1 Q_2}(Q_1, Q_2, x, t | J) dQ_1 dQ_2 \quad (3.46)$$

Funkcję charakterystyczną oblicza się z zależności

$$\psi_{Q_1 Q_2}(Q_1, Q_2, x, t | J) = E \left\{ \exp \left[i \left(Q_1 w(x, t | J) + Q_2 \dot{w}(x, t | J) \right) \right] \right\} \quad (3.47)$$

lub po wykorzystaniu wyrażeń (3.25) i (3.26) z zależności

$$\psi_{Q_1 Q_2}(Q_1, Q_2, x, t | J) = E \left\{ \exp \left[i \sum_{j=1}^k \int_0^t A(\tau, \varepsilon_j) \left[Q_1 H(x, t-\tau, \varepsilon_j, T_j | J) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + Q_2 G(x, t-\tau, \varepsilon_j, T_j | J) \right] dN(\tau, \varepsilon_j) \right] \right\} \quad (3.48)$$

Całki w powyższym wyrażeniu można traktować jako sumy wielu niezależnych zmiennych. Logarytmując obustronnie wzór (3.48) otrzymuje się

$$\ln \psi_{Q_1 Q_2}(Q_1, Q_2, x, t | J) = \sum_{j=1}^k \int_0^t \ln E \left\{ \exp \left[i A(\tau, \varepsilon_j) \left[Q_1 H(x, t-\tau, \varepsilon_j, T_j | J) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + Q_2 G(x, t-\tau, \varepsilon_j, T_j | J) \right] \right] dN(\tau, \varepsilon_j) \right\} \quad (3.49)$$

Wykorzystując rozwinięcie funkcji $\ln(1+x)$ w szereg Taylora i uwzględniając (por. (3.4)), że $E[dN(\tau, \varepsilon_j)] = f_1(\tau, \varepsilon_j) d\tau$, wyrażenie (3.49) można przekształcić do następującej postaci

$$\ln \psi_{Q_1 Q_2}(Q_1, Q_2, x, t | J) = \sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \left\{ \int_0^t A^n(\tau, \varepsilon_j) \left[Q_1 H(x, t-\tau, \varepsilon_j, T_j | J) + \right. \right. \\ \left. \left. + Q_2 G(x, t-\tau, \varepsilon_j, T_j | J) \right] \xi_j \left[A(\tau, \varepsilon_j) \right] f_1(\tau, \varepsilon_j) dA d\tau \right\} \quad (3.50)$$

Po dalszych przekształceniach otrzymuje się

$$\psi_{Q_1 Q_2}(Q_1, Q_2, x, t | J) = \exp \left\{ \sum_{j=1}^k \left\{ \int_0^t \int_0^t \exp \left[i A(\tau, \varepsilon_j) \left[Q_1 H(x, t-\tau, \varepsilon_j, T_j | J) + \right. \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + Q_2 G(x, t-\tau, \varepsilon_j, T_j | J) \right] \right] \xi_j \left[A(\tau, \varepsilon_j) \right] f_1(\tau, \varepsilon_j) dA d\tau - \int_0^t f_1(\tau, \varepsilon_j) d\tau \right\} \right\} \quad (3.51)$$

Dwuwymiarową funkcję charakterystyczną (3.51) wykorzystuje się do obliczenia wartości dwuwymiarowych kumulant $K_{m,n}(w, \dot{w}, x, t | J)$ procesów stochastycznych $w(x, t | J)$ i $\dot{w}(x, t | J)$ ([50], [63])

$$K_{m,n}(w, \dot{w}, x, t | J) = \frac{1}{i^{m+n}} \left[\frac{\partial^{m+n}}{\partial Q_1^m \partial Q_2^n} \ln \psi_{Q_1 Q_2}(Q_1, Q_2, x, t | J) \right] \Big|_{Q_1=Q_2=0} \quad (3.52)$$

Po podstawieniu do wzoru (3.52) wyrażenia (3.51) otrzymuje się bardziej praktyczną postać związku na obliczenie dwuwymiarowych kumulant

$$K_{m,n}^{(w, \dot{w}, x, t | J)} = \sum_{j=1}^k \int_0^t E [A^{m+n}(\tau, \varepsilon_j)] H^m(x, t-\tau, \varepsilon_j, T_j | J) G^n(x, t-\tau, \varepsilon_j, T_j | J) f_1(\tau, \varepsilon_j) d\tau \quad (3.53)$$

Obliczone ze wzoru (3.53) kumulanty wykorzystuje się do obliczenia funkcji łącznej gęstości prawdopodobieństwa przemieszczenia $w(x, t | J)$ i prędkości przemieszczenia $\dot{w}(x, t | J)$ z szeregu Longuet-Higginsa [50], który ma postać

$$p_{ww}^{(w, \dot{w}, x, t | J)} = \left\{ 2\pi \left[K_{2,0} K_{0,2} - K_{1,1}^2 \right]^{1/2} \right\}^{-1} \exp \left[- \frac{1}{2} \left(\alpha_1^2 - 2\rho \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2 \right) / \left(1 - \rho^2 \right) \right] \left[1 + \frac{1}{6} \left(\beta_{9,0} H_{9,0} + 3\beta_{2,1} H_{2,1} + 3\beta_{1,2} H_{1,2} + \beta_{0,9} H_{0,9} \right) + \dots \right] \quad (3.54)$$

We wzorze tym

$$\alpha_1 = \alpha_1(x, t | J) = \left[w(x, t | J) - K_{1,0}(w, 0, x, t | J) \right]^{-1/2} K_{2,0}(w, 0, x, t | J), \quad (3.55)$$

$$\alpha_2 = \alpha_2(x, t | J) = \left[\dot{w}(x, t | J) - K_{0,1}(0, \dot{w}, x, t | J) \right]^{-1/2} K_{0,2}(0, \dot{w}, x, t | J), \quad (3.56)$$

$$\beta_{m,n} = \frac{K_{m,n}^{(w, \dot{w}, x, t | J)}}{\left[K_{2,0}^m(w, 0, x, t | J) K_{0,2}^n(0, \dot{w}, x, t | J) \right]^{1/2}}, \quad \rho = \beta_{1,1}, \quad (3.57)$$

ρ - współczynnik korelacji między $w(x, t | J)$ i $\dot{w}(x, t | J)$.

Wyrażenia $H_{m,n}$ są dwuwymiarowymi analogonami wielomianów Hermite'a

$$H_{m,n} \exp \left[- \frac{1}{2} \left(\alpha_1^2 - 2\rho \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2 \right) / \left(1 - \rho^2 \right) \right] = (-1)^{m+n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial \alpha_1^m \partial \alpha_2^n} \left\{ \exp \left[- \frac{1}{2} \left(\alpha_1^2 - 2\rho \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2 \right) / \left(1 - \rho^2 \right) \right] \right\} \quad (3.58)$$

Podobnie, jak to pokazano powyżej, otrzymuje się związki na obliczenie łącznej funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia przemieszczenia (lub naprężenia) $p_{w, \dot{w}, \ddot{w}}(w, \dot{w}, \ddot{w}, x, t | J)$ oraz łącznej funkcji charakterystycznej $\psi_{Q_1 Q_2 Q_3}(Q_1, Q_2, Q_3, x, t | J)$, które wykorzystuje się w analizie niezawodności konstrukcji za względu na zmęczenie. Wyrażenia te mają następującą postać

$$p_{w, \dot{w}, \ddot{w}}(w, \dot{w}, \ddot{w}, x, t | J) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-i \left[Q_1 w + Q_2 \dot{w} + Q_3 \ddot{w} \right] \right] \psi_{Q_1 Q_2 Q_3}(Q_1, Q_2, Q_3, x, t | J) dQ_1 dQ_2 dQ_3, \quad (3.59)$$

$$\psi_{Q_1 Q_2 Q_3}(Q_1, Q_2, Q_3, x, t | J) = \exp \left\{ \sum_{j=1}^k \left\{ \int_0^t \int_0^{\infty} \exp \left[i A(\tau, \varepsilon_j) \left(Q_1 H(x, t-\tau, \varepsilon_j, T_j | J) + Q_2 \dot{H}(x, t-\tau, \varepsilon_j, T_j | J) + Q_3 \ddot{H}(x, t-\tau, \varepsilon_j, T_j | J) \right) \right] \right. \right. \\ \left. \left. \zeta_j \left[A(\tau, \varepsilon_j) \right] f_1(\tau, \varepsilon_j) dA d\tau - \int_0^t f_1(\tau, \varepsilon_j) d\tau \right\} \right\} \quad (3.60)$$

Zamieniając w wyrażeniach (3.40) ÷ (3.60) funkcje wpływu przemieszczenia $H(x, t | J)$ i jej pochodne po czasie odpowiednio na funkcje wpływu naprężeń i jej pochodne, otrzymamy analogiczne związki pozwalające na obliczenie jedno-, dwu- i trójwymiarowych funkcji gęstości rozkładów prawdopodobieństwa oraz funkcji charakterystycznych naprężeń. Funkcje te będą wykorzystane w dalszej części pracy.

3.3. Rozwiązania szczególne

Wykorzystując wyprowadzone w poprzednim rozdziale związki ogólne można otrzymać rozwiązania szczególne dla stanu ustalonego. Załóżmy, że dźwigar mostowy jest belką swobodnie podpartą, potok pojazdów tworzy proces Poissona, $S(\varepsilon_1) = 1$, a funkcje wpływu $H_1(x, t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | J)$ i $H_2(x, t-\tau-T_1, \varepsilon_1, T_1 | J)$ przedstawimy w postaci szeregu funkcji własnych

$$H_1(x, t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | J) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t-\tau, \varepsilon_1, T_1) W_n(x | J) \quad (3.61)$$

$$H_2(x, t-\tau-T_1, \varepsilon_1, T_1 | J) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(t-\tau-T_1, \varepsilon_1, T_1 | J) W_n(x | J) \quad (3.62)$$

Wstawiając wyrażenia (3.61) i (3.62) do równań (3.29) oraz (3.30) i wykorzystując własność ortogonalności funkcji własnych otrzymuje się

$$\begin{aligned} \ddot{q}_n(t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | J) + 2\alpha \dot{q}_n(t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | J) + \omega_n^2 q_n(t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | J) = \\ = \frac{1}{\gamma_n^2} W_n [v_1(t-\tau) | J], \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \ddot{z}_n(t-\tau-T_1, \varepsilon_1, T_1 | J) + 2\alpha \dot{z}_n(t-\tau-T_1, \varepsilon_1, T_1 | J) + \\ + \omega_n^2 z_n(t-\tau-T_1, \varepsilon_1, T_1 | J) = 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

gdzie

$$2\alpha = C/M, \quad \gamma_n^2 = \int_0^1 M W_n^2(x | J) dx,$$

$$\omega_n = (n\pi/l)^2 \sqrt{EI/M} \quad - \quad \text{częstość drgań własnych.}$$

Z równań (3.63) i (3.64) otrzymujemy

$$q_n(t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | J) = \frac{1}{\gamma_n^2} \int_{\tau}^t h_n(t-\xi | J) W_n[v_1(\xi-\tau) | J] d\xi \quad (3.65)$$

$$z_n(t-\tau-T_1, \varepsilon_1, T_1 | J) = \frac{1}{\gamma_n^2} \int_{\tau}^{\tau+T_1} h_n(t-\xi | J) W_n[v_1(\xi-\tau | J)] d\xi \quad (3.66)$$

$h_n(t-\xi|J) = \Omega_n^{-1} e^{-\alpha(t-\xi)} \sin \Omega_n(t-\xi)$ - impulsowa funkcja przejścia,

$\Omega_n^2 = \omega_n^2 - \alpha^2$ - tłumiona częstość własna,

symbol $(\dots|J)$ oznacza tak jak poprzednio, że $EI \in (EI, EI+\Delta EI)$,
 $M \in (M, M+\Delta M)$, $C \in (C, C+\Delta C)$.

Wartość oczekiwana przemieszczenia $E[w(x,t)]$ w punkcie x belki mostowej opisana wzorem (3.33) po uwzględnieniu powyższych zależności wynosi:

$$E[w(x,t)] = \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} [\tilde{q}_n(t, \varepsilon_i|J) + \tilde{z}_n(t, \varepsilon_i|J)] W_n(x|J) \quad (3.67)$$

We wzorze tym przyjęto następujące oznaczenia

$$\tilde{q}_n(t, \varepsilon_i|J) = \int_{t-T_1}^t E[A(\tau, \varepsilon_i)] q_n(t-\tau, \varepsilon_i, T_1|J) f_1(\tau, \varepsilon_i) d\tau, \quad (3.68)$$

$$\tilde{z}_n(t, \varepsilon_i|J) = \int_0^{t-T_1} E[A(\tau, \varepsilon_i)] z_n(t-\tau-T_1, \varepsilon_i, T_1|J) f_1(\tau, \varepsilon_i) d\tau \quad (3.69)$$

Kowariancję przemieszczenia można obliczyć ze wzoru (por. [27])

$$\sigma_w^2(x,t|J) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\text{cov}_{q_m q_n}(t) + \text{cov}_{z_m z_n}(t) + \text{cov}_{q_m z_n}(t)] W_m(x|J) W_n(x|J) \quad (3.70)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \text{cov}_{q_m q_n}(t,t) &= \sum_{i=1}^k \int_{t-T_1}^t E[A^2(\tau, \varepsilon_i)] q_m(t-\tau, \varepsilon_i, T_1|J) q_n(t-\tau, \varepsilon_i, T_1|J) \\ &\quad f_1(\tau, \varepsilon_i) d\tau + \\ &+ \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k \int_{t-T_1}^t \int_{t-T_j}^t E[A(\tau_1, \varepsilon_i) A(\tau_2, \varepsilon_j)] q_m(t-\tau_1, \varepsilon_i, T_1|J) q_n(t-\tau_2, \varepsilon_j, T_j|J) \\ &\quad f_2(\tau_1, \tau_2, \varepsilon_i, \varepsilon_j) d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.71) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cov}_{z_m z_n}(t, t) &= \sum_{i=1}^k \int_0^{t-T_1} E[A^2(\tau, \varepsilon_1)] z_m(t-\tau-T_1, \varepsilon_1, T_1 | J) z_n(t-\tau-T_1, \varepsilon_1, T_1 | J) \\ &\quad f_1(\tau, \varepsilon_1) d\tau + \\ &+ \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k \int_0^{t-T_1} \int_0^{t-T_j} E[A(\tau_1, \varepsilon_1) A(\tau_2, \varepsilon_j)] z_m(t-\tau_1-T_1, \varepsilon_1, T_1 | J) \\ &\quad z_n(t-\tau_2-T_j, \varepsilon_j, T_j | J) f_2(\tau_1, \tau_2, \varepsilon_1, \varepsilon_j) d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.72) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cov}_{q_m z_n}(t, t) &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k \int_{t-T_1}^t \int_0^{t-T_j} E[A(\tau_1, \varepsilon_1) A(\tau_2, \varepsilon_j)] q_m(t-\tau_1, \varepsilon_1, T_1 | J) \\ &\quad z_n(t-\tau_2-T_j, \varepsilon_j, T_j | J) f_2(\tau_1, \tau_2, \varepsilon_1, \varepsilon_j) d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.73) \end{aligned}$$

W przypadku szczególnym, gdy strumień pojazdów jest modelowany stacjonarnym procesem Poissona, wartości sił są nieskorelowanymi zmiennymi losowymi a czas obserwacji jest bardzo duży ($t \rightarrow \infty$), to wzór (3.70) służący do obliczenia wartości wariancji przemieszczenia znacznie się upraszcza

$$\begin{aligned} \sigma_w^2(x, t | J) &= \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{t-T_1}^t E[A^2(\tau, \varepsilon_1)] q_n^2(t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | J) w_n^2(x | J) f_1(\tau, \varepsilon_1) d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{t-T_1} E[A^2(\tau, \varepsilon_1)] z_n^2(t-\tau-T_1, \varepsilon_1, T_1 | J) w_n^2(x | J) f_1(\tau, \varepsilon_1) d\tau \right\} \quad (3.74) \end{aligned}$$

Jak wspomniano w rozdziale drugim, modelowanie ruchu drogowego procesem Poissona można stosować w przypadku ruchu o słabym lub średnim natężeniu. W modelu tym największe prawdopodobieństwo pojawienia się kolejnych pojazdów występuje dla małych odstępów pomiędzy nimi, co nie odpowiada rzeczywistości i stanowi istotną wadę tego modelu. Wady tej nie mają rozkłady Erlanga dla $k > 1$, których funkcję gęstości opisuje związek (2.13). Chwile pojawiania się pojazdów o numerze będącym wielokrotnością k w strumieniu Poissona tworzą proces Erlanga rzędu k . Fakt ten można wykorzystać przy wyprowadzaniu związków określających odpowiedź konstrukcji obciążonej strumieniem sił skupionych, których chwile zgłoszeń tworzą proces Erlanga dla $k = 2$.

Niech $N(t)$ oznacza proces Poissona o intensywności $2f_1(t, \varepsilon_1)$ a chwila początkowa $t_0 = 0$ pokrywa się ze zgłoszeniem się zerowego pojazdu. Zakładamy, że wszystkie pojazdy należą do tej samej klasy oraz że intensywność zgłoszeń nie zależy od czasu $f_1(t, \varepsilon_1) = f_1$ i wartość co drugiej siły skupionej modelującej pojazd jest różna od zera. Przemieszczenie belki pod takim obciążeniem wynosi

$$w(x, t|J) = 0.5 \int_0^t A(\tau) [1 - (-1)^{N(\tau)}] H(x, t-\tau, T|J) dN(\tau) \quad (3.75)$$

Wartość oczekiwana przemieszczenia obliczymy ze wzoru

$$E[w(x, t|J)] = \int_0^t E[A(\tau)] (1 - \exp(-4f_1)) H(x, t-\tau, T|J) f_1 d\tau$$

a drugi zwykły moment statystyczny

$$E[w^2(x, t|J)] = 0.25 \int_0^t \int_0^t E[A(\tau_1)A(\tau_2)] H(x, t-\tau_1, T|J) H(x, t-\tau_2, T|J) \\ E\{[1 - (-1)^{N(\tau_1)}][1 - (-1)^{N(\tau_2)}]\} dN(\tau_1) dN(\tau_2) \quad (3.77)$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 E[w^2(x, t|J)] &= \int_0^t E[A^2(\tau)] (1 - \exp(-4f_1\tau)) H^2(x, t-\tau, T|J) f_1 d\tau + \\
 &+ \int_0^t \int_0^t \tilde{H}(t, \tau_1, \tau_2|J) f_1^2 d\tau_1 d\tau_2 + \\
 &+ \int_0^t \int_0^{\tau_1} \tilde{H}(t, \tau_1, \tau_2|J) \exp(-4f_1\tau_1) f_1^2 d\tau_1 d\tau_2 + \\
 &- \int_0^t \int_{\tau_1}^t \tilde{H}(t, \tau_1, \tau_2|J) \exp(-4f_1\tau_1) f_1^2 d\tau_1 d\tau_2 + \\
 &+ \int_0^t \int_0^{\tau_2} \tilde{H}(t, \tau_1, \tau_2|J) \exp(-4f_1\tau_2) f_1^2 d\tau_1 d\tau_2 + \\
 &- \int_0^t \int_{\tau_2}^t \tilde{H}(t, \tau_1, \tau_2|J) \exp(-4f_1\tau_2) f_1^2 d\tau_1 d\tau_2 + \\
 &- \int_0^t \int_0^{\tau_1} \tilde{H}(t, \tau_1, \tau_2|J) \exp(-4f_1(\tau_1 - \tau_2)) f_1^2 d\tau_1 d\tau_2 + \\
 &- \int_0^t \int_{\tau_1}^t \tilde{H}(t, \tau_1, \tau_2|J) \exp(-4f_1(\tau_2 - \tau_1)) f_1^2 d\tau_1 d\tau_2
 \end{aligned}
 \tag{3.78}$$

gdzie

$$\tilde{H}(t, \tau_1, \tau_2|J) = E[A(\tau_1)A(\tau_2)] H(x, t-\tau_1, T|J) H(x, t-\tau_2, T|J)$$

3.4. Przykłady obliczeń

Wyprowadzone w poprzednich rozdziałach związki wykorzystano do analizy dynamicznej dźwigara mostowego modelowanego belką swobodnie podpartą (rys. 3.3) o deterministycznych parametrach fizycznych i geometrycznych wynoszących:

- długość przęsła $l = 30$ m,
- intensywność masy $M = 3500$ kg/m lub 6000 kg/m,
- moment bezwładności przekroju [48] $J \cong 0.0216309$ m³,
- współczynnik tłumienia $\zeta = 0.01, 0.02$ ($\alpha = \zeta \omega_1 = 0.5$ C/MD),
- pierwsza częstość drgań własnych $\omega_1 = 4$ Hz, 10 Hz.

O siłach skupionych, modelujących pojazdy poruszające się po moście, założono, że ich wartości mają ten sam rozkład prawdopodobieństwa. Parametry tego rozkładu przyjęto wg [64]:

- wartość średnia $E[A] = 31$ kN,
- wariancja $\sigma^2[A] = 320$ kN², odchylenie standardowe $\sigma_A = 17.88$ kN,
- wartości ekstremalne $A_{\min} = 8$ kN, $A_{\max} = 80$ kN.

Ruch pojazdów modelowano procesem Poissona. Przyjęto, że intensywność zgłoszeń pojazdów nie zależy od czasu $f_1(\tau) = f_1 = \lambda$ i wynosi:

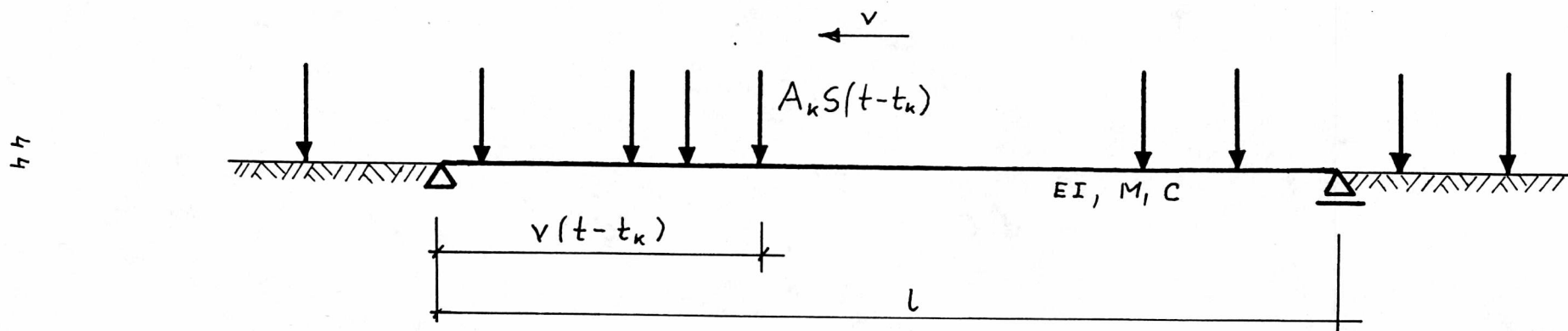
- $\lambda = \text{const}$, $\lambda = 0.1 \div 0.5$ poj./s,
- $\lambda = \lambda(v)$ jak na rys. 2.1 (zależność teoretyczna wzór (2.1)),
- $\lambda = \lambda(v)$ jak na rys. 2.2.

Analizowano wpływ różnych, jednakowych dla każdej siły, prędkości poruszania się przyjmując $v = 5 \div 40$ m/s ($18 \div 144$ km/h).

Z rozwiązania równań (3.65) i (3.66) otrzymano następujące zależności pozwalające na obliczenie wartości współrzędnych uogólnionych [27]:

$$q_n(t-\tau) = \frac{2}{M l M_n} \left[a_{1n} \sin \beta_n(t-\tau) + a_{2n} \cos \beta_n(t-\tau) + \right. \\ \left. + a_{3n} e^{-\alpha(t-\tau)} \sin \Omega_n(t-\tau) - a_{2n} e^{-\alpha(t-\tau)} \cos \Omega_n(t-\tau) \right] \quad (3.79)$$

$$z_n(t-\tau-T) = \frac{2}{M l M_n} e^{-\alpha(t-\tau-T)} \left[b_{1n} \sin \Omega_n(t-\tau-T) + b_{2n} \cos \Omega_n(t-\tau-T) \right] \quad (3.80)$$



Rys. 3.3

W wyrażeniach (3.79) i (3.80) przyjęto następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 T &= 1/v, & \beta_n &= n \pi/T, \\
 M_n &= (\omega_n^2 - \beta_n^2)^2 + 4 \alpha^2 \beta_n^2, \\
 a_{1n} &= \omega_n^2 - \beta_n^2, & a_{2n} &= -2 \alpha \beta_n, \\
 a_{3n} &= \frac{\beta_n}{\Omega_n} \left[2 \alpha^2 - (\omega_n^2 - \beta_n^2) \right], \\
 b_{1n} &= \frac{(-1)^n}{\Omega_n} \left[a_{1n} \beta_n + a_{2n} \alpha \right] + a_{3n} e^{-\alpha T} \cos \Omega_n T + a_{2n} e^{-\alpha T} \sin \Omega_n T, \\
 b_{2n} &= (-1)^n a_{2n} + a_{3n} e^{-\alpha T} \sin \Omega_n T - a_{2n} e^{-\alpha T} \cos \Omega_n T.
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

Z równań (3.67) + (3.69) i (3.79) + (3.81) obliczono średnie wartości ugięcia belki, z równania (3.70) - odchylenie standardowe ugięcia w środku rozpiętości przęsła dla różnych wartości prędkości v i intensywności zgłoszeń λ . Wyniki obliczeń pokazano na rys. 3.4 i 3.5. Po zamianie w wymienionych powyżej związkach funkcji $H(x, t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | J)$ na funkcję $G(x, t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | J)$ opisaną równaniem (3.31) obliczono wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe prędkości ugięcia belki. Uzyskane wartości pokazano na rys. 3.6 i 3.7.

Wpływ korelacji między zgłoszeniami na wartość wariancji ugięcia belki przeanalizowano przyjmując zgodnie z nierównością (3.9) funkcję korelacji w postaci (3.13)

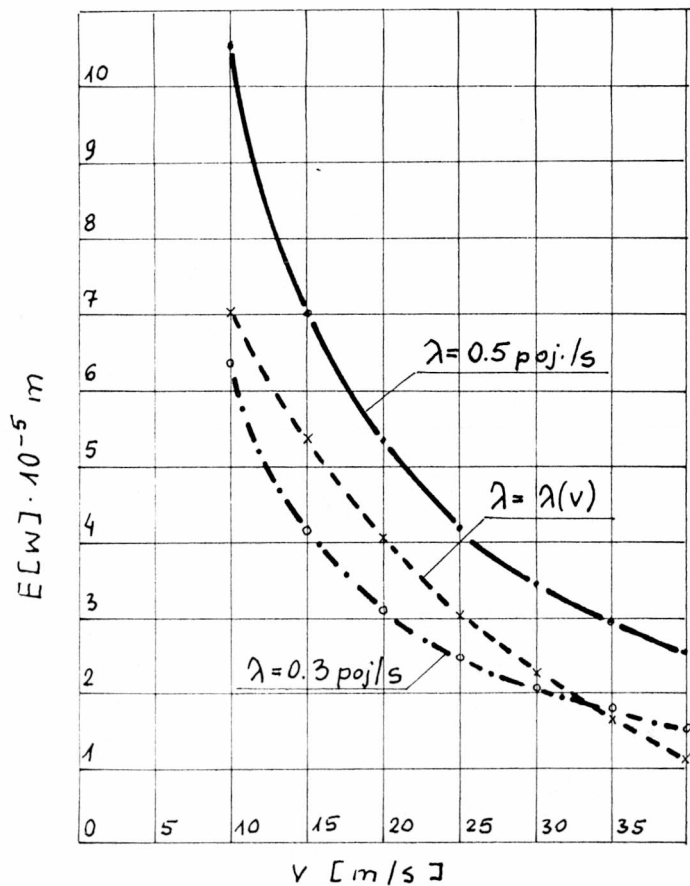
$$g_2(t_1, t_2) = -\alpha^2 f_1^2 \exp(-b|t_2 - t_1|)$$

przy czym przyjęto, że

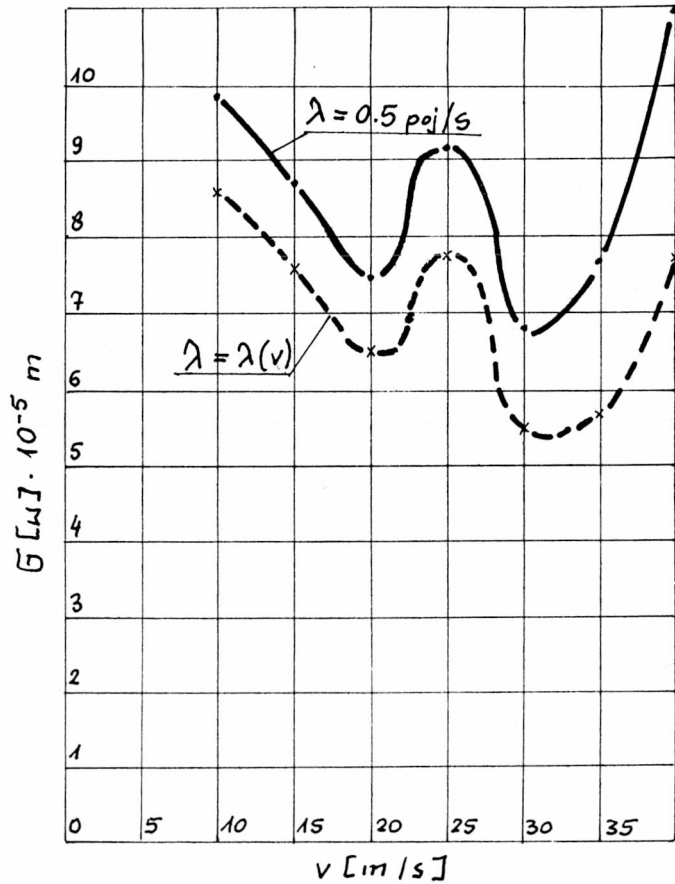
$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad 0 \leq b \leq 3.$$

Wówczas wzór (3.70) przy $t \rightarrow \infty$ i przyjętych do obliczeń założeniach upraszczających ma postać

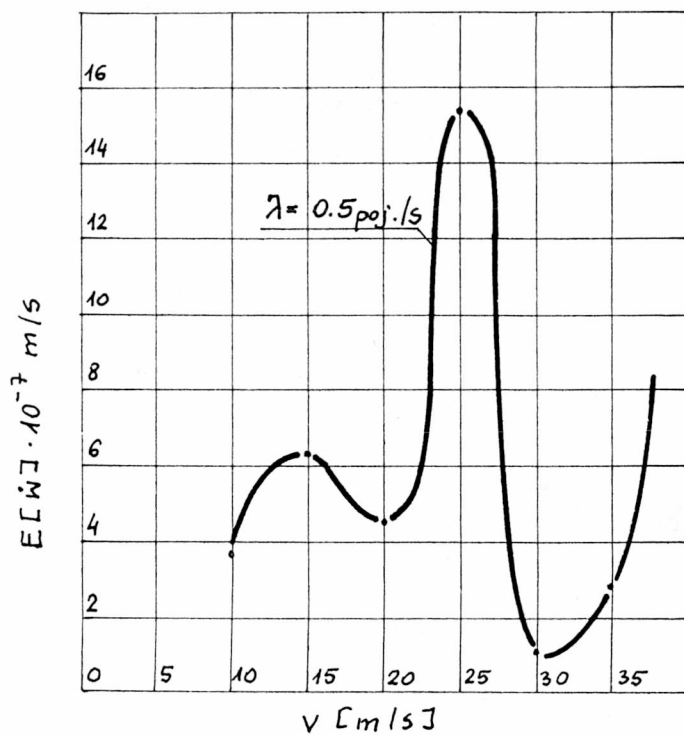
$$\begin{aligned}
 \sigma_w^2(x, \infty) &= \int_{-\infty}^t E[A^2] f_1 H^2(x, t-\tau, T) d\tau + \\
 &- \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t E[A^2] f_1 H(x, t-\tau_1, T) H(x, t-\tau_2, T) \alpha^2 f_1^2 \exp(-b|\tau_1 - \tau_2|) d\tau_1 d\tau_2
 \end{aligned} \tag{3.82}$$



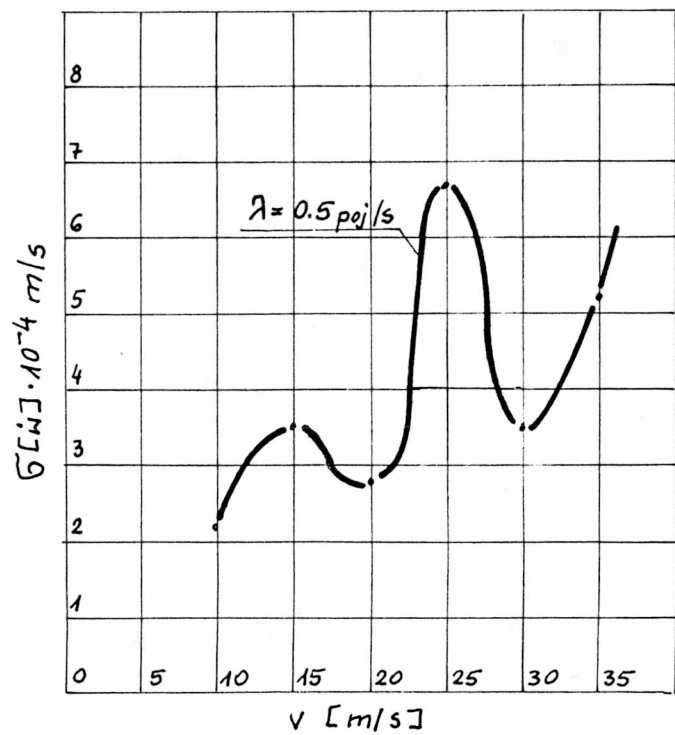
Rys. 3.4



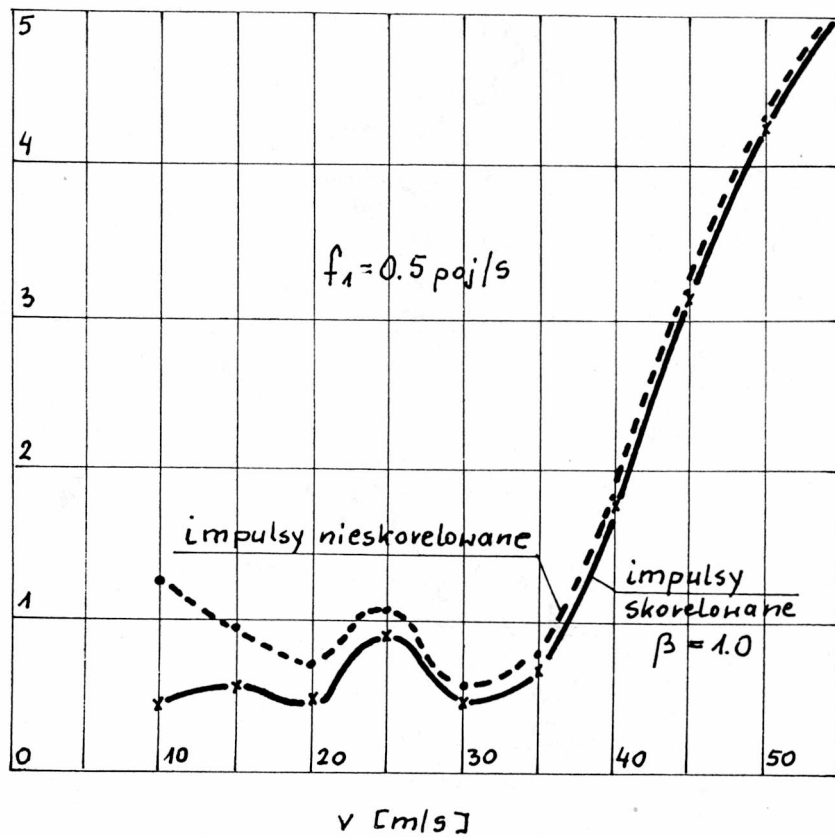
Rys. 3.5



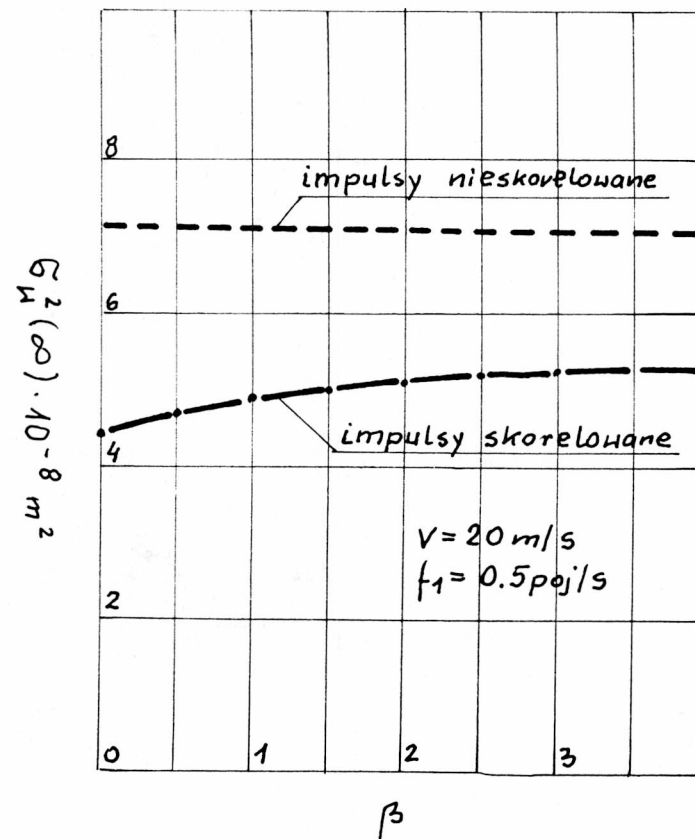
Rys. 3.6



Rys. 3.7



Rys. 3.8



Rys. 3.9

Na rys. 3.8 przedstawiono wyniki obliczeń dla różnych prędkości poruszania się sił, a na rys. 3.9 - dla różnych wartości współczynnika b. W obydwu przypadkach założono pełną korelację pomiędzy zgłoszeniami, tzn. $\alpha = 1$.

Wykorzystując związek (3.44) obliczono funkcje gęstości rozkładu prawdopodobieństwa ugięcia belki w środku jej rozpiętości dla różnego natężenia ruchu - rys. 3.10 i różnych prędkości poruszania się pojazdów - rys. 3.11.

Przeanalizowano również wpływ typu rozkładu prawdopodobieństwa ciężarów pojazdów na funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa ugięcia mostu. Do obliczeń przyjęto następujące typy rozkładów wartości sił :- rozkład gamma,

- rozkład normalny ucięty,
- rozkład beta,

przy tych samych wartościach średnich i wariancji.

Odpowiednie wykresy funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa ugięcia belki w środku jej rozpiętości, przy uwzględnieniu w obliczeniach trzech wyrazów szeregu (3.44), pokazano na rys. 3.12.

Analogicznie jak funkcje gęstości ugięć, obliczono funkcje gęstości rozkładu prawdopodobieństwa prędkości ugięć wstawiając do wzoru (3.44) zamiast (3.45) następujące wartości

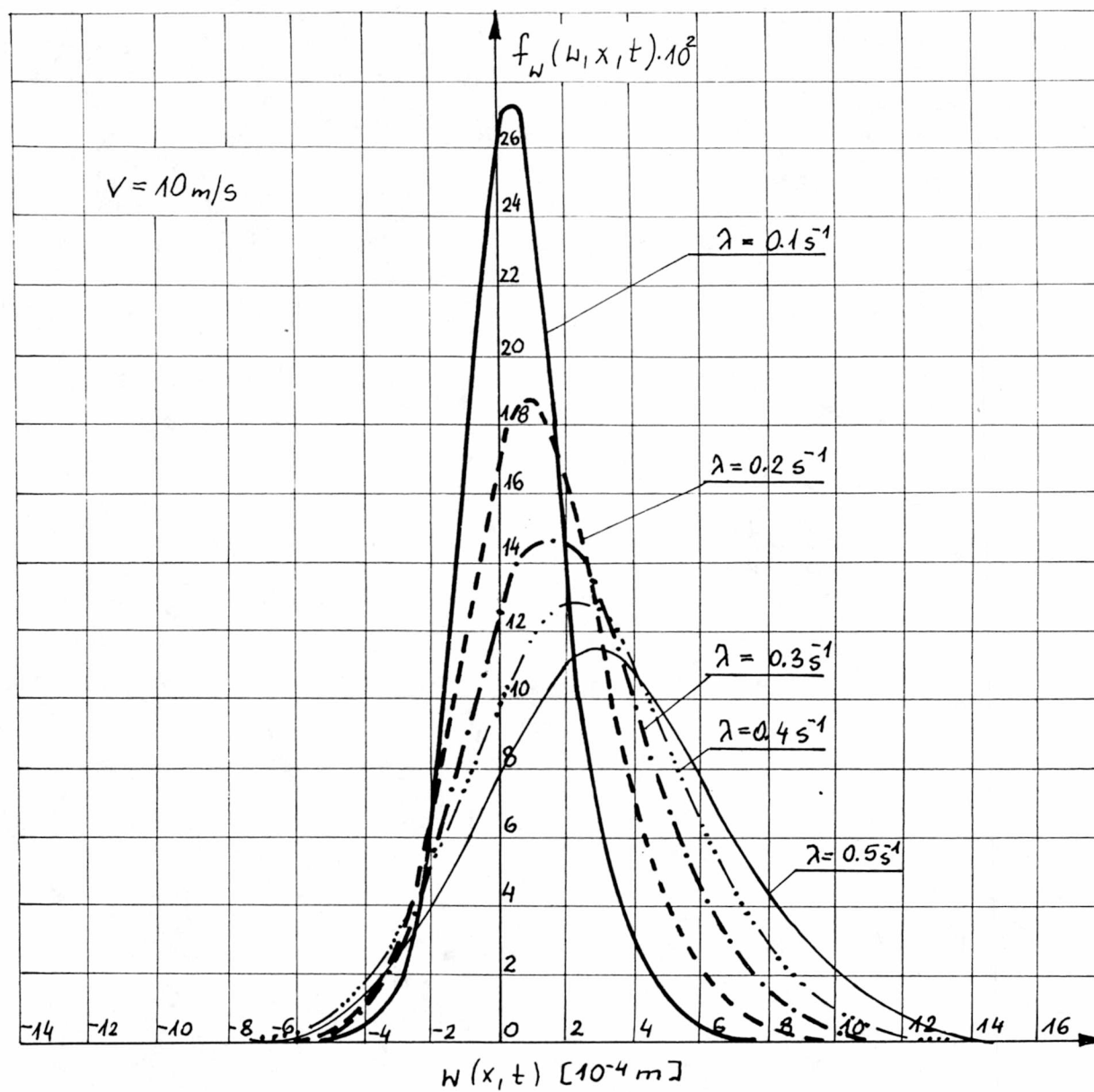
$$\begin{aligned}\eta_1(x, t | J) &= E [\dot{w}(x, t | J)], \\ \eta_2(x, t | J) &= \sigma_w(x, t | J), \\ z &= \frac{w(x, t | J) - \eta_1(x, t | J)}{\sigma_w(x, t | J)}.\end{aligned}\tag{3.83}$$

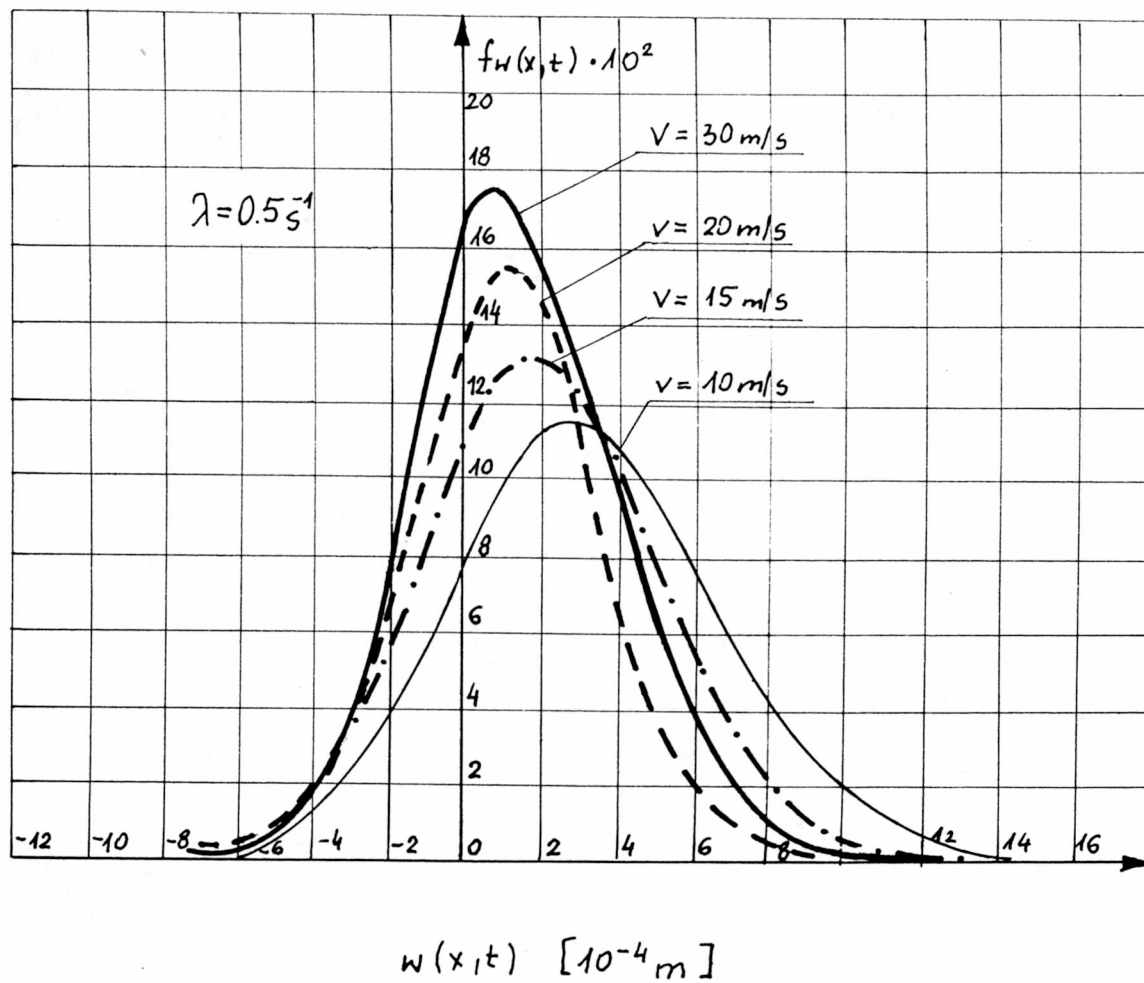
Odpowiednie wykresy przedstawiono na rysunkach 3.13 i 3.14.

W tabeli 1 podano wartości korelacji między ugięciem i prędkością ugięcia w środku rozpiętości przęsła oraz wartości współczynnika korelacji między nimi przy różnych prędkościach poruszania się pojazdów. Przy $t \rightarrow \infty$ obliczono je ze wzorów (por. (3.53)):

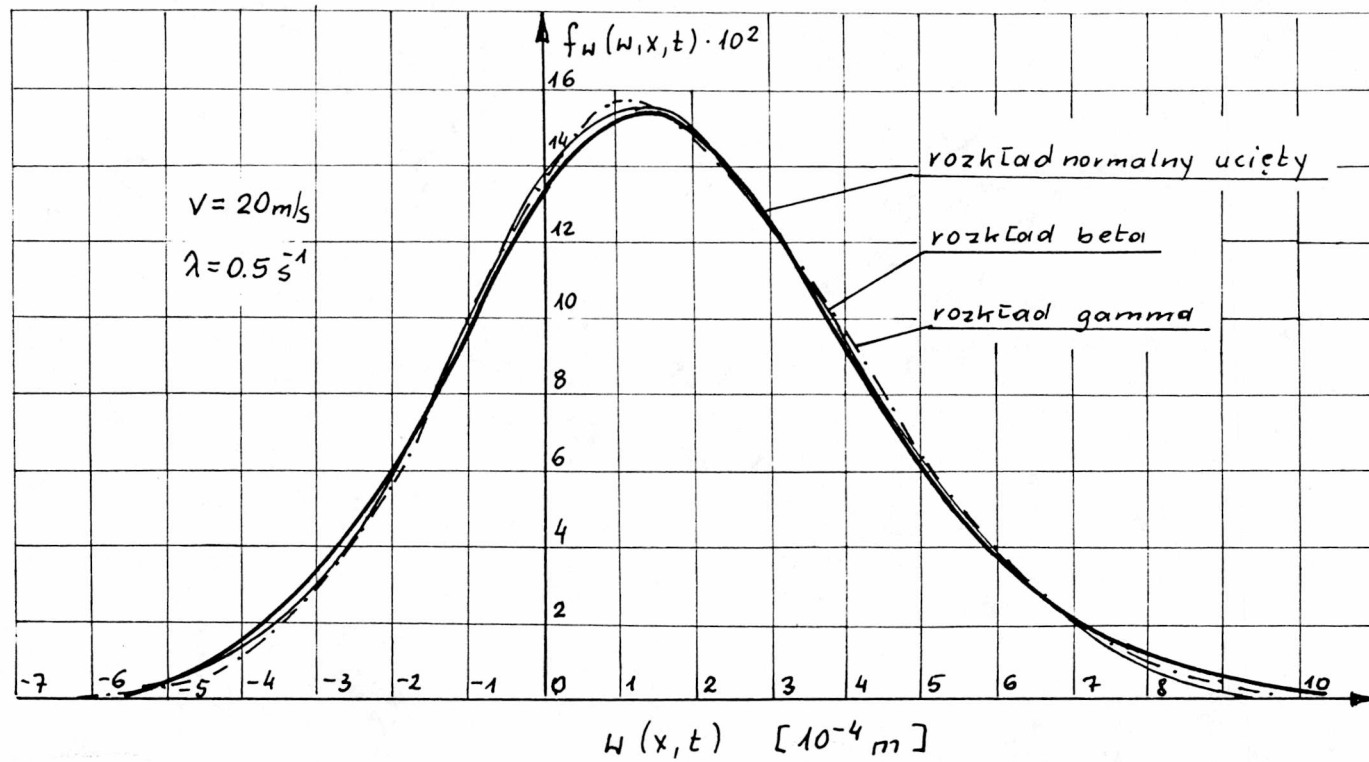
$$C_{ww}(x, t | J) = \int_0^t E[A^2] H(x, t-\tau, T | J) G(x, t-\tau, T | J) f_1 d\tau\tag{3.84}$$

$$\rho_{ww}(x, t | J) = \frac{C_{ww}(x, t | J)}{\sigma_w(x, t | J) \sigma_w(x, t | J)}\tag{3.85}$$

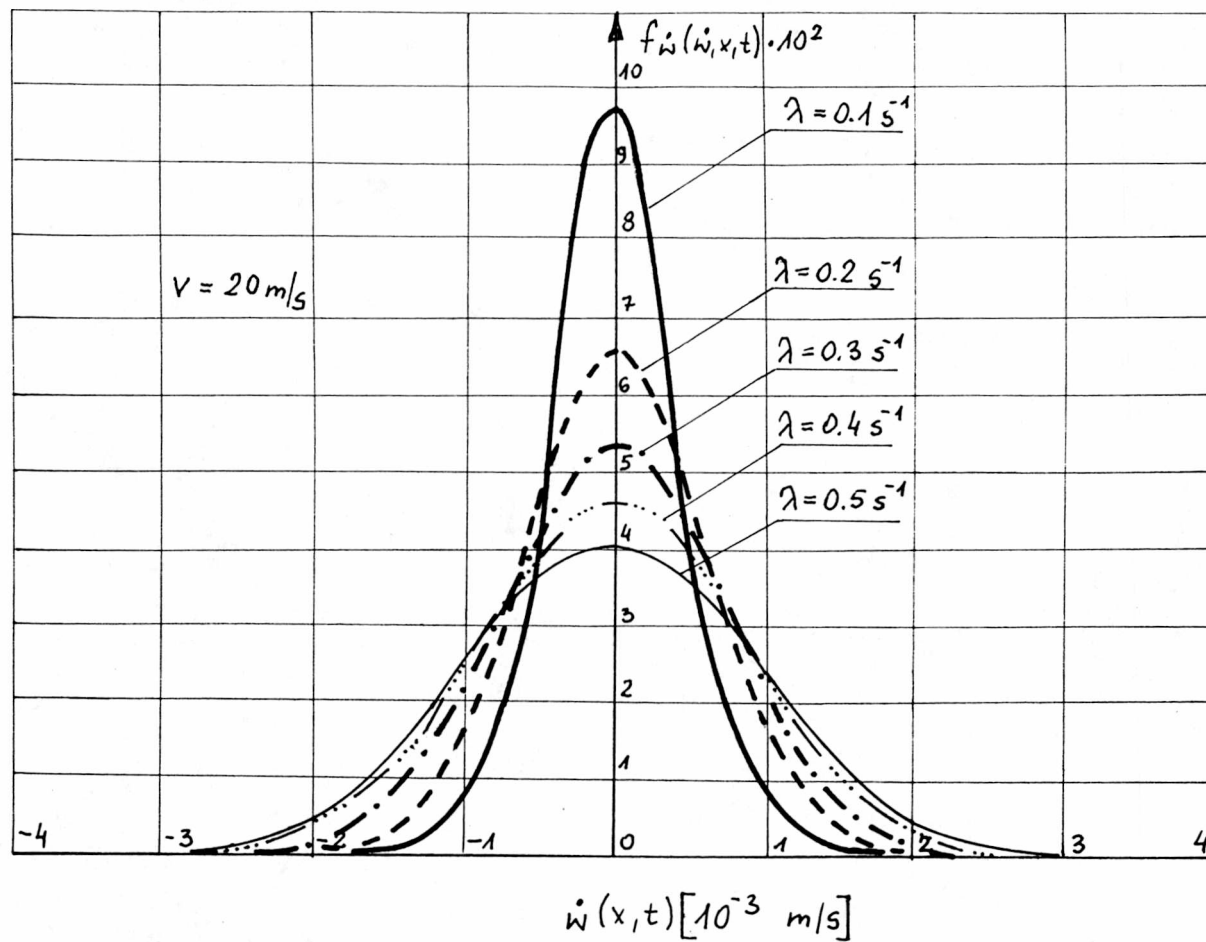




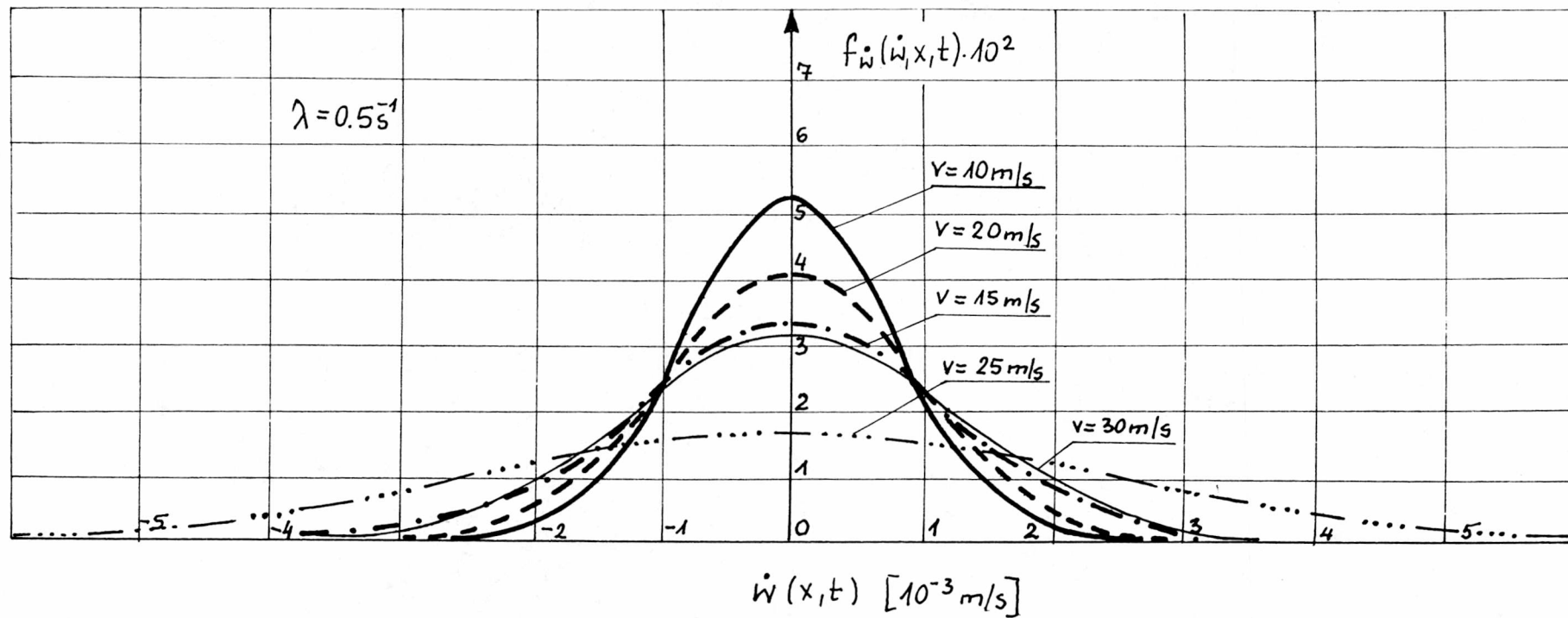
Rys. 3.11



Rys. 3.12



Rys. 3.13.



Rys. 3.14

TABELA 1

v [m/s]	C_{ww}	e_{ww}
10	$4.9658 \cdot 10^{-13}$	$2.2860 \cdot 10^{-5}$
15	$-3.3410 \cdot 10^{-13}$	$-1.0880 \cdot 10^{-5}$
20	$-2.0162 \cdot 10^{-13}$	$-9.7544 \cdot 10^{-6}$
25	$5.6830 \cdot 10^{-12}$	$9.2150 \cdot 10^{-5}$
30	$4.7600 \cdot 10^{-13}$	$2.0165 \cdot 10^{-5}$
35	$-1.0014 \cdot 10^{-12}$	$-2.4632 \cdot 10^{-5}$
40	$-8.1719 \cdot 10^{-12}$	$-6.4152 \cdot 10^{-5}$
45	$7.8092 \cdot 10^{-12}$	$3.3514 \cdot 10^{-5}$
50	$1.8372 \cdot 10^{-11}$	$5.6660 \cdot 10^{-5}$
55	$5.6991 \cdot 10^{-11}$	$1.4630 \cdot 10^{-5}$
60	$7.6597 \cdot 10^{-11}$	$1.7841 \cdot 10^{-4}$

Przebieg funkcji kowariancyjnej obliczono ze wzoru (por. (3.34))

$$C_{ww}(x, x, t | J) = \int_0^{\infty} E[A^2] H(x, z, T | J) H(x, z+t, T | J) f_1 dz \quad (3.86)$$

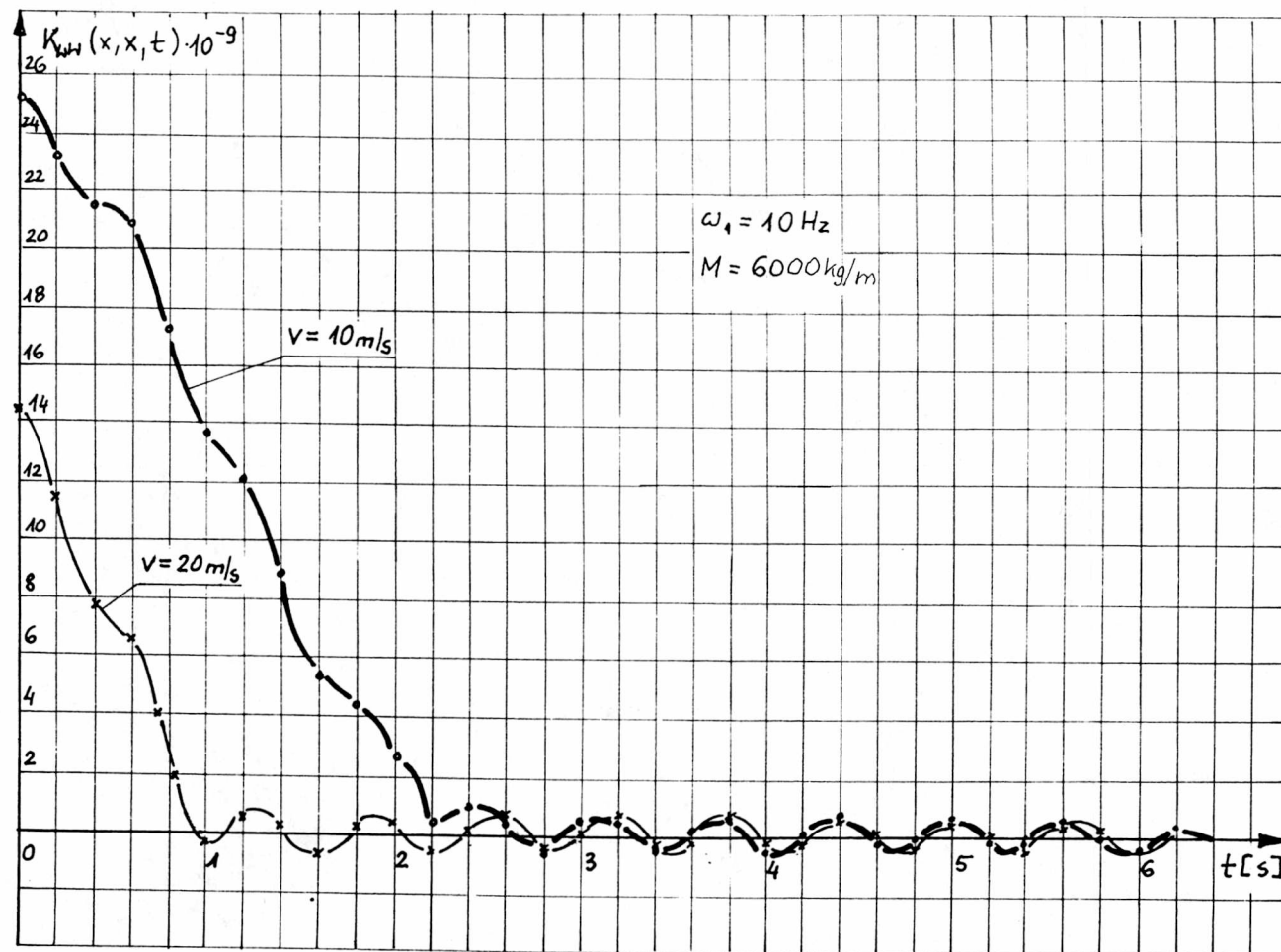
w którym przyjęto następujące oznaczenia: $t = t_1 - t_2$, $z = t_2 - \tau$.

Wyniki obliczeń dla różnych v pokazano na rys. 3.15.

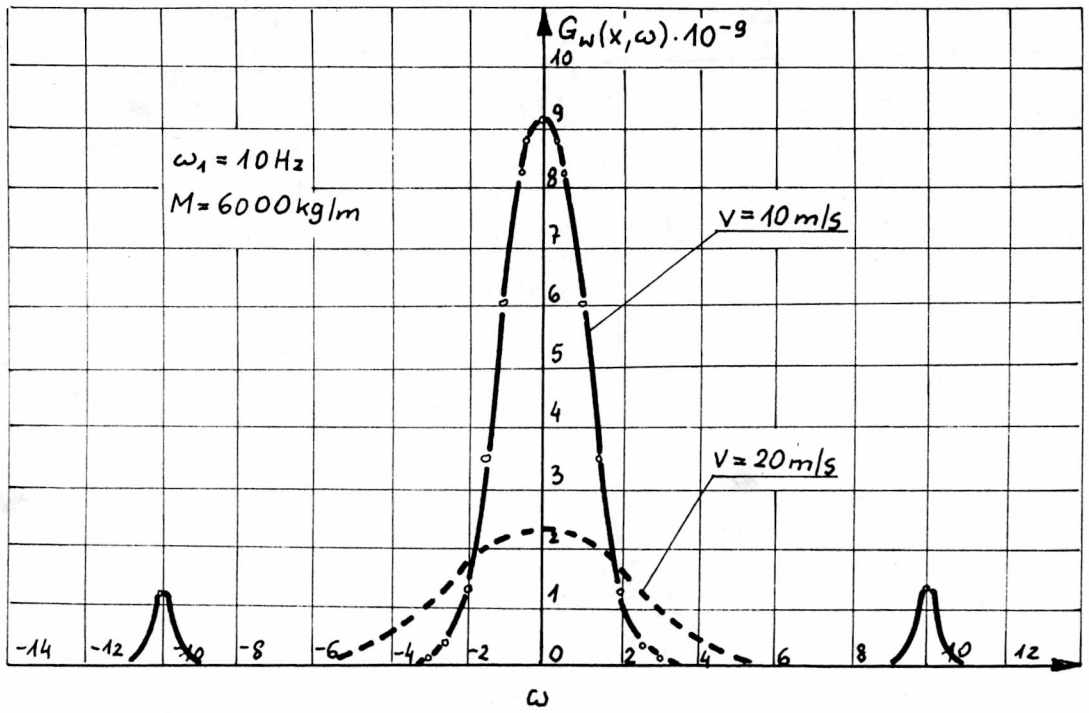
Funkcję kowariancyjną wykorzystano do obliczenia wartości funkcji gęstości widmowej

$$G_w(x, \omega) = \int_0^{\infty} C_{ww}(x, x, t | J) \cos \omega t dt. \quad (3.87)$$

Wykresy tej funkcji dla różnych wartości v przedstawiono na rys. 3.16.



Rys. 3.15



Rys. 3.16

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że wartości wariancji ugięcia belki przy nieskorelowanych zgłoszeniach pojazdów są większe niż przy uwzględnieniu korelacji pomiędzy nimi - rys. 3.8 i 3.9. Przy zwiększaniu się prędkości poruszania się pojazdów, przy stałej intensywności zgłoszeń różnice te zmniejszają się. Jak zobaczymy w dalszej części pracy, im większa jest wariancja odpowiedzi konstrukcji, tym mniejsza jest trwałość zmęczeniowa konstrukcji. Można więc przyjąć, że pominięcie w obliczeniach korelacji pomiędzy zgłoszeniami pojazdów daje oszacowania wartości odpowiedzi konstrukcji od góry.

Z rys. 3.10, 3.11 i 3.12 widać, że rozkłady prawdopodobieństwa ugięcia są jednomodalne, przesunięte w prawo, mają dodatni współczynnik skośności γ_1 i kurtozy γ_2 (dla $v = 20$ m/s, $\lambda = 0.5$ poj/s $\gamma_1 = 1.8$, $\gamma_2 = 6.49$). Typ rozkładu wartości sił obciążających belkę nie ma istotnego wpływu na kształt i wartości funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa ugięcia belki - rys. 3.12.

Pokazana na rys. 3.13 i 3.14 funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa prędkości ugięcia jest funkcją symetryczną.

Współczynnik korelacji między ugięciem i prędkością ugięcia jak to wynika z jego wartości w tabeli 1 jest bardzo mały. Można więc przyjąć bez popełnienia dużego błędu, że ugięcie belki i jego prędkość, spowodowane ruchem pojazdów, są wielkościami nieskorelowanymi.

Przedstawiona na rys. 3.16 funkcja gęstości widmowej ugięcia, pozwala na przyjęcie założenia, że losowy proces odpowiedzi konstrukcji na ruch drogowy jest procesem wąskopasmowym.

4. NIEZAWODNOŚĆ DŹWIGARA MOSTOWEGO

Wyprowadzone w poprzednim rozdziale związki wykorzystamy do określenia niezawodności dźwigara mostowego. Przez niezawodność układu $R(t)$ rozumiemy będziemy analogicznie jak w [42,43,47], prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy układu o losowych własnościach poddanego losowym obciążeniom w ciągu czasu t

$$R(t) = 1 - P(t) \quad (4.1)$$

gdzie $P(t)$ - awaryjność,

przez *trwałość* - czas T do wystąpienia awarii, a przez *bezpieczeństwo* S_a - prawdopodobieństwo, że konstrukcja ani w chwili odbioru, ani w czasie pracy nie wywoła zastrzeżeń z punktu widzenia ewentualnego zniszczenia.

Pracę konstrukcji ocenia się przez analizę stanów granicznych, po przekroczeniu których zostają naruszone założenia projektu [47, 18]. Rozróżnia się stany graniczne nośności lub zniszczenia i stany graniczne użytkowania. Rozważania nasze ograniczymy do dwóch stanów granicznych zniszczenia, a mianowicie

- a) zniszczenia na skutek utraty wytrzymałości krytycznego przekroju konstrukcji polegającego na dużych odkształceniach przekraczających dopuszczalną ich wielkość na skutek zmęczenia materiału,
- b) zniszczenia lub utrudnienia użytkowania konstrukcji na skutek przekroczenia ustalonego poziomu odkształcenia lub naprężenia w przekroju krytycznym - tzw. *problem pierwszego przejścia*.

4.1 Niezawodność konstrukcji ze względu na zmęczenie materiału

W ostatnich latach obserwuje się zwiększone zainteresowanie uwzględnieniem zmęczenia materiału przy projektowaniu konstrukcji mostowych. W Japonii zaobserwowano [19], że niektóre mosty stalowe wykazały zagrożenie zniszczeniem zmęczeniowym ze względu na wzrost liczby węzłów spawanych, zwiększone natężenie ruchu i przeładowanie ciężarówek.

Pomimo wielu badań, zjawisko zmęczenia materiału nie jest jesz-

- cze w pełni wyjaśnione. Analiza wytrzymałości zmęczeniowej jest bardzo złożona i polega na badaniu następujących czynników [41]:
- wielkości, rodzaju, zakresu i charakteru zmian parametrów obciążenia w czasie,
 - koncentracji naprężeń zależnych od rodzaju i formy geometrycznej elementów i węzłów konstrukcji oraz wad wykonawczych,
 - technologii wykonania konstrukcji i związanymi z nią naprężeniami własnymi, stanem warstwy powierzchniowej i obróbką cieplną,
 - zmęczeniowych własności materiału.

Większość z tych czynników ma charakter losowy.

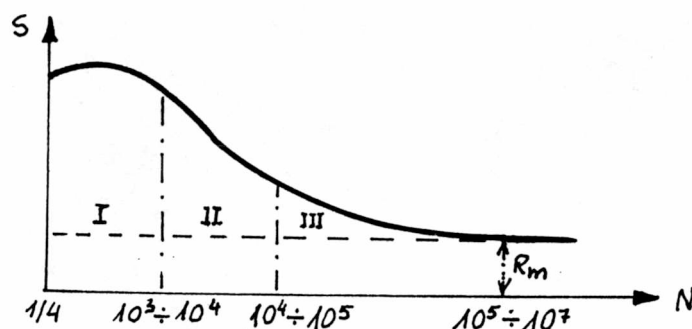
Przez granicę zmęczenia lub wytrzymałość zmęczeniową R_m rozumie się największe naprężenie $\sigma_{\max}$, przy którym próbka lub element nie ulegną zniszczeniu po osiągnięciu umownej granicznej liczby cykli N_G zmian naprężeń [31]. Umowna graniczna liczba cykli dla elementów konstrukcji stalowych wynosi $2 \cdot 10^6$. Zależność pomiędzy wytrzymałością zmęczeniową a liczbą N cykli zmian naprężeń przedstawiana jest najczęściej na wykresach w postaci tzw. krzywych Wohlera lub krzywych S-N [41, 31, 1, 48]

$$R_m = f(N, \varrho) \quad \text{lub} \quad N^* = N(S, \varrho) \quad (4.2)$$

gdzie

$$S = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad - \text{amplituda cyklu,}$$

$$\varrho = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \quad - \text{współczynnik asymetrii cyklu.}$$



Rys. 4. 1

Na rys. 4.1 pokazano pełny wykres Wohlera i zaznaczono obszary wytrzymałości: quasistatycznej - I, niskocyklowej - II, wysokocyklowej - III.

4.1.1 Problematyka trwałości zmęczeniowej

Modele zmęczenia

Istnieje wiele modeli matematycznych dotyczących związku pomiędzy wytrzymałością zmęczeniową a liczbą cykli zmian naprężeń [41, 31, 14, 73]. Opiszemy niektóre z nich.

Model klasyczny (Basquin, 1910)

$$N S^m = C \quad (4.3)$$

gdzie S - amplituda stałych naprężeń lub przedział zmian naprężeń lub maksymalna wartość naprężenia,

N - liczba cykli zmian naprężeń,

m, C - dodatnie stałe empiryczne zależne od własności materiału.

Model ten jest ogólnie prawdziwy dla dużej liczby cykli zmian naprężeń $N > 10^4$.

Ogólny model odkształceniowy

Model ten został zaproponowany przez Coffin'a i Mansona do analizy zmęczenia zarówno niskocyklowego jak i wysokocyklowego. Jest to możliwe poprzez uwzględnienie odkształceń sprężystych i plastycznych

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = \frac{\sigma_f'}{E} (2N)^b + \varepsilon_f' (2N)^c \quad (4.4)$$

gdzie $\Delta \varepsilon$ - amplituda odkształceń,

E - moduł sprężystości,

σ_f' - współczynnik wytrzymałości zmęczeniowej,

b - empiryczny wykładnik wytrzymałości zmęczeniowej,

ε_f' - współczynnik plastyczności zmęczeniowej,

c - empiryczny wykładnik plastyczności zmęczeniowej.

W przypadku, gdy znana jest średnia wartość naprężeń (wartość oczekiwana) S_o , zamiast współczynnika σ_f' należy we wzorze (4.4) wstawić $(\sigma_f' - S_o)$. W wyrażeniu (4.4) pierwszy składnik po prawej stronie, równy amplitudzie odkształceń sprężystych, dominuje przy dużej liczbie cykli zmian naprężeń, drugi składnik, równy amplitudzie odkształceń plastycznych, dominuje w obszarze dużych odkształceń przy małej liczbie cykli zmian naprężeń. Wyniki badań poka-

zały, że przy zmęczeniu niskocyklowym kontrolowanie odkształceń jest bardziej właściwe aniżeli kontrolowanie naprężeń.

Model Langer'a

W modelu tym przyjmuje się, że liczba cykli niszczących jest zależna od amplitudy odkształceń. Krzywą S-N opisuje równanie

$$S = B N^{-1/2} + S_e, \quad (4.5)$$

gdzie $S = (\Delta \varepsilon E)/2,$ (4.6)

B, S_e - stałe empiryczne zależne od własności materiału, geometrii konstrukcji, warunków środowiskowych i obciążenia.

W zakresie liniowo-sprężystym S jest aktualną amplitudą naprężeń.

Probabilistyczny model klasyczny

A.H.S. Ang i W.H. Munse przyjęli [1] dla losowych zmian naprężeń określonych funkcją gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $f_s(s)$ następujący model zależności N-S

$$\bar{N} E [S^m] = C \quad (4.7)$$

w którym $\bar{N}$ - średnia liczba cykli niszczących (średni okres użytkowania konstrukcji),

$$E [S^m] = \int_0^{\infty} S^m f_s(S) ds \quad - \quad m\text{-ty statystyczny moment naprężeń,}$$

m, C - stałe empiryczne.

Deterministyczny model zmęczenia wynikający z mechaniki pękania

Rysy w elementach konstrukcji powstające przy ich produkcji lub montażu mogą spowodować inicjację pęknięć już w pierwszym cyklu obciążenia. Nie powoduje to jednak zniszczenia konstrukcji; niebezpieczne jest dopiero osiągnięcie pewnej krytycznej wielkości rys. W takich przypadkach w analizie zagadnień zmęzeniowych stosuje się podejście wynikające z mechaniki pękania. Zajmowali się tym problemem między innymi [73]: Rolfe i Barson, Herzberg, Fuchs i Stephens.

Podstawowym parametrem w analizie pękania jest współczynnik intensywności naprężeń K opisany następującą zależnością

$$K = Y(a) S \sqrt{\pi a} \quad (4.8)$$

gdzie S - czynne naprężenie,

a - głębokość rysy dla płaszczyzny rys lub połowa szerokości dla wnikania rys,

$Y(a)$ - współczynnik korekcyjny geometrii zależny od a.

Na podstawie badań eksperymentalnych stwierdzono, że środkowy obszar szybkości narastania pęknięć da/dn i zakres zmienności współczynnika intensywności naprężeń ΔK można opisać równaniem (Erdogan - Paris)

$$da/dn = C (\Delta K)^m \quad (4.9)$$

w którym ΔK wyznacza się ze wzoru (4.8), n jest liczbą cykli obciążenia, stałe C i m są wielkościami empirycznymi zależnymi od takich parametrów jak średnie naprężenie cykliczne, otoczenie testu, szybkość cykli itp. Uwzględniając losowy charakter obciążenia i wstawiając w równaniu (4.8) zamiast naprężeń S odchylenie średniokwadratowe naprężeń ΔS , otrzymuje się średniokwadratowe odchylenie współczynnika intensywności naprężeń.

Wygodną postać zależności pozwalającej na obliczenie liczby cykli niszczących otrzymuje się całkując równanie (4.9) od początkowej wielkości rysy a_0 do krytycznej długości rysy a_c , oraz n od 0 do N. Zakładając, że $a_c \gg a_0$, $m > 2$ i $Y = \text{const}$, otrzymujemy

$$N S^m = 1 / \left[a^{(m/2)-1} \left(\frac{m}{2} - 1 \right) C Y^m \pi^{m/2} \right] \quad (4.10)$$

Probabilistyczny model zmęczenia wynikający z mechaniki pęknięcia

Zjawiskiem narastania pęknięć w czasie zajmowało się w ostatnim okresie wielu uczonych takich jak : Bołotin, Bogdanoff, Ditlevsen, Eggwertz, Hillberry, Ichikawa, Kozin, Lin, Madsen, Oh, Provan, Schueller, Sobczyk, Yang i wielu innych [33]. Do opisu tego zjawiska przyjmowali oni modele probabilistyczne [73,24,74,33,38]. Najczęściej stosowanym podejściem była randomizacja równania Erdogan-Paris (4.9).

Jeden ze sposobów randomizacji polegał na sprowadzeniu równania (4.9) do postaci

$$da/dt = X(t) Q(a) \quad (4.11)$$

przy czym wykorzystano związek pomiędzy narastaniem pęknięć w ko-

lejszych cyklach obciążenia n a szybkością narastania pęknięć w czasie

$$\frac{da}{dn} = \frac{da}{\nu^+(t) dt} \quad (4.12)$$

gdzie $\nu^+(t)$ jest wartością oczekiwaną liczby maksimumów.

Funkcję $X(t)$ występującą we wzorze (4.11) opisywano różnymi procesami stochastycznymi. Lin, Yang i Wu [38] przyjęli, że jest to szum śrutowy

$$X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k W(t, \tau_k) \quad (4.13)$$

gdzie

$N(t)$ - jednorodny proces liczący Poissona o intensywności λ ,

Z_k - losowa amplituda k -tego impulsu, niezależna ale o jednakowym rozkładzie dla różnych k ,

τ_k - chwila pojawienia się impulsu,

$$W(t, \tau_k) = \begin{cases} 1, & 0 < t - \tau_k < \Delta \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Sobczyk przyjmował, że $X(t)$ jest gaussowskim białym szumem a kumulacja uszkodzeń przebiega zgodnie z procesem dyfuzji.

Inny sposób randomizacji równania (4.9) zastosował Ditlevsen [11].

Przyjął on przyrostowe równanie dla pojedynczego cyklu naprężeń

$$\Delta a_1 = C (\Delta K_1)^m \quad (4.14)$$

jako reprezentację regresji

$$\log (\Delta a_1) = \log C + m \log (\Delta K_1) + R(\Delta a_1, a_1) \quad (4.15)$$

Przyjmując, że $A = C (\Delta K)^m$, $x = \Delta a/A$ Ditlevsen założył, że $R(x, a)$ jest procesem gaussowskim o niezależnych przyrostach i średniej 0. Zmienna losowa x jest czasem pierwszego przekroczenia, a równanie

$$\sqrt{x} \log x = B(x, a) \quad (4.16)$$

opisuje ruch Browna. Autor wykazał, że gęstość rozkładu prawdopodobieństwa liczby cykli N_a do osiągnięcia długości rysy a wynosi

$$p(n, a) = \frac{a}{n \sqrt{\sigma_n}} \Phi \left(\frac{n - a}{\sqrt{\sigma_n}} \right), \quad n > 0. \quad (4.17)$$

Losowe modele naprężeń

W ogólnym przypadku amplituda naprężeń S jest zmienną losową, której gęstość rozkładu prawdopodobieństwa przyjmowano jako [14]:

1. rozkład Rayleigha - G.C. Schilling

$$F_S(S) = 1 - \exp[-1/2 (s / S_0)^2], \quad (4.18)$$

$s \gg 0$, S_0 - parametr statystyczny, $F_S(S)$ - dystrybanta;

2. rozkład beta - A.H.S. Ang, W.H. Munse, opisany funkcją gęstości rozkładu prawdopodobieństwa

$$f_S(s) = s^{q-1} (S_0 - s)^{r-1} / B(q, r) S_0^{q+r-1}, \quad (4.19)$$

$0 \leq s \leq S_0$, S_0 , q , r - parametry rozkładu,

$B(q, r) = \Gamma(q) \Gamma(r) / \Gamma(q+r)$ - funkcja beta;

3. wielomian - Yamada, Albrecht

$$f_S(s) = 12 (1-s)^3 + 0.07, \quad (4.20)$$

$0.25 \leq s \leq 1.0$, $s = S / S_{\max}$ - znormalizowana zmiana naprężeń;

4. rozkład logarytmnormalny

$$E[S^m] = \bar{S}^{-m} (1 + \nu_S^2)^{0.5 m(m-1)}, \quad (4.21)$$

$\bar{S}$ - średnia wartość naprężeń, ν_S - wariancja naprężeń.

Jeśli proces naprężeń jest niestacjonarny; można go modelować:

- ciągiem stacjonarnych procesów gaussowskich,
- rozkładem długiego okresu szczytów, jeśli efekty ciągu mogą być pominięte.

Hipotezy kumulacji uszkodzeń

Ważnym elementem badania niezawodności konstrukcji ze względu na zmęczenie materiału jest właściwe przyjęcie modelu kumulacji uszkodzeń. W literaturze wyróżnia się szereg hipotez sumowania uszkodzeń ([31,14]) np.:

I. Liniowa hipoteza sumowania uszkodzeń tzw. *hipoteza Palmgren - Minera* (1924, 1945)

Warunek zniszczenia ma postać

$$\Delta_{PM} = \sum \Delta \xi = \sum \frac{n_{\xi}}{N_{\xi}} = 1 \quad (4.22)$$

gdzie $\Delta \xi = \frac{n_{\xi}}{N_{\xi}}$ - uszkodzenie odpowiadające n_{ξ} cyklom przy amplitudzie ξ , $n_{\xi} < N_{\xi}$,

N_{ξ} - liczba cykli powodująca zniszczenie ze względu na zmęczenie przy amplitudzie naprężeń równej ξ .

Postać całkową tej hipotezy podał Bołotin.

$$\Delta_{PM} = \int \frac{dn}{N} = 1 \quad (4.23)$$

II. Modyfikacje liniowej hipotezy uszkodzeń

a) modyfikacja S. W. Serensena

$$\Delta_S = \sum_{i=1}^q \frac{n_{\xi}}{N_{\xi}} = a_S, \quad (4.24)$$

gdzie
$$a_S = \frac{S_{\max} \zeta - k R_m}{S_{\max} - k R_m}, \quad (4.25)$$

R_m - granica zmęczenia,

$S_{\max}$ - maksymalna amplituda naprężeń w przebiegu ich zmian,

k - liczba określająca najmniejszą wartość naprężeń mogących wywołać uszkodzenie; przyjmuje się $k = 0.4 \div 0.6$,

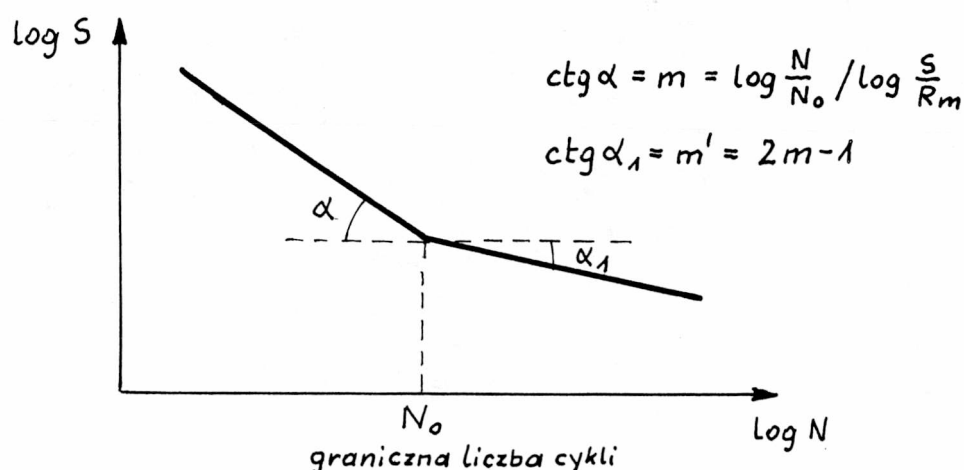
ζ - współczynnik wypełnienia przebiegu równy:

$$\zeta = \frac{1}{S_{\max}} \sum_i S_i t_i \quad (4.26)$$

$t_i = \frac{n_i}{N_c}$ - względna liczba cykli, albo względny czas działania amplitudy S_i w przebiegu,

N_c - całkowita liczba cykli;

b) modyfikacja E. Haibacha uwzględniająca zmniejszanie się wytrzymałości zmęczeniowej w miarę narastania uszkodzeń, jak na rys. 4.2.



Rys. 4.2

III. Hipotezy nieliniowe

a) hipoteza Cortana-Dolana (1956), całkowite uszkodzenie opisane jest wzorem

$$\Delta_{CD} = \sum_{i=1}^q \left(\frac{n_i}{N_i} \right)^{q(S)} \quad (4.27)$$

w którym $q(S)$ jest wykładnikiem zależnym od wartości naprężeń na poszczególnych i -tych poziomach w przebiegu. Doświadczalne określenie tego wykładnika jest bardzo pracochłonne. W celu uniknięcia tej niedogodności wprowadzono pojęcie zastępczego wykresu zmęczeniowego [14, 31, 48] o wykładniku q części pochylonej różniącym się od wykładnika m krzywej pierwotnej. Wykładnik ten wynosi zwykle $q = (0.8 \div 0.9) m$, ale w niektórych przypadkach może być również większy od m .

IV. Probabilistyczne modele kumulacji uszkodzeń

Najczęściej stosowanym probabilistycznym modelem kumulacji uszkodzeń są łańcuchy Markowa [33, 59, 73].

Sobczyk w pracy [59] opisał miarę uszkodzenia zmęczeniowego proce-

sem stochastycznym $X(t, \gamma)$. Konstrukcja (próbka) może w czasie t znaleźć się w jednym z $n+1$ stanów $E_0, E_1, \dots, E_n = E^*$ odpowiadających przyrostom uszkodzenia zmęczenia. Stan E_0 jest stanem idealnym, stan E^* jest stanem granicznym odpowiadającym zniszczeniu konstrukcji. Możliwe jest tylko przejście od stanu niższego do najbliższego stanu wyższego

$$E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \dots \rightarrow E_n = E^* \quad (4.28)$$

Jeżeli w czasie t konstrukcja jest w stanie E_k , przy czym przez $P_k(t)$ będziemy oznaczać prawdopodobieństwo znajdowania się w stanie k , to prawdopodobieństwo przejścia w czasie $(t, t+\Delta t)$ do stanu E_{k+1} wynosi $q_k \Delta t + O(\Delta t)$, a przejście do innych stanów $O(\Delta t)$. Możemy napisać

$$P_k(t+\Delta t) = P_k(t) (1 - q_k \Delta t) + P_{k-1}(t) q_{k-1} \Delta t + O(\Delta t) \quad (4.29)$$

Po pewnych przekształceniach otrzymuje się następujący układ równań różniczkowych

$$\frac{d P_0(t)}{dt} = - q_0 P_0(t), \quad (4.30)$$

$$\frac{d P_k(t)}{dt} = - q_k P_k(t) + q_{k-1} P_{k-1}(t), \quad k \geq 1$$

z warunkami początkowymi $t = 0$, stan E_0 , $P_0(0) = 1$. Jest to czysty proces urodzin. Z rozwiązania powyższego układu równań otrzymuje się

$$P_0(t) = e^{-q_0 t} > 0. \quad (4.31)$$

Dla danego q_k można znaleźć rekursywną zależność

$$P_k(t) = q_{k-1} e^{-q_k t} \int_0^t e^{-q_k x} P_{k-1}(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.32)$$

Jeżeli $k = n$, otrzymujemy prawdopodobieństwo zniszczenia konstrukcji w czasie t .

4.1.2 Sformułowanie problemu

W dalszych rozważaniach przyjęto:

- model obciążenia mostu ruchem drogowym i model konstrukcji jak w punkcie 3.4,
- klasyczny model zmęczenia w ujęciu probabilistycznym - równanie (4.7),
- liniową hipotezę kumulacji uszkodzeń - zniszczenie konstrukcji nastąpi, gdy uszkodzenie całkowite Δ osiągnie pewną wartość a ,
 $\Delta = a$ w szczególnym przypadku dla hipotezy Palmgren-Minera
 $\Delta = 1$.

Analogicznie jak w [37,58] przyjęto, że wartość oczekiwana uszkodzenia belki, spowodowanego wymuszeniem losowym, przypadająca na jednostkę czasu wynosi:

$$E[\Delta(x,t)] = C^{-1} E[M_T(x,t)] \int_{-\infty}^{\infty} \xi^m f_z(\xi, x, t) d\xi \quad (4.33)$$

gdzie

C, m - stałe materiałowe z równania (4.7),

$f_z(\xi, x, t)$ - funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa wielkości ekstremów (pików) naprężeń $S(x, t)$,

$E[M_T(x, t)]$ - wartość oczekiwana ogólnej liczby pików naprężeń w jednostce czasu niezależnie od ich wielkości.

Funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa wielkości pików naprężeń można wyznaczyć ze wzoru [37]

$$f_z(\xi, x, t) = - E^{-1}[M_T(x, t)] \int_{-\infty}^0 \ddot{S} p_3(\xi, 0, \ddot{S}, x, t) d\ddot{S} \quad (4.34)$$

w którym przyjęto następujące oznaczenie

$$p_3(S, \dot{S}, \ddot{S}, x, t) = p_{\dot{S}\ddot{S}}(S, \dot{S}, \ddot{S}, x, t)$$

Wartość oczekiwaną ogólnej liczby pików można obliczyć następująco

$$E[M_T(x, t)] = - \int_{-\infty}^{\infty} dS \int_{-\infty}^0 \ddot{S} p_3(S, 0, \ddot{S}, x, t) d\ddot{S} \quad (4.35)$$

Występującą w powyższych wyrażeniach trójwymiarową funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa naprężeń, prędkości zmian naprężeń

i przyspieszenia zmian naprężeń - $p_3(S, \dot{S}, \ddot{S}, x, t)$ - przy przyjętym modelu obciążenia ruchem drogowym opisują związki analogiczne do (3.59) i (3.60)

$$p_{S, \dot{S}, \ddot{S}}(S, \dot{S}, \ddot{S}, x, t | J) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-i \left[Q_1 S + Q_2 \dot{S} + Q_3 \ddot{S} \right] \right] \psi_{Q_1 Q_2 Q_3}(Q_1, Q_2, Q_3, x, t | J) dQ_1 dQ_2 dQ_3, \quad (4.36)$$

$$\psi_{Q_1 Q_2 Q_3}(Q_1, Q_2, Q_3, x, t | J) = \exp \left\{ \sum_{j=1}^k \left\{ \int_0^t \int_0^{\infty} \exp \left[i A(\tau, \varepsilon_j) \left(Q_1 H(x, t-\tau, \varepsilon_j, T_j | J) + Q_2 \dot{H}(x, t-\tau, \varepsilon_j, T_j | J) + Q_3 \ddot{H}(x, t-\tau, \varepsilon_j, T_j | J) \right) \right] \right. \right. \\ \left. \left. \zeta_j \left[A(\tau, \varepsilon_j) \right] f_1(\tau, \varepsilon_j) dA d\tau - \int_0^t f_1(\tau, \varepsilon_j) d\tau \right\} \right\} \quad (4.37)$$

gdzie funkcja wpływu naprężeń $H(x, t-\tau, \varepsilon_1, T_1 | J)$ opisana jest wzorem (3.37).

Trwałość zmęzeniową, rozumianą jako czas potrzebny do osiągnięcia całkowitego uszkodzenia o wartości a , obliczymy ze wzoru

$$T = E^{-1}[\Delta(x, t)] \quad a \quad (4.38)$$

Jeśli proces stochastyczny opisujący odpowiedź konstrukcji jest procesem wąskopasmowym, można funkcję gęstości rozkładu wielkości pików naprężeń aproksymować następującym wyrażeniem [37]

$$f_z(\xi, x, t) \approx -E[M_T(x, t)]^{-1} \frac{d}{d\xi} \int_0^{\infty} \dot{S} p_{SS}(\xi, \dot{S}) d\dot{S} \quad (4.39)$$

a wartość oczekiwaną ogólnej liczby pików

$$E[M_T(x, t)] \approx \int_0^{\infty} \dot{S} p_{SS}(0, \dot{S}, x, t) d\dot{S} \quad (4.40)$$

Występującą w (4.40) dwuwymiarową funkcję gęstości rozkładu naprężeń i prędkości ich zmian otrzymuje się z analogicznych związków jak (3.53) ÷ (3.58), a mianowicie

$$p_{SS}(S, \dot{S}, x, t) = \left\{ 2\pi \left[K_{2,0} K_{0,2} - K_{1,1}^2 \right]^{1/2} \right\}^{-1} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\alpha_1^2 - 2e\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 \right) \right] * \\ * \frac{1}{(1-\beta_{11}^2)^{1/2}} \left[1 + \frac{1}{6} \left(\beta_{30} H_{30} + 3\beta_{31} H_{21} + 3\beta_{12} H_{12} + \beta_{03} H_{03} \right) + \dots \right] \quad (4.41)$$

gdzie

$$\alpha_1 = (\sigma - K_{1,0}) K_{2,0}^{-1/2},$$

$$\alpha_2 = (\dot{\sigma} - K_{0,1}) K_{0,2}^{-1/2},$$

$$\beta_{m,n} = \frac{K_{m,n}}{(K_{2,0}^m K_{0,2}^n)^{1/2}}, \quad e = \beta_{11}, \quad (4.42)$$

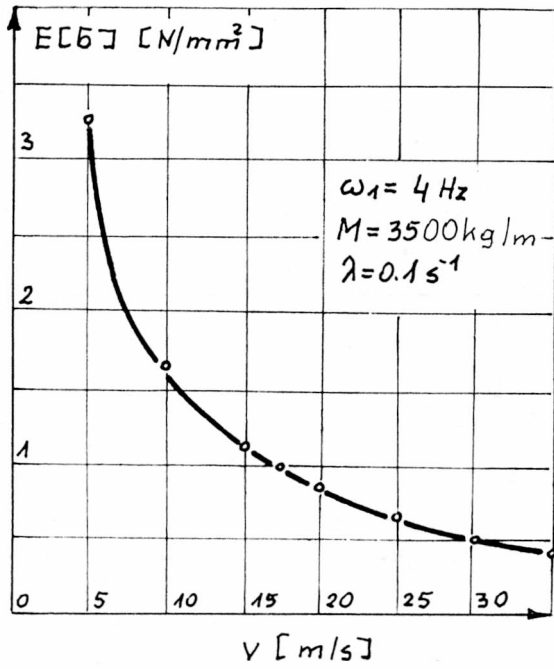
wartości H_{mn} są opisane wzorem (3.58),

$$K_{m,n} = K_{m,n}(x, t) = \sum_{j=1}^k E[A^{m+n}(r)] \int_0^t H(x, t-\tau, \varepsilon_j, T_j | J) \\ H(x, t-\tau, \varepsilon_j, T_j | J) f_1(\tau, \varepsilon_j) d\tau \quad (4.43)$$

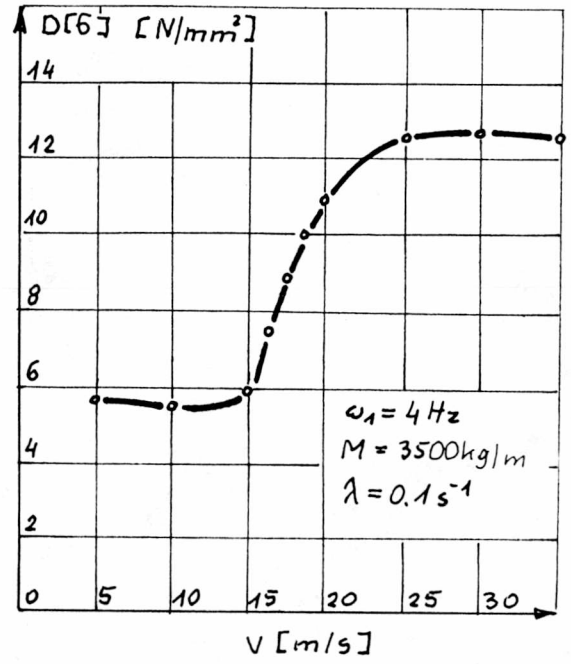
4.1.3 Przykłady obliczeń

Z wykresów gęstości widmowej ugięcia belki mostowej (rys. 3.16) wynika, że proces odpowiedzi konstrukcji można traktować jako proces wąskopasmowy. Wobec tego, przy obliczaniu trwałości zmęczeniowej mostu wykorzystano uproszczone związki określające wartość oczekiwaną ogólnej liczby pików naprężeń - (4.40) - i gęstość rozkładu prawdopodobieństwa wielkości pików naprężeń - (4.39). W obliczeniach przyjęto graniczną wartość kumulacji uszkodzeń równą $a = 1$, jak dla hipotezy Palmgren - Minera. Ze wzoru (4.33) obliczono wartość oczekiwaną uszkodzenia Δ , a ze wzoru (4.38) czas T życia mostu ze względu na zmęczenie materiału.

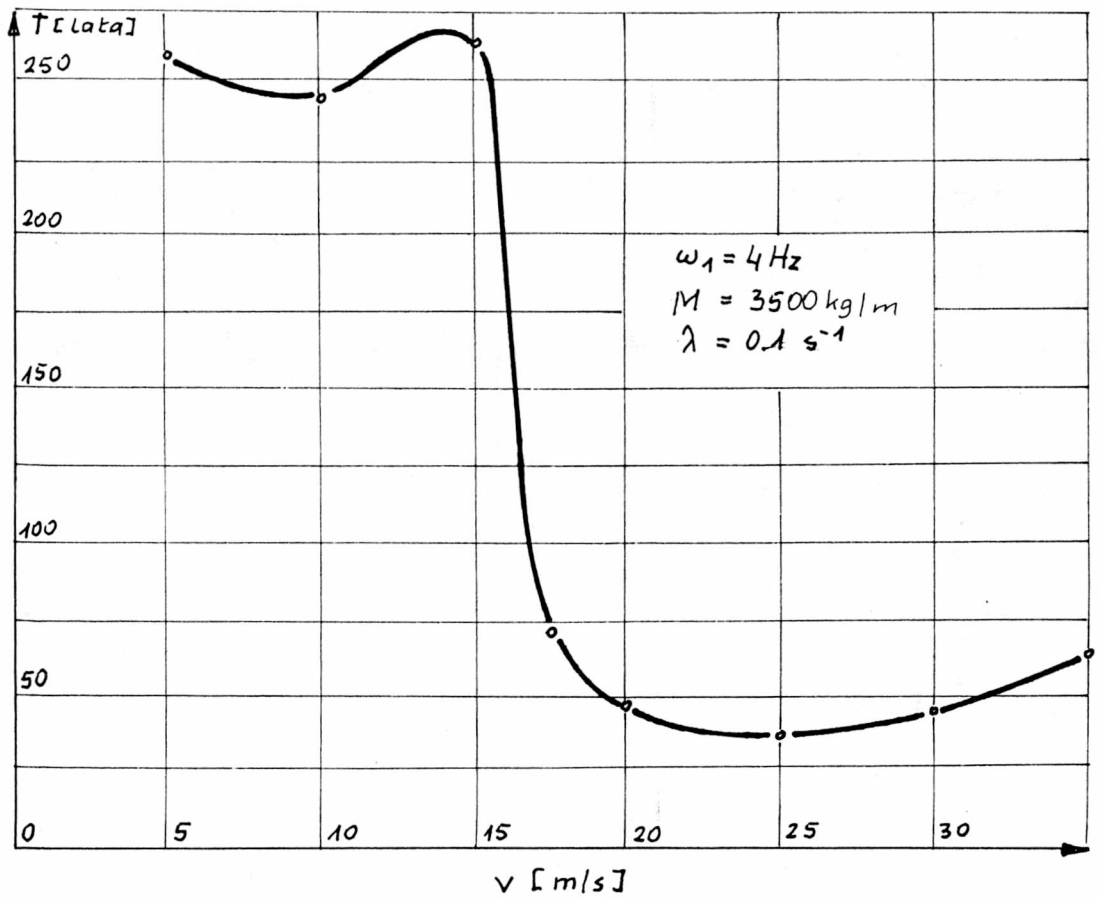
W celu zilustrowania powiązania trwałości zmęczeniowej mostu T z odpowiedzią konstrukcji na obciążenie ruchem drogowym, obliczono wartości oczekiwane naprężeń w środku rozpiętości belki i wartości wariancji naprężeń przy różnych prędkościach poruszania się pojazdów. Odpowiednie wykresy przedstawiono na rysunkach 4.3 i 4.4. Na rys. 4.5 pokazano w postaci wykresu zależność trwałości zmęczeniowej T od prędkości poruszania się pojazdów przy stałej intensywności zgłoszeń.



Rys. 4.3



Rys. 4.4



Rys. 4.5

Jak wynika z porównania wykresów na rysunkach 4.4 i 4.5, przy gwałtownym wzroście wariancji naprężenia równie gwałtownie, przy tej samej prędkości poruszania się pojazdów, maleje czas życia konstrukcji ze względu na zmęczenie. Wniosek ten jest zgodny z wynikami badań nad matematycznymi modelami trwałości zmęczeniowej w warunkach losowego złożonego stanu naprężenia opisanymi w [39].

4.2 Niezawodność konstrukcji ze względu na pierwsze przekroczenie

Jednym z prostszych modeli zniszczenia konstrukcji jest zniszczenie przez przekroczenie określonego granicznego poziomu przemieszczeń lub naprężeń. Ten typ zniszczenia jest często rozpatrywany w odniesieniu do niezawodności konstrukcji budowlanych [6,12,37,47]. Miarą niezawodności jest w tym przypadku czas do wystąpienia pierwszego przekroczenia poziomu granicznego. Od czasu opublikowania pierwszych prac dotyczących tego typu modelu trwałości konstrukcji przez S.O. Rice'a powstało szereg innych prac poświęconych sposobom określania rozkładów prawdopodobieństwa czasu do pierwszego przekroczenia. W pracach [35,49,4] rozpatrzono problem w sposób ogólny, prace [10,53,68] dotyczą przypadków, kiedy proces odpowiedzi konstrukcji na losowe wymuszenie jest procesem stacjonarnym, a prace [9,23,25,36,51,72] dotyczą niestacjonarnych procesów odpowiedzi konstrukcji. Jedną z niewielu prac, w których uwzględniono wpływ zmęczenia i starzenia się materiału konstrukcji na trwałość ze względu na pierwsze przekroczenie jest praca J.N. Yanga i E. Herra [71].

Analizowany problem jest na tyle skomplikowany, że dokładne jego rozwiązanie jest znane tylko dla niewielu typów procesów stochastycznych opisujących odpowiedź konstrukcji poddanej losowemu wymuszeniu. Najczęściej do rozwiązania zadania stosuje się różnego rodzaju aproksymacje lub symulację komputerową.

Problem "pierwszego przejścia" można zdefiniować następująco [53]:

znaleźć prawdopodobieństwo $P(t)$ tego, że proces stochastyczny $X(t)$ opisujący odpowiedź konstrukcji na losowe obciążenie (proces opisujący przemieszczenia lub naprężenia) co najmniej raz przekroczy graniczną wartość "a" (wyjdzie poza obszar bezpieczny) w przedziale czasu $(0,t)$. Związana z tym prawdopodobieństwem funkcja niezawodności $R(t)$ (funkcja przetrwania) opisana równaniem (4.1) jest prawdopodobieństwem warunkowym zależnym od warunków początkowych - zakłada się, że w chwili początkowej $t = 0$ konstrukcja znajdowała się w obszarze bezpiecznym.

Funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $p_1(t)$ czasu do pierwszego przekroczenia T definiuje się jako

$$p_1(t) = \frac{dP(t)}{dt} = - \frac{dR(t)}{dt} \quad (4.44)$$

skąd

$$P(T) = \int_0^T p_1(t) dt. \quad (4.45)$$

Momenty statystyczne funkcji T można obliczyć ze wzoru

$$M_n = E[T^n] = \int_0^{\infty} t^n p_1(t) dt \quad (4.46)$$

Czasami przy analizie problemu pierwszego przejścia wprowadza się tzw. funkcję ryzyka $h(t)$ [47], która jest prędkością z jaką rośnie zawodność systemu w stosunku do jego niezawodności. Definiuje się ją następująco:

$$h(t) = \frac{dP(t)/dt}{R(t)} = \frac{p_1(t)}{1 - P(t)} \quad (4.47)$$

Funkcja ryzyka $h(t)$ bywa również nazywana intensywnością prawdopodobieństwa lub liczbą przekroczeń w jednostce czasu.

Trwałość oczekiwana $\bar{T}$ można obliczyć z funkcji niezawodności $R(t)$ [47] za wzoru:

$$\bar{T} = \int_0^{\infty} R(t) dt \quad (4.48)$$

4.2.1 Problematyka związana z niezawodnością ze względu na pierwsze przekroczenie

Rozróżnia się następujące typy ograniczeń obszaru bezpiecznego [68]:

- ograniczenie jednostronne

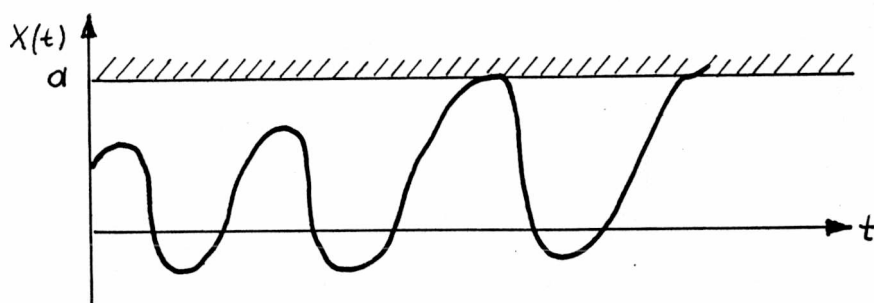
$X(t) = a$, a może przyjmować wartości dodatnie lub ujemne,

- ograniczenie dwustronne

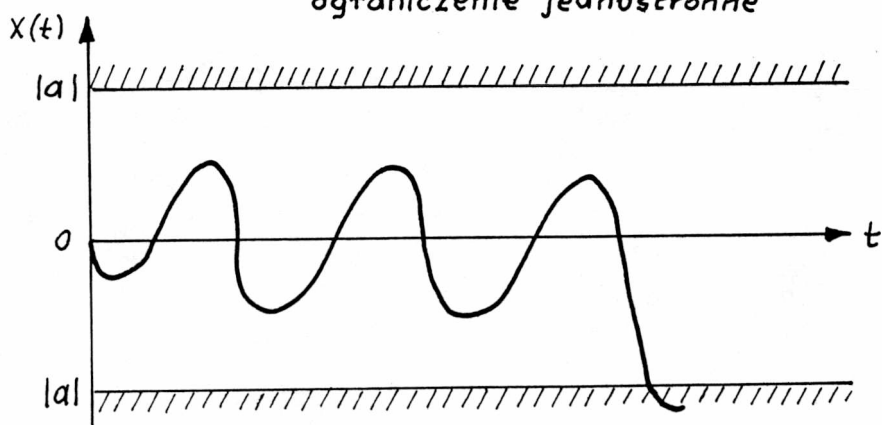
$|X(t)| = a$,

- ograniczenia poprzednich typów nałożone na obwiednię procesu.

Schematycznie typy ograniczeń pokazano na rys. 4.6.



ograniczenie jednostronne



ograniczenie dwustronne

Rys. 4.6

Metody rozwiązywania problemu pierwszego przejścia

I. Aproxymacja rozwiązania szeregiem naprzemiennym Rice'a

Funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa czasu do pierwszego przekroczenia poziomu granicznego $p_1(t)$ można opisać nieskończonym szeregiem [49,51]:

$$p_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} Q_n(t) \quad (4.49)$$

w którym

$$Q_n(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} p(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t) dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1} \quad (4.50)$$

$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t$

W równaniu (4.50) $p(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n$ jest prawdopodobieństwem, że przekroczenie poziomu nastąpi w każdym przedziale czasu $dt_1, dt_2, \dots, dt_n$.

Obliczenie Q_n dla dużych wartości n jest bardzo skomplikowane, dlatego do aproksymacji $p_1(t)$ stosuje się szereg ucięty

$$p_1(t) \approx \sum_{n=1}^m (-1)^{n+1} Q_n(t) \quad (4.51)$$

Szereg ten ma tę właściwość, że przyjęcie nieparzystej liczby wyrazów szeregu daje oszacowanie rozwiązania od góry, przyjęcie parzystej liczby wyrazów - oszacowanie od dołu, wobec tego

- pierwsze oszacowanie od góry

$$p_1(t) \cong Q_1(t) \quad (4.52)$$

- pierwsze oszacowanie od dołu

$$p_1(t) \cong Q_1(t) - Q_2(t) \quad (4.53)$$

- drugie oszacowanie od góry

$$p_1(t) \cong Q_1(t) - Q_2(t) + Q_3(t) \quad (4.54)$$

W szczególnym przypadku, gdy założymy, że przekroczenia tworzą proces Poissona, zachodzi związek

$$p(t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{r=1}^n p(t_r) \quad (4.55)$$

równanie (4.50) przyjmuje postać

$$Q_n(t) = \frac{p(t)}{(n-1)!} \left\{ \int_0^t p(\tau) d\tau \right\}^{n-1} \quad (4.56)$$

a równanie (4.49) znana postać

$$p_1(t) = p(t) \exp \left\{ - \int_0^t p(\tau) d\tau \right\} \quad (4.57)$$

We wzorze tym $p(t)$ jest intensywnością prawdopodobieństwa zdefiniowaną wzorem (4.47).

Vanmarcke w pracy [68] podał następującą postać wyrażenia pozwalającego obliczyć prawdopodobieństwo $R(t)$ nieprzekroczenia poziomu krytycznego w przedziale czasu $(0, t)$

$$R(t) = A \exp(-\alpha t) \quad (4.58)$$

gdzie A jest prawdopodobieństwem wystartowania poniżej poziomu krytycznego, α jest tzw. granicznym współczynnikiem zawodności.

Ograniczenie jednostronne

Prawdopodobieństwo, że proces stochastyczny $X(t)$ przekroczy poziom krytyczny "a" z dodatnim nachyleniem (tzn. od wewnątrz obszaru bezpiecznego na zewnątrz) w przedziale $(t, t+dt)$ oznaczmy przez $\nu(+, t)dt$

$$\nu(+, t) = \int_0^{\infty} |\theta| p(a, \theta) d\theta \quad (4.59)$$

we wzorze tym $p(\xi, \theta)$ jest punktową funkcją gęstości procesów $X(t)$ i $\dot{X}(t)$ w czasie t .

Przy ograniczeniu jednostronnym zachodzi

$$p(t) = \nu(+, t) \quad (4.60)$$

można więc zapisać

$$\begin{aligned} \nu(+, t_1; +, t_2; \dots; +, t_n) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} |\theta_1 \theta_2 \dots \theta_n| \\ &\quad p(a, a, \dots, a, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n \end{aligned} \quad (4.61)$$

W szczególnym przypadku, gdy proces opowiedzi konstrukcji jest stacjonarnym procesem Gaussa, zmienne losowe x i $\dot{x}$ są niezależne, z równania (4.58) otrzymujemy

$$\nu(+, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_x}{\sigma_{\dot{x}}} \exp \left\{ - \frac{(a - E[X(t)])^2}{2 \sigma_x^2} \right\} \quad (4.62)$$

Analogiczny dużo bardziej złożony związek dla niestacjonarnych procesów normalnych $X(t)$ i $\dot{X}(t)$ podano w [49].

Ograniczenie dwustronne

Oznaczmy bezwzględną wartość poziomu krytycznego przez a . Jeśli $X(t)$ przekracza poziom z wewnątrz obszaru bezpiecznego na zewnątrz w czasie dt , to musi to być dodatnie przekroczenie dodatniej wartości ograniczenia a lub ujemne przekroczenie ujemnej wartości ograniczenia a . Te dwa zdarzenia wzajemnie się wykluczają, można więc napisać

$$p(t) = \nu(+, t) + \nu(-, t) \quad (4.63)$$

oraz

$$p(t_1, t_2, \dots, t_n) = \sum \nu(\pm, t_1; \pm, t_2; \dots; \pm, t_n) \quad (4.64)$$

sumowanie dotyczy każdej możliwej kombinacji znaków.

W pracy [49] zastosowano przedstawiony tok postępowania do obliczenia trzech pierwszych oszacowań funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa czasu pierwszego przekroczenia jednostronnego i dwustronnego ograniczenia przemieszczenia słabo tłumionego pojedynczego oscylatora wzbudzonego białym szumem.

II. Wykorzystanie własności procesu Markowa przy aproksymacji trwałości konstrukcji ze względu na pierwsze przekroczenie

W pracach [4, 36, 52, 53, 60, 68, 72] przy szacowaniu niezawodności konstrukcji ze względu na pierwsze przejście poziomu krytycznego wykorzystano własności procesu Markowa. W szczególnym przypadku, gdy konstrukcję można modelować oscylatorem, a wymuszenie jest procesem typu biały szum, przyjmuje się, że wartości procesu odpowiedzi konstrukcji $X(t_1)$ oraz jego prędkości $\dot{X}(t_1)$ w chwilach t_1 tworzą dwupunktowy proces Markowa opisany równaniem dyfuzji lub równaniem Fokkera-Plancka-Kołmogorowa (FPK) [52]. Wykorzystując równanie FPK otrzymuje się równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych (tzw. odwrotne równanie Kołmogorowa - BK), po rozwiązaniu którego można obliczyć prawdopodobieństwo zniszczenia przez pierwsze przekroczenie. Jeśli nie interesuje nas gęstość rozkładu czasu pierwszego przejścia a tylko jego momenty statystyczne, można wyprowadzić prostsze związki tzw. uogólnione równania Pontriagina-Vitta. Ten sposób rozwiązania problemu pierwszego przejścia przedstawiono w [4] i uogólniono na układy o wielu stopniach swobody.

Własności procesu Markowa wykorzystano nie tylko do procesu odpowiedzi konstrukcji, ale również w odniesieniu do jego obwiedni. W pracy [52] przy rozwiązywaniu problemu pierwszego przejścia dla nieliniowego oscylatora wzbudzonego losowo przyjęto, że obwiednia energii jest jednowymiarowym procesem Markowa.

4.2.2 Sformułowanie problemu

Przyjęto model konstrukcji i obciążenia jak w punkcie 3.4. Wykorzystano uogólnioną formułę Rice'a (4.59) (por. [37]) na obliczenie średniej liczby przekroczeń poziomu a w jednostce czasu przez maksymalną wartość przemieszczenia belki [57]:

$$\bar{\nu}_+(a, x, t | J) = \int_0^{\infty} \dot{w}(x, t | J) p_{ww}(a, \dot{w}, x, t | J) d\dot{w} \quad (4.59a)$$

Dwuwymiarową funkcję gęstości ugięcia i jego prędkości można obliczyć ze wzoru (3.53).

Przy założeniu niezależności przekroczeń niezawodność $R(t)$ obliczymy ze wzoru analogicznego do (4.58)

$$R(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \bar{\nu}_+(a, x, \tau | J) d\tau \right\} \quad (4.65)$$

W przypadku, gdy $\bar{\nu}_+(a, x, t | J) \ll 1$ można przyjąć, że

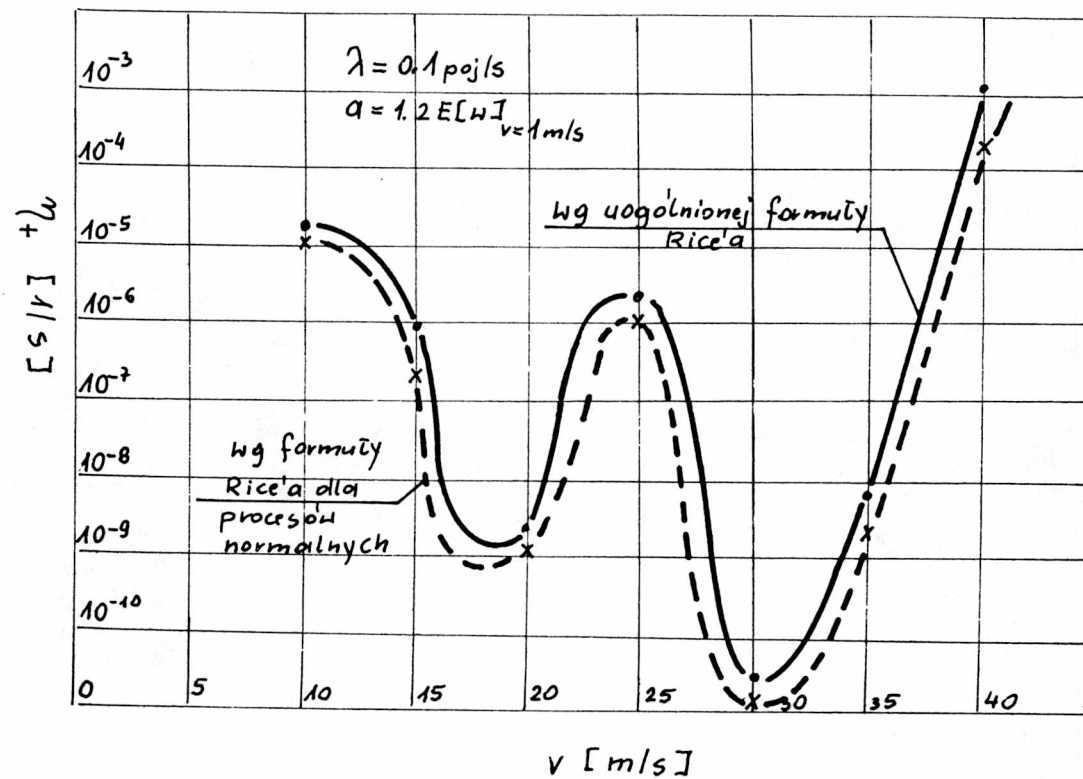
$$R(t) \approx 1 - \int_0^t \bar{\nu}_+(a, x, \tau | J) d\tau \quad (4.66)$$

Przyjęcie niezależności pomiędzy przekroczeniami w przypadku odpowiedzi konstrukcji w postaci procesu wąskopasmowego nie jest, jak to wynika z [37], w pełni uzasadnione, daje jednak oszacowanie po stronie bezpiecznej [68].

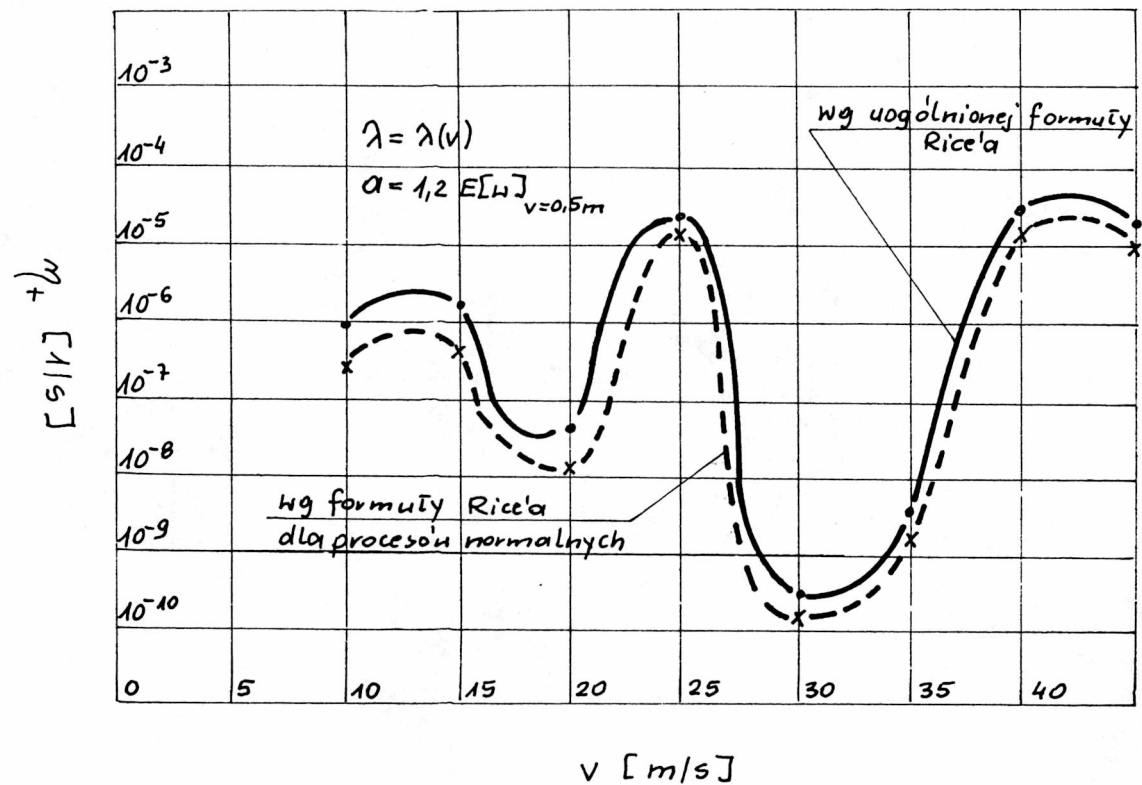
4.2.3 Przykłady obliczeń

Dla belki mostowej o parametrach jak w punkcie 3.4 obciążonej ruchem drogowym obliczono średnią liczbę przekroczeń w jednostce czasu poziomemu krytycznego ugięcia ze wzoru (4.59a). Na rysunku 4.7 przedstawiono wykres tych wartości w środku rozpiętości belki w zależności od prędkości poruszania się pojazdów, przy stałej intensywności zgłoszeń a na rysunku 4.8 przy zmiennej, teoretycznej ($\lambda = \lambda(V)$ wg wzoru (2.1)) intensywności zgłoszeń. Wyniki porównano z wartościami obliczonymi wg (4.62), przy założeniu, że ugięcie i jego prędkość są stacjonarnymi procesami Gaussa.

Z porównania otrzymanych wykresów wynika, że przyjęcie stałej intensywności zgłoszeń przy różnych prędkościach poruszania się pojazdów daje dla dużych prędkości duże wartości średniej liczby przekroczeń, co nie jest zgodne z rzeczywistością.



Rys. 4.7



Rys. 4.8

5. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Przedmiotem rozprawy były drgania stochastyczne mostu obciążonego ruchem drogowym oraz ocena jego niezawodności z punktu widzenia zniszczenia na skutek zmęczenia materiału lub przekroczenia ustalonego, granicznego poziomu przemieszczeń (naprężeń).

Celem pracy było wykonanie analizy drgań stochastycznych dźwigara mostowego, wywołanych ruchem drogowym i uzyskanie w miarę pełnego probabilistycznego opisu odpowiedzi konstrukcji (przemieszczeń, naprężeń) oraz zastosowanie otrzymanych wyników do określenia niezawodności mostu w wyżej wspomnianym sensie.

Ze względu na złożoność zagadnienia, w pracy ograniczono się do przyjęcia prostego modelu mostu w postaci swobodnie podpartej belki Eulera, skupiając większość uwagi na modelu obciążenia ruchem drogowym i analizie dynamiki i problemach związanych z oceną niezawodności.

W pracy wyróżniono trzy główne części.

Część pierwsza dotyczyła literaturowego przeglądu modeli ruchu drogowego możliwych do zastosowania w analizie pracy mostów oraz probabilistycznych i półprobabilistycznych modeli obciążeń. Ruch drogowy jest w swej naturze losowy, co wynika z przypadkowości chwil pojawiania się pojazdów na prześle mostu oraz różnorodności konstrukcji i ciężaru pojazdów. Z tych powodów autorka wybrała, jako najwierniej opisujące rzeczywistość, probabilistyczne modele ruchu a spośród nich: strumień ruchu w postaci ogólnego punktowego procesu stochastycznego oraz strumień ruchu Poissona i Erlanga.

Część druga pracy - najobszerniejsza - dotyczyła analizy drgań stochastycznych eulerowskiej belki mostowej wymuszonych ruchem drogowym, modelowanym ogólnym punktowym procesem stochastycznym.

Pojedynczy pojazd modelowano siłą skupioną lub grupą sił skupionych o losowych wartościach. W potoku ruchu wyróżniono rozłączne klasy pojazdów poruszających się po moście z różnymi, deterministycznymi prędkościami. Przyjęto, że chociaż parametry belki belki są deterministyczne, to nie są one jednoznacznie ustalone lecz ich wartości należą do pewnego przedziału zmienności. Przy takich za-

łożeniach autorka wyprowadziła związki do obliczenia losowego przemieszczenia (naprężenia), jego pierwszej i drugiej pochodnej po czasie oraz ich wartości oczekiwanych i funkcje korelacyjnych. Po uproszczeniu modelu ruchu do procesu Poissona, wyprowadzone zostały też wzory pozwalające na obliczenie funkcji rozkładu gęstości prawdopodobieństwa: jednowymiarowej - przemieszczenia p_w , dwuwymiarowej - przemieszczenia i jego prędkości p_{ww} oraz trójwymiarowej - przemieszczenia oraz jego pierwszej i drugiej pochodnej po czasie p_{www} . Analogiczne związki otrzymano dla naprężeń. Ponieważ strumień zgłoszeń Poissona jest dobrym modelem ruchu drogowego jedynie dla małego lub średniego natężenia ruchu, autorka wyprowadziła formuły umożliwiające obliczenie wartości oczekiwanej i funkcji korelacyjnej przemieszczenia belki przy przyjęciu strumienia zgłoszeń Erlanga rzędu drugiego. Otrzymano również zależności umożliwiające analizę wpływu korelacji pomiędzy zgłoszeniami pojazdów na wartości odpowiedzi dźwigara mostowego.

Zastosowany w pracy algorytm analizy drgań stochastycznych zilustrowano przykładami obliczeniowymi. Przyjęto następujące dodatkowe uproszczenia zmniejszające złożoność obliczeń: wszystkie pojazdy w poissonowskim strumieniu zgłoszeń należą do tej samej klasy i poruszają się po moście z tą samą prędkością, parametry zaś fizyczne i geometryczne mostu są ustalone. Na wykresach przedstawiono wartości oczekiwane, odchylenia standardowe, funkcje gęstości rozkładu prawdopodobieństwa przemieszczeń i ich pierwszej pochodnej przy różnych prędkościach ruchu i różnej intensywności zgłoszeń pojazdów, a także funkcje gęstości widmowej przemieszczeń i funkcje korelacji przemieszczeń. Autorka przeanalizowała wpływ przyjęcia różnych typów rozkładów prawdopodobieństwa ciężarów pojazdów na wartości i kształt funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa przemieszczenia, a także wpływ założonego typu korelacji pomiędzy zgłoszeniami na wartości oczekiwane i wariancję przemieszczenia belki.

Z przeprowadzonych rozważań i obliczeń wynika, że wybrany model obciążenia dźwigara mostowego i użyty algorytm analizy drgań stochastycznych, pomimo swojej złożoności, są przejrzyste i umożliwiają uzyskanie pełnego opisu probabilistycznego odpowiedzi konstrukcji. Otrzymanych wyników obliczeń nie udało się autorce porów-

nać z innymi tego typu wynikami, ponieważ dostępne publikacje nie zawierały potrzebnych informacji o analizowanych konstrukcjach i obciążeniu. W większości prac dotyczących drgań stochastycznych rozważania ograniczały się zazwyczaj tylko do dwóch pierwszych momentów statystycznych odpowiedzi konstrukcji (zakres teorii korelacyjnej). W innych pracach natomiast przedstawiono formuły umożliwiające obliczenie funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa odpowiedzi układu, lecz nie przedstawiono wyników obliczeń.

Z uzyskanych rezultatów wynika, że typ rozkładu ciężarów pojazdów (wartości sił) w strumieniu ruchu nie ma istotnego wpływu na kształt i wartości funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa ugięcia belki; współczynnik korelacji między ugięciem belki i jego pierwszą pochodną po czasie jest bardzo mały, można więc przyjąć, że wielkości te są nieskorelowane. Z charakteru funkcji gęstości widmowej przemieszczenia wynika, że proces odpowiedzi belki na wymuszenie ruchem drogowym jest procesem wąskopasmowym; uwzględnienie korelacji między zgłoszeniami powoduje zmniejszenie wartości wariancji przemieszczenia belki. Różnice między wartościami wariancji przy uwzględnieniu korelacji zgłoszeń i jej braku są tym mniejsze im większa jest prędkość pojazdów na moście.

Trzecia część pracy poświęcona była zastosowaniu wyników otrzymanych z analizy drgań stochastycznych dźwigara mostowego do oceny jego niezawodności. Ograniczono się do badania niezawodności ze względu na zmęczenie materiału i ze względu na przekroczenie ustalonego, granicznego poziomu przemieszczeń. Do obliczenia trwałości zmęczeniowej belki mostowej autorka przyjęła liniową hipotezę kumulacji uszkodzeń ze względu na jej prostotę i fakt, że - jak wynika z literatury [12] - prowadzi ona do wyników nie gorszych niż inne, bardziej złożone hipotezy. Przeanalizowano wpływ zmiany prędkości i intensywności ruchu na wartość oczekiwaną i wariancję naprężeń, na trwałość zmęczeniową dźwigara mostowego oraz na średnią liczbę przekroczeń ustalonego poziomu przemieszczeń. Zbadano również wpływ przyjęcia założenia o normalnym rozkładzie przemieszczenia i jego prędkości na średnią liczbę przekroczeń danego poziomu przemieszczeń. Zaobserwowano, że przy przyjęciu jednakowej intensywności ruchu przy różnych prędkościach porusza-

nia się pojazdów (zamiast, jak to wynika z badań doświadczalnych, różnej, właściwej dla każdej prędkości), przy dużych prędkościach otrzymuje się wartości średniej liczby przekroczeń rosnące do nieskończoności, zamiast skończonych i porównywalnych z uzyskanymi przy mniejszych prędkościach poruszania się pojazdów.

Otrzymane w tej części pracy wyniki obliczeń mają charakter jakościowy, a nie ilościowy oraz są interesujące z punktu widzenia projektowania mostów i przewidywania optymalnych warunków ich eksploatacji. Z porównania wykresów dotyczących zmiany wartości wariancji naprężeń przy różnych prędkościach ruchu i trwałości zmęczeniowej mostu wynika, że przy tej samej prędkości poruszania się pojazdów gwałtownemu wzrostowi wartości wariancji naprężeń odpowiada równie gwałtowne zmniejszenie się trwałości zmęczeniowej mostu. Spostrzeżenie to jest zgodne z uzyskanym przez E. Machę [39] przy badaniach symulacyjnych i umożliwia wnioskowanie o charakterze trwałości zmęczeniowej na podstawie badania zmian wartości wariancji naprężeń, które są o wiele prostsze do obliczenia.

W świetle przeprowadzonych rozważań można stwierdzić, że teza sformułowana we wstępie pracy została udowodniona.

LITERATURA

1. ANG A. H. S., MUNSE W. H., Practical reliability basis for structural fatigue, Prace Naukowe Instytutu Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej, seria Konferencje, 17, 4, Bezpieczeństwo Budowli Mostowych, Wrocław 1975, s. 25-47
2. ASPLUND O., Probabilities of traffic loads on bridges, Journ. of the Struc. Div., Proc. ASCE, vol. 81, January 1955
3. BARCZENKOW A.G., Dinamiczeskij rasczot awtodorożnych mostow, Moskwa, Izdatielstwo Transport, 1976
4. BERNARD M.C., SHIPLEY J.W., The first passge problem for stationary random structural vibration, Journ. of Sound and Vibration, 24(11), 1972, s. 121-132
5. BIELEWICZ E., GRZESIAK W., Analiza probabilistyczna działania pulsującej siły poruszającej się po belce, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej nr 231, Budownictwo Lądowe XXVII, 1975, s. 29-35
6. BOŁOTIN W.W., Analiza niezawodności układów mechanicznych, Stochastyczna mechanika konstrukcji, PAN Ossolineum, Wrocław 1973, s. 7-49
7. CHMIELEWSKI T., Drgania losowe układu belka mostowa - pojazd wywołane nierównościami jezdni, Archiwum Inżynierii Lądowej z. 3/1973
8. CHMIELEWSKI T., Metody probabilistyczne w dynamice konstrukcji, Wyższa Szkoła Inżynierska w Opolu, Studia i Monografie z. 1, Opole 1982
9. COROTIS R.B., VANMARCKE E.H., CORNELL C.A., First passage of nonstationary random processes, Journal of the Engineering Mech. Div., Proc. ASCE, EM2, April 1972, s. 401-414
10. DITLEVSEN O., First outcrossing probability bounds, Journal of the Engineering Mech. Div., vol. 110, No 2, February 1984, proc. ASCE, s. 282-307
11. DITLEVSEN O., Random fatigue crack growth - a first passage problem, Eng. Fracture Mech., vol. 23, No 2, 1986, s. 467-477
12. DITRICH M., Wstęp do stochstycznej teorii maszyn, PWN Warszawa, 1972

13. DREW D. R., Traffic models, Traffic Engineering and Control, Vol. 6, nr 9, 1966
14. FATIGUE RELIABILITY, By the Committee on Fatigue and Fracture Reliability of the Committee on Structural Safety and Reliability of the Structural Division, Journ. of the Struc. Div., Proc. of the ASCE, vol. 108, No ST1, Jan. 1982 s. 3-88
15. FRYBA L., Vibration of solids and structures under moving loads, Noordhoff International Publications, Groningen, Academia Prague, 1972
16. FRYBA L., Response of Bridges to Moving Random Loads,
17. FRYBA L., Estimation of fatigue life of railway bridges under traffic loads, Journ. of Sound and Vibr., 70(4), 1980, s. 527-541
18. FRYBA L., Modelování a mezni stavy dopravních konstrukcí, CSAV, 1985
19. FUJINO Y., BHARTIA B. K., Effect of multiple presence of vehicles on fatigue damage of highway bridges, Reliability and Risk Analysis in Civil Eng. 2, ICASPS, 1987, s. 1157-1164
20. GŁADYSZ M., ŚNIADY P., Uogólniony sygnał telegraficzny jako model obciążenia w dynamice konstrukcji, Zeszyty Nauk. Polít. Rzeszowskiej 59, Mechanika z. 18, VII Sympozjum Dynamiki Konstrukcji, Rzeszów 1989
21. GŁOMB J., Niektóre problemy dynamiki mostów drogowych, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej nr 48, Budownictwo z. 6, Gliwice 1962
22. GŁOMB J., Z badań nad modelem projektowania mostów, Konferencja Naukowo - Techniczna n.t. "Współczesne metody projektowania mostów", Gliwice, 6-7 kwiecień 1973
23. GRIGORIU M., Crossings of non-Gaussian translation processes, Journ. of the Engineering Mech., Proc. ASCE, Vol. 110, No 4, April 1984, s. 610-620
24. HANG X., HANOCK J.W., A reliability analysis of fatigue crack growth under random loading, Fatigue Fract. Engineering. Mat. Struc., vol. 12, No 3, 1989, s. 247-258
25. HASOFER A.M., Directional simulation with applications to autocrossings of Gaussian processes, Proc. ICA SP5, May 1987, Vancouver

26. INBANATHAN M.J., WIELAND M., Bridge vibrations due to vehicle moving over rough surface, Journal of Structural Engineering, Vol. 113, No 9, September 1987, ASCE, 1994-2008
27. IWANKIEWICZ R., ŚNIADY P., Vibration of a bridge beam due to highway traffic, Archiwum Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, 35, 1983, s. 671-686
28. IWANKIEWICZ R., ŚNIADY P., Vibration of a beam under a random stream of moving forces, Journ. Struc. Mech., 12(1), 1984, s. 13-26
29. JENDRZEJEK S., WESELI J., Zagadnienia analizy dynamicznej belkowych i płytowych mostów drogowych, Warszawa, PWN, 1974
30. KLUK K., Losowy model obciążenia mostu drogowego, Prace Naukowe Instytutu Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej, seria Konferencje, 29, 10, Bezpieczeństwo Budowli Mostowych, Wrocław 1982, s. 221-228
31. KOCANĀDA ST., SZALA J., Podstawy obliczeń zmęczenia, PWN, Warszawa 1985
32. KOMATSU S., KAWATANI M., Nonstationary random response of highway bridges under moving vehicles, Technology Reports of the Osaka University, Vol. 32, NO 1648, March 1982, s. 151-158
33. KOZIN F., BOGDANOFF J.L., Recent thought on probabilistic fatigue crack growth, Appl. Mech. Rev. vol 42, No 11, Part 2, Nov. 1989, s. 121-127
34. LATOSZEK M., Organizacja i technika ruchu drogowego, Wyd. Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1980
35. LEADBETTER M.R., On crossings of levels and curves by a wide class of stochastic processes, Ann. Math. Stat. 1966, No 32, s. 260-267
36. LENNOX W.C., FRASER D.A., On the first- passage distribution for the envelope of a nonstationary narrow-band stochastic process, Journal. of Applied Mechanics, Trans. ASME, September 1974, Vol. 41, No 3, s. 793-797
37. LIN Y.K., Probabilistic theory of structural dynamics, New York, McGraw-Hill Book Co. 1967

38. LIN Y.K., WU W.F., YANG J.N., Stochastic modelling of fatigue crack propagation, Probabilistic Methods in the Mechanics of Solids and Structures, Ed. S. Eggwertz and N.C. Lind, IUTAM Symposium, Stockholm, Sweden 1984, Springer-Verlag
39. MACHA E., Modele matematyczne trwałości zmęczeniowej materiałów w warunkach losowego złożonego stanu naprężeń, Prace Naukowe Instytutu Materiałoznawstwa i Mechaniki Technicznej PWr, nr 41, seria Monografie nr 13, 1979
40. MAZUR-ŚNIADY K., ŚNIADY P., Dynamic response of linear structures to random streams of arbitrary impulses in time and space, Journ. of Sound and Vibr. 110(1), 1986, s. 59-68
41. MENDERA Z., Probabilistyczne teorie obciążeń budowli, Losowe obciążenia i nośność konstrukcji, Ossolineum PAN i KILiW, 1979, s. 171-205
42. MURZEWSKI J., Bezpieczeństwo konstrukcji i probabilistyczna statyka, Stochastyczna Mechanika Konstrukcji, Ossolineum PAN, 1973, s. 227-291
43. MURZEWSKI J., Użyteczność i nośność losowa konstrukcji, Losowe obciążenia i nośność konstrukcji, Ossolineum PAN i KILiW, 1979, s. 207-259
44. MURZEWSKI J., SOWA A., Zarys teorii niezawodności konstrukcji, Politechnika Krakowska (skrypt), Kraków 1983
45. MURZEWSKI J., WINIARZ A., Obciążenia losowe konstrukcji, Mech. Teoretyczna i Stosowana, 3, 10(72)
46. MURZEWSKI J., Probabilistyczne modele obciążeń, Prace Naukowe Instytutu Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej, seria Konferencje, 17, 4, Bezpieczeństwo Budowli Mostowych, Wrocław 1975, s. 321-328
47. MURZEWSKI J., Niezawodność konstrukcji inżynierskich, Arkady, Warszawa 1989
48. RABIEGA J., Próba oceny wytrzymałości eksploatacyjnej stalowych mostów kolejowych, praca doktorska, Raport serii PRE 2/82 Instytutu Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1982
49. ROBERTS J. B., An approach to the first-passage problem in random vibration, Journal of Sound and Vibration, 8(2), 1968, s. 301-328

50. ROBERTS J. B., System response to random impulses, Journ. of Sound and Vibr. 24(1), 1972, s. 23-34
51. ROBERTS J. B., Probability of first-passage failure for non-stationary random vibration, Journal of Applied Mechanics Division, ASME, No 75-APM-P, September 1975, s.716-720
52. ROBERTS J. B., First passage time for the envelope of randomly excited linear oscillator, Journ. of Sound and Vibration, 46(1), 1976, s. 1-14
53. ROBERTS J. B., First passage time for randomly excited non-linear oscillators, Journ. of Sound and Vibration, 109(1), 1986, s. 33-50
54. SHIRAKI W., TAKAOKA P. N., MATSUHO S., YAMAMOTO K., Reliability analysis of various types of girder bridges on the Urban expressway network using theory of random process and simulation method, 4-th Int. Conf. on Structural Safety and Reliability, ICOSSAR 1985
55. SIENIAWSKA R., ŚNIADY P., Dynamika i niezawodność mostu drogowego, XXXII Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZiTB, 1986, tom I, s. 169-173
56. SIENIAWSKA R., ŚNIADY P., O problemie niezawodności konstrukcji w stochastycznej dynamice mostów, Prace Naukowe Instytutu Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej nr 37, seria Konferencje, nr 13, Bezpieczeństwo Budowli Mostowych, Wrocław 1987, s. 343-349
57. SIENIAWSKA R., ŚNIADY P., First passage problem of the beam under a random stream of moving forces, Journal of Sound and Vibr., 1990, 136(2), s. 177-185
58. SIENIAWSKA R., ŚNIADY P., Life expectancy of highway bridges due to traffic loads, Journ. of Sound and Vibr., 1990, 140(1), s. 31-38
59. SOBCZYK K., On the Markovian models for fatigue accumulation, Jour. of Mechanique theorique et appliquee, Numero special 1982, s. 147-160
60. SPANOS P-T.D., SOLOMES G.P., Barrier crossing due to transient excitation, Journ. of Engineering Mech., Proc. of ASCE, Vol. 110, No 1, January 1984, s.20-36

61. ŚNIADY P. i in., Analityczne metody oceny ruchu drogowego, Raport nr 61/77, Instytut Inżynierii Lądowej Politechniki Wr., Wrocław, 1977
62. ŚNIADY P., Vibration of a beam due to a random stream of moving forces with random velocity, Journ. of Sound and Vibr. 97(1), 1984, s. 23-33
63. ŚNIADY P., Dynamic response of linear structures to random stream pulses, Journ. of Sound and Vibr. 131(1), 1989, s. 91-102
64. TAKAOKA P. N., Reliability analysis of highway bridges, Analiza nośności losowej konstrukcji, PAN, KILiW, Jabłonna 1982
65. TUNG C.C., Random response of highway bridges to vehicles loads, Journal of the Eng. Mech. Division, Proc. of the ASCE, October 1967, EM5, s. 79-94
66. TUNG C.C., Response of highway bridges to renewal traffic loads, Journal of the Eng. Mech. Division, Proc. of the ASCE, February 1969, EM1, s. 41-57
67. TUNG C.C., Life expectancy of highway bridges to vehicles loads, Journal of the Eng. Mech. Division, Proc. of the ASCE, December 1969, EM^, pp 1417-1428
68. VANMARCKE E.H., On the distribution of the first-passage time for normal stationary random processes, Journ. of Appl. Mech. Trans. ASME, vol. 42, No 1, March 1975, s.215-220
69. WINIARZ A., Model stochastyczny obciążenia długotrwałego konstrukcji, praca doktorska, Politechnika Krakowska, Kraków 1975
70. YAMADA Y., IEMURA H., NODA S., Influence of stochastic load combinations on a highway bridge, 4th International Conference on Structural Reliability, ICOSSAR'85, I-552 - I-556
71. YANG J.-N., HEER E., Reliability of randomly excited structures, AIIA Journal, Vol. 9, No 7, July 1971, s. 1262-1268
72. YANG J.-N., First excursion probability in non-stationary random vibration, Journal of Sound and Vibration, 27(2), 1973, s. 165-182
73. YAO J.T.P., KOZIN F., WEN Y.K., YANG J.N., SCHÖLLER G.I., DITLEVSEN O., Stochastic fatigue, fracture and damage analysis, Structural Safety, 3, 1986, s. 231-267

74. YAZDANI N., ALBRECHT P., Risk analysis of fatigue failure of highway steel bridges, Journ. of Struc. Engineering, vol. 113, No 3, March 1987, s. 483-500



mgr inż. Róża Sieniawska
wykładowca
Instytut Inżynierii Lądowej
Politechniki Wrocławskiej
Wybrzeże Wyspiańskiego 27
50-370 Wrocław

10.2

Odbiorcy:

1. Biblioteka Główna Politechniki Wrocławskiej	- 1 egz.
2. Biblioteka i OINT I-14	- 1 egz.
3. Redakcja Wydawnictw I-14	- 1 egz.
4. Promotor	- 1 egz.
5. Recenzenci	- 2 egz.
6. Autor	- 3 egz.

razem	- 9 egz.
-------	----------