

Halina Klepacz, Elżbieta Porazińska, Elżbieta Żółtowska

Uniwersytet Łódzki

INTUICJA I PRECYZJA W KSZTAŁCENIU MATEMATYCZNYM EKONOMISTY

Matematyka jako dyscyplina naukowa wymaga precyzji w formułowaniu swoich teorii i w posługiwaniu się odpowiednim dla niej językiem, zazwyczaj symbolicznym. Każda teoria matematyczna, w tym również ta wykładana studentom ekonomii, wymaga więc poprawnego i dokładnego zapisu, zarówno gdy stosujemy formalny język matematyczny, jak i gdy treści matematyczne wyrażamy w języku literackim. Nie budzi więc zastrzeżeń teza, iż w problemach matematycznych precyzja sformułowań jest niezbędną i podstawową zasadą. W związku z tym nie ma miejsca w tym przedmiocie na tak ostatnio modną i popularną: dysleksję i dysgrafię.

Warto może na początku przypomnieć, co oznaczają pojęcia: intuicja, precyzja, teoria, wiedza. *Słownik wyrazów obcych* i *Słownik języka polskiego* w tej kwestii wypowiadają się następująco.

Intuicja (*intuitio*, z łac. *intuitus* = przyglądanie się):

- 1) przeczucie, zdolność przewidywania, twórcza wyobraźnia;
- 2) *filoz.* rodzaj irracjonalnego poznania, polegającego na pocuciowym uchwyceniu prawdy, bez pomocy rozumowania lub działalności praktycznej;
- 3) *psych.* narzucające się przekonanie, którego nie można w pełni uzasadnić, powstające w wyniku nieświadomego przeniesienia postaw wytworzonych w stosunku do podobnych sytuacji lub w wyniku działania bardzo słabych bodźców.

Intuicja intelektualna – umysłowy ogląd istoty bądź całości danego zjawiska.

Intuicjonalizm – w filozofii: kierunek teorii poznania uznający bezpośrednie poznanie rzeczywistości przez intuicję, rozumianą jako **zdolność umysłu**, niesprowadzalną ani do doświadczenia, ani poznania dyskursywnego, jako najbardziej lub jedynie wartościowe.

Niestety, definicje intuicji nie uwzględniają faktu istnienia **intuicji matematycznej**, która odgrywała i nadal odgrywa niezmiernie ważną rolę w tworzeniu i rozwoju teorii matematycznych oraz w ich stosowaniu do rozwiązywania problemów pojawiających się w różnych dziedzinach nauki i praktyki.

Precyzja (z łaciny *praecisio* = obcięcie, przycięcie) – dokładność, drobiazgowość, ścisłość, skrupulatność.

Precyzować – dokładnie, jasno, ściśle coś określać, formułować, uściślać. Precyzować myśli, pojęcia, reguły. Precyzować plan działania.

Teoria (z greckiego *theōria* = oglądanie, badanie):

1) wiedza tłumacząca jakąś dziedzinę zjawisk, w odróżnieniu od praktyki, z którą pozostaje jednak w związku i na podstawie której jest formułowana;

2) zespół, system twierdzeń logicznie i rzeczowo uporządkowanych, powiązanych określonymi stosunkami logicznymi, występujący w danej nauce oraz spełniający przyjęte w niej kryteria naukowości i poprawności metodologicznej.

Wiedza:

1) ogół wiadomości zdobytych dzięki uczeniu się; zasób wiadomości z jakiegóż dziedziny, gałąź nauki;

2) znajomość czegoś; uświadamianie sobie czegoś.

W tym artykule chcemy zwrócić uwagę na dwa aspekty procesu kształcenia matematycznego na studiach ekonomicznych: precyzję i intuicję. A dokładniej: *Ile precyzji, a ile intuicji* powinny czy też mogą zawierać wykładane na studiach ekonomicznych treści matematyczne, zarówno w ramach przedmiotów matematycznych, jak i w przedmiotach nieilościowych, wykorzystujących jako narzędzie matematykę.

Nie ulega wątpliwości, że w procesie kształcenia matematycznego konieczna jest dbałość o precyzyjny zapis, o formułowanie twierdzeń z wyraźnym wyakcentowaniem założeń, o jasne sformułowanie tezy. Należy unikać podawania twierdzeń jako zdań złożonych, nie zawierających spójnika implikacyjnego – co nie jest konieczne, gdy kształcimy matematyków (bo mają inny, bardziej sformalizowany, sposób myślenia), ale niezbędne w kształceniu ekonomistów.

Zwróćmy uwagę, że nieodzowne do prawidłowej percepcji pojęć matematycznych są elementy logiki, które w programach szkół średnich są traktowane drugorzędnie lub wręcz usunięte z programów. W związku z tym student pierwszego roku nie ma wyrobionego nawyku, nie czuje potrzeby ani konieczności posługiwania się symboliką logiczną: logika to nie matematyka, bo się nic nie *rachuje*. Realizowanie zajęć z matematyki zgodnie z minimum programowym w szkole wyższej nie daje możliwości ani wyłożenia tych problemów, ani ich przypomnienia i uzupełnienia – mimo wysiłków prowadzących zajęcia.

Precyzja teorii matematycznych wymaga, by każde twierdzenie (oprócz aksjomatów) było dowodzone. Ta praktyka jest powszechna na kierunkach ścisłych, takich jak: matematyka, fizyka, w kształceniu ekonomistów zaś nie ma takiego znaczenia, co więcej – w ramach zajęć nie ma czasu na ich przeprowadzanie. Z

całą pewnością niektóre dowody mają duże znaczenie praktyczne, stanowią często „model” procedury numerycznej. Jednak w kształceniu ekonomistów ważniejszy wydaje się fakt zrozumienia treści twierdzenia (zrozumienia niesionego przez niego „przesłania”) od formalnego dowodu, który często prowadzi do bardzo subtelnych, niezrozumiałych dla ogółu studentów, logicznych rozważań, co w rezultacie powoduje „wykucie” na pamięć wszystkich występujących w zapisie dowodu symboli, zwrotów i sformułowań.

Dlatego warto i należy twierdzenia ilustrować przykładami, zwracać uwagę na przypadki niespełnienia niektórych założeń i wskazywać w takich przypadkach konsekwencje stosowania określonego wzoru bądź reguły. Prowadzący zajęcia z matematyki na studiach ekonomicznych powinni więc szczególnie zadbać o wyrobienie wśród studentów nawyku sprawdzania założeń twierdzeń i wymagać tego konsekwentnie w pracach pisemnych.

Przeanalizujemy kilka przykładów pojęć i twierdzeń, przy formułowaniu i stosowaniu których studenci masowo popełniają błędy.

Klasycznym przykładem mogą być twierdzenia dotyczące warunków koniecznych i dostatecznych, np. twierdzenie o istnieniu ekstremum, formułowane zazwyczaj jako zdanie z użyciem zwrotu „warunkiem koniecznym...” lub „warunkiem wystarczającym...” Często błędem popełnianym przez studentów jest przedstawianie, zmiana szyku wyrazów w zdaniu i ich przekonanie, że zdanie zachowuje swoje pierwotne znaczenie. Np. warunek konieczny formułują: „W punkcie x_0 funkcja $f(x)$ ma ekstremum, jeśli $f'(x_0) = 0$ ”. Uważają bowiem, że skoro warunek o zerowaniu się pochodnej stoi w drugiej części zdania, to określa tezę wypowiadanego twierdzenia. A fakt, że jest to poprzedzone słowem „jeśli”, nie ma dla nich żadnego znaczenia. Bywa i tak, że warunek konieczny istnienia ekstremum jest utożsamiany z warunkiem istnienia ekstremum w ogóle. Proponujemy ponownie, aby nauczając matematyki ekonomistów, formułować twierdzenia tak, by nie budziło wątpliwości, co należy uznać za założenia twierdzenia, a co – za jego tezę.

Podobny problem obserwujemy w przypadku definicji. Większość z nich jest formułowana w postaci tożsamości i na ogół jedynym sposobem odróżnienia ich od twierdzeń jest występowanie słowa „nazywamy”. Często definicja formułowana jest w sposób warunkowy i rozpoczynana od „jeżeli..., jeśli...”. W kształceniu ekonomistów lepiej by było rozpoczynać od tego, co nazywamy, i w dalszej kolejności podać szczegóły i warunki.

W ramach zapisu logicznego ważne miejsce zajmuje używanie kwantyfikatorów i posługiwanie się nimi. Szczególnie istotne jest, aby uprzytomnić studentom, że w twierdzeniach i definicjach zwroty: „dla każdego $x...$ ”, „weźmy dowolne $x...$ ”, lub „dla dowolnego $x...$ ” są równoważne. Bowiem zwrot „dla dowolnego $x...$ ” oznacza tyle samo co „dla każdego $x...$ ”, a nie tyle co „dla wybranego, ustalonego”. Często również sformułowanie „weźmy dowolne dwa x_1, x_2 ” jest utożsamiane z wybraniem tylko dwóch konkretnych (liczbowych) elementów. Słowo „weźmy” dominuje nad sensem zdania. Innym przykładem jest brak umiejętności

posługiwania się właściwymi spójnikami logicznymi w zdaniach złożonych. Na przykład definicja liniowej niezależności wektorów jest formułowana przez studentów w postaci twierdzenia: *Jeżeli wektory $a_1, \dots, a_k$ są liniowo niezależne, to $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = 0$ i $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$.*

Podobnie, przykładami naganego braku precyzji (na ogół wyniesionego ze szkoły średniej) są:

- zapis definicji parzystości (nieparzystości) funkcji, w redakcji studenckiej ogranicza się do warunku $f(x) = f(-x)$ ($f(x) = -f(-x)$) bez dodatkowych założeń o argumentach: $-x, x \in D_f$;

- w twierdzeniu o związku rzędu macierzy A ze stopniem jej minorów M_r , zapominanie o kwantyfikatorach ($\exists_{M_r \neq 0} \wedge \forall_{M_{r+1}=0} \Rightarrow rz A = r$); jeśli znajdzie się jeden

minor $M_{r+1} = 0$, to wnioskuje się, że $rz A < r + 1$ mimo istnienia większej liczby minorów tego samego stopnia, których wartości się nie oblicza;

- nieprawidłowe zapisywanie przedziałów monotoniczności funkcji: badając monotoniczność funkcji, gdy po rozwiązaniu odpowiedniej nierówności dla funkcji pochodnej otrzyma się sumę przedziałów, wnioskuje się, że funkcja jest rosnąca bądź malejąca w otrzymanym zbiorze;

- przy obliczaniu całki stosuje się określone reguły całkowania, ale nie zwraca się uwagi na to, czy funkcja podcałkowa istnieje.

Widać więc, że aby wszystkie te „niuansy” logiczne prawidłowo objaśniać, student winien dysponować dostatecznym zasobem wiedzy matematycznej dotyczącej faktów matematycznych – pojęć i relacji między nimi.

Zwróciłyśmy wcześniej uwagę, że większość (około 90%) studentów „przerabia” warunek konieczny na implikację w sposób niewłaściwy. Nie zdają oni sobie sprawy, że warunek konieczny podaje konsekwencje tego, że różniczkowalna funkcja w punkcie x_0 ma ekstremum, warunek dostateczny zaś wyraża okoliczności, które muszą wystąpić, aby spełniona była teza. Takie pojmowanie twierdzenia jest przykładem przejścia na płaszczyznę „myślenia intuicyjnego” i wytworzenia „umysłowego obrazu” treści informacyjnej, którą to twierdzenie niesie, jego przesłania i sensu.

Doświadczenie, które zdobywa się np. przy obliczaniu granic funkcji jednej zmiennej i znajomość twierdzeń dotyczących granic funkcji wielu zmiennych, pozwala na intuicyjną ocenę, jakiego wyniku należy oczekiwać, obliczając granicę funkcji wielu zmiennych, a dokładniej potrafi się ocenić, czy w badanym punkcie granica ta będzie czy nie będzie istnieć? Potrafimy zatem wybrać sposób działania zgodnie z tym, co podpowiada nam intuicja.

Podobnie, przy wyborze kryterium badania zbieżności szeregu liczbowego, na podstawie nabytego doświadczenia, przy obliczaniu granic ciągów liczbowych, intuicja kieruje naszą uwagę ku wyborowi odpowiedniego, intuicyjnie najlepszego kryterium, aby wykazać, że szereg jest zbieżny lub rozbieżny.

Intuicję wykorzystujemy również, np. przy przewidywaniu, na podstawie warunków określających elementy zbioru w przestrzeni liniowej, czy zbiór może być podprzestrzenią liniową czy też nie, aby później to przypuszczenie sprawdzić.

Także intuicyjnie bada się – mimo formalnych definicji – własności podzbiorów przestrzeni arytmetycznej (zwłaszcza R^2). Wykazanie w sposób formalny, że zbiór jest np. otwarty, tzn. każdy jego element należy do zbioru wraz ze swym sąsiedztwem, jest dla studentów raczej „mętne”. Podobnie jest z formalnym sprawdzaniem domkniętości zbioru. Łatwiejszym do zrozumienia dla studentów sposobem ustalenia tych własności zbioru jest wówczas odpowiedź na pytanie: co otrzymamy jako iloczyn zbioru A i jego brzegu FrA – zbiór pusty czy brzeg zbioru?

Innym przykładem „intuicyjnego podejścia do problemu” jest wyjaśnienie istoty procedury numerycznej algebraicznego rozwiązywania układów nierówności liniowych, tak by łatwo zrozumieć jej istotę i sens. Numerycznie problem sprowadza się do wyznaczania kolejnych rozwiązań o nieujemnych składowych, równoważnego do rozwiązywanego układu nierówności, układu równań liniowych. Taki właśnie sposób postępowania wyjaśniają dwa podstawowe twierdzenia (oraz ich warianty):

- pierwsze dotyczy własności podzbioru przestrzeni wektorowej, który może być: wielościanem wypukłym lub wielościennym zbiorem wypukłym. Twierdzenie to się formuluje, ilustruje przykładami, ale się go nie dowodzi;

- drugie określa związek między rozwiązaniami układu nierówności liniowych (z warunkiem brzegowym bądź bez) a rozwiązaniami równoważnego układu równań.

Z tej wiedzy wybieramy tylko następujące fakty:

- aby zapisać dowolne rozwiązanie układu nierówności z warunkami brzegowymi wystarczy znać wektory określające wierzchołki zbioru, gdy jest on ograniczony,

- znany jest związek między wierzchołkami zbioru rozwiązań układu nierówności a rozwiązaniami bazowymi równoważnego układu równań,

- jeśli zbiór rozwiązań jest nieograniczony, to wymagana jest dodatkowo znajomość wektorów wiodących nieograniczonych krawędzi zbioru i odpowiednich wektorów z fundamentalnego układu rozwiązań,

- znany jest związek wektorów głównych nieograniczonych krawędzi zbioru rozwiązań układu nierówności i odpowiednich wektorów z fundamentalnego układu rozwiązań równoważnego układu równań (jednorodnych).

Zrozumienie problemu opieramy głównie na przykładowym rozwiązaniu zadania dla dwóch zmiennych (zbiory można zilustrować na płaszczyźnie) i polegamy na intuicji w przypadku wyższego wymiaru. Ostatecznie rzecz sprowadza się do skojarzenia równoważności między:

- rozwiązaniami bazowymi (o nieujemnych składowych) układu równań a wierzchołkami zbioru rozwiązań układu nierówności liniowych;

- odpowiednimi wektorami fundamentalnymi a wektorami głównymi nieograniczonych krawędzi zbioru rozwiązań układu nierówności.

Takie podejście do algebraicznego wyznaczania wierzchołków zbioru rozwiązań układu nierówności liniowych pozwala łatwo pojąć intuicyjny sens algorytmu simpleks jako metody kontrolowanego przeglądu wierzchołków wielościanu, na którym poszukujemy wartości największej (najmniejszej) funkcji liniowej (wybór wierzchołków jest konsekwencją twierdzenia Weierstrassa). Przy stosowaniu tej metody numerycznej szczególne znaczenie ma kontrola logiczna otrzymywanych w kolejnych iteracjach:

- a) wartości wskaźników optymalności dla wektorów bazowych,
- b) wartości funkcji celu dla kolejnych iteracji,
- c) liczby wektorów bazowych i wartości ich współrzędnych.

Bez prowadzenia tego typu kontroli może się okazać, że wykonywane „rachunki” są bezużyteczne (wystarczy jeden błąd rachunkowy, aby zdyskredytować sens całego rozwiązania).

Opisane problemy i zabiegi mające na celu rzetelną edukację matematyczną są po części niweczone przez naszych kolegów wykładających mikro- i makroekonomię. Z reguły są to osoby „nieczułe” na niuansy matematyczne, posługujące się podręcznikami, najczęściej tłumaczonymi z języka angielskiego, w których strona matematyczna nie jest zadowalająca. Często nawet oczywiste relacje są w tych podręcznikach stawiane dosłownie „na głowie”. Dotyczy to zwłaszcza ilustracji graficznych i opisu słownego prezentowanych relacji. Wybór osi odciętych i rzędnych dla określonych zmiennych zależy zazwyczaj od sposobu pomiaru, miana prezentowanej kategorii ekonomicznej. Zmienna mierzona w jednostkach naturalnych zazwyczaj ma przypisaną oś odciętych, natomiast ta sama zmienna mierzona wartościowo może być osią rzędnych. Mimo opisu słownego odpowiednich relacji często zdarza się, że ilustracja graficzna dotyczy relacji odwrotnej. Ilustruje się w układzie współrzędnych zależności krzywoliniowe jako odcinki; podobno dla „ułatwienia” – nie wiadomo, czy interpretatorowi zależności, czy grafikowi, ale z całą pewnością dla „utrudnienia” studentowi zrozumienia przedstawianych relacji. Przeglądu tych pseudomatematycznych objaśnień różnych problemów ekonomicznych można dokonać, śledząc teksty podręczników ekonomii – znajdującym się tam sformułowaniom daleko jest zarówno do precyzji, jak i do matematyki.

Wydaje się więc, że ważne miejsce w matematycznym kształceniu ekonomistów (zamiast uczenia formalnych dowodów twierdzeń) powinno zająć „wyrabianie” intuicji matematycznej. Oczywiście, w procesie kształcenia precyzja i intuicja muszą występować łącznie: **precyzja** w sferze formułowania definicji, twierdzeń, wzorów; **intuicja** – w sferze ich aplikacji, szczególnie w sferze sprawdzania założeń, których spełnienia wymaga stosowanie wybranych twierdzeń. Istotne znaczenie dla sylwetki i osobowości przyszłego ekonomisty ma, oprócz kształcenia logicznego i formalnego wnioskowania, wpojenie mu zasady, by rozpoznawać problemy przed wyborem metod rachunkowych oraz wyrobienie umiejętności i nawyku kontroli logicznej otrzymywanych wyników. Proces kształcenia matema-

tycznego może osiągnąć zamierzone, pozytywne efekty jedynie wówczas, gdy wykładowcy matematyki otrzymają aktywne wsparcie zarówno wykładowców innych przedmiotów, zwłaszcza ekonomii, jak i studentów, którzy powinni, oprócz systematycznej pracy, mieć motywacje do zdobycia niezbędnej dla ekonomisty wiedzy matematycznej.

Literatura

- J. Tokarski [red.]. *Słownik wyrazów obcych*. PWN. Warszawa.
S. Dubiasz [red.]. *Uniwersalny słownik języka polskiego*. T. 1. PWN. Warszawa.
M. Szymczak [red.]. *Słownik języka polskiego*. PWN. Warszawa.

INTUITION AND PRECISION IN MATHEMATICAL EDUCATION OF AN ECONOMIST

Summary

In this article the authors want to attract attention to two aspects of mathematical educational process in economic studies; precision and intuition. Most often a student who begins learning in a high school is neither good at mathematical knowledge nor at correct association ways of different notions and exact conclusions. University teachers of science must not only acquaint students with new knowledge but eliminate wrong habits as well. They have to develop the ability of precise expressing and describing problems. Apart from necessary mathematical precision it is extremely important to improve students mathematical intuition, which is difficult to achieve.