

Na prawach rękopisu

INSTYTUT INŻYNIERII LĄDOWEJ  
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ  
Raport serii PRE nr. 14/86

ANALIZA STATYCZNA  
POWŁOKI Z WEWNĘTRZNYM  
UŻEBROWANIEM ORTOGONALNYM  
W UJĘCIU TEORII KONSTRUKCJI  
Z WIĘZAMI

Ryszard KUTYŁOWSKI

Praca doktorska

Promotor: Prof. dr inż. Otton Dąbrowski

Słowa kluczowe:  
powłoka, płyta,  
użebrowanie wewnętrzne,  
analiza statyczna,  
metoda  
elementów skończonych

Wrocław 1986

## Spis rzeczy

|                                                                                                        | Str. |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 1. Wstęp                                                                                               | 3    |
| 2. Cel i zakres pracy                                                                                  | 6    |
| 3. Statyka powłoki z wewnętrznym uźebrowaniem<br>ortogonalnym w ujęciu teorii konstrukcji<br>z więzami |      |
| 3.1 Stan odkształcenia i przyjęte założenia<br>kinematyczne                                            | 7    |
| 3.2 Model powłoki uźebrowanej jako<br>ciała z więzami                                                  | 20   |
| 3.3 Równania podstawowe                                                                                | 22   |
| 3.4 Niektóre zależności dla powłoki walcowej<br>i płyty                                                | 26   |
| 4. Wykorzystanie metody elementów skończonych<br>do numerycznego rozwiązania zagadnienia               |      |
| 4.1 Powłoki                                                                                            | 32   |
| 4.2 Płyty                                                                                              | 41   |
| 5. Przykłady liczbowe                                                                                  | 43   |
| 6. Uwagi końcowe                                                                                       | 67   |
| Dodatek                                                                                                | 68   |
| Literatura                                                                                             | 72   |

## 1. WSTĘP

Stosowanie powłok uźebrowanych jest celowe, gdyż umożliwia pewną oszczędność materiałów przy zadanych parametrach geometrycznych i wytrzymałościowych, a także przy założonym zużyciu materiałów - znaczne zwiększenie sztywności na zginanie, zwiększenie odporności konstrukcji na wyboczenie oraz możliwość przeniesienia ewentualnych większych obciążeń lokalnych. Uźebrowanie często jest stosowane na płaszczy powłoki, w jednym lub dwóch kierunkach /południkowym, równoleżnikowym/. Niekiedy wzmacnia się pierścieniami pewne najniebezpieczniejsze przekroje.

Początki prac nad zagadnieniami powłok uźebrowanych można odnieść do początków XX wieku, choć wyprowadzenie podstawowych zależności dokonano w latach trzydziestych i czterdziestych. Od tego czasu teorią powłok uźebrowanych uważa się za osobny dział teorii powłok.

Wśród wielu metod rozwiązywania /określenia stanu napięcia i odkształcenia / powłok uźebrowanych można wyróżnić:

- a/ metody energetyczne,
- b/ metody, w których rozpatruje się współpracę powłoki z żebrami na liniach kontaktowych,
- c/ metody oparte o zamianę powłoki uźebrowanej na powłokę o ortotropii strukturalnej.

Metody energetyczne stosowali między innymi Abovskij [2], Levčenko [19], Viergiejčuk i Binkievič [30]. Wielu autorów wykorzystuje metody wariacyjne dla sformułowania podstawowych związków w powłokach, między innymi Amiro, Zaruckij [4,5], a także Grebień [13,14] i Abovskij [1].

Współpracę na liniach kontaktowych uwzględniał Własow [31], Iljin [15] i Zaruckij [32,33]. Szczególnym jej przypadkiem jest współpraca sprężystych żeber z opierającą się na nich płytą. W ten sposób aproksymowano powłokę. Zapoczątkował to podejście Łurie, a kontynuował Abovskij [2] i Corder [8].

Wielu autorów podaje rozwiązania powłok uźebrowanych, gdzie powłoki te zamieniono na powłoki gładkie o odpowiednio zwiększonej sztywności. Metoda ta wykazuje dobrą zbieżność

dla stosunkowo wiotkich i gęsto ułożonych żeber. Prace w tym kierunku prowadzili między innymi: Flügge [10,11] , Abovskij, Andrejev [3] , Krol [17] , Kowalewski [16] , a z autorów polskich Błocki [6] i Orkisz [23] .

Warto wspomnieć też o pracach poświęconych optymalizacji uźebrowania w powłokach. Najwcześniejsza praca z tej dziedziny ukazała się już w 1949 roku. Autorem jej jest Farrav[9]. W monografiach Shanley'a [27] i Gerard'a [12] można znaleźć podsumowanie osiągniętych rezultatów z lat pięćdziesiątych i bogaty wybór literatury z tego okresu. Następne lata stanowią okres szybkiego rozwoju tej dziedziny badań prowadzonych w różnych kierunkach i przez różnych autorów. Fakt ten pozostaje w ścisłym związku z rozwojem lotnictwa i technik kosmicznych, gdzie powłoki uźebrowane znajdują zastosowanie.

Spośród wielu prac / w tym także monografii /, dotyczących powłok uźebrowanych, które ukazały się w ostatnich latach zacytujemy niektóre, najbliższej związane tematycznie z prezentowaną pracą.

Powłoki obrotowe z uźebrowaniem w kierunkach południkowym i równoleżnikowym rozwiązywał między innymi Grebien [13] , który wyprowadza równania równowagi w oparciu o teorię powłok cienkich. Uwzględnia przy tym deformację żeber w kierunku ich osi, oraz ich przemieszczenia w kierunku normalnym do powierzchni środkowej powłoki. Do aproksymacji przemieszczeń stosuje podwójne szeregi trygonometryczne. Zarówno cytowany autor, jak i następni cytowani poniżej prezentują przykłady liczbowe. W omawianym przypadku jest to płyta wzmocniona żebrami w jednym kierunku.

Chrobot [7] podaje wyprowadzone przez siebie równania równowagi dla powłoki o skokowo zmiennej sztywności. Równania otrzymano z bilansu pracy dla trójwymiarowego kontinuum materialnego, w zależności od przyjęcia hipotezy o sposobie deformacji powłoki uźebrowanej. Rezultatem są dystrybucyjne równania różniczkowe. Zastosowano podwójne szeregi Fouriera dla walcowych powłok uźebrowanych, przy czym żebra są usytu-



wane symetrycznie względem powierzchni środkowej. Podano przykład liczbowy rozwiązania płyty.

Nagórski [21] prezentuje rozwiązania dla powłoki rusztowej wykorzystując wcześniej wyprowadzone m. in. przez siebie równania różniczkowe dla powłoki typu Reissnera. W pracy otrzymano ścisłe rozwiązania tych równań za pomocą szeregów potęgowych, oraz przybliżone przy zastosowaniu metody zaburzeń brzegowych. Załączono również przykład liczbowy rozwiązania powłoki.

Żmijewski [35] podaje rozwiązanie problemu zginania powłoki sprężystej w kształcie paraboloidy eliptycznej o małej wyniosłości, rozpiętej na planie prostokąta i podpartej wzdłuż brzegów na sprężystych żebrach. Wychodząc z układu trzech przemieszczeniowych równań różniczkowych teorii powłok, spełniających założenie Kirchhoff'a - Love'a, oraz uwzględniających uproszczenia wprowadzone przez Własowa dla powłok małowyniosłych opracowano przy zastosowaniu metody skończonej transformacji Fourier'a algorytm rozwiązania, wraz z pokazaniem przykładu liczbowego.

W pracy zbiorowej [24,25] analizowano płytę z żebrami ortogonalnymi metodą elementów skończonych. Równania dotyczące płyt są zgodne z klasyczną teorią płyt, natomiast dotyczące żeber z liniową teorią prętów smukłych.

Z przedstawionego powyżej krótkiego przeglądu literatury wynika, że:

- podstawowym problemem w powłokach uźebrowanych jest model łączenia powłoki z żebrami, rzutujący na współpracę tych dwóch elementów konstrukcji,
- brakuje ogólnej teorii powłok uźebrowanych żebrami krzyżującymi się, w której dokonano by jednolitego zapisu dla powłoki i żeber,
- brakuje opracowań z zakresu uźebrowanych wewnętrznie powłok,
- literatura dotycząca rozwiązań numerycznych jest dość uboga, choć ze względu na charakter zagadnienia metody numeryczne mogły mieć tu szerokie zastosowanie.

## 2. CEL I ZAKRES PRACY

Celem niniejszej pracy jest wyprowadzenie równań statyki dla powłoki z wewnętrznym uźebrowaniem ortogonalnym. Wykorzystano tu funkcjonał Hu-Washizu [26], który sformułowano dla ciała trójwymiarowego, z uwzględnieniem deformacji poprzecznej. Następnie funkcjonał zapisano na powierzchni podstawowej oraz uzupełniono go związkami dla więzów założonych wzdłuż linii występowania żeber. Dokonując wariacji funkcjonału w poszukiwaniu punktu stacjonarności otrzymano równania równowagi, związki fizyczne i geometryczne, warunki brzegowe kinematyczne i statyczne oraz dodatkowe zależności wzdłuż linii żeber. Rozważania ograniczono do zagadnień liniowych. Otrzymane równania łatwo można przystosować do szczególnych typów powłok / gdzie np. nie ma potrzeby uwzględniania deformacji poprzecznej, czy wpływu żeber / odrzucając pewne składniki równań.

W rozdziale trzecim sformułowano równania statyki powłok z wewnętrznym uźebrowaniem ortogonalnym. Podano również podstawowe zależności dla szczególnych przypadków: powłoki walcowej i płyty. W rozdziale czwartym zaprezentowano sposób numerycznej realizacji zagadnienia dla powłoki walcowej i płyty. Przedstawiono zastosowane elementy skończone i algorytm rozwiązania. W rozdziale piątym podano przykłady liczbowe i analizę otrzymanych wyników. Rozwiązano płytę kwadratową zamocowaną zawiasowo i powłokę walcową w formie przekrycia cylindrycznego pod obciążeniem ciężarem własnym i dodatkowo płytę pod obciążeniem siłą skupioną. W wyniku przeprowadzonych obliczeń otrzymano uogólnione przemieszczenia, a następnie wykorzystując je wyznaczono siły wewnętrzne. Analizie poddano uogólnione siły wewnętrzne i przemieszczenia. W rozdziale szóstym sformułowano uwagi i wnioski końcowe.

W " Dodatku " umieszczono pewne uzupełniające przekształcenia, których wyniki stosowane były w rozdziale trzecim. Sposób oznaczeń oraz niektóre definicje przyjęto jak w [20,21].

### 3. STATYKA POWŁOKI Z WEWNĘTRZNYM UŻEBROWANIEM ORTOGONALNYM W UJĘCIU TEORII KONSTRUKCJI Z WIĘZAMI

#### 3.1 Stan odkształcenia i przyjęte założenia kinematyczne

Geometrię trójwymiarowego kontinuum materialnego opisuje się w globalnym, kartezjańskim układzie współrzędnych  $x_i$  /  $i=1,2,3$  /, oraz w lokalnym konwekcyjnym układzie współrzędnych  $\bar{x}^i$  /  $i=1,2,3$  /. W związku z przejściem od zagadnienia trójwymiarowego do dwuwymiarowego przyjmuje się, że  $\bar{x} = \{\theta^\alpha, \xi\}$ ,  $\alpha=1,2$ , gdzie  $\xi$  jest współrzędną normalną do powierzchni podstawowej. Wektor położenia dowolnego punktu w konfiguracji początkowej przyjmuje się w sposób następujący

$$\vec{P}(\theta^\alpha, \xi) = \vec{R}(\theta^\alpha) + \vec{A}_3 \xi(\theta^\alpha), \quad (3.1)$$

gdzie

$\vec{R}$  - wektor położenia punktów na powierzchni podstawowej  $S$ ,

$\theta^\alpha$  - współrzędne krzywoliniowe na  $S$ ,

$\vec{A}_3$  - jednostkowy wektor normalny do  $S$ .

Kowariantne wektory bazy wyrażają się następująco:

$$\vec{G}_\alpha = \frac{\partial \vec{P}}{\partial \theta^\alpha} = \mu_\alpha^\gamma \vec{A}_\gamma, \quad (3.2)$$

$$\vec{G}_3 = \frac{\partial \vec{P}}{\partial \xi} = \vec{A}_3,$$

gdzie

$$\mu_\alpha^\gamma = \mathcal{J}_\alpha^\gamma - \xi B_\alpha^\gamma \quad (3.3)$$

jest translatozem.

$\delta_{\alpha}^{\gamma}$  - delta Kronecker'a,

$B_{\alpha}^{\gamma}$  - współrzędna drugiej formy podstawowej.

Wektory  $\vec{A}_{\alpha}$  tworzą bazę na powierzchni podstawowej S.

Współrzędne tensora metrycznego zapisuje się następująco:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= \mu_{\alpha}^{\gamma} \mu_{\beta}^{\delta} A_{\gamma\delta}, \\ G_{33} &= 1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Do dalszych rozważań zauważmy, że

$$\mu = \det |\mu_{\alpha}^{\gamma}| = 1 - 2\xi H + \xi^2 K, \quad (3.5)$$

gdzie  $H = \frac{1}{2} B_{\alpha}^{\alpha}$  jest średnią krzywizną, natomiast

$K = \det |B_{\beta}^{\alpha}|$  jest krzywizną Gaussa.

Kontrawariantne wektory bazy określa się wzorami:

$$\begin{aligned} \vec{G}^{\alpha} &= (\mu^{-1})^{\alpha}_{\gamma} \vec{A}^{\gamma}, \\ \vec{G}_3 &= \vec{A}_3, \end{aligned} \quad (3.6)$$

gdzie

$$(\mu^{-1})^{\alpha}_{\beta} \mu_{\gamma}^{\beta} = \delta_{\gamma}^{\alpha}, \quad (3.7)$$

$$(\mu^{-1})^{\alpha}_{\beta} = \frac{1}{\mu} [\delta_{\beta}^{\alpha} + \xi (B_{\beta}^{\alpha} - 2H\delta_{\beta}^{\alpha})]. \quad (3.8)$$



Podobnie współrzędne tensora metrycznego oblicza się następująco:

$$G^{\alpha\beta} = (\mu^{-1})_{\gamma}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\delta}^{\beta} A^{\gamma\delta}, \quad (3.9)$$

$$G^{33} = 1.$$

Wektor położenia dowolnego punktu powłoki w konfiguracji aktualnej we współrzędnych konwekcyjnych można zapisać w postaci:

$$\vec{p}(\theta^{\alpha}, \xi) = \vec{r}(\theta^{\alpha}) + \xi \vec{d}(\theta^{\alpha}), \quad (3.10)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \vec{A}_3 + \vec{\delta}, \\ \vec{\delta} &= \vec{\gamma} + \vec{\beta}, \\ \vec{r} &= \vec{R} + \vec{U}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$\vec{U}$  - wektor przemieszczenia powierzchni podstawowej  $S$ ,

$\vec{\gamma}$  - wektor deformacji poprzecznej,

$\vec{\beta} = \beta_{\alpha} \vec{A}^{\alpha}$ ,

$$\beta_{\alpha} = -(u_{3||\alpha} + B_{\alpha}^{\beta} u_{\beta}). \quad (3.12)$$

Podwójną kreską pionową oznaczono różniczkowanie kowariantne w bazie  $\vec{A}_{\alpha}$ .

Tak więc

$$\vec{p}(\theta^{\alpha}, \xi) = \vec{R} + \vec{U} + \xi \vec{\delta} + \xi \vec{A}_3. \quad (3.13)$$

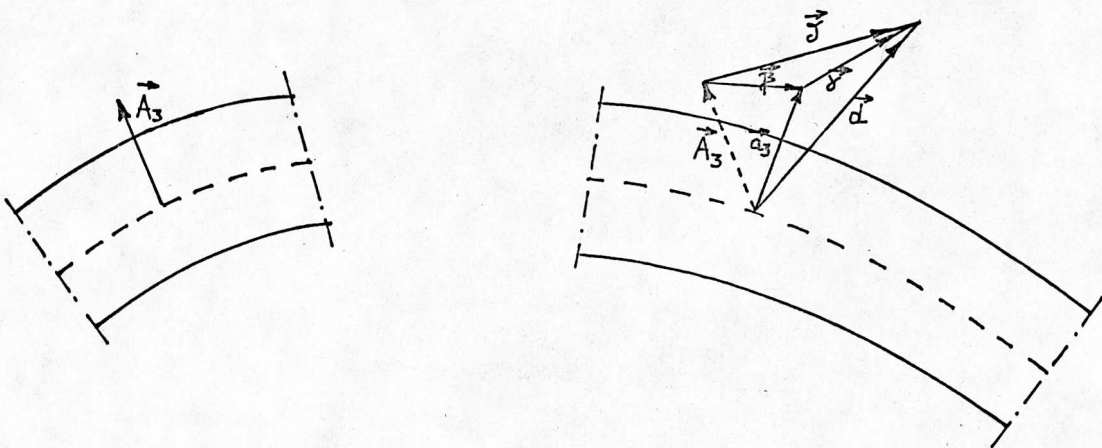
Wektory bazy określa się następująco:

$$\begin{aligned}\vec{g}_\alpha &= \frac{\partial \vec{p}}{\partial \theta^\alpha} = \mu_\alpha^\gamma \vec{A}_\gamma + \vec{u}_{||\alpha} + \xi \vec{\sigma}_{||\alpha}, \\ \vec{g}_3 &= \frac{\partial \vec{p}}{\partial \xi} = \vec{A}_3 + \vec{\sigma}.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Korzystając z wyrażeń na  $\vec{p}$  i  $\vec{P}$  można otrzymać wektor przemieszczeń punktów powłoki

$$\vec{v} = \vec{p} - \vec{P} = \vec{u} + \xi \vec{\sigma}.\tag{3.15}$$

Interpretację geometryczną zależności 3.11 przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1

Równania opisujące powłokę uzyskano wykorzystując pierwszą formę funkcjonału Hu-Washizu [26],

$$\begin{aligned} \Pi(\sigma^{ij}, e_{ij}, v_i) = & \frac{1}{2} \int_V C^{ijkl} e_{ij} e_{kl} dV + \int_V \sigma^{ij} \left[ \frac{1}{2} (v_{i|j} + v_{j|i}) - e_{ij} \right] dV - \\ & - \int_V v_i X^i dV - \int_{\Omega_\sigma} v_i q_0^i dS_\sigma - \\ & - \int_{\Omega_u} (v_i - v_{0i}) \sigma^{ij} v_j^* dS_u - \int_{S_+} v_i q_+^i dS_+ - \int_{S_-} v_i q_-^i dS_-, \end{aligned} \quad (3.16)$$

gdzie naprężenia, przemieszczenia i odkształcenia  $(\sigma^{ij}, v_i, e_{ij})$  zapisane są w bazie trójwymiarowej konfiguracji początkowej. Powierzchnie  $S_+^i$ ,  $S_-^i$  są powierzchniami granicznymi, na które działa obciążenie  $q_+^i$ ,  $q_-^i$ . Siły objętościowe oznaczono poprzez  $X^i$ . Powierzchnie  $\Omega_\sigma$  i  $\Omega_u$  są powierzchniami brzegowymi, na których zadano odpowiednio obciążenia brzegowe  $q_0^i$  lub przemieszczenia brzegowe  $v_0^i$ . Wektor  $\vec{v}_j^*$  jest wektorem normalnym do powierzchni  $\Omega$ , a  $C^{ijkl}$  tensorem sprężystości. Kreską pionową oznaczono różniczkowanie kowariantne w bazie trójwymiarowej  $\bar{G}_i$ . Z rozpisania wyrażenia (3.15) na powierzchni podstawowej otrzymujemy:

$$\begin{aligned} V_\alpha &= U_\alpha + \xi \mathcal{J}_\alpha, \\ V_3 &= U_3 + \xi \mathcal{J}_3, \end{aligned} \quad (3.17)$$

gdzie  $u_\alpha$ ,  $u_3$ ,  $\mathcal{J}_\alpha$ ,  $\mathcal{J}_3$  są niezależnymi wielkościami przemieszczeń.

Można utworzyć funkcjonał [26]

$$\Pi^* = \int_V r^\alpha (v_\alpha - u_\alpha - \xi \delta_\alpha) dV + \int_V r^3 (v_3 - u_3 - \xi \delta_3) dV, \quad (3.18)$$

gdzie  $r^\alpha$ ,  $r^3$  są reakcjami więzi kinematycznych.

Po uzupełnieniu funkcjonału  $\Pi$  funkcjonałem  $\Pi^*$

otrzymujemy  $\bar{\Pi} = \Pi + \Pi^*$  zapisany w bazie trójwymiarowej

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} = & \frac{1}{2} \int_V C^{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\alpha\beta} e_{\gamma\delta} dV + 2 \int_V C^{\alpha 3 \gamma 3} e_{\alpha 3} e_{\gamma 3} dV + \\ & + \frac{1}{2} \int_V C^{3333} e_{33} e_{33} dV + \int_V C^{\alpha\beta 33} e_{\alpha\beta} e_{33} dV + \\ & + \int_V G^{\alpha\beta} \left[ \frac{1}{2} (v_{\alpha|\beta} + v_{\beta|\alpha}) - e_{\alpha\beta} \right] dV + \\ & + \int_V G^{\alpha 3} \left[ \frac{1}{2} (v_{3|\alpha} + v_{\alpha|3}) - e_{\alpha 3} \right] dV + \\ & + \int_V G^{33} \left[ \frac{1}{2} (v_{3|3} + v_{3|3}) - e_{33} \right] dV - \\ & - \int_V v_\alpha X^\alpha dV - \int_V v_3 X^3 dV - \int_{\Omega_G} v_\alpha q_\alpha^\alpha dS_G - \int_{\Omega_G} v_3 q_3^\alpha dS_G - \\ & - \int_{\Omega_u} (v_\alpha - v_{o\alpha}) G^{\alpha\beta} v_\beta^* dS_u - \int_{\Omega_u} (v_3 - v_{o3}) G^{\alpha 3} v_\alpha^* dS_u - \\ & - \int_{S_+} v_\alpha q_{o+}^\alpha dS_+ - \int_{S_+} v_3 q_{o+}^3 dS_+ - \int_{S_-} v_\alpha q_{o-}^\alpha dS_- - \int_{S_-} v_3 q_{o-}^3 dS_- + \\ & + \int_V r^\alpha (v_\alpha - u_\alpha - \xi \delta_\alpha) dV + \int_V r^3 (v_3 - u_3 - \xi \delta_3) dV. \end{aligned} \quad (3.19)$$



Przechodząc do zapisu funkcjonału na powierzchni podstawowej w bazie  $\vec{A}_i$  wykorzystano zależności [20]

$$\begin{aligned} V_{\alpha|P} &= \mu_{\alpha}^{\gamma} [V_{\gamma||P} - B_{\gamma P} u_3], \\ V_{\alpha|3} &= \mu_{\alpha}^{\gamma} V_{\gamma,3}, \\ V_{3|\alpha} &= V_{3,\alpha} + B_{\alpha}^{\gamma} V_{\gamma}, \\ V_{3|3} &= V_{3,3}, \\ \text{oraz} \quad V_{\alpha} &= \mu_{\alpha}^{\gamma} V_{\gamma}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

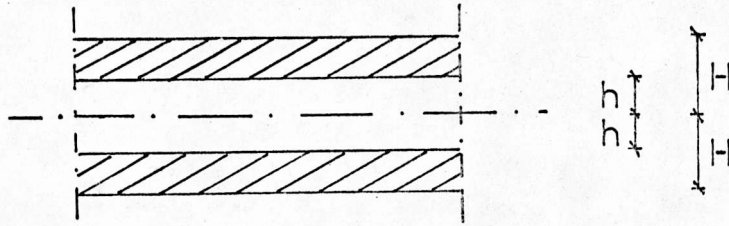
Po lewej stronie ostatniej równości mamy przemieszczenia zapisane w bazie  $\vec{G}_i$ , a po prawej w bazie  $\vec{A}_i$ . Podwójną pionową kreską oznaczono różniczkowanie kowariantne w bazie  $\vec{A}_{\alpha}$ , a przecinkiem różniczkowanie cząstkowe. Całki po objętości zastąpiono całkami po powierzchni podstawowej  $S$  wykonując całkowanie po  $\xi$ , gdyż

$$dV = \mu dS d\xi. \tag{3.21}$$

Zdefiniowano siły wewnętrzne:

$$\begin{aligned} N^{\alpha\gamma} &= \int_{h\xi} \mu \sigma^{\alpha P} \mu_P^{\gamma} d\xi, & N^{\alpha 3} &= \int_{h\xi} \mu \sigma^{\alpha 3} d\xi, \\ M^{\alpha\gamma} &= \int_{h\xi} \mu \sigma^{\alpha P} \mu_P^{\gamma} \xi d\xi, & N^{33} &= \int_{h\xi} \mu \sigma^{33} d\xi, \\ M^{\alpha 3} &= \int_{h\xi} \mu \sigma^{\alpha 3} \xi d\xi, \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$h\xi = \langle -H, -h \rangle \cap \langle h, H \rangle.$$



Rys. 2

Wykorzystując (3.17) i (3.20) zapisano:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(V_{\alpha|\beta} + V_{\beta|\alpha}) = \frac{1}{2}(\mu_{\alpha}^{\gamma} u_{\gamma||\beta} - \mu_{\alpha}^{\gamma} B_{\gamma\beta} u_3 + \xi \mu_{\alpha}^{\gamma} \partial_{\gamma||\beta} - \\ - \xi \mu_{\alpha}^{\gamma} B_{\gamma\beta} \partial_3 + \mu_{\beta}^{\gamma} u_{\gamma||\alpha} - \mu_{\beta}^{\gamma} B_{\gamma\alpha} u_3 + \xi \mu_{\beta}^{\gamma} \partial_{\gamma||\alpha} - \\ - \xi \mu_{\beta}^{\gamma} B_{\gamma\alpha} \partial_3) , \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(V_{\alpha|3} + V_{3|\alpha}) = \frac{1}{2}(\mu_{\alpha}^{\gamma} \partial_{\gamma} + u_{3,\alpha} + B_{\alpha}^{\gamma} u_{\gamma} + \xi \partial_{3,\alpha} + \\ + \xi B_{\alpha}^{\gamma} \partial_{\gamma}) = \frac{1}{2}(\partial_{\alpha} - \beta_{\alpha} + \xi \partial_{3,\alpha}) , \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}(V_{3|3} + V_{3|3}) = \partial_3 ,$$

oraz

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mu_{\alpha}^{\gamma} \varepsilon_{\gamma\beta} + \xi \mu_{\alpha}^{\gamma} \alpha_{\gamma\beta} + \mu_{\beta}^{\gamma} \varepsilon_{\gamma\alpha} + \xi \mu_{\beta}^{\gamma} \alpha_{\gamma\alpha}) ,$$

$$e_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(\xi \varepsilon_{\alpha 3} + \gamma_{\alpha}) , \quad (3.24)$$

$$e_{33} = \gamma_3 ,$$

gdzie  $\varepsilon_{\gamma\beta} = \varepsilon_{\gamma\beta}(\vec{u})$  ,  $\varepsilon_{\alpha 3} = \varepsilon_{\alpha 3}(\vec{\sigma})$  ,

$\varkappa_{\gamma\beta} = \varkappa_{\gamma\beta}(\vec{\sigma})$  ,  $\gamma_{\alpha} = \gamma_{\alpha}(\vec{\sigma})$  ,  $\gamma_3 = \gamma_3(\vec{\sigma})$  .

są tensorami odkształcenia zdefiniowanymi na powierzchni podstawowej. Tensory te określone są przez co najwyżej pierwsze pochodne przemieszczeń uogólnionych  $(\vec{u}, \vec{\sigma})$ .

Ponadto:

$$C^{\alpha\beta\gamma\delta} = (\mu^{-1})_{\varepsilon}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\eta}^{\beta} (\mu^{-1})_{\varkappa}^{\gamma} (\mu^{-1})_{\nu}^{\delta} A^{\varepsilon\eta\kappa\nu} ,$$

$$C^{\alpha\beta 33} = (\mu^{-1})_{\gamma}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\delta}^{\beta} A^{\gamma\delta 33} ,$$

$$C^{\alpha 3 \gamma 3} = (\mu^{-1})_{\beta}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\delta}^{\gamma} A^{\beta\delta 33} ,$$

(3.25)

$$C^{3333} = A^{3333} ,$$

gdzie  $A^{3333}$  ,  $A^{\beta 3 \delta 3}$  ,  $A^{\gamma \delta 33}$  ,  $A^{\varepsilon \eta \kappa \nu}$

są tensorami zdefiniowanymi na powierzchni podstawowej.

Przyjęto także następujące oznaczenia:

$$E^{3333} = A^{3333} \int_{h\xi} \mu d\xi$$

$$E_1^{\epsilon p 33} = A^{\epsilon \bar{3} 33} \int_{h\xi} \mu (\mu^{-1})_{\bar{3}}^p d\xi$$

$$E_2^{\epsilon p 33} = A^{\epsilon \bar{3} 33} \int_{h\xi} \mu (\mu^{-1})_{\bar{3}}^p \xi d\xi$$

$$E_3^{\alpha 3 \gamma 3} = A^{p 3 \bar{3} 3} \int_{h\xi} \mu (\mu^{-1})_{\bar{p}}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\bar{3}}^{\gamma} \xi^2 d\xi$$

$$E_4^{\alpha 3 \gamma 3} = A^{p 3 \bar{3} 3} \int_{h\xi} \mu (\mu^{-1})_{\bar{p}}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\bar{3}}^{\gamma} \xi d\xi \quad (3.26)$$

$$E_5^{\alpha 3 \gamma 3} = A^{p 3 \bar{3} 3} \int_{h\xi} \mu (\mu^{-1})_{\bar{p}}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\bar{3}}^{\gamma} d\xi$$

$$E_6^{\alpha p \tau \epsilon} = A^{\mu p \tau \bar{\epsilon}} \int_{h\xi} \mu (\mu^{-1})_{\mu}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\bar{\epsilon}}^{\tau} d\xi$$

$$E_7^{\alpha p \tau \epsilon} = A^{\mu p \tau \bar{\epsilon}} \int_{h\xi} \mu (\mu^{-1})_{\mu}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\bar{\epsilon}}^{\tau} \xi d\xi$$

$$E_8^{\alpha p \tau \epsilon} = A^{\mu p \tau \bar{\epsilon}} \int_{h\xi} \mu (\mu^{-1})_{\mu}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\bar{\epsilon}}^{\tau} \xi^2 d\xi$$



oraz

$$V_{\alpha}^{+} = u_{\alpha} + \xi^{+} \partial_{\alpha} , \quad (3.27)$$

$$V_{\alpha}^{-} = u_{\alpha} + \xi^{-} \partial_{\alpha} ,$$

$$dS_{+} = \mu^{+} dS , \quad (3.28)$$

$$dS_{-} = \mu^{-} dS ,$$

i

$$F^{\alpha} = q_{+}^{\alpha} \mu^{+} + q_{-}^{\alpha} \mu^{-} + \int_{h\xi} \mu X^{\alpha} d\xi ,$$

$$F^3 = q_{+}^3 \mu^{+} + q_{-}^3 \mu^{-} + \int_{h\xi} \mu X^3 d\xi , \quad (3.29)$$

$$L^{\alpha} = q_{+}^{\alpha} \mu^{+} \xi^{+} + q_{-}^{\alpha} \mu^{-} \xi^{-} + \int_{h\xi} \mu X^{\alpha} \xi d\xi ,$$

$$L^3 = q_{+}^3 \mu^{+} \xi^{+} + q_{-}^3 \mu^{-} \xi^{-} + \int_{h\xi} \mu X^3 \xi d\xi .$$

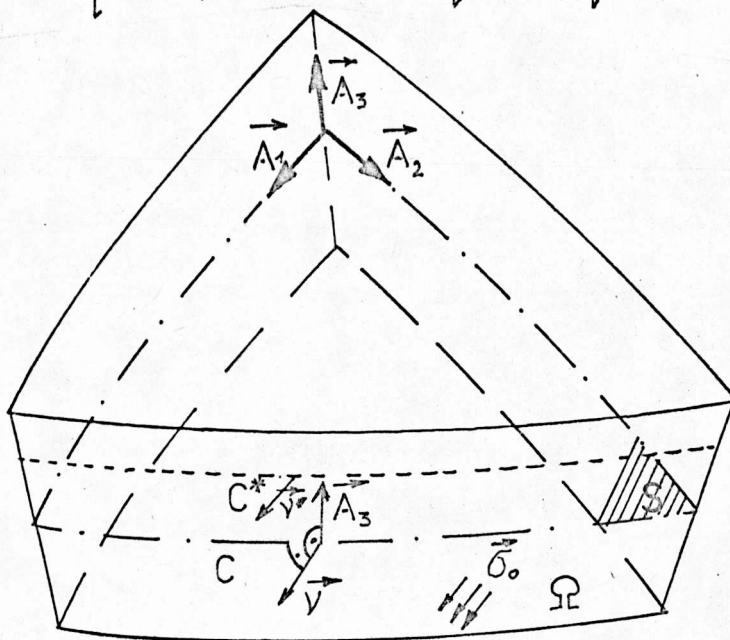
Wielkości brzegowe oznaczono:

$$T_1^\alpha = \int_{h\xi} \mu q^\alpha d\xi, \quad T_3 = \int_{h\xi} \mu q^3 d\xi,$$

$$T_2^\alpha = \int_{h\xi} \mu q^\alpha \xi d\xi, \quad T_4 = \int_{h\xi} \mu q^3 \xi d\xi, \quad (3.30)$$

$$i \quad V_{0\alpha} = u_{0\alpha} + \xi \sigma_{0\alpha}.$$

gdzie  $q^\alpha = q_0^{\alpha p} v_p^*$ ,  $q^3 = q_0^{p3} v_p^*$ . (3.31)



Rys. 3

Pomiędzy elementami powierzchni  $\Omega$ , a elementami łuku krzywych  $C_\xi$ ,  $C_u$ , ogólnie  $C$  można znaleźć związek:

$$v_p^* d\Omega = \mu v_p d\xi dC. \quad (3.32)$$

Zapiszmy więc funkcjonal  $\bar{\pi}$  na powierzchni podstawowej

$$\bar{\pi} = \bar{\pi} [(N, M), (\epsilon, \alpha, \gamma), (u, \sigma)],$$

$$\begin{aligned}
 \overline{\Pi} = & \int_S \left[ \frac{1}{2} (E_6^{\alpha\beta\tau\epsilon} \epsilon_{\tau\epsilon} \epsilon_{\beta\alpha} + E_7^{\alpha\beta\tau\epsilon} \partial_{\tau\epsilon} \epsilon_{\beta\alpha} + E_7^{\alpha\beta\tau\epsilon} \epsilon_{\tau\epsilon} \partial_{\beta\alpha} + \right. \\
 & + E_8^{\alpha\beta\tau\epsilon} \partial_{\tau\epsilon} \partial_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2} (E_3^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\delta} + E_4^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\alpha\beta} \gamma_{\gamma} + \\
 & + E_4^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\gamma\delta} \gamma_{\alpha} + E_5^{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta}) + \frac{1}{2} E^{3333} \gamma_3 \gamma_3 + \\
 & \left. + E_1^{\epsilon\beta\beta\beta} \gamma_3 \epsilon_{\epsilon\beta} + E_2^{\epsilon\beta\beta\beta} \gamma_3 \partial_{\epsilon\beta} \right] dS + \int_S [N^{\alpha\beta} u_{\beta||\alpha} + \\
 & (3.33)
 \end{aligned}$$

$$+ M^{\alpha\beta} \partial_{\beta||\alpha} - N^{\alpha\beta} B_{\beta\alpha} u_3 - M^{\alpha\beta} B_{\beta\alpha} \partial_3 - N^{\alpha\beta} \epsilon_{\beta\alpha} - M^{\alpha\beta} \partial_{\beta\alpha} +$$

$$+ M^{\alpha\beta} \partial_{3,\alpha} - M^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} + N^{\alpha\beta} (\partial_{\alpha} - \beta_{\alpha}) - N^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha} + N^{\beta\beta} \partial_3 -$$

$$- N^{\beta\beta} \gamma_3] dS - \int_S (F^{\beta} u_{\beta} + F^3 u_3 + L^{\beta} \partial_{\beta} + L^3 \partial_3) dS -$$

$$- \int_{C_6} (T_1^{\beta} u_{\beta} + T_2^{\beta} \partial_{\beta} + T_3 u_3 + T_4 \partial_3) dC_6 -$$

$$- \int_{C_4} [N^{\alpha\beta} (u_{\beta} - u_{0\beta}) v_{\alpha} + M^{\alpha\beta} (\partial_{\beta} - \partial_{0\beta}) v_{\alpha} + N^{\alpha\beta} (u_3 - u_{03}) v_{\alpha} +$$

$$+ M^{\alpha\beta} (\partial_3 - \partial_{03}) v_{\alpha}] dC_4.$$

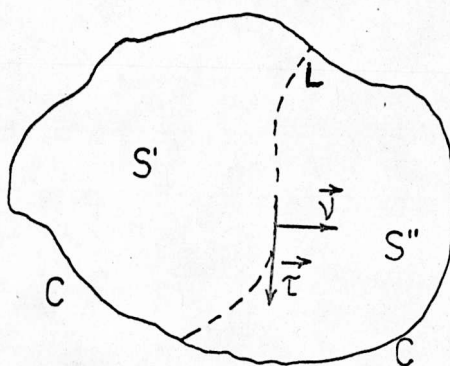
### 3.2 Model powłoki uźebrowanej jako ciała z więzami

W rozdziale 3.1 sprowadzono funkcjonał Hu-Washizu na powierzchnię podstawową powłoki. Załóżmy na niej wzdłuż pewnej krzywej  $L$  / rys. 4/ następujące więzy:

$$\gamma_{(\tau)} = \gamma_{\alpha} \tau^{\alpha} = (\delta_{\alpha} - \beta_{\alpha}) \tau^{\alpha} = 0 \quad (3.34)$$

$$\gamma_3 = \delta_3 = 0$$

Wskaźnik  $(\tau)$  podany w nawiasie nie podlega sumowaniu.



Rys. 4

Rozpatrzmy teraz obszar  $S'$  zakładając, iż wzdłuż krzywej  $L$  występują oddziaływania z  $S''$  zastąpione odpowiednimi siłami wewnętrznymi, które wyróżniono znakiem bis. Są to  $\overset{\text{bis}}{N}^{\alpha\tau}$ ,  $\overset{\text{bis}}{M}^{\alpha\tau}$ ,  $\overset{\text{bis}}{N}^{\alpha 3}$ ,  $\overset{\text{bis}}{M}^{\alpha 3}$ .



Jeśli funkcjonał  $\overline{\pi}$  uzupełnimy o  $\widetilde{\pi} = \widetilde{\pi}[\lambda, (\mu, \delta)]$ , który wyraża się następująco:

$$\widetilde{\pi} = \int_L \left[ \lambda_3 \delta_3 + \lambda_{(\tau)} \tau^\alpha (\delta_\alpha + \mu_{3||\alpha} + B_\alpha^{\mathcal{P}} \mu_\beta) \right] dL - \quad (3.35)$$

$$- \int_L (\ddot{N}^{\alpha\beta} \nu_\alpha \mu_\beta + \ddot{M}^{\alpha\beta} \nu_\alpha \delta_\beta + \ddot{M}^{\alpha 3} \nu_\alpha \delta_3 + \ddot{N}^{\alpha 3} \nu_\alpha \mu_3) dL,$$

to otrzymamy  $\pi^* = \overline{\pi} + \widetilde{\pi}$ , funkcjonał opisujący rozpatrywane zagadnienie.

Podane wyżej wielkości oznaczone  $\lambda_{(\tau)}$ ,  $\lambda_3$  są mnożnikami Lagrange'a, które mają interpretację sił reakcji utrzymujących więzy (3.34).

Dokonajmy wariacji funkcjonału  $\pi^*$ , traktując przyrosty wirtualne argumentów funkcjonału jako wzajemnie niezależne. Zgodnie z podstawowym lematem rachunku wariacyjnego / lemat Dubois-Raymonda / warunkiem stacjonarności funkcjonału  $\pi^*$  jest przyrównanie do zera jego pierwszej wariacji

$$\mathcal{J}(\pi^*) = 0. \quad (3.36)$$

### 3.3 Równania podstawowe

Korzystając z zależności (3.36) otrzymujemy kolejno związki konstytutywne, geometryczne, równania równowagi, warunki brzegowe oraz dodatkowe związki na liniach więzów.

Za wyjątkiem tych ostatnich pozostałe można zapisać poniżej podanymi wyrażeniami dla jednego obszaru, mając na uwadze, że w drugim będą takie same.

Związki konstytutywne:

$$\begin{aligned}
 N^{\alpha\beta} &= E_6^{\alpha\beta\tau\epsilon} \epsilon_{\tau\epsilon} + E_7^{\alpha\beta\tau\epsilon} \partial\epsilon_{\tau\epsilon} + E_1^{\beta\alpha 33} \gamma_3, \\
 M^{\alpha\beta} &= E_7^{\alpha\beta\tau\epsilon} \epsilon_{\tau\epsilon} + E_8^{\alpha\beta\tau\epsilon} \partial\epsilon_{\tau\epsilon} + E_2^{\beta\alpha 33} \gamma_3, \\
 M^{\alpha 3} &= E_3^{\alpha 3 \gamma 3} \epsilon_{\gamma 3} + E_4^{\alpha 3 \gamma 3} \gamma_\gamma, \\
 N^{\alpha 3} &= E_4^{\alpha 3 \gamma 3} \epsilon_{\gamma 3} + E_5^{\alpha 3 \gamma 3} \gamma_\gamma, \\
 N^{33} &= E^{3333} \gamma_3 + E_1^{\alpha\beta 33} \epsilon_{\alpha\beta} + E_2^{\alpha\beta 33} \partial\epsilon_{\alpha\beta}.
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Związki geometryczne:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{\beta\alpha} &= u_{\beta||\alpha} - B_{\beta\alpha} u_3, \\
 \partial\epsilon_{\beta\alpha} &= \partial u_{\beta||\alpha} - B_{\beta\alpha} \partial u_3, \\
 \epsilon_{\alpha 3} &= \partial u_{3|\alpha}, \\
 \gamma_\alpha &= \partial u_\alpha - \beta_\alpha, \\
 \gamma_3 &= \partial u_3.
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Równania równowagi:

$$\begin{aligned}
 N^{\alpha\beta}{}_{|\alpha} + F^\beta - N^{\alpha 3} B_\alpha^\beta &= 0, \\
 N^{\alpha\beta} B_{\beta\alpha} + F^3 + N^{\alpha 3}{}_{|\alpha} &= 0, \\
 M^{\alpha\beta}{}_{|\alpha} + L^\beta - N^{\beta 3} &= 0, \\
 M^{\alpha\beta} B_{\beta\alpha} + L^3 + M^{\alpha 3}{}_{|\alpha} - N^{33} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.39}$$

Warunki brzegowe:

$$\begin{aligned}
 u_\beta &= u_{0\beta}, & \delta_\beta &= \delta_{0\beta}, \\
 u_3 &= u_{03}, & \delta_3 &= \delta_{03},
 \end{aligned}
 \tag{3.40}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 N^{\alpha\beta} v_\alpha &= T_1^\beta, \\
 M^{\alpha\beta} v_\alpha &= T_2^\beta, \\
 N^{\alpha 3} v_\alpha &= T_3, \\
 M^{\alpha 3} v_\alpha &= T_4,
 \end{aligned}
 \tag{3.41}$$

gdzie wyrażenia znajdujące się po prawej stronie równości określone są związkami (3.30).

Dodatkowe zależności na liniach żeber podano z uwzględnieniem zewnętrznych sił pochodzących z obszaru  $S''$ .

Warunki kinematyczne:  $\delta_3 = 0$ ,

$$(\delta_\alpha - \beta_\alpha) \tau^\alpha = 0.$$

(3.42)

Warunki statyczne:

$$(N^{\alpha\beta} - \ddot{N}^{\alpha\beta})v_\alpha + B_\alpha^\beta \lambda_{(\tau)} \tau^\alpha = 0,$$

$$(M^{\alpha\beta} - \ddot{M}^{\alpha\beta})v_\alpha + \lambda_{(\tau)} \tau^\beta = 0,$$

$$(M^{\alpha 3} - \ddot{M}^{\alpha 3})v_\alpha + \lambda_3 = 0, \quad (3.43)$$

$$(N^{\alpha 3} - \ddot{N}^{\alpha 3})v_\alpha + \oint_L [\lambda_{(\tau)} \tau^\alpha \bar{E}_{\alpha\gamma} v^\gamma] = 0,$$

$\lambda_{(\tau)} \tau^\alpha v_\alpha = 0$ ,  $\bar{E}_{\alpha\gamma}$  jest alternatorem na krzywej  $L$ .  
Podane wyżej związki są prawdziwe dla każdego obszaru, dla którego siły indeksowane bis są zewnętrznym obciążeniem pochodzącym z obszarów pozostałych. Podstawiając wyznaczone w "Dodatku" wielkości do zdefiniowanych wcześniej wyrażeń (3.26) otrzymujemy:

$$E^{3333} = A^{3333} 2(H-h),$$

$$E_1^{\epsilon\beta 33} = A^{\epsilon\beta 33} 2(H-h),$$

$$E_2^{\epsilon\beta 33} = A^{\epsilon\beta 33} (B_\delta^\beta - 2H\delta_\delta^\beta) \frac{2}{3}(H^3 - h^3),$$

$$E_3^{\alpha 3\gamma 3} = A^{\alpha 3\gamma 3} \frac{2}{3}(H^3 - h^3),$$

$$E_4^{\alpha 3\gamma 3} = A^{\beta 3\delta 3} \frac{2}{3}(H^3 - h^3) I_{\beta\delta}^{\alpha\gamma},$$

$$E_5^{\alpha 3\gamma 3} = A^{\beta 3\delta 3} \left[ \sigma_\beta^\alpha \sigma_\delta^\gamma 2(H-h) + (B^2)_\delta^\gamma \sigma_\beta^\alpha \frac{2}{3}(H^3 - h^3) + (B_\beta^\alpha - 2H\delta_\beta^\alpha) B_\delta^\gamma \frac{2}{3}(H^3 - h^3) \right], \quad (3.44)$$

$$E_6^{\alpha\beta\tau\epsilon} = A^{\mu\beta\tau\epsilon} \left[ \sigma_\mu^\alpha \sigma_\epsilon^\tau 2(H-h) + (B^2)_\epsilon^\tau \sigma_\mu^\alpha \frac{2}{3}(H^3 - h^3) + (B_\mu^\alpha - 2H\delta_\mu^\alpha) B_\epsilon^\tau \frac{2}{3}(H^3 - h^3) \right],$$

$$E_7^{\alpha\beta\tau\epsilon} = A^{\mu\beta\tau\epsilon} \frac{2}{3}(H^3 - h^3) I_{\mu\epsilon}^{\alpha\tau},$$

$$E_8^{\alpha\beta\tau\epsilon} = A^{\alpha\beta\tau\epsilon} \frac{2}{3}(H^3 - h^3),$$



gdzie

$$I_{\mu}^{\alpha \epsilon} = \partial_{\mu}^{\alpha} B_{\epsilon}^{\epsilon} + B_{\mu}^{\alpha} \partial_{\epsilon}^{\epsilon} - 2H \partial_{\mu}^{\alpha} \partial_{\epsilon}^{\epsilon}. \quad (3.45)$$

Wobec tego związki konstytutywne przybierają postać:

$$\begin{aligned} N^{\alpha \beta} &= A^{\mu \beta \tau \epsilon} \left[ \partial_{\mu}^{\alpha} \partial_{\epsilon}^{\epsilon} 2(H-h) + (B^2)_{\epsilon}^{\epsilon} \partial_{\mu}^{\alpha} \frac{2}{3}(H^3-h^3) + \right. \\ &\quad \left. + (B_{\mu}^{\alpha} - 2H \partial_{\mu}^{\alpha}) B_{\epsilon}^{\epsilon} \frac{2}{3}(H^3-h^3) \right] \epsilon_{\tau \epsilon} + \\ &\quad + A^{\mu \beta \tau \epsilon} \frac{2}{3}(H^3-h^3) I_{\mu}^{\alpha \epsilon} \partial_{\tau \epsilon} + A^{\beta \alpha 33} 2(H-h) \partial_3, \\ M^{\alpha \beta} &= A^{\mu \beta \tau \epsilon} \frac{2}{3}(H^3-h^3) I_{\mu}^{\alpha \epsilon} \epsilon_{\tau \epsilon} + A^{\alpha \beta \tau \epsilon} \frac{2}{3}(H^3-h^3) \partial_{\tau \epsilon} + \\ &\quad + A^{\beta \delta 33} (B_{\delta}^{\beta} - 2H \partial_{\delta}^{\beta}) \frac{2}{3}(H^3-h^3) \partial_3, \quad (3.46) \\ M^{\alpha 3} &= A^{\alpha 3 \gamma 3} \frac{2}{3}(H^3-h^3) \epsilon_{\gamma 3} + A^{\beta 3 \delta 3} \frac{2}{3}(H^3-h^3) I_{\beta}^{\alpha \gamma} \gamma_{\gamma}, \\ N^{\alpha 3} &= A^{\beta 3 \delta 3} \frac{2}{3}(H^3-h^3) I_{\beta}^{\alpha \gamma} \epsilon_{\gamma 3} + A^{\beta 3 \delta 3} \left[ \partial_{\beta}^{\alpha} \partial_{\delta}^{\gamma} 2(H-h) + \right. \\ &\quad \left. + (B^2)_{\delta}^{\gamma} \partial_{\beta}^{\alpha} \frac{2}{3}(H^3-h^3) + (B_{\beta}^{\alpha} - 2H \partial_{\beta}^{\alpha}) B_{\delta}^{\gamma} \frac{2}{3}(H^3-h^3) \right] \gamma_{\gamma}, \\ N^{33} &= A^{3333} 2(H-h) \partial_3 + A^{\alpha \beta 33} 2(H-h) \epsilon_{\alpha \beta} + \\ &\quad + A^{\alpha \delta 33} (B_{\delta}^{\beta} - 2H \partial_{\delta}^{\beta}) \frac{2}{3}(H^3-h^3) \partial_{\alpha \beta}. \end{aligned}$$

### 3.4 Niektóre zależności dla powłoki walcowej i płyty

Opisane w (3.25) tensory powierzchniowe można rozpisać:

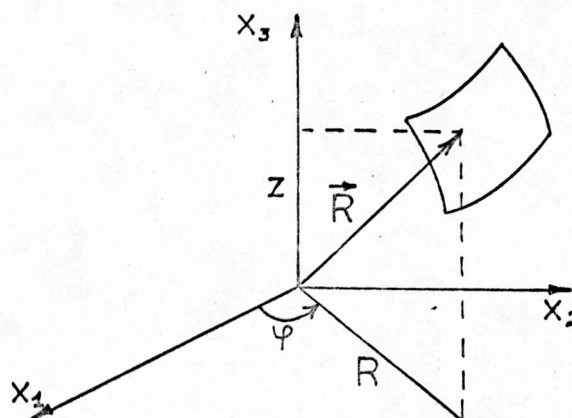
$$\begin{aligned} A^{\alpha\beta\tau\varepsilon} &= \lambda^* A^{\alpha\beta} A^{\tau\varepsilon} + \mu (A^{\alpha\tau} A^{\beta\varepsilon} + A^{\alpha\varepsilon} A^{\beta\tau}), \\ A^{\alpha\gamma\gamma} &= \mu A^{\alpha\gamma}, \\ A^{\alpha\beta\gamma\gamma} &= \lambda^* A^{\alpha\beta}, \\ A^{\gamma\gamma\gamma\gamma} &= \lambda^* + 2\mu. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Występujące w (3.47)  $\lambda^*$  i  $\mu$  wynoszą:

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (3.48)$$

gdzie  $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ .

$\lambda$ ,  $\mu$  są tutaj stałymi Lamego,  $E$ - modułem Younga oraz  $\nu$  współczynnikiem Poissona, natomiast  $A^{\alpha\beta}$  tensorem metrycznym powierzchni podstawowej. Powłokę rozpatruje się w globalnym kartezjańskim układzie współrzędnych  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , którego oś  $x_3$  jest osią obrotu powłoki obrotowej.



Rys. 5

Promień wodzący punktów na powierzchni podstawowej przyjmując parametryzację  $\theta^1 = \varphi$ ,  $\theta^2 = z$  przyjmuje postać:

$$\vec{R} = (R \cos \varphi) \vec{i}_{x1} + (R \sin \varphi) \vec{i}_{x2} + z \vec{i}_{x3} \quad 3.49$$

Wobec tego współczynniki pierwszej i drugiej formy podstawowej dla powierzchni walcowej wynoszą:

$$A_{11} = R^2, \quad A_{22} = 1, \quad A_{12} = A_{21} = 0,$$

$$A^{11} = \frac{1}{R^2}, \quad A^{22} = 1, \quad A^{12} = A^{21} = 0,$$

3.50

$$B_{11} = -R, \quad B_{22} = 0, \quad B_{12} = B_{21} = 0,$$

$$B_1^1 = -\frac{1}{R}, \quad B_2^2 = 0, \quad B_2^1 = B_1^2 = 0.$$

Średnia krzywizna z definicji równa  $H = \frac{1}{2} B_{\alpha}^{\alpha}$  wynosi  $H = -\frac{1}{2R}$ . Na powierzchni walcowej wszystkie symbole

Christoffel'a są równe zero. Nie znikające pochodne kowariantne będą tutaj pochodnymi zwyczajnymi.

Zapiszmy więc związki konstytutywne w pełnej formie:

$$N^{11} = \frac{1}{R^4} (\lambda^* + 2\mu) 2(H-h) \varepsilon_{11} + \frac{\lambda^*}{R^2} 2(H-h) \varepsilon_{22} - \\ - \frac{(\lambda^* + 2\mu)}{R^5} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varepsilon_{11} + \frac{\lambda^*}{R^2} 2(H-h) \sigma_3 ,$$

$$N^{22} = \frac{\lambda^*}{R^2} 2(H-h) \varepsilon_{11} + (\lambda^* + 2\mu) \left[ 2(H-h) + \frac{1}{R^2} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \right] \varepsilon_{22} + \\ + (\lambda^* + 2\mu) \frac{1}{R} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varepsilon_{22} + \lambda^* 2(H-h) \sigma_3 ,$$

$$N^{12} = \frac{\mu}{R^2} 2(H-h) \varepsilon_{12} + \frac{\mu}{R^2} 2(H-h) \varepsilon_{21} - \\ - \frac{\mu}{R^3} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varepsilon_{21} ,$$

$$N^{21} = \frac{\mu}{R^2} 2(H-h) \varepsilon_{21} + \frac{\mu}{R^2} \left[ 2(H-h) + \frac{1}{R^2} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \right] \varepsilon_{12} - \\ - \frac{\mu}{R^3} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varepsilon_{12} ,$$

(3.51)

$$M^{11} = - \frac{(\lambda^* + 2\mu)}{R^5} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varepsilon_{11} + \frac{(\lambda^* + 2\mu)}{R^4} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varepsilon_{11} + \\ + \frac{\lambda^*}{R^2} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varepsilon_{22} - \frac{\lambda^*}{R^3} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \sigma_3 ,$$

$$M^{22} = \frac{(\lambda^* + 2\mu)}{R} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varepsilon_{22} + \frac{\lambda^*}{R^2} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varepsilon_{11} + \\ + (\lambda^* + 2\mu) \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varepsilon_{22} ,$$

$$M^{12} = - \frac{\mu}{R^3} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varepsilon_{21} + \frac{\mu}{R^2} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varepsilon_{12} + \\ + \frac{\mu}{R^2} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varepsilon_{21} ,$$



$$M^{21} = \frac{\mu}{R^3} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varepsilon_{12} + \frac{\mu}{R^2} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varkappa_{12} + \\ + \frac{\mu}{R^2} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varkappa_{21}, \quad (3.51) \text{ c.d.}$$

$$M^{13} = \frac{\mu}{R^2} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varepsilon_{13} - \frac{\mu}{R^3} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \gamma_1,$$

$$M^{23} = \mu \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varepsilon_{23} + \frac{\mu}{R} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \gamma_2,$$

$$N^{13} = - \frac{\mu}{R^3} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varepsilon_{13} + \frac{\mu}{R^2} 2(H - h) \gamma_1,$$

$$N^{23} = \frac{\mu}{R} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varepsilon_{23} + \mu \left[ 2(H - h) + \frac{1}{R^2} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \right] \gamma_2,$$

$$N^{33} = (\lambda^* + 2\mu) 2(H - h) \vartheta_3 + \frac{\lambda^*}{R^2} 2(H - h) \varepsilon_{11} + \\ + \lambda^* 2(H - h) \varepsilon_{22} - \frac{\lambda^*}{R^3} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varkappa_{11}.$$

Tensory stanu odkształcenia dla powłoki walcowej przyjmują postać:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - R u_3, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial Z}, \\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial Z}, \quad \varepsilon_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial \varphi}, \\ \gamma_1 = \vartheta_1 + \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} u_1, \\ \gamma_2 = \vartheta_2 + \frac{\partial u_3}{\partial Z}, \quad (3.52)$$

$$\varkappa_{11} = \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \varphi} - R \vartheta_3, \quad \varkappa_{12} = \frac{\partial \vartheta_1}{\partial Z}, \\ \varkappa_{22} = \frac{\partial \vartheta_2}{\partial Z}, \quad \varkappa_{21} = \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \varphi}, \\ \varepsilon_{13} = \frac{\partial \vartheta_3}{\partial \varphi}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{\partial \vartheta_3}{\partial Z}.$$

Zapišmy analogiczne związki konstytutywne i tensory stanu odkształcenia dla płyty uwzględniając, że współczynniki drugiej formy podstawowej dla parametryzacji  $\theta^1 = x_1$ ,  $\theta^2 = x_2$  są równe zero, co daje też  $\mu_\rho^\alpha = \delta_\rho^\alpha$ , a więc w efekcie także niektóre z tensorów będących kombinacjami tensorów metrycznych, grubości i stałych materiałowych są równe zero.

Związki konstytutywne:

$$M^{11} = (\lambda^* + 2\mu) \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varepsilon_{11} + \lambda^* \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varepsilon_{22},$$

$$M^{22} = (\lambda^* + 2\mu) \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varepsilon_{22} + \lambda^* \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varepsilon_{11},$$

$$M^{12} = M^{21} = \mu \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varepsilon_{12} + \mu \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varepsilon_{21},$$

$$M^{13} = \mu \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varepsilon_{13},$$

$$M^{23} = \mu \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \varepsilon_{23},$$

(3.53)

$$N^{13} = \mu 2(H - h) \gamma_1,$$

$$N^{23} = \mu 2(H - h) \gamma_2,$$

$$N^{33} = (\lambda^* + 2\mu) 2(H - h) \gamma_3.$$

Tensory stanu odkształcenia:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial X_1} \qquad \varepsilon_{22} = \frac{\partial \mathcal{J}_2}{\partial X_2}$$

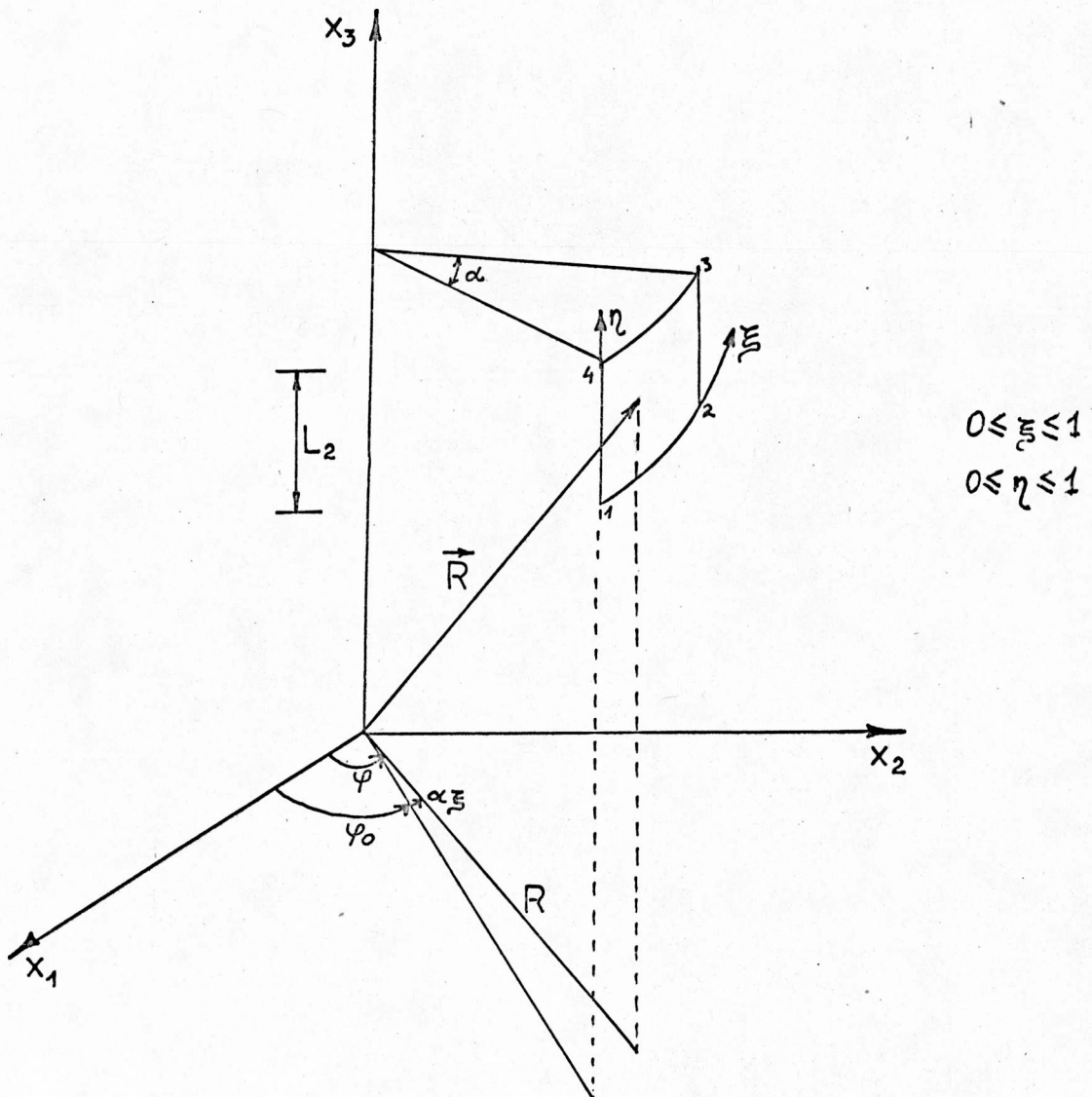
$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial X_2} = \frac{\partial \mathcal{J}_2}{\partial X_1} \qquad (3.54)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{\partial \mathcal{J}_3}{\partial X_1} \qquad \varepsilon_{23} = \frac{\partial \mathcal{J}_3}{\partial X_2}$$

#### 4. WYKORZYSTANIE METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH DO NUMERYCZNEGO ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA

##### 4.1 Powłoki

Zastosowano czworokątny o podwójnej krzywiznie element skończony [34], którego boki są częściami równoleżników i południków (rys. 6). Poniżej przedstawione przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia są wielkościami fizycznymi.



Rys. 6



Wektor przemieszczeń ma postać:

$$\begin{aligned} u &= \{ \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, u_1, u_2, u_3 \}^T, \\ \bar{u} &= \{ \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3 \}^T, \end{aligned} \quad (4.1)$$

gdzie pierwszy z wektorów odpowiada przemieszczeniom w układzie globalnym, natomiast drugi w układzie lokalnym.

Zależność pomiędzy obydwoimi wektorami można zapisać:

$$\bar{u} = T \cdot u, \quad (4.2)$$

$$T = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Macierz  $t$  określona jest w sposób następujący:

$$t = \begin{bmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Zauważmy, że

$$\varphi = \varphi_0 + \xi\alpha. \quad (4.5)$$

Wektor odkształceń opisany jest trzynastoma składowymi:

$$\begin{aligned} \varepsilon = \{ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varkappa_{11}, \varkappa_{21}, \\ \varkappa_{12}, \varkappa_{22}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22} \}^T \end{aligned} \quad (4.6)$$

Związek pomiędzy odkształceniami a przemieszczeniami przedstawia się jako

$$\varepsilon = L \cdot \bar{u}, \quad (4.7)$$

gdzie  $L$  jest operatorem,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & -\frac{1}{R} & & \frac{1}{\alpha R} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ & 1 & & & & \frac{1}{L_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ & & 1 & & & \\ & & \frac{1}{\alpha R} \frac{\partial}{\partial \xi} & & & \\ & & \frac{1}{L_2} \frac{\partial}{\partial \eta} & & & \\ \frac{1}{\alpha R} \frac{\partial}{\partial \xi} & & \frac{1}{R} & & & \\ & \frac{1}{\alpha R} \frac{\partial}{\partial \xi} & & & & \\ \frac{1}{L_2} \frac{\partial}{\partial \eta} & & & & & \\ & \frac{1}{L_2} \frac{\partial}{\partial \eta} & & & & \\ & & & \frac{1}{\alpha R} \frac{\partial}{\partial \xi} & & \frac{1}{R} \\ & & & & \frac{1}{\alpha R} \frac{\partial}{\partial \xi} & \\ & & & \frac{1}{L_2} \frac{\partial}{\partial \eta} & & \\ & & & & \frac{1}{L_2} \frac{\partial}{\partial \eta} & \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Podane powyżej  $\alpha$ ,  $R$  pokazane są na rys. 6, natomiast  $\xi, \eta$  są współrzędnymi lokalnymi elementu skończonego.

Naprężenia wyrażamy poprzez:  $\sigma = D \cdot \epsilon$ , (4.9)

gdzie  $D$  jest macierzą sprężystości, a

$$\sigma = \{N^{13}, N^{23}, N^{33}, M^{13}, M^{23}, M^{11}, M^{12}, M^{21}, M^{22}, N^{11}, N^{12}, N^{21}, N^{22}\}^T \quad (4.10)$$

D =

|                                               |                     |                           |                      |                     |                      |                     |                   |                           |                                        |                                          |                     |                   |                 |
|-----------------------------------------------|---------------------|---------------------------|----------------------|---------------------|----------------------|---------------------|-------------------|---------------------------|----------------------------------------|------------------------------------------|---------------------|-------------------|-----------------|
| $\psi \mu \left[ P_2 + \frac{P_1}{R} \right]$ |                     |                           | $-\frac{\mu P_1}{R}$ |                     |                      |                     |                   |                           |                                        |                                          |                     |                   |                 |
|                                               | $\psi \mu P_2$      |                           |                      | $\frac{\mu P_1}{R}$ |                      |                     |                   |                           |                                        |                                          |                     |                   |                 |
|                                               |                     | $E P_2$                   |                      |                     |                      |                     |                   | $\frac{\lambda^* P_1}{R}$ | $\lambda^* P_2$                        |                                          |                     |                   | $\lambda^* P_2$ |
| $-\frac{\mu P_1}{R}$                          |                     |                           | $\mu P_1$            |                     |                      |                     |                   |                           |                                        |                                          |                     |                   |                 |
|                                               | $\frac{\mu P_1}{R}$ |                           |                      | $\mu P_1$           |                      |                     |                   |                           |                                        |                                          |                     |                   |                 |
|                                               |                     |                           |                      |                     | $E P_1$              |                     |                   | $\lambda^* P_1$           | $-\frac{E P_1}{R}$                     |                                          |                     |                   |                 |
|                                               |                     |                           |                      |                     | $\mu P_1$            | $\mu P_1$           |                   |                           |                                        | $-\frac{\mu P_1}{R}$                     |                     |                   |                 |
|                                               |                     |                           |                      |                     | $\mu P_1$            | $\mu P_1$           |                   |                           |                                        |                                          | $\frac{\mu P_1}{R}$ |                   |                 |
|                                               |                     | $\frac{\lambda^* P_1}{R}$ |                      |                     | $\lambda^* P_1$      |                     |                   | $E P_1$                   |                                        |                                          |                     | $\frac{E P_1}{R}$ |                 |
|                                               |                     | $\lambda^* P_2$           |                      | $-\frac{E P_1}{R}$  |                      |                     |                   |                           | $E \left[ P_2 + \frac{P_1}{R} \right]$ |                                          |                     |                   | $\lambda^* P_2$ |
|                                               |                     |                           |                      |                     | $-\frac{\mu P_1}{R}$ |                     |                   |                           |                                        | $\mu \left[ P_2 + \frac{P_1}{R} \right]$ | $\mu P_2$           |                   |                 |
|                                               |                     |                           |                      |                     |                      | $\frac{\mu P_1}{R}$ |                   |                           |                                        | $\mu P_2$                                | $\mu P_2$           |                   |                 |
|                                               |                     | $\lambda^* P_2$           |                      |                     |                      |                     | $\frac{E P_1}{R}$ | $\lambda^* P_2$           |                                        |                                          |                     |                   | $E P_2$         |

W macierzy  $D$  oznaczono:

$$\begin{aligned} P_1 &= 2(H - h) , \\ P_2 &= \frac{2}{3}(H^3 - h^3) . \end{aligned} \quad (4.12)$$

Związki konstytutywne dla sił poprzecznych zostały zmodyfikowane poprzez wprowadzenie współczynnika  $\psi$ , który określa rozkład naprężeń stycznych. Dla rozkładu stałego  $\psi$  równe jest jeden, a dla rozkładu parabolicznego wynosi  $5/6$  [20].

Wektor przemieszczeń można przedstawić w postaci:

$$u = N \cdot \delta \quad (4.13)$$

Macierz kształtu  $N$  składa się z iloczynów wielomianów Hermite'a, których stosowanie jest korzystniejsze, ze względu na mniejszą liczbę parametrów węzłowych niż stosując wielomiany Lagrange'a, gdzie wymagane jest budowanie elementów z węzłami wewnętrznymi. Macierz kształtu z wykorzystaniem funkcji liniowych stosował Oden [18] do rozwiązywania belek i płyt z uwzględnieniem deformacji poprzecznej. Konieczny był jednak podział na bardzo dużą ilość elementów.

Wektor  $\delta$  jest wektorem parametrów węzłowych

$$\delta = \{ \delta^1, \delta^2, \delta^3, \delta^4 \}^T \quad (4.14)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \delta^i = \{ & \delta_1^i, \delta_{1,1}^i, \delta_{1,2}^i, \delta_2^i, \delta_{2,1}^i, \delta_{2,2}^i, \\ & \delta_3^i, \delta_{3,1}^i, \delta_{3,2}^i, \varpi_1^i, \varpi_{1,1}^i, \varpi_{1,2}^i, \\ & \varpi_2^i, \varpi_{2,1}^i, \varpi_{2,2}^i, \varpi_3^i, \varpi_{3,1}^i, \varpi_{3,2}^i \} . \end{aligned} \quad (4.15)$$



Wektor parametrów węzłowych ma 72 składowe. Macierz kształtu ma wymiar  $6 \times 72$ . W związku z jej dużym rozmiarem zapiszmy tylko przykładowy wiersz wektora przemieszczeń uwzględniając tylko niezerowe wyrazy:

$$\begin{aligned} u_3 = & u_3^1 N_1 N_2 + u_3^2 N_3 N_2 + u_3^3 N_3 N_4 + u_3^4 N_1 N_4 + \\ & + u_{3,1}^1 N_5 N_2 + u_{3,1}^2 N_7 N_2 + u_{3,1}^3 N_7 N_4 + u_{3,1}^4 N_5 N_4 + \\ & + u_{3,2}^1 N_1 N_6 + u_{3,2}^2 N_3 N_6 + u_{3,2}^3 N_3 N_8 + u_{3,2}^4 N_1 N_8, \end{aligned} \quad (4.16)$$

gdzie

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \\ N_2 &= 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3, \\ N_3 &= 3\xi^2 - 2\xi^3, \\ N_4 &= 3\eta^2 - 2\eta^3, \\ N_5 &= (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \alpha_R, \\ N_6 &= (\eta - 2\eta^2 + \eta^3) \cdot L_2, \\ N_7 &= (\xi^3 - \xi^2) \alpha_R, \\ N_8 &= (\eta^3 - \eta^2) \cdot L_2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Wobec tego wektor odkształceń można podać w postaci:

$$\varepsilon = L \cdot \bar{u} = L \cdot T \cdot N \cdot \delta = B \cdot \delta, \quad (4.18)$$

$$B = L \cdot T \cdot N.$$

Macierz sztywności elementu i wektor wyrazów wolnych zbudowano według standardowego algorytmu.

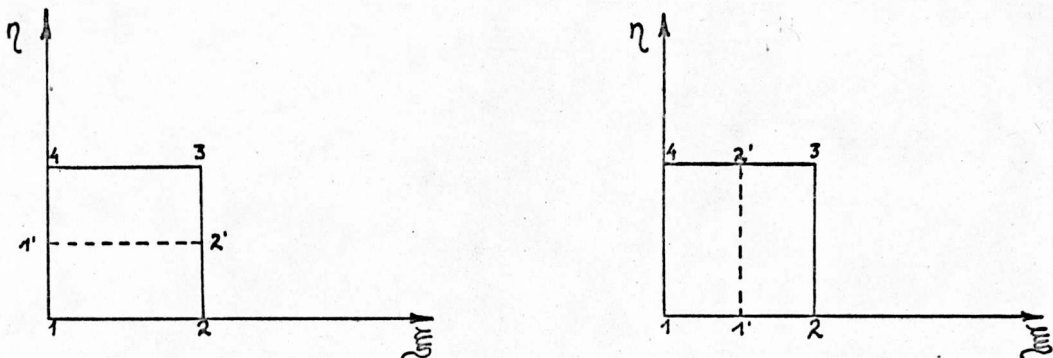
$$K^{(e)} = \alpha \cdot R \cdot L_2 \cdot \int_0^1 \int_0^1 B^{T(e)} \cdot D \cdot B^{(e)} \cdot d\xi \cdot d\eta, \quad (4.19)$$

$$F^{(e)} = \alpha \cdot R \cdot L_2 \cdot \int_0^1 \int_0^1 N^{T(e)} \cdot p^{(e)} \cdot d\xi \cdot d\eta, \quad (4.20)$$

$p^{(e)}$  jest wektorem obciążeń węzłowych elementu.

W związku ze stosowaniem wielomianów Hermite'a trzeciego stopnia konieczne stało się, przy wykorzystaniu całkowania numerycznego wykonywanie go w dziewięciu punktach, po trzy w każdym kierunku.

W rozważaniach numerycznych przyjęto dwa rodzaje wzajemnie ortogonalnych więzów odpowiadających żebrom południkowym i równoleżnikowym. W układach lokalnych pokazano je na rys. 7 / linie przerywane/.



Rys. 7

Więzy określone są w układzie lokalnym, w zapisie tensorowym.

$$\begin{aligned} -\frac{\bar{u}_1}{R} + \frac{\bar{u}_{3,\xi}}{\alpha} + \bar{\gamma}_1 &= \bar{\gamma}_1 = 0 & \text{dla więzów poziomych} \\ \frac{\bar{u}_{3,\eta}}{L_2} + \bar{\gamma}_2 &= \bar{\gamma}_2 = 0 & \text{dla więzów pionowych} \end{aligned} \quad (4.21)$$

W układzie globalnym , w wielkościach fizycznych powyższy warunek zapisujemy:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{R}(-u_1 \cdot \sin \varphi + u_2 \cdot \cos \varphi) - \mathcal{J}_1 \cdot \sin \varphi + \mathcal{J}_2 \cdot \cos \varphi + \\
 & + \frac{1}{\alpha \cdot R} (u_1 \cdot \cos \varphi + u_2 \cdot \sin \varphi)_{,\xi} = \overline{\gamma}_1 = 0, \\
 & \frac{1}{L_2} (u_1 \cdot \cos \varphi + u_2 \cdot \sin \varphi)_{,\eta} + \mathcal{J}_3 = \overline{\gamma}_2 = 0.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

W celu sformułowania globalnych równań równowagi zapiszmy funkcjonał Lagrange'a:

$$L^* = L' + L'', \tag{4.23}$$

gdzie

$$L' = \int_S \frac{1}{2} \sigma^T \cdot \epsilon \cdot dS - \int_S f \cdot u \cdot dS, \tag{4.24}$$

$$L'' = \int_L \lambda \cdot \gamma \cdot dL. \tag{4.25}$$

Mnożniki Lagrange'a aproksymujemy poprzez:

$$\lambda = \overline{N} \cdot \omega, \tag{4.26}$$

przyjmujemy

$$\omega = \{\lambda_{1,}, \lambda_{2,}\}^T \quad \overline{N} = \{1 - \xi, \xi\}^T. \tag{4.27}$$

Wielkość  $\xi$  przyjmuje wartość  $\xi$  lub  $\eta$  odpowiednio dla więzów poziomych i pionowych.

$$\gamma = N' \cdot \delta. \quad (4.28)$$

We wzorze powyższym  $N'$  jest funkcją kształtu opartą o wielomiany Hermite'a.

Przyjmując  $\bar{G} = \bar{N} \cdot N', \quad (4.29)$

zapiszemy funkcjonał Lagrange'a dla całej konstrukcji.

$$L = \frac{1}{2} \sum_e \delta_{(e)}^T K^{(e)} \delta_{(e)} - \sum_e \delta_{(e)}^T f^{(e)} + \sum_e \delta_{(e)}^T \bar{G}_{(e)} \omega_{(e)}. \quad (4.30)$$

Wariując powyższy funkcjonał i przyrównując jego wariację do zera oraz wysumowując po elementach otrzymamy:

$$d(\delta^T) \cdot K \cdot \delta - d(\delta^T) \cdot F + d(\delta^T) \cdot \bar{G} \omega + \delta^T \bar{G} \cdot d(\omega) = 0. \quad (4.31)$$

Równanie to jest równoważne zapisowi

$$\begin{aligned} K \cdot \delta - \bar{G} \cdot \omega &= F, \\ \bar{G}^T \cdot \delta &= 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

co graficznie przedstawiono na rys. 8.

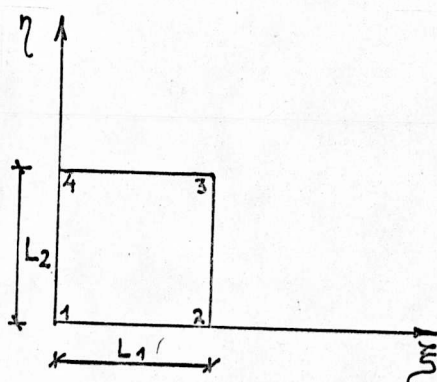
$$\begin{bmatrix} & 0 \\ K & \\ 0 & \\ \bar{G}^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rys. 8



## 4.2 Płyty

W płytach zastosowano podobny element skończony (rys. 9).



Rys. 9

Wektor przemieszczeń zapisujemy w sposób następujący:

$$u = \{ \delta_1, \delta_2, u_3 \}^T \quad (4.33)$$

Wektor odkształceń opisany jest pięcioma składowymi:

$$\varepsilon = \{ \gamma_1, \gamma_2, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22} \}^T \quad (4.34)$$

Natomiast związek między odkształceniami a przemieszczeniami można zapisać:

$$\varepsilon = L \cdot u. \quad (4.35)$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \frac{1}{L_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ & 1 & \frac{1}{L_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{1}{L_1} \frac{\partial}{\partial \xi} & & \\ \frac{1}{L_2} \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{1}{L_1} \frac{\partial}{\partial \xi} & \\ & \frac{1}{L_2} \frac{\partial}{\partial \eta} & \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Naprężenia wyrażają się wzorem:

$$\zeta = D \cdot \varepsilon, \quad (4.37)$$

gdzie

$$\zeta = \{ N^{13}, N^{23}, M^{11}, M^{12}, M^{22} \}^T, \quad (4.38)$$

oraz

$$D = \begin{bmatrix} \psi \mu P_2 & & & & \\ & \psi \mu P_2 & & & \\ & & E P_1 & & \lambda^* P_1 \\ & & & G P_1 & \\ & & \lambda^* P_1 & & E P_1 \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Współczynnik  $\psi$  określa rozkład naprężeń stycznych.  
Wektor parametrów węzłowych dla elementu płytowego

ma postać 
$$\delta = \{ \delta^1, \delta^2, \delta^3, \delta^4 \}^T, \quad (4.40)$$

gdzie

$$\delta^i = \{ \delta_1^i, \delta_{11}^i, \delta_{12}^i, \delta_2^i, \delta_{21}^i, \delta_{22}^i, u_3^i, u_{31}^i, u_{32}^i \}^T. \quad (4.41)$$

Więzy zapisujemy następująco:

$$u_{31} + \delta_1 = \gamma_1 = 0, \quad (4.42)$$

$$u_{32} + \delta_2 = \gamma_2 = 0.$$

Dalszy algorytm jest taki sam jak dla powłoki, w efekcie zaś otrzymujemy układ równań o tym samym charakterze.

## 5. PRZYKŁADY LICZBOWE

W oparciu o algorytm z rozdziału 4 zbudowano programy w języku Algol na EMC serii Odra 1300, pracujące pod kontrolą systemu operacyjnego George 3.

Istnieją dwie zasadnicze trudności przy rozwiązywaniu numerycznym zagadnienia, a mianowicie po pierwsze duży rozmiar zadania numerycznego tzn. problem wymaga dużych pamięci i czasów, oraz po drugie brakuje w dostępnej literaturze porównywalnych rozwiązań. Wobec tego główną analizę przeprowadzono dla płyt, stosując przy tym pewne porównania z rozwiązaniami dla płyt według teorii Kirchhoff'a - Love'a.

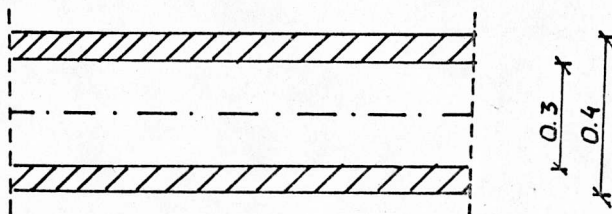
Rozwiązano płytę kwadratową o boku  $L_1 = L_2 = 10.0$  m, swobodnie podpartą na krawędziach o następujących stałych materiałowych:

$$E = 23100 \text{ MPa} \quad / \text{ B15 } /$$

$$\nu = 1/6$$

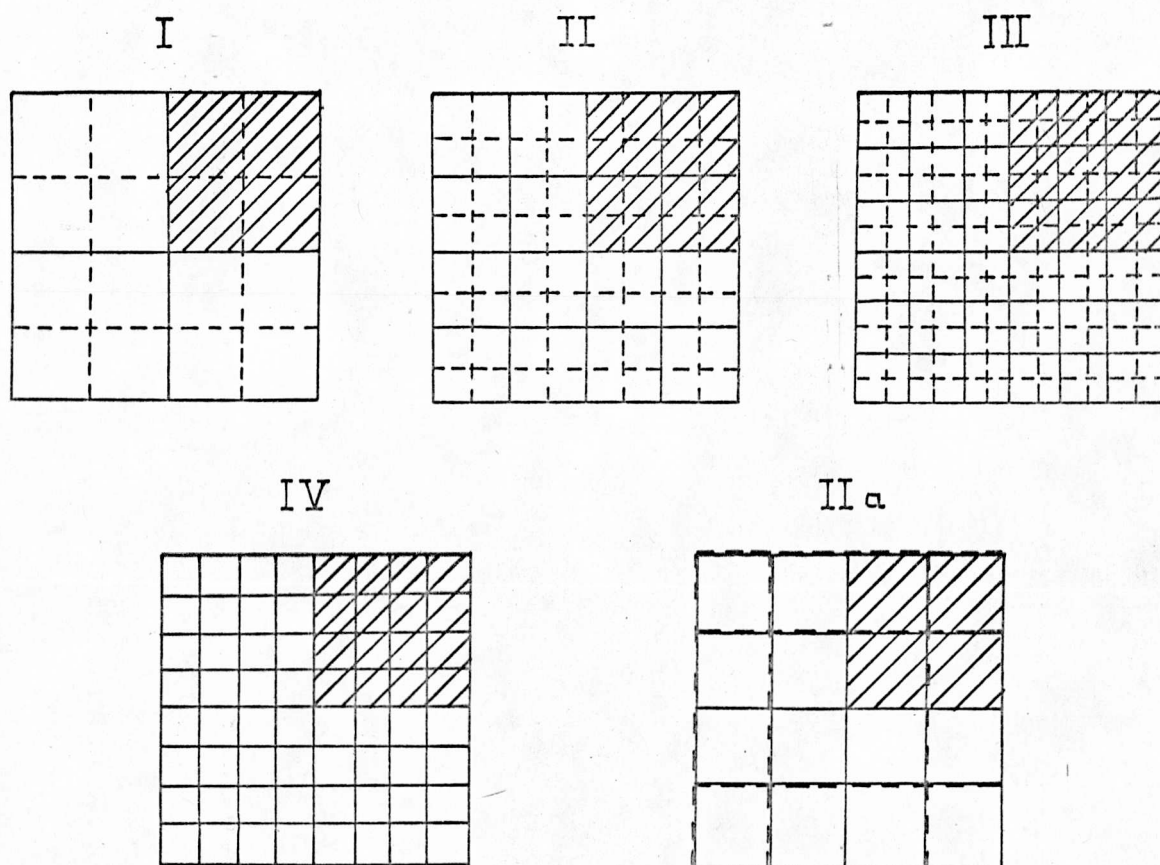
obciążoną siłą skupioną w środku  $P = 1.0 \text{ kN}$  / oraz obciążeniem równomiernie rozłożonym  $q = 1.0 \text{ kN/m}^2$  /.

Przekrój poprzeczny przedstawiono na rys.10 .



Rys. 10

Płaszcz płytowy ma 0.05m grubości z każdej strony, żebra natomiast mają wysokość 0.3 m , ich rozmieszczenie podano w zależności od podziału na elementy na rys. 11 .



Rys. 11

W wyniku rozwiązania układu (4.32) otrzymano przemieszczenia, a wykorzystując je wyznaczono siły wewnętrzne dla wybranych przypadków. Analizowano przede wszystkim przemieszczenia przy różnym położeniu i zagęszczeniu żeber.

W kolejnych tabelach i na rysunkach przedstawiono wyniki obliczeń.

Tabela 1

| podział | $u_3 (q) [m]$           | $u_3 (P) [m]$           |
|---------|-------------------------|-------------------------|
| I       | $2.3322 \times 10^{-1}$ | $6.9314 \times 10^{-3}$ |
| II      | $3.0192 \times 10^{-1}$ | $8.4585 \times 10^{-3}$ |
| III     | $3.2288 \times 10^{-1}$ | $9.1467 \times 10^{-3}$ |
| IV      | $3.2926 \times 10^{-1}$ | $9.3684 \times 10^{-3}$ |
| K-L     | $3.2039 \times 10^{-1}$ | $9.5091 \times 10^{-3}$ |



W tabeli 1 zamieszczono zestawienia rzędnych maksymalnego ugięcia  $u_3$  dla płyty pełnej, w której nie założono więzów, a współczynnik rozkładu naprężeń stycznych  $\psi$  przyjęto zgodnie z literaturą [20] jako równy 5/6. Wyniki porównano z rozwiązaniami według Kirchhoff'a - Love'a [29] umieszczonymi w ostatnim wierszu tabeli. Stwierdzono dobrą zbieżność rozwiązań dla podziału jak na rys. 11 w przypadku obciążenia równomiernie rozłożonego  $u_3(q)$  oraz nieco gorszą dla siły skupionej  $u_3(P)$ .

W tabeli 2 przedstawiono wielkości podobne jak w tabeli 1 lecz dla płyty dwuwarstwowej (rys. 10), też bez więzów, współczynnik  $\psi$  przyjęto równy jeden.

W przypadku braku więzów modelujących żebra i współczynnika  $\psi$  równym zero zadanie staje się nieokreślone.

Tabela 2

| podział | $u_3(q) [m]$            | $u_3(P) [m]$            |
|---------|-------------------------|-------------------------|
| I       | $4.6145 \times 10^{-1}$ | $1.3279 \times 10^{-2}$ |
| II      | $5.5695 \times 10^{-1}$ | $1.5660 \times 10^{-2}$ |
| III     | $5.8056 \times 10^{-1}$ | $1.6506 \times 10^{-2}$ |
| IV      | $5.8729 \times 10^{-1}$ | $1.6785 \times 10^{-2}$ |
| K-L     | $5.5419 \times 10^{-1}$ | $1.6448 \times 10^{-2}$ |

Tak więc, przeanalizujemy sytuację, w której założono więzy i podział na elementy jak na rys. 11 dla  $\psi$  równego zero, tzn. gdy cała siła poprzeczna przenoszona jest przez żebra.

Na kolejnych rysunkach 12, 13, 14 przedstawiono wykresy przemieszczeń  $u_3$  i momentów zginających  $M^{11}$  dla obciążenia  $q$  (rys. 12), obciążenia  $P$  (rys. 13), oraz obciążenia  $q$  przy zamocowaniu sztywnym płyty (rys. 14).

Na każdym z rysunków linia przerywana oznacza  $u_3$  lub  $M^{II}$  dla podziału I, linia ciągła dla podziału II oraz linia punktowa dla podziału III. Rozwiązanie według Kirchhoff'a - Love'a narysowano linią ciągłą z symbolem K-L. Pomiędzy wykresami  $u_3$  i  $M^{II}$  umieszczono schematycznie pokazany podział na elementy wraz z rozmieszczeniem żeber zaznaczonych pionowymi liniami przerywanymi.

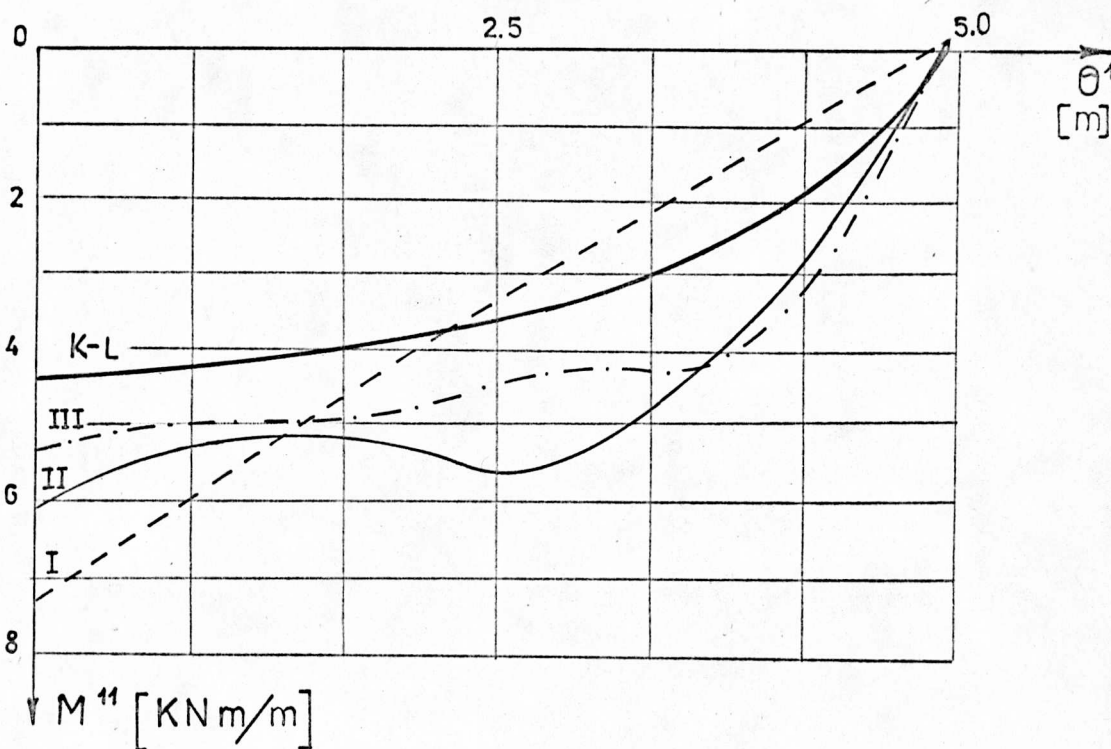
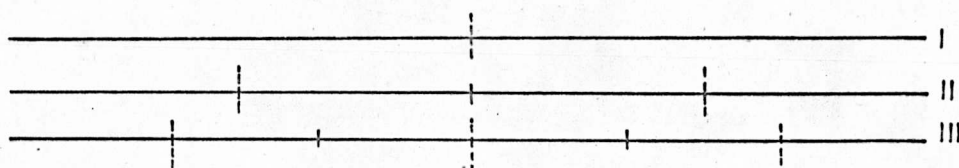
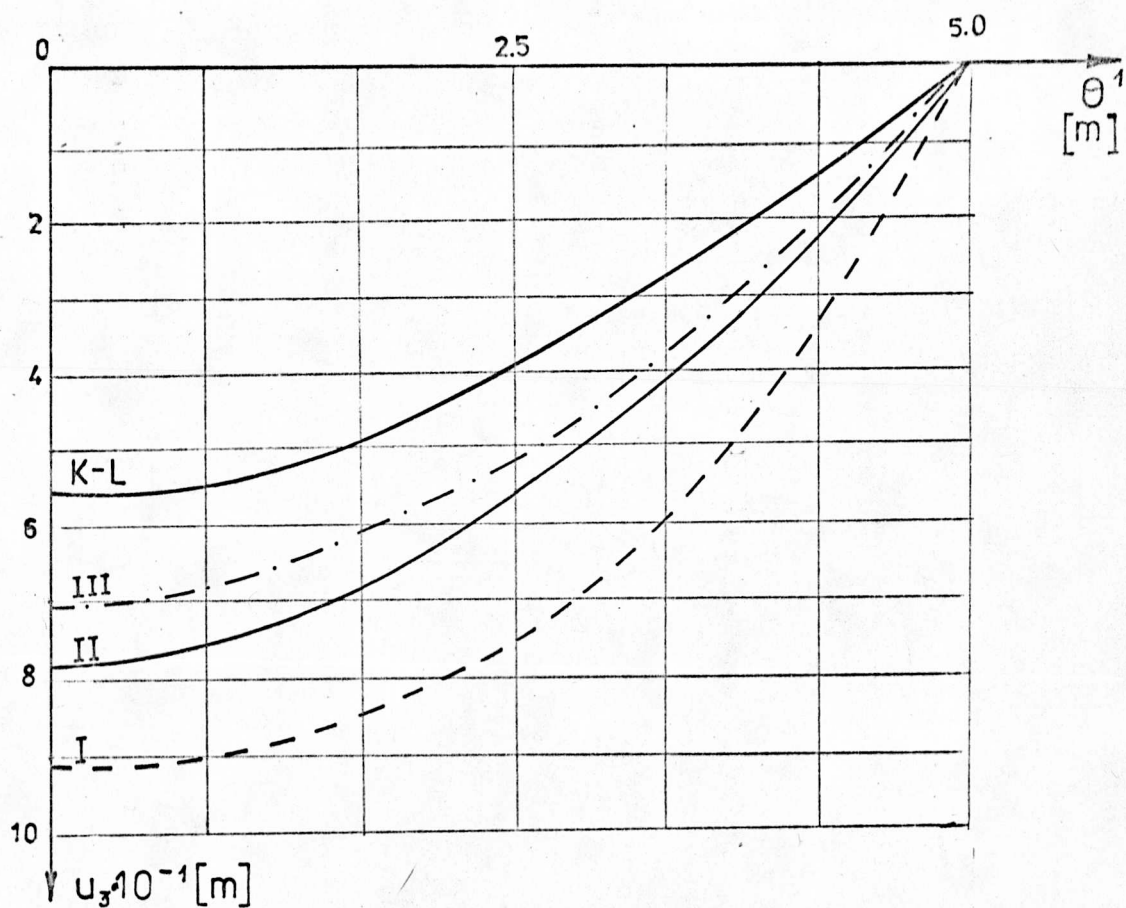
Wykresy przemieszczeń wykazują tendencję zbliżania się do rozwiązania Kirchhoff'a - Love'a, / oznaczonego dalej K-L /, w miarę zwiększania się podziału i wzrostu liczby żeber.

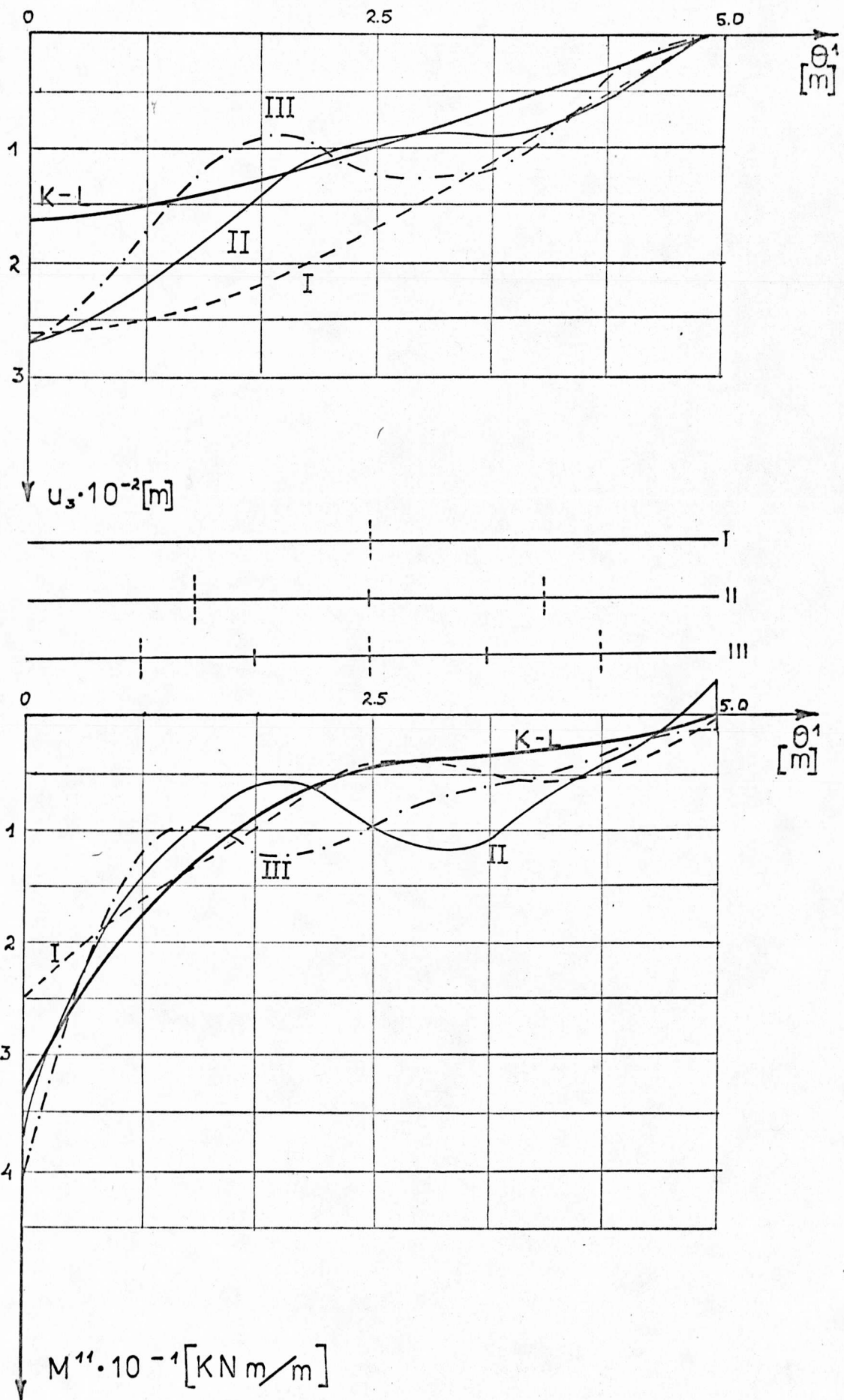
Na wykresach momentów  $M^{II}$  zauważyć można, że żebra w sposób wyraźny zaburzają ich przebieg. Dla podziału I przebieg wykresu jest niemal prostoliniowy z tendencją do tworzenia krzywizny przeciwnej niż w rozwiązaniu K-L. Dla podziału II, podobnie zresztą jak dla podziału III wpływ żeber jest duży w strefie środkowej płyty i zanika przy podporach. Wielkość momentu zmniejsza się w sąsiedztwie żeber.

Łagodny przebieg  $u_3$  dla obciążenia  $q$  zmienia się dla obciążenia  $P$  (rys.13), a wykres momentów jest tym bardziej nieregularny.

Na wszystkich wymienionych rysunkach 12, 13, 14 zauważono dość dobrą zbieżność dla momentów zginających / szczególnie w strefie przypodporowej /, choć jak wiadomo w metodzie elementów skończonych dla danego podziału zawsze przemieszczenia wykazują lepszy stopień zbieżności do rozwiązań ścisłych niż obliczane przy ich wykorzystaniu momenty.

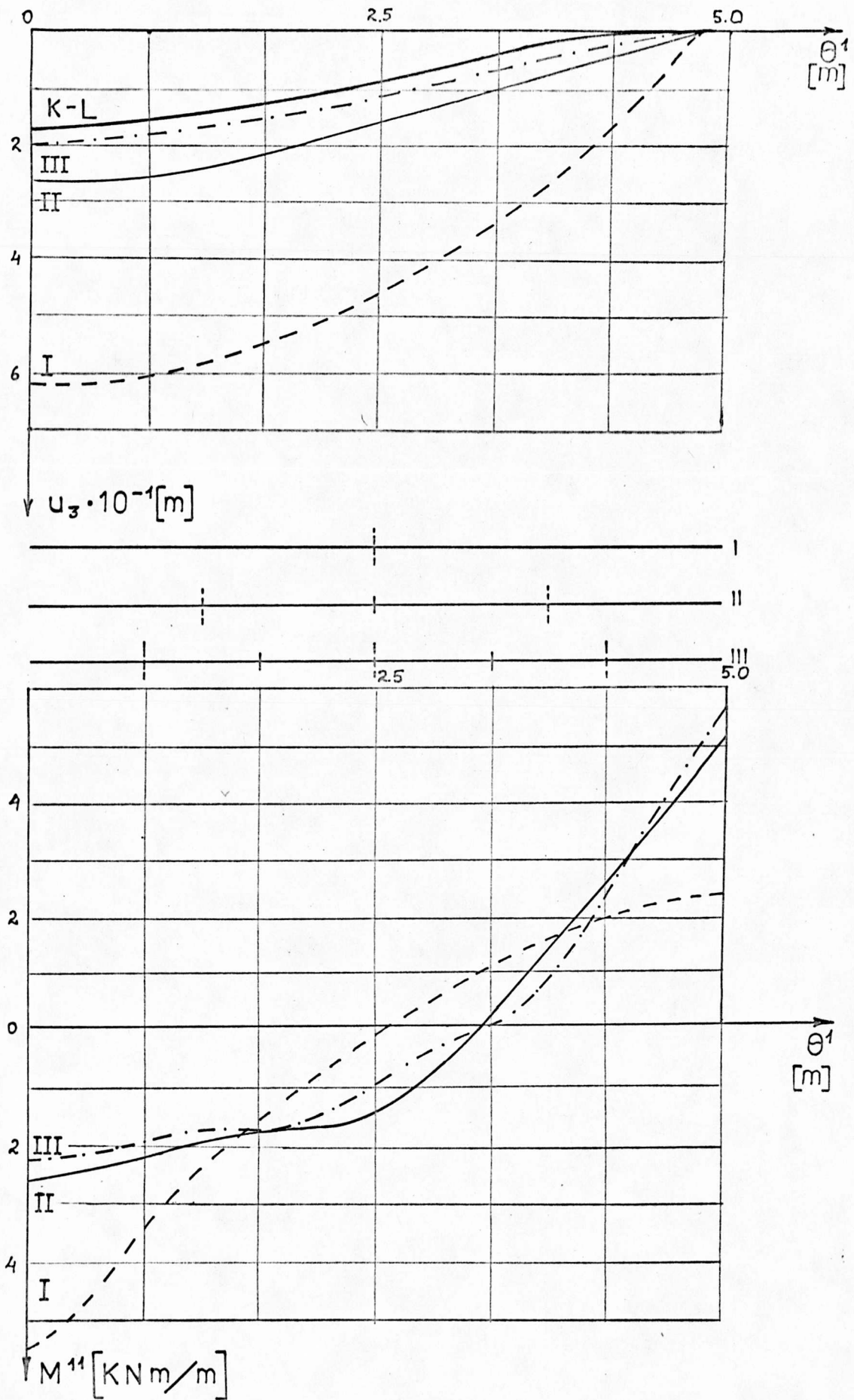
Kolejne rysunki 15 i 16 pokazują w podobnym jak poprzednio układzie wykresy  $u_3$  i  $M^{II}$  dla  $\psi = 1$ , przy czym dla zwiększenia czytelności w przypadku momentów pozostawiono jedynie wykresy dla podziału III i rozwiązanie K-L. Wpływ żeber jest wyraźnie widoczny.



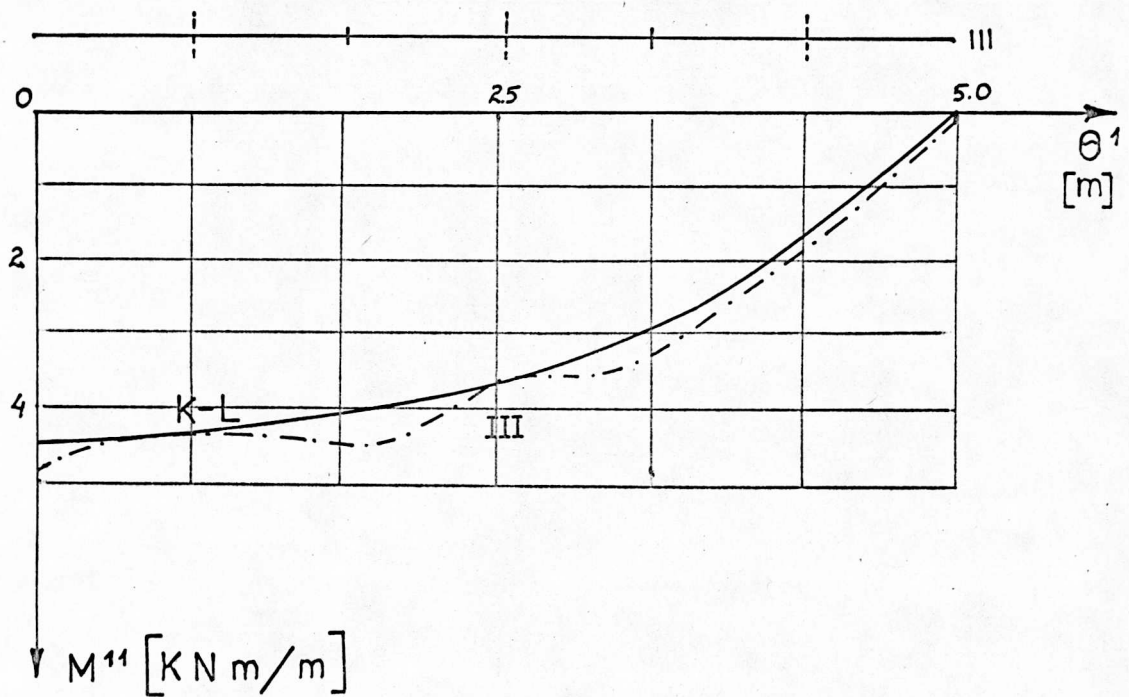
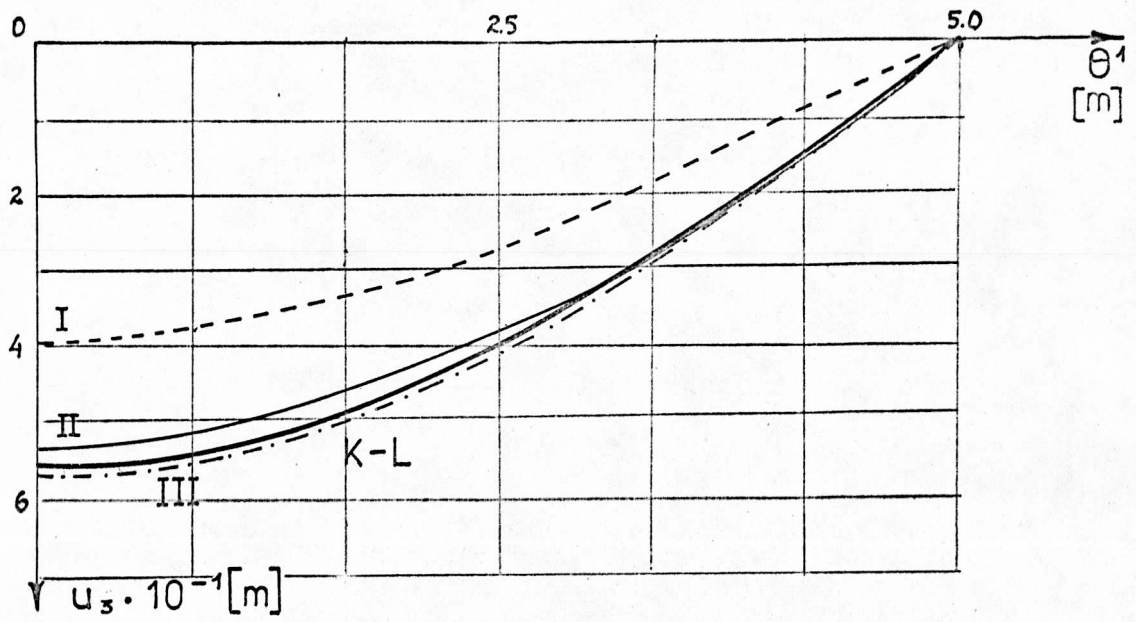


Rys. 13

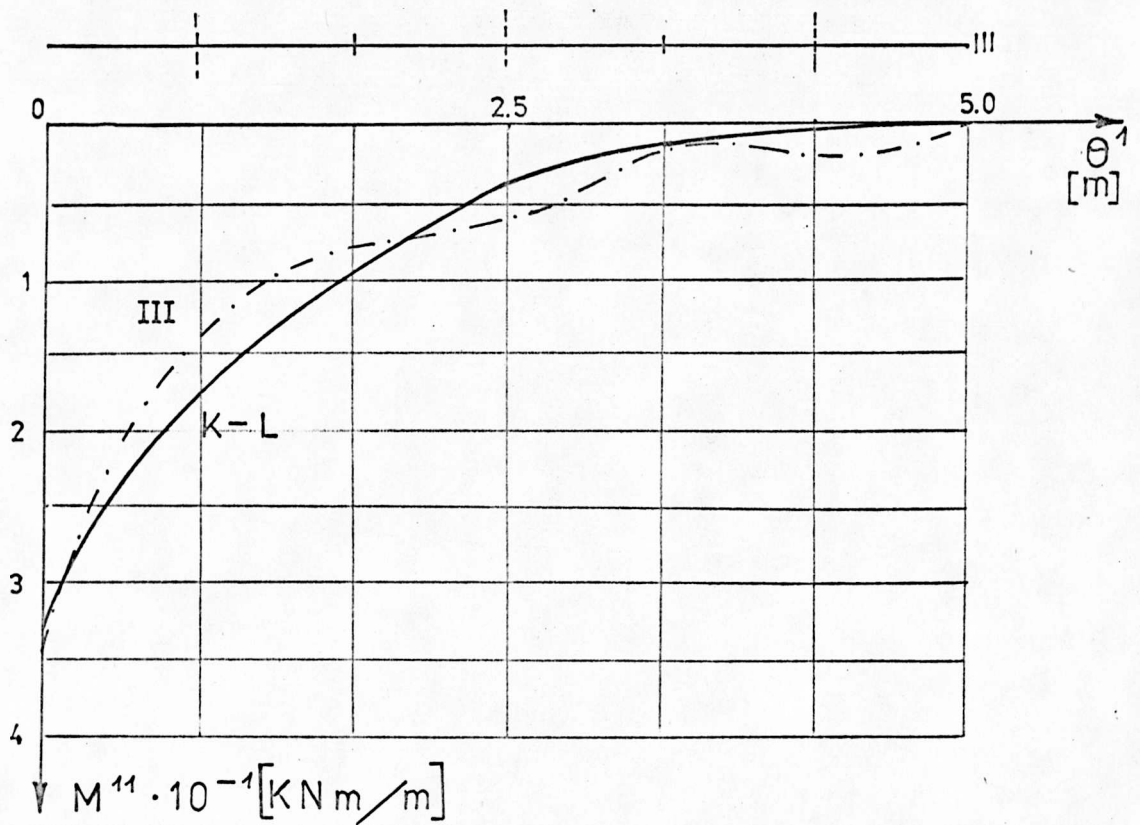
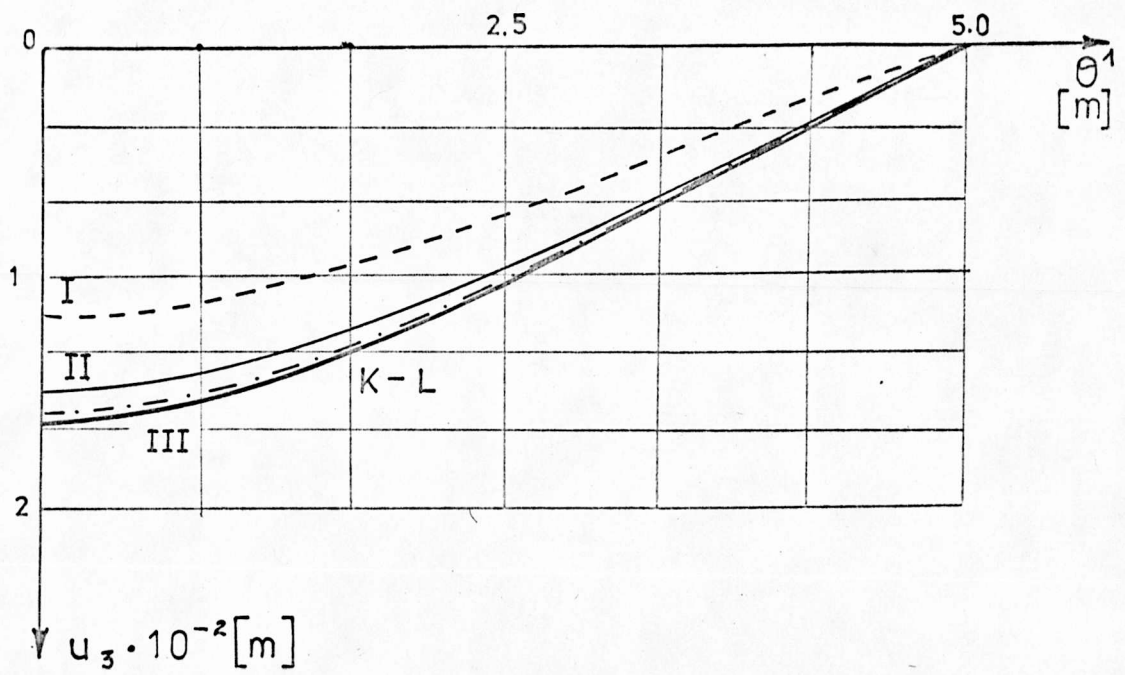




Rys.14



Rys. 15



W tabeli 3 przedstawiono maksymalne rzędne przemieszczenia  $u_3$  dla podziału I, II i  $\psi$  równego zero oraz zwiększającej się od jeden do czterech liczby żeber w elemencie.

Za każdym razem żebra rozmieszczone są równomiernie wewnątrz elementu. Dalsze zwiększanie liczby żeber prowadzi do utworzenia płyty pełnej, w krańcowym przypadku. Tabelę sporządzono dla dwóch rodzajów obciążeń ( $q$ ,  $P$ ). Wielkość  $u_3$  stabilizuje się już dla trzech żeber w elemencie na poziomie zależnym od podziału na elementy.

Tabela 3

| podział | $u_3$ dla obciążenia $q$ [m] |                         |                         |                         |
|---------|------------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
|         | liczba więzów w elemencie    |                         |                         |                         |
|         | 1                            | 2                       | 3                       | 4                       |
| I       | $9.1834 \times 10^{-1}$      | $6.2383 \times 10^{-1}$ | $2.5115 \times 10^{-1}$ | $2.5115 \times 10^{-1}$ |
| II      | $7.8373 \times 10^{-1}$      | $3.0886 \times 10^{-1}$ | $1.8297 \times 10^{-1}$ | $1.8297 \times 10^{-1}$ |
| podział | $u_3$ dla obciążenia $P$ [m] |                         |                         |                         |
|         | liczba więzów w elemencie    |                         |                         |                         |
|         | 1                            | 2                       | 3                       | 4                       |
| I       | $2.6344 \times 10^{-2}$      | $1.6902 \times 10^{-2}$ | $1.0046 \times 10^{-2}$ | $1.0046 \times 10^{-2}$ |
| II      | $2.6853 \times 10^{-2}$      | $8.4738 \times 10^{-3}$ | $6.5203 \times 10^{-3}$ | $6.5203 \times 10^{-3}$ |

Tabela 4 zawiera przemieszczenia  $u_3$  przy zwiększającej się od jeden do czterech liczby żeber przy  $\psi = 0$  dla podziału II i dla żeber o wysokości 0.2 m /poprzednio 0.3 m /.

Stwierdzono podobne zjawiska jak przedstawione w tabeli 3.



Tabela 4

| $u_3$ dla obciążenia $q$ [m] |                         |                         |                         |
|------------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| liczba więzów w elemencie    |                         |                         |                         |
| 1                            | 2                       | 3                       | 4                       |
| $5.1782 \times 10^{-1}$      | $2.0407 \times 10^{-1}$ | $1.2089 \times 10^{-1}$ | $1.2089 \times 10^{-1}$ |

W tabeli 5 porównano, znów dla obciążenia  $q$ ,  $P$  i przy  $\psi$  równym 1.0, 0.1, 0.001 rzędne maksymalnych ugięć dla podziału I i II oraz IIa, z których ten ostatni jest podobny do II, lecz więzy założone są na linii podziału na elementy, tzn. zamiast dla  $\xi = \eta = 0.5$  są założone dla  $\xi = \eta = 1.0$  dla każdego elementu. Oznacza to, że w pewnym sensie podobne stają się podziały I i IIa, gdyż podobny jest układ więzów / w przypadku IIa założone są one dodatkowo na brzegu /.

Tabela 5

| $u_3$ dla obciążenia $q$ [m] |                         |                         |                         |
|------------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| podział                      | I                       | II                      | IIa                     |
| $\psi = 1.0$                 | $3.9416 \times 10^{-1}$ | $5.3125 \times 10^{-1}$ | $5.2586 \times 10^{-1}$ |
| $\psi = 0.1$                 | $5.3755 \times 10^{-1}$ | $6.3881 \times 10^{-1}$ | $5.9948 \times 10^{-1}$ |
| $\psi = 0.001$               | $8.9143 \times 10^{-1}$ | $7.7880 \times 10^{-1}$ | $2.5586 \times 10^0$    |
| $u_3$ dla obciążenia $P$ [m] |                         |                         |                         |
| podział                      | I                       | II                      | IIa                     |
| $\psi = 1.0$                 | $1.1860 \times 10^{-2}$ | $1.4801 \times 10^{-2}$ | $1.5012 \times 10^{-2}$ |
| $\psi = 0.1$                 | $1.5399 \times 10^{-2}$ | $1.7881 \times 10^{-2}$ | $1.8910 \times 10^{-2}$ |
| $\psi = 0.001$               | $2.5599 \times 10^{-2}$ | $2.6058 \times 10^{-2}$ | $3.0428 \times 10^{-1}$ |

Różnice polegają tylko na podziale na elementy. Wobec tego, rozwiązania są dokładniejsze dla IIa niż dla I, lecz jeszcze nie takie jak dla II, przy danym  $\psi$ . Zauważmy też, że w miarę zmniejszania się  $\psi$  rozwiązania IIa stają się rozbieżne.

W tabeli 6 przedstawiono dla obciążenia  $q$ ,  $P$  i podziału I, II, III oraz zmieniającego się  $\psi$  maksymalne rzędne przemieszczeń  $u_3$ .

Tabela 6

| $u_3 \times 10^{-1}$ [m] obciążenie $q$ |         |        |        |
|-----------------------------------------|---------|--------|--------|
|                                         | podział |        |        |
| $\psi$                                  | I       | II     | III    |
| 1                                       | 3.9416  | 5.3125 | 5.6766 |
| $10^{-1}$                               | 5.3755  | 6.3881 | 6.4390 |
| $10^{-3}$                               | 8.9143  | 7.7880 | 7.0671 |
| $10^{-6}$                               | 9.1832  | 7.8373 | 7.0982 |
| 0                                       | 9.1832  | 7.8373 | 7.0983 |
| $u_3 \times 10^{-2}$ [m] obciążenie $P$ |         |        |        |
|                                         | podział |        |        |
| $\psi$                                  | I       | II     | III    |
| 1                                       | 1.1860  | 1.4801 | 1.5950 |
| $10^{-1}$                               | 1.5399  | 1.7881 | 1.8102 |
| $10^{-3}$                               | 2.5599  | 2.6058 | 2.5039 |
| $10^{-6}$                               | 2.6343  | 2.6852 | 2.6736 |
| 0                                       | 2.6344  | 2.6853 | 2.6739 |

Dobierając odpowiednio małe dążące do zera  $\psi$  modelujemy płytę dwuwarstwową z wewnętrzną siatką żeber przenoszących całą siłę poprzeczną i zapewniającą współpracę warstw. Zwiększając  $\psi$  do jedności wciągamy do przenoszenia siły poprzecznej również warstwę zewnętrzną. Jeszcze dla  $\psi = 0.1$  w miarę zwiększania się podziału rzędne rosną, natomiast dla  $\psi$  mniejszych maleją, lecz w obu przypadkach zbliżają się do tych samych wartości. Dla  $\psi$  równego  $10^{-6}$  wartości  $u_3$  są takie same jak dla  $\psi$  równego zero. Przy  $\psi$  równym zero i podziale III wartości  $u_3$  nie są jeszcze zbyt blisko rozwiązań K-L, a wynika to zarówno ze zbyt małego podziału oraz sposobu rozmieszczenia żeber i charakteru pracy konstrukcji.

W tabeli 7 zamieszczono wielkości  $u_3$  w podobnym jak w poprzedniej tabeli układzie z tą różnicą, że funkcje bazowe dla mnożników Lagrange'a zamieniono z liniowych na trzeciego stopnia / Hermite'a /. Zauważono dla małych  $\psi$  zmniejszenie wartości przemieszczeń.

Na kolejnych rysunkach przedstawiono wykresy przemieszczeń  $u_3$  i momentów  $M^{11}$  dla  $\psi$  równego zero i więzów założonych jak na rys.11,  $\psi$  równego jeden i braku więzów, oraz rozwiązania K-L.

Rysunek 17 sporządzono dla obciążenia  $q$  i podziału II, natomiast 18 dla podziału III. Podobnie, rysunek 19 przedstawia rozwiązanie dla obciążenia  $P$  i podziału II, a 20 dla podziału III.

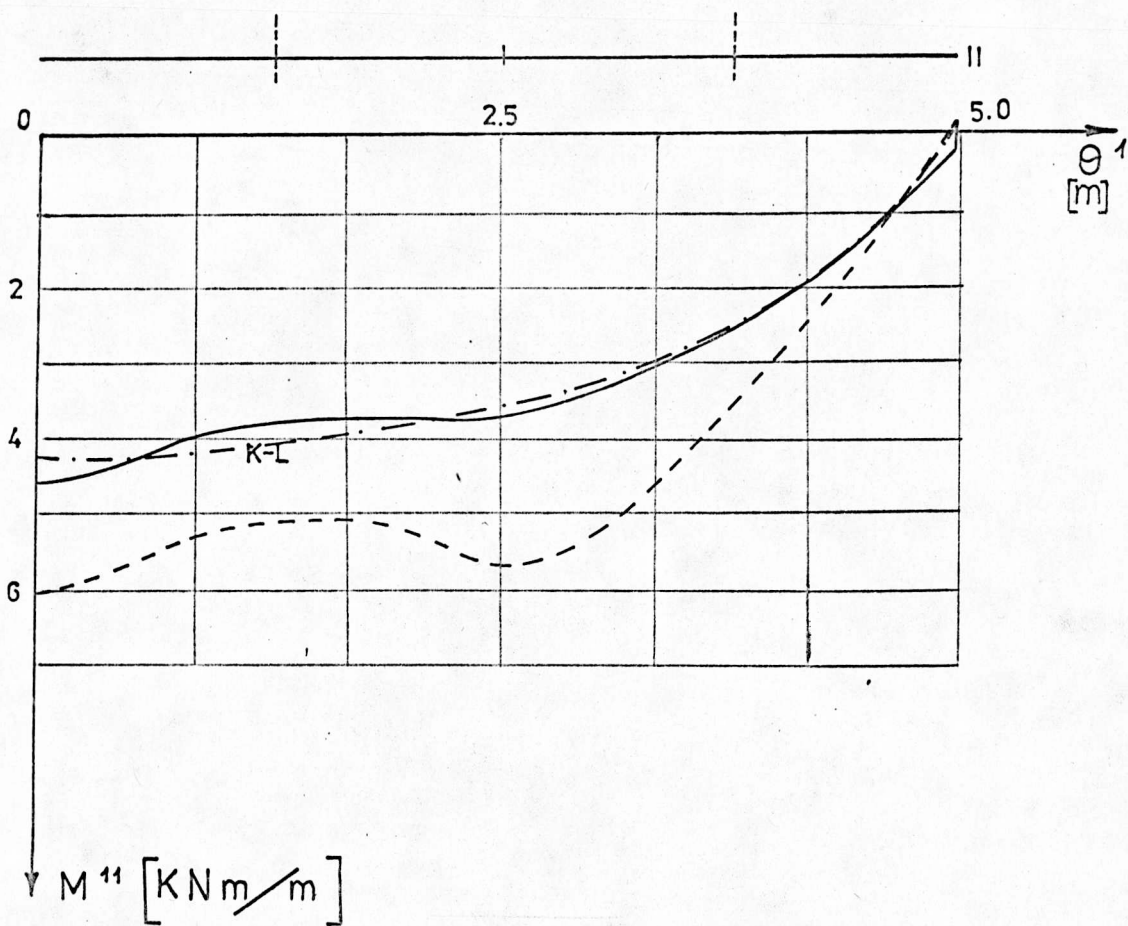
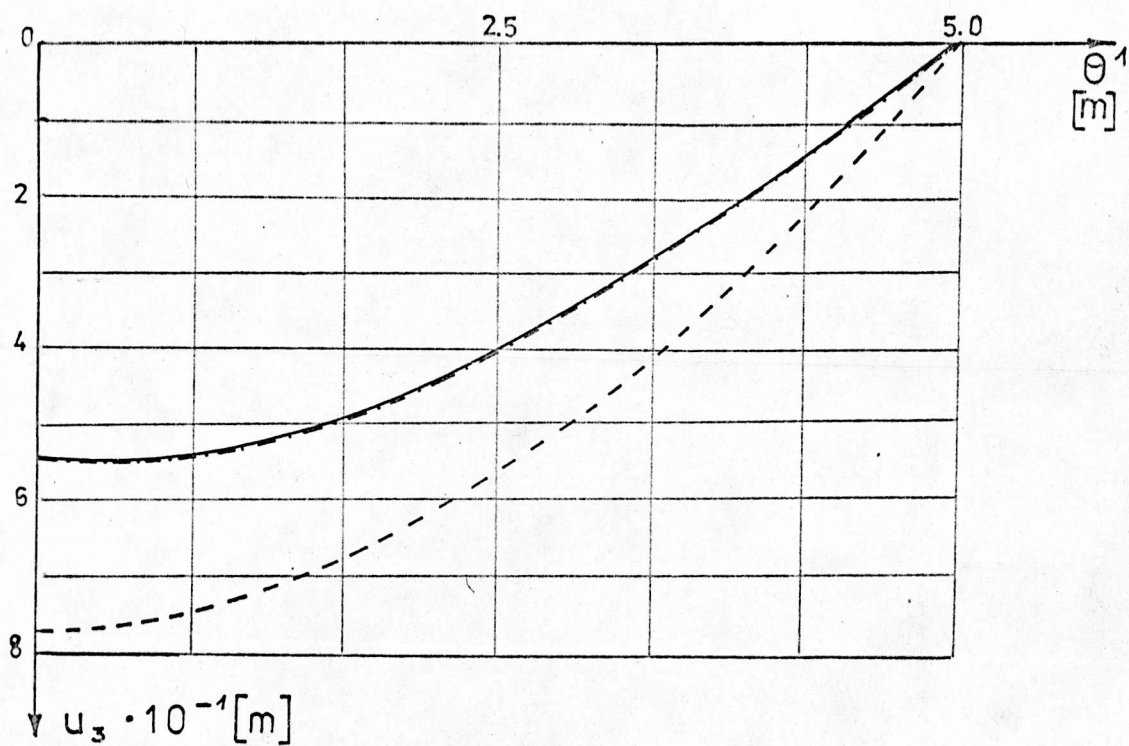
Porównując parami wykresy 17 i 18 oraz 19 i 20 widać, że badane wielkości zmieniają się i przy gęstszym podziale są dość zbliżone do rozwiązań K-L. Wyraźny jest też wpływ żeber, szczególnie na wykresy momentów zginających.

Żebra zaznaczone są podobnie jak poprzednio pionowymi przerywanymi liniami, natomiast podział na elementy pionowymi liniami ciągłymi umieszczonymi pomiędzy wykresami  $u_3$  i  $M^{11}$ . Na wykresach liniami punktowymi zaznaczono rozwiązanie K-L, liniami ciągłymi rozwiązanie dla  $\psi$  równego jeden i braku więzów oraz liniami przerywanymi dla  $\psi$  równego zero i więzów założonych jak na rys.11.

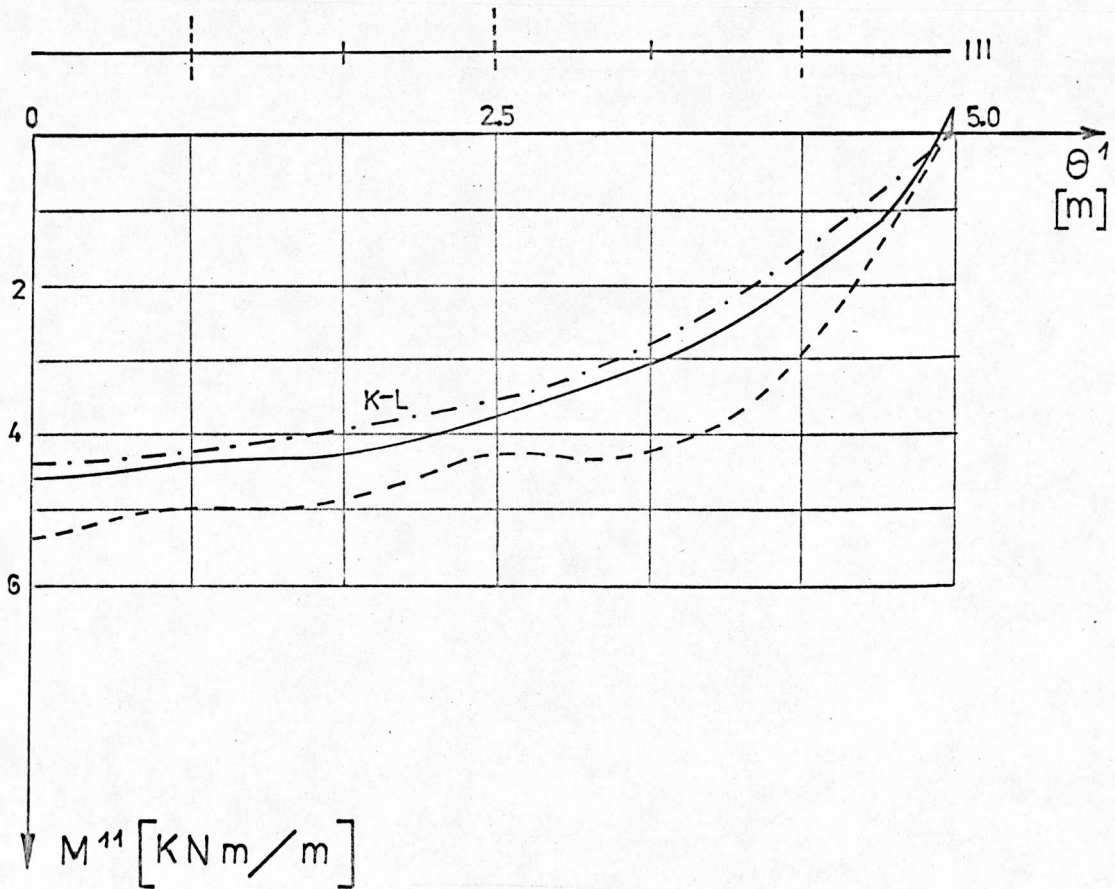
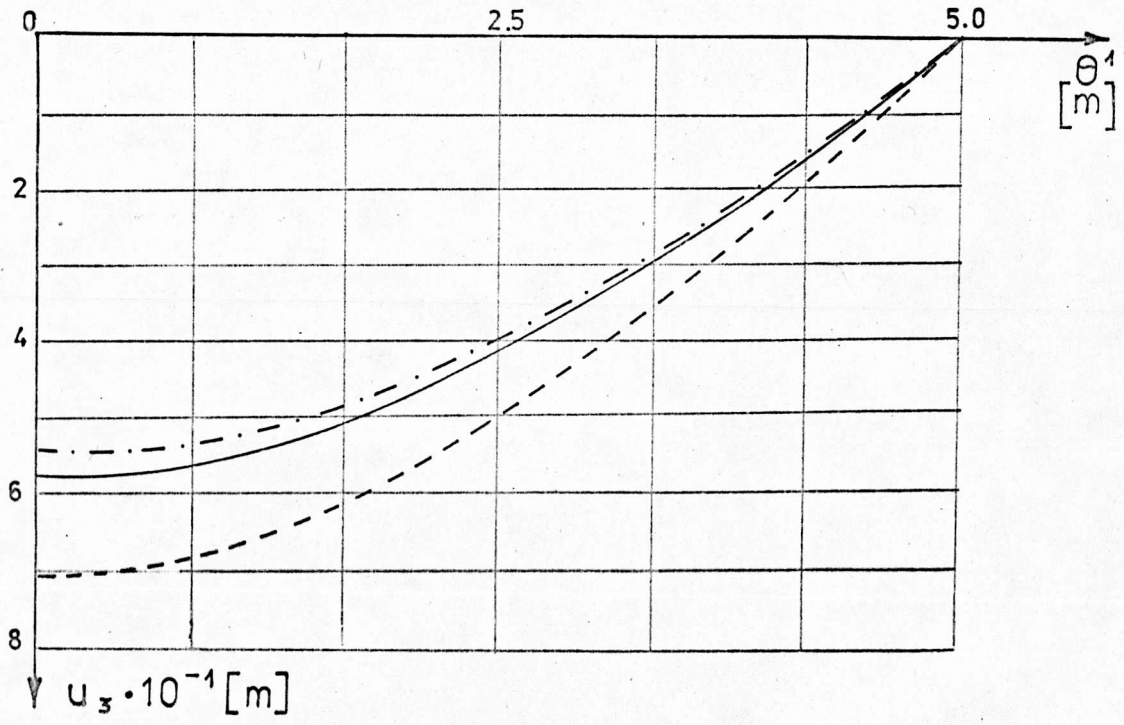
Tabela 7

| $u_3 \times 10^{-1}$ [m] obciążenie q |         |        |        |
|---------------------------------------|---------|--------|--------|
| $\psi$                                | podział |        |        |
|                                       | I       | II     | III    |
| 1                                     | 3.5421  | 5.1902 | 5.6496 |
| $10^{-1}$                             | 5.2139  | 6.4149 | 5.6496 |
| $10^{-3}$                             | 9.1232  | 7.7494 | -----  |
| $10^{-6}$                             | 9.4073  | 7.7859 | -----  |
| 0                                     | 9.4076  | 7.7860 | 6.9831 |
| $u_3 \times 10^{-2}$ [m] obciążenie P |         |        |        |
| $\psi$                                | podział |        |        |
|                                       | I       | II     | III    |
| 1                                     | 1.0693  | 1.3937 | 1.5642 |
| $10^{-1}$                             | 1.4228  | 1.7338 | 1.7622 |
| $10^{-3}$                             | 2.3711  | 2.1945 | -----  |
| $10^{-6}$                             | 2.4402  | 2.2141 | -----  |
| 0                                     | 2.4403  | 2.2141 | 1.9972 |

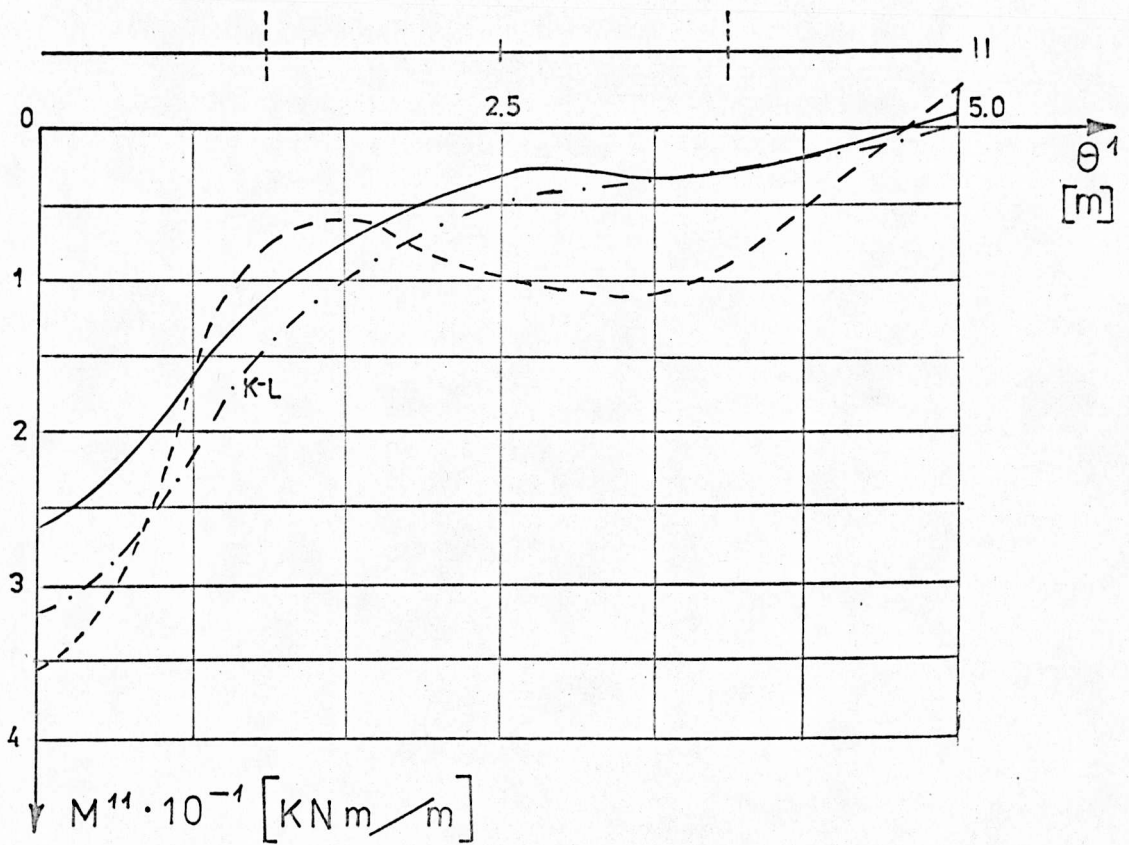
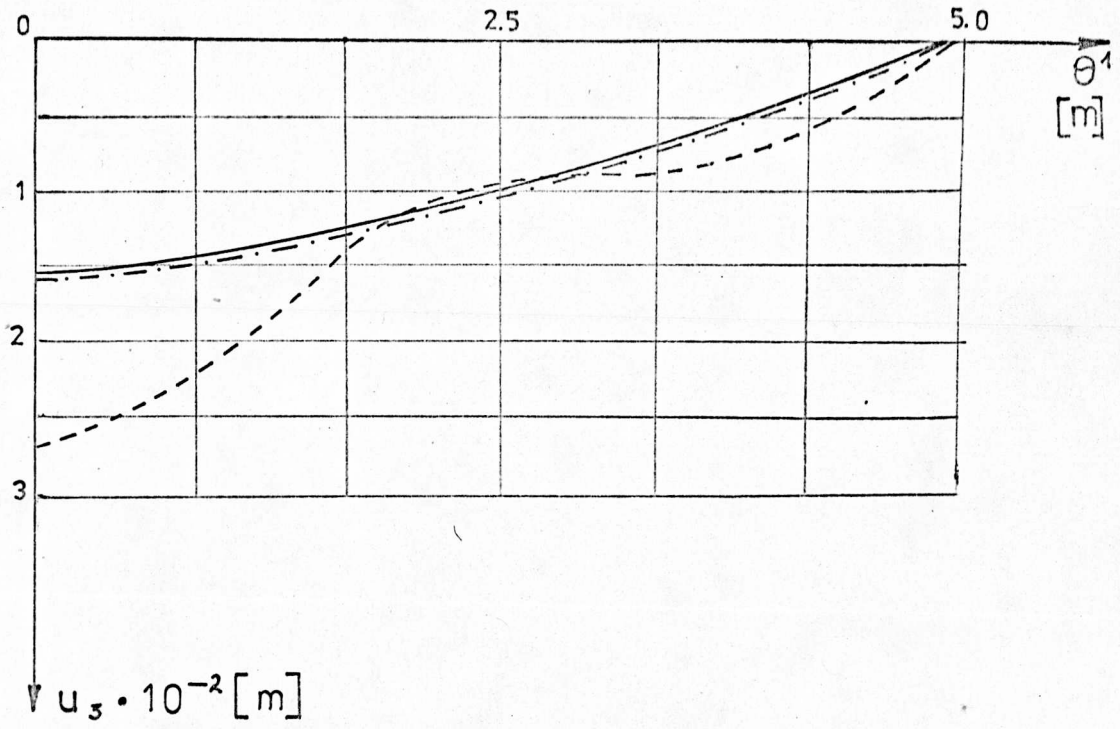




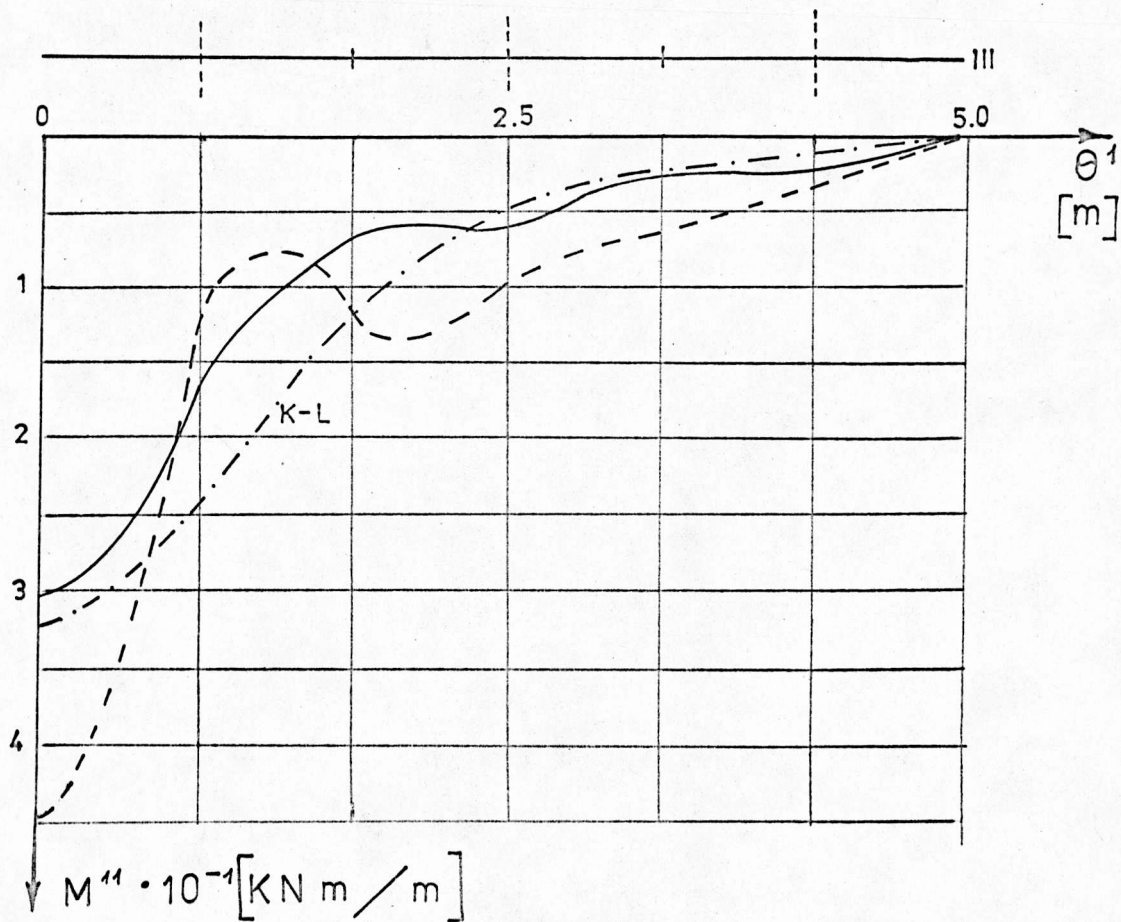
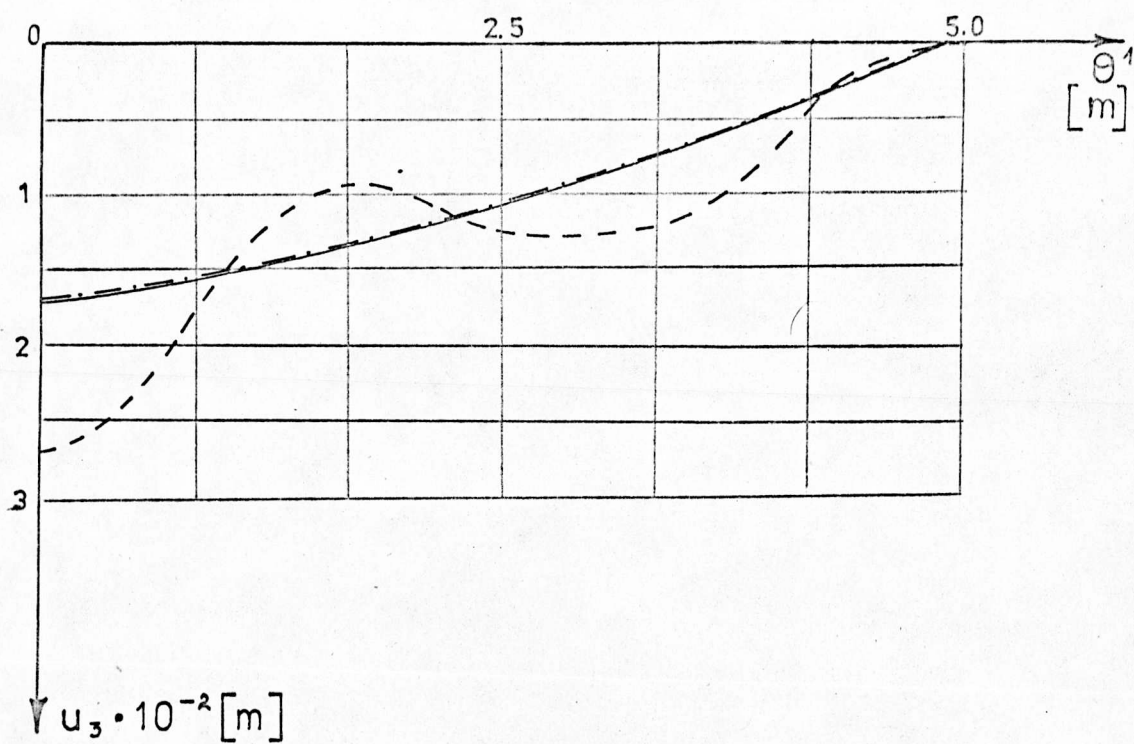
Rys. 17



Rys. 18



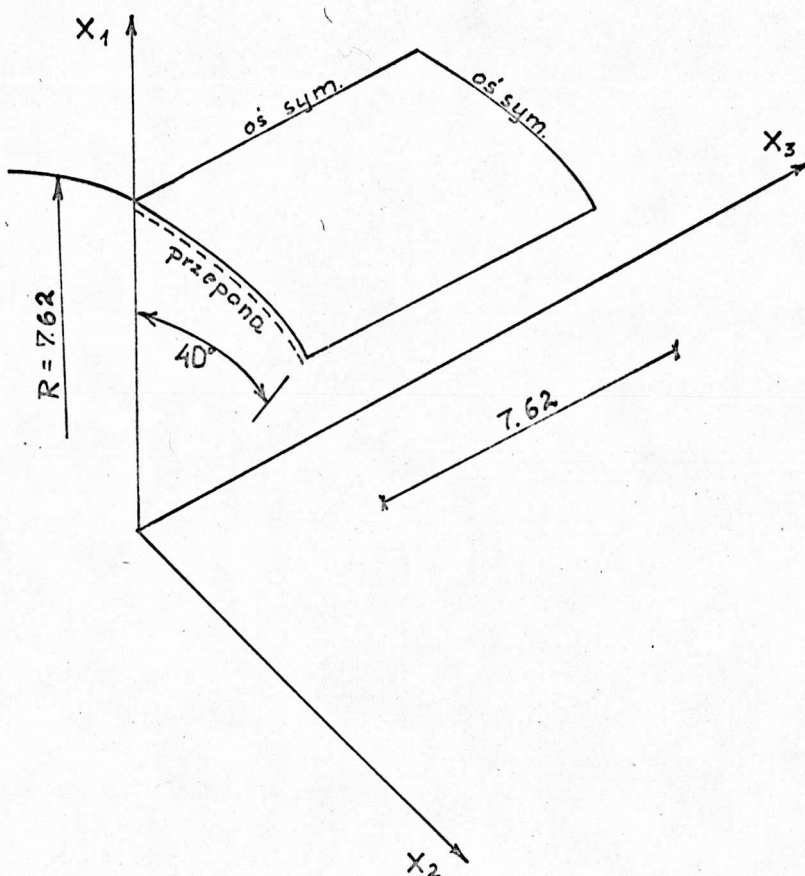
Rys. 19



Rys. 20

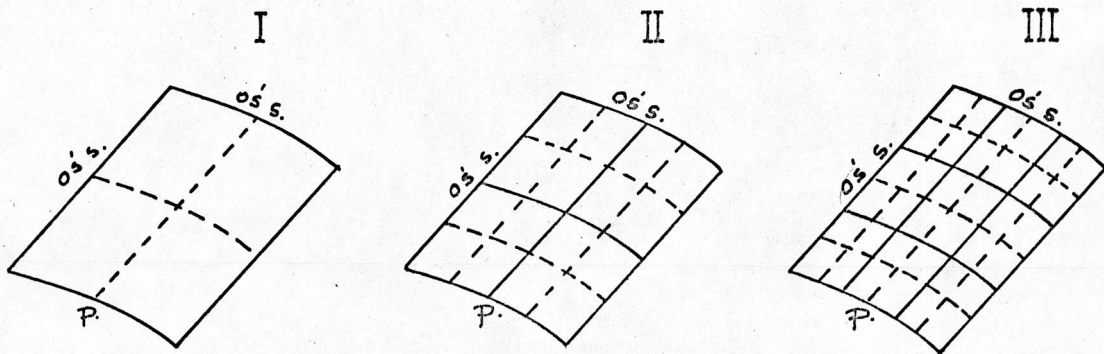


Rozwiązano także powłokę [34] w kształcie tzw. "sklepienia cylindrycznego" obciążoną ciężarem własnym  $q = 4.48 \text{ kN/m}^2$  i zamocowaną wzdłuż dwóch równoległych krawędzi na przepornach, oraz na pozostałych dwóch swobodną. Na rys. 21 pokazano ćwiartkę przekrycia powłokowego z zaznaczeniem osi symetrii. Przyjęto  $\nu$  równe zero, oraz moduł Younga wynoszący  $21500 \text{ Mpa}$ . Na przeponie przemieszczenia w jej płaszczyźnie założono równe zero.



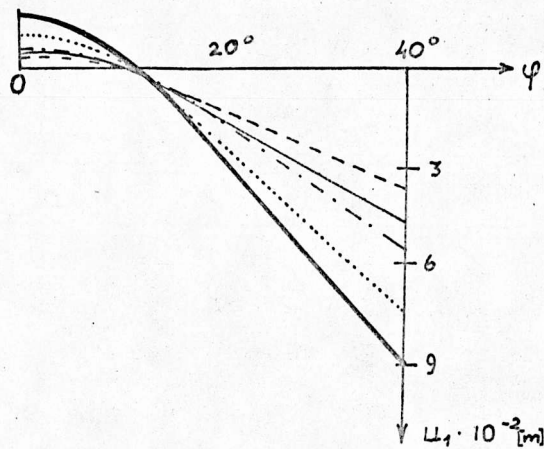
Rys. 21

Obliczenia przeprowadzono dla podziałów jak na rys. 22 na jeden, cztery i dziewięć elementów. Liniami przerywanymi oznaczono więzy nakładane na powłokę. Stosowanie większego podziału nie jest opłacalne na dostępnym sprzęcie.



Rys. 22

Otrzymane wyniki ugięcia powłoki w kierunku normalnym do powierzchni podstawowej dla grubości powłoki  $H = 0.0762$  m i przypadku bez więzów pokazano na rys. 23.

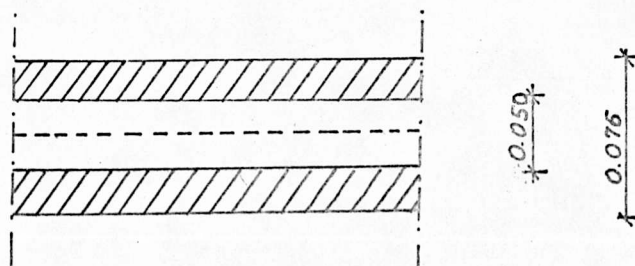


Rys. 23

Liniami przerywanymi oznaczono rozwiązanie dla podziału I, linią ciągłą dla II, oraz linią punktową dla III.

Rozwiązanie analityczne oznaczono grubszą linią ciągłą. Przy podziale III na dziewięć elementów otrzymane ugięcie stanowi 60% rozwiązania analitycznego, które autorzy [34] uzyskali stosując podział na dwadzieścia cztery elementy przy użyciu wielomianów trzeciego stopnia aproksymujących stan przemieszczenia. Podobne wielomiany stosowano tu w rozwiązaniach przy podziałach I, II, III.

Wielomiany drugiego stopnia i podział na dwadzieścia cztery elementy daje w [34] rozwiązanie pokazane linią kropkową na rys. 23. Następnie analizowano powłokę o przekroju poprzecznym podanym na rys. 24, z więzami aproksymującymi żebra przy podziale na elementy podanym na rys. 22.



Rys. 24

W tabeli 8 przedstawiono wielkości ugięć w punktach A i B (rys. 21) dla powłoki o różnych grubościach warstw wewnętrznych /  $2h$  wynosi od 0.00635 m do 0.06350 m , (rys. 24) /. Wielkość  $\psi$  przyjęto równą 5/6.

Tabela 8

| $2h$ [m] | $u_1$ [m] dla punktów    |                          |
|----------|--------------------------|--------------------------|
|          | A                        | B                        |
| 0.00635  | $1.9171 \times 10^{-3}$  | $-4.2316 \times 10^{-2}$ |
| 0.01270  | $1.6054 \times 10^{-3}$  | $-4.5469 \times 10^{-2}$ |
| 0.02540  | $7.0556 \times 10^{-4}$  | $-5.3957 \times 10^{-2}$ |
| 0.05080  | $-3.6264 \times 10^{-3}$ | $-9.6129 \times 10^{-2}$ |
| 0.06350  | $-1.1804 \times 10^{-2}$ | $-1.8102 \times 10^{-1}$ |

Dla porównania ugięć podanych w tabeli 8 z rozwiązaniami bez nałożonych więzów zauważmy, że np. dla 2h wynoszącego 0.0508 m ugięcie  $u_1$  dla punktu A wynosi -0.0031242m, a dla punktu B - 0.099314 m, a więc nałożenie więzów powoduje pewne usztywnienie konstrukcji.

Dalsze rozważania prowadzone będą dla powłoki o przekroju poprzecznym jak na rys. 24.

W tabeli 9 umieszczono przemieszczenia  $u_1$  w punktach A i B dla  $\psi$  równego zero przy zwiększającej się od jeden do dziewięć ilości więzów w elemencie przy podziale I i od jeden do dwóch przy podziale II. Zauważmy, że podobne ugięcie uzyskuje się przy podziale I i pięciu więzach jak dla podziału II i dwóch więzach.

Tabela 9

| ilość<br>wieszów | podział I                |                          |
|------------------|--------------------------|--------------------------|
|                  | A                        | B                        |
| 1                | $2.0681 \times 10^0$     | $-8.4389 \times 10^{-1}$ |
| 2                | $8.2751 \times 10^{-2}$  | $-3.9370 \times 10^{-1}$ |
| 3                | $5.7897 \times 10^{-2}$  | $-2.9619 \times 10^{-1}$ |
| 4                | $3.6800 \times 10^{-2}$  | $-2.2351 \times 10^{-1}$ |
| 5                | $2.9924 \times 10^{-2}$  | $-1.9576 \times 10^{-1}$ |
| 7                | $-5.1876 \times 10^{-3}$ | $-9.5347 \times 10^{-2}$ |
| 9                | $-5.0802 \times 10^{-3}$ | $-9.0932 \times 10^{-2}$ |
| ilość<br>wieszów | podział II               |                          |
|                  | A                        | B                        |
| 1                | $3.8418 \times 10^{-2}$  | $-2.3237 \times 10^{-1}$ |
| 2                | $2.4988 \times 10^{-2}$  | $-1.9833 \times 10^{-1}$ |



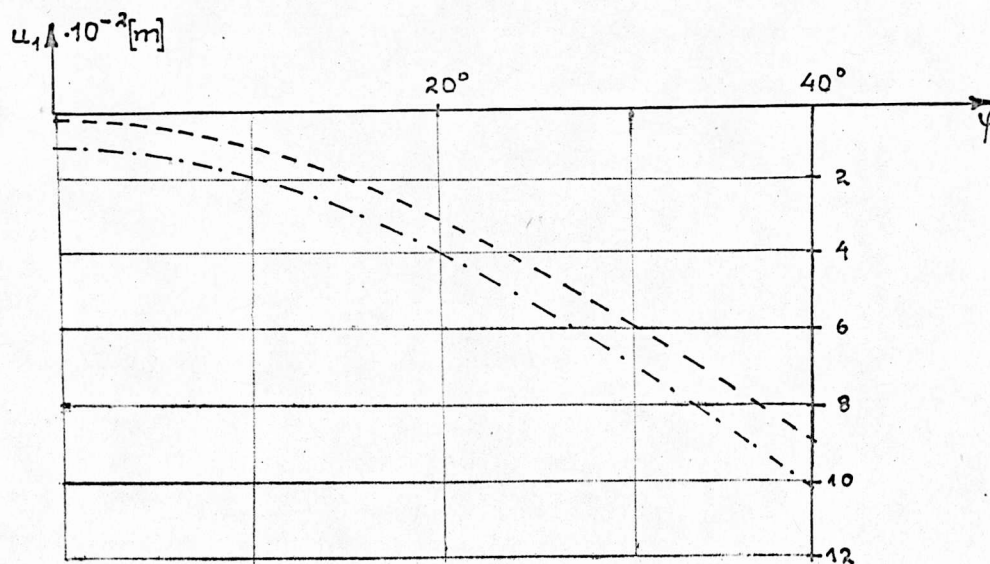
Tabela 10

| podział | bez więzów<br>$\Psi = 5/6$ |                          | z więzami<br>$\Psi = 5/6$ |                          | z więzami<br>$\Psi = 0$ |                          |
|---------|----------------------------|--------------------------|---------------------------|--------------------------|-------------------------|--------------------------|
|         | $u_1$ [m] w punktach       |                          | $u_1$ [m] w punktach      |                          | $u_1$ [m] w punktach    |                          |
|         | A                          | B                        | A                         | B                        | A                       | B                        |
| I       | $-3.1242 \times 10^{-3}$   | $-9.9314 \times 10^{-2}$ | $-3.6264 \times 10^{-3}$  | $-9.6129 \times 10^{-2}$ | $2.0681 \times 10^{-1}$ | $-8.4389 \times 10^{-1}$ |
| II      | $-9.0546 \times 10^{-3}$   | $-1.0567 \times 10^{-1}$ | $-7.7216 \times 10^{-3}$  | $-1.0578 \times 10^{-1}$ | $3.8418 \times 10^{-2}$ | $-2.3237 \times 10^{-1}$ |

W tabeli 10 przedstawiono przemieszczenia  $u_1$  dla powłoki bez i z więzami przy różnych wartościach  $\psi$  i podziałach I i II. Dla  $\psi$  równego zero ugięcia dla punktu B są dla podziału I o jeden rząd większe niż przy  $\psi$  równym 5/6, lecz przy zwiększeniu podziału i liczby więzów są już tylko dwukrotnie większe od odpowiednich wielkości przy  $\psi$  równym 5/6.

Na rys. 25 przedstawiono dla podziału I i II oraz  $\psi$  wynoszącym jeden wykresy ugięć  $u_1$ . Linia przerywaną zaznaczono rozwiązanie przy podziale I, a linią punktową przy podziale II.

We wszystkich tabelach i na rysunkach dotyczących powłoki można zauważyć podobne tendencje jak w przypadku płyty, z tym, że rozwiązania przy  $\psi$  równym zero stabilizują się wolniej dla powłoki. Stabilizacja ta zależy między innymi od wzajemnych proporcji grubości warstw zewnętrznych do całej grubości. W podanych przykładach dla płyty proporcja ta wynosi 1/4, a dla powłoki 1/3.



Rys. 25

## 6. UWAGI KONCOWE

W pracy sformułowano w jednolitym zapisie ogólną teorię powłok z wewnętrznym uźebrowaniem ortogonalnym. Podano podstawowe związki, a następnie - przy wykorzystaniu metody elementów skończonych - zaprezentowano algorytm rozwiązania numerycznego. Więzy założone pomiędzy warstwami zewnętrznymi aproksymują żebra i powodują znaczny wzrost rozmiaru zagadnienia numerycznego.

Rozwiązania podane w rozdziale trzecim mogą być stosowane dla dowolnych powłok, ze względu jednak na możliwości przeprowadzenia obliczeń na dostępnym sprzęcie szczegółowo omówiono płyty i powłoki walcowe.

Analizę numeryczną przeprowadzono przede wszystkim dla płyt badając zbieżność rozwiązań przy:

- 1/ założonych podziałach na elementy skończone,
- 2/ założonych liczbach więzów w elemencie.

Przyjmowano, że cała siła tnąca jest przenoszona przez żebra, bądź też, uwzględniono warstwy zewnętrzne przy jej przenoszeniu.

Z przeprowadzonych obliczeń wynikają następujące wnioski:

- 1/ Metoda numerycznego rozwiązania zagadnienia okazała się dobra, gdyż uzyskano zadawalającą zbieżność wyników.
- 2/ W zakresie szczegółowych rozważań dotyczących wyników stwierdzono, że:
  - żebra powodują zmianę charakteru wykresów momentów zginających i wpływają na zmniejszenie ich wielkości w sąsiedztwie żeber,
  - zwiększenie liczby żeber w elemencie powoduje znaczne usztywnienie konstrukcji.
- 3/ Uzyskanie dokładniejszych rozwiązań, szczególnie dla powłok wymaga " dużych i szybkich " komputerów.

# DODATEK

Poniżej przedstawiono sposób wyznaczania całek z zależności (3.26). Przyjmując rozkład materiału powłoki według rys. 2 i korzystając z (3.3), (3.5), (3.7) i (3.8) otrzymujemy:

$$\int_{h\xi} \mu d\xi = \int_{h\xi} (1 - 2\xi H + \xi^2 K) d\xi = 2(H-h) + \frac{2}{3}(H^3 - h^3)K, \quad (D1)$$

$$\int_{h\xi} \mu (\mu^{-1})_{\gamma}^{\beta} d\xi = \int_{h\xi} [\gamma_{\gamma}^{\beta} + \xi(B_{\gamma}^{\beta} - 2H\gamma_{\gamma}^{\beta})] d\xi = \gamma_{\gamma}^{\beta} 2(H-h),$$

$$\begin{aligned} \int_{h\xi} \mu (\mu^{-1})_{\gamma}^{\beta} \xi d\xi &= \int_{h\xi} [\xi \gamma_{\gamma}^{\beta} + \xi^2 (B_{\gamma}^{\beta} - 2H\gamma_{\gamma}^{\beta})] d\xi = \\ &= (B_{\gamma}^{\beta} - 2H\gamma_{\gamma}^{\beta}) \frac{2}{3} (H^3 - h^3). \end{aligned}$$

Następne wyrażenia całkowe wyznaczono według algorytmu podanego przez Naghdi'ego [20], korzystając przy tym z rozwinięcia w szeregi potęgowe wyrażeń podcałkowych:

$$\mu (\mu^{-1})_{\mu}^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_n C_{\mu}^{\alpha} \xi^n = \sum_{n=0}^{\infty} (B^n)_{\mu}^{\alpha} \xi^n,$$

gdzie

$${}_0 C_{\mu}^{\alpha} = \gamma_{\mu}^{\alpha}, \quad (D2)$$

$${}_1 C_{\mu}^{\alpha} = B_{\mu}^{\alpha}.$$



$$\int_{h\xi} \mu (\mu^{-1})_{\mu}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\alpha}^{\epsilon} d\xi = \int_{h\xi} [\vartheta_{\mu}^{\alpha} + \xi (B_{\mu}^{\alpha} - 2H\vartheta_{\mu}^{\alpha})].$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (B^n)_{\alpha}^{\epsilon} \xi^n d\xi = \int_{h\xi} \vartheta_{\mu}^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (B^n)_{\alpha}^{\epsilon} \xi^n d\xi + \int_{h\xi} (B_{\mu}^{\alpha} -$$

$$- 2H\vartheta_{\mu}^{\alpha}) \sum_{n=0}^{\infty} (B^n)_{\alpha}^{\epsilon} \xi^{n+1} d\xi = \int_{h\xi} \vartheta_{\mu}^{\alpha} [\vartheta_{\alpha}^{\epsilon} + \xi B_{\alpha}^{\epsilon} +$$

(D3)

$$+ \xi^2 (B^2)_{\alpha}^{\epsilon} + \xi^3 (B^3)_{\alpha}^{\epsilon} + \dots ] d\xi + (B_{\mu}^{\alpha} - 2H\vartheta_{\mu}^{\alpha}).$$

$$\int_{h\xi} [\xi \vartheta_{\alpha}^{\epsilon} + \xi^2 B_{\alpha}^{\epsilon} + \xi^3 (B^2)_{\alpha}^{\epsilon} + \xi^4 (B^3)_{\alpha}^{\epsilon} + \dots ] d\xi =$$

$$= \vartheta_{\mu}^{\alpha} \vartheta_{\alpha}^{\epsilon} 2(H-h) + (B^2)_{\alpha}^{\epsilon} \vartheta_{\mu}^{\alpha} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) + O(\frac{h^5}{R^4}) +$$

$$+ (B_{\mu}^{\alpha} - 2H\vartheta_{\mu}^{\alpha}) \left[ B_{\alpha}^{\epsilon} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) + O(\frac{h^5}{R^3}) \right] =$$

$$= \vartheta_{\mu}^{\alpha} \vartheta_{\alpha}^{\epsilon} 2(H-h) + (B^2)_{\alpha}^{\epsilon} \vartheta_{\mu}^{\alpha} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) +$$

$$+ (B_{\mu}^{\alpha} - 2H\vartheta_{\mu}^{\alpha}) B_{\alpha}^{\epsilon} \frac{2}{3} (H^3 - h^3).$$

Małe wyższego rzędu pomijano zgodnie z [20]. Wyznaczone w ten sposób wielkości wprowadzone do związków konstytutywnych dają wyrażenia zgodne po przekształceniach ze znanymi z literatury.

$$\int_{h\xi} \mu (\mu^{-1})_{\mu}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\alpha}^{\epsilon} \xi d\xi = \int_{h\xi} \gamma_{\mu}^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (B^n)_{\alpha}^{\epsilon} \xi^{n+1} d\xi +$$

$$+ \int_{h\xi} (B_{\mu}^{\alpha} - 2H\gamma_{\mu}^{\alpha}) \sum_{n=0}^{\infty} (B^n)_{\alpha}^{\epsilon} \xi^{n+2} d\xi = \int_{h\xi} \gamma_{\mu}^{\alpha} \left[ \gamma_{\alpha}^{\epsilon} \xi + \right.$$

$$+ B_{\alpha}^{\epsilon} \xi^2 + (B^2)_{\alpha}^{\epsilon} \xi^3 + (B^3)_{\alpha}^{\epsilon} \xi^4 + \dots \left. \right] d\xi +$$

(D4)

$$+ (B_{\mu}^{\alpha} - 2H\gamma_{\mu}^{\alpha}) \int_{h\xi} \left[ \gamma_{\alpha}^{\epsilon} \xi^2 + B_{\alpha}^{\epsilon} \xi^3 + (B^2)_{\alpha}^{\epsilon} \xi^4 + (B^3)_{\alpha}^{\epsilon} \xi^5 + \right.$$

$$\left. + \dots \right] d\xi = \gamma_{\mu}^{\alpha} B_{\alpha}^{\epsilon} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) + O\left(\frac{h^5}{R^3}\right) +$$

$$+ (B_{\mu}^{\alpha} - 2H\gamma_{\mu}^{\alpha}) \left[ \gamma_{\alpha}^{\epsilon} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) + O\left(\frac{h^5}{R^2}\right) \right] =$$

$$= \gamma_{\mu}^{\alpha} B_{\alpha}^{\epsilon} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) + (B_{\mu}^{\alpha} - 2H\gamma_{\mu}^{\alpha}) \gamma_{\alpha}^{\epsilon} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) =$$

$$= \frac{2}{3} (H^3 - h^3) I_{\mu \alpha}^{\alpha \epsilon} ,$$

gdzie

$$I_{\mu \varkappa}^{\alpha \varepsilon} = \vartheta_{\mu}^{\alpha} B_{\varkappa}^{\varepsilon} + B_{\mu}^{\alpha} \vartheta_{\varkappa}^{\varepsilon} - 2H \vartheta_{\mu}^{\alpha} \vartheta_{\varkappa}^{\varepsilon}, \quad (D5)$$

oraz

$$\int_{h\xi} \mu (\mu^{-1})_{\mu}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\varkappa}^{\varepsilon} \xi^2 d\xi = \int_{h\xi} \vartheta_{\mu}^{\alpha} [\vartheta_{\varkappa}^{\varepsilon} \xi^2 + B_{\varkappa}^{\varepsilon} \xi^3 +$$

$$+ (B^2)_{\varkappa}^{\varepsilon} \xi^4 + (B^3)_{\varkappa}^{\varepsilon} \xi^5 + \dots ] d\xi + (B_{\mu}^{\alpha} - 2H \vartheta_{\mu}^{\alpha}).$$

$$\cdot \int_{h\xi} [\vartheta_{\varkappa}^{\varepsilon} \xi^3 + B_{\varkappa}^{\varepsilon} \xi^4 + (B^2)_{\varkappa}^{\varepsilon} \xi^5 + (B^3)_{\varkappa}^{\varepsilon} \xi^6 + \dots ] d\xi =$$

(D6)

$$= \vartheta_{\mu}^{\alpha} \vartheta_{\varkappa}^{\varepsilon} \frac{2}{3} (H^3 - h^3) + O\left(\frac{h^5}{R^2}\right) + (B_{\mu}^{\alpha} - 2H \vartheta_{\mu}^{\alpha}).$$

$$\cdot [O\left(\frac{h^5}{R}\right)] = \frac{2}{3} (H^3 - h^3) \vartheta_{\mu}^{\alpha} \vartheta_{\varkappa}^{\varepsilon}.$$

# LITERATURA

1. Abovskij N.P., O vzaimosviasi variacionnyh uravneni dla gibkich anizotropnyh i rozličnyh rebristych obołoček. Teoria obołoček i płastin. Moskwa, Nauka 1973.
2. Abovskij N.P., Rebristyje obołočki. Izd. Krasnoj. Politech. Instituta, Krasnojarsk 1967.
3. Abovskij N.P., Andrejev N.P., Jendžijevskij L.W., Primienienije principa Castigliano k rasčiotu anizotropnyh obołoček i płastin. Annotaci dokł. 1973. 3.
4. Amiro I.Ja., Zaruckij V.A., Teoria rebristych obołoček. Naukova Dumka. Kijev 1980.
5. Amiro I.Ja., Zaruckij V.A., Poljakov P.S., Rebristyje cylindričeskiye obołočki. Naukova Dumka. Kijev 1973.
6. Błocki J., Obliczenia statyczne segmentowych powłok z żebrami. Rozprawy Inżynierskie. 1977, 25 nr.2.
7. Chrobot B., Matematyczne modele powłok użebrowanych. Praca doktorska I-14. Raport serii PRE-64/80. Wrocław.
8. Corder P.R., A compliance analysis for simmetrically loaded ortotropic and rib-reinforced circular cylindrical shells. Dissert. Abstr. 1968, B29 nr. 4.
9. Farrav D.J., The design of compression structures for minimum weight. J. Roy. Aeronaut. Soc. 53, 1949, 467.
10. Flügge W., Die stabilität der Kreiszyllinderschale Ing.-Arch. 3/1932.
11. Flügge W., Powłoki. Obliczenia statyczne. Arkady, Warszawa 1972. Tłum. z j. angielskiego Stresses in shells. Springer Verlag 1960 i 1967.
12. Gerard G., Minimum weight analysis of compression structures. New York Univ. Press 1956.
13. Grebień E.S., Osnovnyje uravnenia teorii rebristych połogich obołoček i płastinok. Rasčiot prostranstviennyh konstrukcji. 10. Gosstrojizdat, Moskva 1965.



14. Grebień E.S., Metod rasčotu priamougolnych v planie połogich obołoček nadkrepliennych rebrami v dvuch napravlenijach. Rasčot prostranstviennych konstrukcji 12. Gosstrojizdat, Moskva 1969.
15. Iljin L.O., Differencialnyje uravnenija uprugo ravnoviesia obołoček vraščeniya s meridionalnymi rebrami pri siłovych i temperaturnych nagruzkach. Prikł. Mech. 1964. 10. nr.3.
16. Kowalewski J., Laar Klaus von. Zur Statik inhomogener Schalen. Z. Flugwiss. 1970. 10. nr.7.
17. Krol A.P., Rešenije dvumiernych zadač teorii płastin i obołoček s širokimi i uzкими rebrami metodom L.W. Kontoroviča. Tr. IX Wsiech. Konf. po teorii obołoček i płastin 1973. Sudostrojenie 1975.
18. Kross D.A., Oden J.T., Wempner G.A., Finite element analysis of thin shells. J. EM6. 12. 1968.
19. Levčenko I.S.V., Rasčot osimetričnoj deformacii tołstoj ortotropnoj cylindričeskoj obołočki podkrep- lennoj kolcevymi rebrami. Nauč. Konf. Vyčislit. Mat. v Sovrem. Nauč-Techn. Procesie 1974. vyp.2 Kaniev 1974.
20. Naghdi P.M., Foundations of elastic shell theory. Progress in Solid Mechanics. Vol. IV. North-Holland Publ. Comp. Amsterdam 1963.
21. Naghdi P. M., The theory of shells and plates. Handbuch der Physik Vol. VIa/2 Springer Verlag Berlin-Heidelberg-New York 1972.
22. Nagórski R., Zginanie sferycznej powłoki perforowanej obciążonej osiowo-symetrycznie. Rozprawy Inżynierskie 27,4,1976.
23. Orkisz J., Skończone odkształcenie niesprężystych wiotkich obrotowo-symetrycznych powłok ortotropowych. Rozprawy Inżynierskie. 15, 4, 1967.
24. Pabisek E., Przybyło W., Radwańska M., Waszczyszyn Z., Obliczanie sprężystych uźebrowanych płyt z otworami. XXI Konferencja Naukowa KILiW PAN i KN PZITB Kraków-Krynica 1975.

25. Pabisek E., Przybyło W., Radwańska M., Waszczyszyn Z.,  
Program obliczania płyt uźebrowanych opisanych na siatce  
prostokątnej. Mechanika i Komputer T.2. Warszawa 1980.
26. Rozin L.A., Variacannyje postanovki zadač dla uprugich  
sistem. Izd. Leningradskovo Universiteta. Leningrad 1978.
27. Shalley F.R., Weight-strenght analysis of aircraft  
structures. MCGraw-Hill New York 1952.
28. Sohrabuddin A., Irons B.M., Zienkiewicz O.C.,  
Thick and thin shell structures.  
Int. J. Num. Meth. Engng. Vol.II 1970.
29. Vajnberg D.V., Vajnberg E.D., Rasčot pła<sup>š</sup>tin.  
Budivielnik 1970.
30. Viegiejčuk L.V., Binkievič E.V., Nagruženije  
sosredotočennymi osievymi siłami rebristoj  
cylindričeskoj obołočki čerez tiercievyj spangout.  
Mech. Sistiem. Dniepropietrowsk 1969.
31. Własow W.Z., Obščaja teoria obołoček. Moskwa 1949.
32. Zaruckij V.A., Uravnienija ravnoviesia rebristych  
cylindričeskich obołoček. Teoria pła<sup>š</sup>tinok  
i obołoček. Kijev A.N. ZSRR 1962.
33. Zaruckij V.A., O modelirovanii rebristych cylind-  
ričeskich obołoček. Probl. Proč. nr.8 1971.
34. Zienkiewicz O.C., Metoda elementów skończonych.  
Warszawa 1972.
35. Żmijewski K.H., Zginanie sprężystej powłoki w kształcie  
paraboloidy eleptycznej podpartej na żebrach.  
Mechanika Teoretyczna i Stosowana 1. 18.1980.

Mgr inż. Ryszard Kutylowski  
Instytut Inżynierii Lądowej  
Politechniki Wrocławskiej  
Wybrzeże Wyspiańskiego 27  
50-370 Wrocław

Raport wpłynął do Redakcji Wydawnictw  
Instytutu Inżynierii Lądowej w maju 1986 roku.

Odbiorcy:

|                                                  |        |
|--------------------------------------------------|--------|
| Biblioteka Główna Politechniki Wrocławskiej      | 1 egz. |
| Biblioteka i OINT Instytutu Inżynierii Lądowej   | 1 egz. |
| Redakcja Wydawnictw Instytutu Inżynierii Lądowej | 1 egz. |
| Promotor                                         | 1 egz. |
| Recenzenci                                       | 2 egz. |
| Autor                                            | 3 egz. |

---

|       |        |
|-------|--------|
| Razem | 9 egz. |
|-------|--------|