

Wanda Ronka-Chmielowiec

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

**METODY AKTUARIALNE W PROGRAMACH STUDIÓW
NA KIERUNKU FINANSE I BANKOWOŚĆ
WYDZIAŁU ZARZĄDZANIA I INFORMATYKI
AKADEMII EKONOMICZNEJ WE WROCŁAWIU**

1. Wstęp

Ubezpieczenia w naukach ekonomicznych stanowią integralną część nauki o finansach i dlatego w programach studiów na uczelniach ekonomicznych wykładane są przede wszystkim na kierunku Finanse i Bankowość. W standardach określonych w minimach programowych tego kierunku znajdują się takie przedmioty, jak:

- zastosowania matematyki w finansach i bankowości – 30 godz. (w nowych standardach: matematyka finansowa i ubezpieczeniowa – 30 godz.),
- ubezpieczenia – 30 godz.

Przedmioty te są obowiązkowe dla wszystkich studentów kierunku.

Z kolei zastosowanie metod matematyczno-statystycznych w edukacji ubezpieczeniowej na studiach ekonomicznych może mieć szerszy wymiar w ramach przedmiotów specjalnościowych. Na Wydziale Zarządzania i Informatyki Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu kierunek Finanse i Bankowość został wprowadzony w 1993 roku. W ramach tego kierunku oferowane są studentom następujące specjalności zawierające przedmioty ubezpieczeniowe, które w swojej treści programowej obejmują również metody aktuarialne:

- bankowość i ubezpieczenia,
- zarządzanie finansami,
- zarządzanie ryzykiem,
- usługi finansowe na jednolitym rynku europejskim,
- nieruchomości.

Wśród wielu przedmiotów o ubezpieczeniach prowadzonych dla studentów Wydziału Zarządzania i Informatyki można wyróżnić następujące, które zawierają w swojej treści matematykę aktuarialną:

- metody aktuarialne – 60 godz. (30 godz. wykładu + 30 godz. ćwiczeń),
- ubezpieczenia niezyciowe – 60 godz. (30 godz. wykładu + 30 godz. ćwiczeń),
- ubezpieczenia emerytalne i na życie – 30 godz. (15 godz. wykładu + 15 godz. ćwiczeń),
- zarządzanie ryzykiem w ubezpieczeniach – 30 godz. wykładu.

2. Metody aktuarialne – program

Jako przykład omówimy zostanie program przedmiotu **metody aktuarialne**, który jest najbogatszy w treści programowej w zastosowanie metod matematyczno-statystycznych w ubezpieczeniach.

- 1) probabilistyczne modele ryzyka ubezpieczeniowego:
 - charakterystyka ryzyka ubezpieczeniowego w ubezpieczeniach typu *non-life*,
 - modelowanie ryzyka ubezpieczeniowego w ubezpieczeniach typu *non-life*,
 - modele dyskretne liczby szkód,
 - modele dynamiczne liczby szkód,
 - rozkłady prawdopodobieństwa stosowane do opisu wartości odszkodowań i świadczeń,
 - modelowanie ryzyka katastrofalnego,
 - charakterystyka ryzyka ubezpieczeniowego w ubezpieczeniach typu *life*,
 - modele czasu trwania życia,
 - postaci analityczne modeli demograficznych;
- 2) modelowanie ryzyka ubezpieczeniowego w portfelach:
 - charakterystyka portfeli ubezpieczeniowych,
 - model indywidualnego ryzyka,
 - model kolektywnego ryzyka;
- 3) metody kalkulacji składki w ubezpieczeniach typu *non-life*:
 - budowa składki ubezpieczeniowej,
 - ogólne zasady ustalania składki ubezpieczeniowej,
 - metody kalkulacji składki ubezpieczeniowej netto;
- 4) składki w ubezpieczeniach na życie:
 - czynniki wpływające na konstrukcję składki ubezpieczeniowej,
 - konstrukcja tablic trwania życia i modele demograficzne,
 - metody obliczania składki jednorazowej netto i składki bieżącej w podstawowych typach ubezpieczeń na życie;
- 5) proces ryzyka w działalności ubezpieczeniowej i teoria ruiny:
 - proces nadwyżki finansowej w zakładzie ubezpieczeń,
 - wybrane metody oszacowania prawdopodobieństwa ruiny,

– zastosowanie prawdopodobieństwa ruiny w działalności techniczno-ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej zakładów ubezpieczeń;

6) rezerwy techniczno-ubezpieczeniowe i metody ich tworzenia:

– rodzaje rezerw techniczno-ubezpieczeniowych i ich znaczenie,
– wybrane metody tworzenia rezerw techniczno-ubezpieczeniowych w ubezpieczeniach majątkowych,

– klasyczne metody obliczania rezerwy matematycznej w ubezpieczeniach na życie;

7) reasekuracja:

– reasekuracja klasyczna, rodzaje umów,
– wyznaczanie udziału własnego w podstawowych typach umów reasekuracyjnych.

W dalszej części referatu bardziej szczegółowo przedstawione zostaną zastosowania metod matematycznych w ubezpieczeniach, wykładane studentom studiów ekonomicznych na wykładach specjalizacyjnych. Tutaj zgodnie z ogólnie przyjętymi standardami stosuje się podział na zastosowania matematyki w ubezpieczeniach typu *non-life* i na zastosowania matematyki w ubezpieczeniach typu *life*.

Wykłady specjalizacyjne z ubezpieczeń *non-life* dotyczące zastosowań matematyki obejmują następujące problemy:

- modelowanie i pomiar ryzyka ubezpieczeniowego,
- modelowanie ryzyka ubezpieczeniowego w portfelach i ocena równowagi finansowej operacji ubezpieczeniowych,
- metody kalkulacji składki ubezpieczeniowej netto,
- wykorzystanie metod statystycznych pomiaru ryzyka ubezpieczeniowego w kalkulacji rezerw techniczno-ubezpieczeniowych i w ustaleniu poziomu udziału własnego w kontraktach reasekuracji nieproporcjonalnej.

3. Modelowanie i pomiar ryzyka ubezpieczeniowego

W teorii aktuarialnej ryzyko jest sformalizowane i modelowane. Zakłada się, że do opisu ryzyka ubezpieczeniowego wykorzystywana jest zmienna losowa, która przyjmuje wartości nieujemne. Uzasadnione jest to tym, że ryzyko ubezpieczeniowe ma charakter losowy, gdyż zmienne opisujące ryzyko ubezpieczeniowe są nieznane ubezpieczycielowi i występują losowo. Są to mianowicie:

- liczby szkód,
- wartości szkód,
- momenty czasowe, w których występują szkody lub straty.

Ze zmienną losową związana jest funkcja rozkładu prawdopodobieństwa zwana dystrybucją, która dobrze charakteryzuje ryzyko ubezpieczeniowe. Stąd do brymi miarami ryzyka ubezpieczeniowego stosowanymi w praktyce są następujące parametry rozkładu prawdopodobieństwa:

- wartość oczekiwana,
- odchylenie standardowe,
- wariancja,
- współczynnik zmienności,
- współczynnik skośności.

Jeżeli ryzyko jest mierzalne i w wyniku obserwacji zebrano dostatecznie dużą liczbę danych statystycznych, to można stosować empiryczne metody modelowania, które wykorzystują statystykę opisową. Wówczas jako miarę ryzyka można stosować parametry pozycyjne, takie jak kwartyle, a zwłaszcza medianę, dominantę, odchylenie ćwiartkowe i inne.

W praktyce ubezpieczeniowej do charakteryzacji ryzyka ubezpieczeniowego wykorzystywane są następujące wskaźniki:

- wskaźnik częstości wypadków ubezpieczeniowych,
- wskaźnik rozszerzalności wypadków ubezpieczeniowych,
- wskaźnik częstości roszczeń,
- wskaźnik intensywności występowania wypadków ubezpieczeniowych.

Studentom są przedstawiane następujące zagadnienia dotyczące probabilistycznego modelowania ryzyka ubezpieczeniowego:

- charakterystyka ryzyka ubezpieczeniowego,
- dyskretne modele liczby szkód.

Zmienna losowa K , która opisuje liczbę szkód, może przyjąć wartości $0, 1, 2, \dots$

Do charakteryzacji zmiennej losowej K znajdują zastosowanie następujące rozkłady prawdopodobieństwa:

- dwumianowy,
- Poissona,
- ujemny-dwumianowy,
- logarytmiczny.

Podaje się również przykłady zastosowań tych rozkładów oraz przedstawia się problem zmienności intensywności występowania szkód losowych i dzięki temu prezentuje się model dynamiczny liczby szkód losowych oraz definiuje się mieszany rozkład Poissona i podaje się przykłady empiryczne.

4. Rozkłady prawdopodobieństwa wartości szkód

Wartość indywidualnej szkody lub indywidualnego roszczenia w pewnym ryzyku może być modelowana za pomocą zmiennej losowej ciągłej o pewnej dystrybucji $F(x)$, a przede wszystkim o wartościach $X > 0$, a także o wartości oczekiwanej $E(X)$ skończonej, gdyż w przeciwnym przypadku takie ryzyko nie jest ubezpieczalne.

W zastosowaniach aktuarialnych spotyka się najczęściej następujące typy rozkładów:

- gamma,
- Pareto,

- beta,
- logarytmiczno-normalny,
- normalny.

Podstawowy aplikacyjny problemem, jaki tutaj się pojawia, to określenie postaci dystrybucyjnej lub znalezienie podstawowych parametrów tej dystrybucyjnej.

Aby go rozwiązać, stosuje się następujące metody:

- konstrukcję empirycznej postaci dystrybucyjnej na podstawie obserwacji z poprzedniego okresu zestawionych w szeregi czasowe;
- szukanie analitycznej postaci dystrybucyjnej wyrażonej wzorem i w tym celu wykorzystanie statystycznych testów istotności do zweryfikowania hipotezy o postaci dystrybucyjnej;
- obliczanie na podstawie danych empirycznych podstawowych parametrów rozkładu bez szukania postaci dystrybucyjnej.

Wszystkie te metody są prezentowane studentom na podstawie przykładów.

5. Modelowanie ryzyka

Najpierw przedstawia się problem konstrukcji portfeli złożonych z polis ubezpieczeniowych, a następnie prezentuje się dwa modele klasyczne ryzyka. Pierwszym z nich jest model indywidualnego ryzyka. Model ten znajduje zastosowanie przede wszystkim w ubezpieczeniach osobowych, gdyż tego typu ubezpieczenia w praktyce są sprzedawane na zasadzie indywidualności. Rozważa się portfel złożony z n polis. Wobec takiego portfela powinny być spełnione następujące założenia:

- ryzyko występujące w portfelu jest statystycznie niezależne, co oznacza, że jego realizacja, a następnie koszty szkody lub roszczenia spowodowane przez każde poszczególne ryzyko nie wpływają na pozostałe ryzyko w portfelu;
- w okresie objętym ochroną ubezpieczeniową w każdym ryzyku w portfelu odszkodowanie może wystąpić co najwyżej raz.

Całkowite odszkodowanie wypłacone z portfela złożonego z n niezależnych polis jest sumą odszkodowań pochodzących z poszczególnych polis, co zapisuje się wzorem:

$$Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

gdzie X_i – odszkodowanie pochodzące z i -tej polisy.

Podaje się również studentom konkretne przykłady zastosowań tego modelu.

Następnie omawia się model kolektywnego ryzyka. Model ten ma przede wszystkim zastosowanie w ubezpieczeniach majątkowych, gdyż ryzyko ubezpieczeniowe jest w tym przypadku oceniane i mierzone dla całych portfeli. Proces przebiegu ryzyka odnosi się do portfela jako całości, a nie do indywidualnych polis składających się na portfel. Zatem nie identyfikuje się polisy, z której pochodzi roszczenie. Matematyczna postać tego modelu jest następująca:

Niech K oznacza liczbę roszczeń powstałych w analizowanym portfelu w danym okresie, X_i oznacza wartość pierwszego roszczenia, X_2 – wartość drugiego roszczenia itd.

Zatem całkowitą sumę roszczeń w danym okresie dla badanego portfela określa wzór

$$Z = X_1 + X_2 + \dots + X_K,$$

gdzie K jest zmienną losową opisującą liczbę roszczeń.

W odniesieniu do tego modelu dokonuje się dwóch podstawowych założeń:

- $X_1, X_2, \dots$ są zmiennymi losowymi o identycznych rozkładach,
- zmienne losowe $K, X_1, X_2, \dots$ są wzajemnie niezależne.

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej Z zależy od rozkładu zmiennej losowej K i rozkładu zmiennych losowych X_i , gdzie $i = 1, 2, \dots, K$.

Przedstawia się studentom problem poszukiwania rozkładu zmiennej losowej Z oraz podaje się przykłady zastosowań tego modelu.

Ze względu na dokładność kalkulacji składki ubezpieczeniowej najbardziej wskazane są portfele o małej zmienności wysokości szkód, dla których zachowana jest równowaga finansowa. Takim podstawowym miernikiem równowagi finansowej portfela jest znany parametr statystyczny zwany wskaźnikiem zmienności. Oblicza się go ze wzoru

$$V = \frac{\sqrt{\text{Var}(Z)}}{E(Z)}.$$

Podaje się studentom interpretację tego parametru, wskazane wielkości oraz możliwości wykorzystania go.

6. Metody kalkulacji składki ubezpieczeniowej netto

Najpierw wprowadza się definicję składki netto oraz ideę i podstawę jej określenia. Następnie prezentuje się następujące metody kalkulacji składki ubezpieczeniowej netto łącznie z przykładami:

1. Zasada czystego ryzyka, która oparta jest na równoważności zebranej składki netto dla portfela z wartością oczekiwaną wypłaconych odszkodowań, czyli:

$$P = E(Z).$$

Pokazuje się, że stopa r składki netto wynosi:

$$r = ip,$$

gdzie i jest wskaźnikiem intensywności występowania szkód, a p – prawdopodobieństwem wystąpienia szkody.

2. Zasada wartości oczekiwanej

$$P = (1 + \lambda)E(Z),$$

gdzie parametr $\lambda > 0$.

3. Zasada wariancji

$$P = E(Z) + \alpha \text{Var}(Z),$$

gdzie parametr $\alpha > 0$.

4. Zasada odchylenia standardowego

$$P = E(Z) + \beta \sqrt{\text{Var}(Z)},$$

gdzie parametr $\beta > 0$.

5. Zasada użyteczności – w kalkulacji składki uwzględnia się funkcję użyteczności, która opisuje preferencje poszczególnych ubezpieczycieli. Zgodnie z tą zasadą składkę P otrzyma się dla ryzyka Z z następującego równania:

$$u(x) = E[u(x + P - Z)],$$

co oznacza, że użyteczność początkowego zarobku ubezpieczyciela jest równa oczekiwanej użyteczności zarobku, gdy ryzyko Z zostanie ubezpieczone za cenę P . Zatem składka P zależy od x oraz od funkcji użyteczności u i dystrybuanty Z .

Wykorzystywana jest również postać funkcji użyteczności zerowej

$$u(0) = E[u(P - Z)].$$

6. Zasada wiarygodności

$$P = a_j E(Z_j) + (1 - a_j) E(Z),$$

gdzie Z_j opisuje ryzyko w postaci odszkodowania pochodzące z j -tej polisy lub z pewnej j -tej grupy jednakowych polis o takich samych warunkach kontraktu, Z opisuje ryzyko wygenerowane przez cały portfel polis, natomiast a_j jest współczynnikiem wiarygodności spełniającym następującą nierówność $0 \leq a_j \leq 1$.

7. Zastosowania matematyki w ubezpieczeniach *life*

Wykłady specjalizacyjne z ubezpieczeń *life* dotyczące zastosowań matematyki poruszają następujące problemy:

- modelowanie ryzyka ubezpieczeniowego jako podstawa tworzenia funkcji biometrycznych wykorzystywanych do konstrukcji tablic trwania życia,
- kalkulacja składki ubezpieczeniowej netto w ubezpieczeniach na życie.

W ubezpieczeniach na życie podstawowym ryzykiem ubezpieczeniowym jest czas trwania życia ludzkiego. Do podstawowych czynników wpływających na ryzyko śmierci należą:

- płeć,
- stan zdrowia,
- choroby dziedziczne,
- wykonywany zawód,
- sposób spędzania wolnego czasu,
- nałogi.

Przyjmuje się, że dobrym modelem opisującym czas życia ludzkiego jest pewna ciągła zmienna losowa. To podejście pozwala na zdefiniowanie pewnych funkcji charakterystycznych wykorzystywanych w analizie umieralności, takich jak:

funkcja trwania życia, funkcja natężenia wymierania i przeciętny dalszy czas trwania życia.

Dlatego studentom podaje się następujące definicje:

- Jeśli przez X oznaczymy czas trwania życia noworodka losowo wybranego z danej populacji, to

$$F(x) = P(X \leq x), x \geq 0$$

oznacza dystrybuantę zmiennej losowej X , czyli prawdopodobieństwo, że zmienna losowa X przyjmie wartości nie przekraczające x , a zatem prawdopodobieństwo zdarzenia, że śmierć nastąpiła w przedziale $[0, x]$.

- Przez $s(x)$ oznacza się funkcję trwania życia określoną wzorem

$$s(x) = 1 - F(x) = P(X > x), x \geq 0,$$

która oznacza prawdopodobieństwo, że noworodek osiągnie wiek x , tzn., jego zgon nastąpi w wieku późniejszym niż x .

- Przez funkcję natężenia wymierania rozumie się następujące wyrażenie:

$$\mu_x = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{-s'(x)}{s(x)},$$

które interpretuje się jako prawdopodobieństwo zgonu dokładnie w wieku x .

- Jeśli założymy, że x oznacza wiek osoby ubezpieczonej, to czas przeżycia $T(x)$ dla osób w wieku x jest zmienną losową i wówczas syntetycznym wskaźnikiem przyszłej długości życia x -latków w danej populacji jest wartość oczekiwana zmiennej losowej $T(x)$ zwana przeciętnym dalszym trwaniem życia, którą oznaczamy symbolem $E(T(x))$.

Wszystkie te funkcje są wykorzystywane w konstrukcji tablic trwania życia, które są prezentowane studentom łącznie z przykładami.

W sytuacji, gdy składka jest jednolita przez cały okres ubezpieczenia, który trwa wiele lat, przy ustalaniu jej wysokości są brane pod uwagę dwa następujące podstawowe czynniki:

- śmiertelność, czyli ryzyko śmierci w poszczególnych latach trwania ubezpieczenia,

- stopa procentowa, którą prawdopodobnie można będzie uzyskać z lokat w okresie ubezpieczenia, zwana techniczną stopą oprocentowania.

Stosownie do umowy ubezpieczenia na życie korzyść ubezpieczonego sprowadza się do pojedynczej wypłaty świadczenia. Czas i wartość tej wypłaty są funkcjami zmiennej losowej opisującej długość życia ubezpieczonego.

Przez Z oznacza się obecną wartość wypłaconego świadczenia, tzn. obliczoną na podstawie ustalonej technicznej stopy oprocentowania r . Przez $E(Z)$ oznaczamy wartość oczekiwaną obecnej wartości świadczenia, którą zgodnie z zasadą równoważności zebranej składki i przewidywanej wielkości świadczeń przyjmuje się jako jednorazową składkę netto umowy ubezpieczeniowej, czyli $P = E(Z)$.

Studentom podaje się wzory na obliczenie jednorazowej składki netto w następujących rodzajach ubezpieczeń na życie:

- ubezpieczenie na wypadek śmierci,
- ubezpieczenia okresowe (terminowe),
- ubezpieczenie na dożycie,
- ubezpieczenie mieszane na wypadek śmierci i dożycia,
- ubezpieczenie odroczone,
- ubezpieczenie płatne w momencie śmierci,
- ubezpieczenia na życie ze zmieniającymi się świadczeniami i składkami.

Na zakończenie podaje się zasady obliczania rocznej składki netto. Ponadto na ćwiczeniach studenci obliczają przykłady stosowania tych powyższych zasad.

Literatura

- H.U. Gerber (1990). *Life Insurance Mathematics*. Springer Verlag. Berlin-Heidelberg.
- R. Kaas, M. Goovaerts, J. Dhaene, M. Denuit (2001). *Modern Actuarial Risk Theory*. Kluwer. Boston.
- W. Ronka-Chmielowiec [red.] (2002). *Ubezpieczenia, rynek i ryzyko*. PWE. Warszawa.
- W. Ronka-Chmielowiec (2003). *Modelowanie ryzyka w ubezpieczeniach. Wybrane zagadnienia*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.
- M. Skałba (1999). *Ubezpieczenia na życie*. WNT. Warszawa.
- E. Straub (1988). *Non-life Insurance Mathematics*. Springer Verlag. Berlin.

ACTUARIAL METHODS IN FINANCE AND BANKING PROGRAMME STUDY OF MANAGEMENT AND COMPUTER SCIENCE FACULTY AT WROCLAW UNIVERSITY OF ECONOMICS

Summary

In the article it was presented didactics experiences from many years concern mathematical methods applications in insurance courses for students of Finance and Banking. These courses have specialistic character and are lectured on such specialisms as: Banking and Insurance, Finance Management and Risk Management. Among many insurance subjects in Management and Computer Science faculty program, there are some which include actuarial mathematics problems such as:

- Actuarial methods,
- Risk management in insurance,
- Non-life insurance,
- Life insurance and pension systems.