

Jacek Juzwiszyn

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

Andrzej Krzywicki

Wyższa Szkoła Handlowa we Wrocławiu

RÓWNANIA HYDRODYNAMIKI A MODELE EKONOMICZNE

1. Wiry ekonomiczne

Przy omawianiu pojęcia równowagi ekonomicznej najczęściej korzysta się z graficznego przedstawienia krzywych popytu i podaży, wskazując na punkt ich przecięcia. Punkt ten nazywany jest w ekonomii punktem równowagi. Krzywe popytu i podaży przedstawiają dynamikę cen i ilości dóbr nabywanych przez konsumentów. Ową dynamikę dobrze ilustruje tzw. ekonomiczny model pajęczynowy (B. Klimczak (1998))¹. O tym dwuwymiarowym modelu wirowym można powiedzieć, że jest on modelem naturalnej dynamiki rynku. Wspomniana naturalność została dostrzeżona w ekonomicznych przestrzeniach trójwymiarowych (*cena, ilość, czas*), dowolnych dóbr ekonomicznych i jest ona wyrażana poprzez trójwymiarowe wiry pojawiające się w tych układach.

Jeżeli w produkcie kartezjańskim

$$P \times Q \times T \in R_+^3$$

umieścimy wektory

$$(p_i, q_i, t_i) \in P \times Q \times T, \quad i \in N,$$

¹ Płaskie (dwuwymiarowe) wiry ekonomiczne, niezależnie od przedstawionego przez T. Hanau, R. Ricciego i J. Tinbergena tzw. modelu pajęczynowego, można również spotkać w pracy U. Siedleckiej (1993). Na płaskie zawirowania pokazujące zależności między inflacją i bezrobociem wskazali również w swojej pracy R. Dorbusch, S. Fischer (1981).

to otrzymana trójwymiarowa krzywa będzie trajektorią wirowo-spiralną (J. Juzwiszyn (2003)). Okazuje się, że trajektorie wirowo-spiralne opisują dynamikę jakichkolwiek dóbr ekonomicznych, w tym również indeksów giełdowych, analizowanych w dowolnym przedziale czasowym.

Ortogonalne rzuty trajektorii wirowo-spiralnych na trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny powodują, że w przypadku gdy jedną z osi jest zmienna czasu, to otrzymujemy płaskie wykresy funkcji poligonalnych (*zygzaki*), natomiast gdy rzutu trójwymiarowej trajektorii dokonujemy na płaszczyznę *cena, ilość*, wówczas otrzymujemy płaskie krzywe wirowe (*spirale*).

$$p: R_+^3 \rightarrow R_+^2, \quad p: (P \times Q \times T) \rightarrow (P \times T),$$

$$q: R_+^3 \rightarrow R_+^2, \quad q: (P \times Q \times T) \rightarrow (Q \times T),$$

$$s: R_+^3 \rightarrow R_+^2, \quad s: (P \times Q \times T) \rightarrow (P \times Q).$$

Właśnie te płaskie wiry powstałe w układach (*cena, ilość*) w swoim kształcie są uderzająco podobne do wirów hydromechanicznych. Obserwując wiry ekonomiczne w dowolnych układach czasowych, można wyciągnąć ogólny wniosek, że w ekonomii wszystko wiruje wokół swojego punktu równowagi (J. Juzwiszyn (2005a)). Podobnie jak w świecie fizycznym materia wiruje wokół środka ciężkości. Autorom publikacji nie są znane przykłady dokonań, w których wykorzystuje się przykłady równań różniczkowych hydrodynamiki w modelowaniu zjawisk ekonomicznych. Niemniej jednak istnieją próby budowy pewnych analogów zaczerpniętych z hydrodynamiki i ich próby przeniesienia do ekonomii. Analogi te były możliwe tylko i wyłącznie na skutek kinematycznych podobieństw pomiędzy trajektoriami ekonomicznymi i hydrodynamicznymi.

Jedną z prób budowy takiego właśnie analogu jest zdefiniowanie tzw. ekonomicznego wskaźnika ostrzegawczego Reynoldsa (R_e). Wartość tego bezwymiarowego wskaźnika w hydrodynamice określa rodzaj przepływu cieczy (J. Juzwiszyn (2004)). Pod koniec XIX w. angielski fizyk O. Reynolds rozwiązał problem przechodzenia cieczy z tzw. ruchu laminarnego w ruch turbulentny. Pokazał on, że zmianę charakteru ruchu cieczy można wyznaczyć za pomocą wartości pewnej bezwymiarowej liczby (wskaźnika), zwanej dzisiaj liczbą Reynoldsa (H. Lamb (1993)):

$$R_e = \frac{\rho v l}{\eta},$$

gdzie: v jest prędkością cieczy, ρ – gęstością cieczy, η jest lepkością cieczy, a l – długością przepływu cieczy.

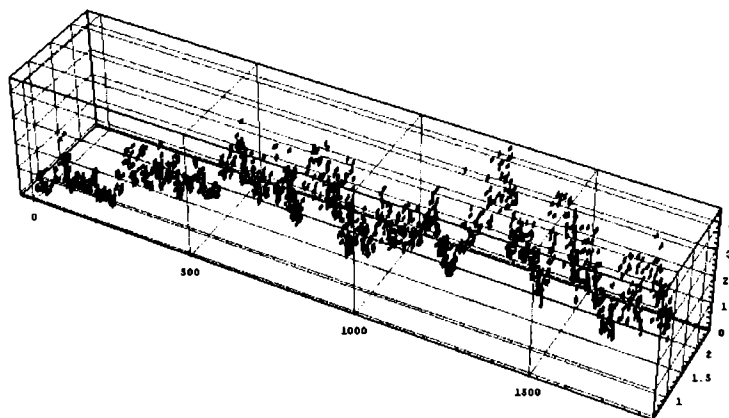
O. Reynolds na podstawie empirycznych badań wykazał, że w przypadku, gdy badaną cieczą będzie np. woda, to dla: $R_e < 1000$ – ruch cieczy będzie laminarny (stabilny), dla $1000 < R_e < 2000$ – ruch cieczy będzie niestabilny, dla $R_e > 2000$ – ruch cieczy będzie turbulentny (burzliwy).

Charakter trójwymiarowych trajektorii giełdowych jest nieprzewidywalny, podobnie jak nieprzewidywalne są tory (trajektorie) przepływu cieczy. Ekonomiczny analogon liczby Reynoldsa (R_g) zbudowano na podstawie danych opisujących wartości i wolumeny indeksów giełdowych.

$$R_g = (\sigma v)^2,$$

gdzie σ jest wariancją, v – średnią prędkością ruchu wektora.

Łatwo zauważyć, że w ekonomicznym analogu liczby Reynoldsa nie występują takie charakterystyki jak lepkość i gęstość (choć odgrywają one zasadniczą rolę w procesie przepływu cieczy). Po szeregu przekształceń zostały one wyeliminowane². Jednak zdaniem autora pierwszej części artykułu (wiry ekonomiczne), można tym hydrodynamicznym czynnikom charakteryzującym przepływ rozważanej cieczy nadać interpretację ekonomiczną. A mianowicie, hydrodynamiczna gęstość została w ekonomicznej interpretacji liczby Reynoldsa zastąpiona stałą liczbą spółek wchodzących w skład indeksu, dla którego wskaźnik jest wyznaczany. Lepkość zaś utożsamiana będzie z wielkością kapitałową spółki. Krótko mówiąc, spółki o większej lepkości to duże znane spółki, które mają dużą wartość rynkową.



Rys. 1. Trójwymiarowa trajektoria indeksu WIG za okres od 18.04.94 do 18.04.02
(w układzie: indeks, wolumen, czas)

Źródło: opracowanie własne.

Giełdowy (ekonomiczny) analog liczby Reynoldsa, wyrażonej przez kwadrat iloczynu wariancji i prędkości giełdowego wektora, może znaleźć zastosowanie w analizie technicznej jako tzw. wskaźnik ostrzegawczy Reynoldsa. Wyznaczanie jego wartości progowych dla różnych typów rynków i ich późniejsza analiza może wpłynąć na zwiększenie przewidywalności rynków. Wartości wskaźnika ostrze-

² Wszystkie przekształcenia, które pozwoliły na zbudowanie tzw. giełdowego wskaźnika ostrzegawczego Reynoldsa (R_g), czytelnik znajdzie w pracy: J. Juzwiszyn (2003b).

gawczego Reynoldsa wyznaczają momenty czasu, w których rynek przechodzi z dynamiki stabilnej w tzw. dynamikę turbulentną. W giełdowej R_+ ³ nastąpiło szybkie przejście trajektorii z małych wirów w duże wiry ekonomiczne³. Przykład trójwymiarowego wiru ekonomicznego został zamieszczony na rys. 1.

Obecnie wydaje się rzeczą niemożliwą, aby można było wprost przenieść w świat ekonomii teorię równań różniczkowych, która jest wykorzystywana do opisu zjawisk hydrodynamiki. Niemniej jednak stale pojawiają się coraz to śmielsze próby wykorzystywania równań hydrodynamiki do opisu zjawisk ekonomicznych. Podobieństwo jakie zostało dostrzeżone pomiędzy wirowymi trajektoriami ekonomicznymi i trajektoriami hydrodynamicznymi pozwala na stawianie hipotez dotyczących wirów w ekonomii, w których wykorzystywane będą równania różniczkowe, w tym również te zapożyczone z hydrodynamiki. Na zakończenie części dotyczącej wirów ekonomicznych przytoczę słowa W.I. Arnolda (1983)⁴. „Rozważane powyżej zjawiska występują często w różnorodnych konkretnych sytuacjach: na każdym kroku tracą stabilność układy mechaniczne, fizyczne, chemiczne, biologiczne lub ekonomiczne”.

2. Równania hydrodynamiki

W hydromechanice rozpatruje się ciecze o różnych własnościach fizycznych, różne więc postacie mają równania opisujące ich ruch. W przypadku cieczy nieściśliwych, lepkich, jednorodnych są to równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu – równania Navier-Stokesa postaci

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \nabla) u = -\nabla p + \mu \Delta u, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad (1)$$

gdzie $u = u(x, t)$ jest zależnym od punktu x należącego do obszaru przepływu D , $x + D$ i chwili t wektorem prędkości cieczy, $u = (u_1, u_2, u_3)$, $p = p(x, t)$ – ciśnieniem a stała dodatnia μ – współczynnikiem lepkości. Pierwsze z równań (1) wyraża prawo zachowania pędu, drugie – nieściśliwość cieczy, tj. zachowanie w czasie objętości cieczy, stała dodatnia μ jest współczynnikiem lepkości cieczy. Układ równań (1) musi być uzupełniony warunkiem początkowym – wartością wektora prędkości u w chwili początkowej $t = 0$, $u(x, 0) = u_0(x)$ w całym obszarze przepływu D (i wartościami wektora u na jego brzegu dla wszystkich $t > 0$). Przepływ cieczy jest więc procesem deterministycznym, a jego przestrzeń fazową tworzą jego chwilowe stany – chwilowe rozkłady prędkości w obszarze D . Postać tej przestrzeni dla układu Navier-Stokesa nie jest przez te równania jednoznacznie określona. Może-

³ W pracy doktorskiej (J. Juzwiszyn (2005b)) istnieją przykłady obliczeń potrzebnych do wyznaczenia wartości giełdowego wskaźnika Reynoldsa, dla różnych indeksów giełdowych GPW w Warszawie. W pracy została przedstawiona również ekonomiczna interpretacja otrzymanych wyników.

⁴ Cytat pochodzi z §33. Utrata stabilności przez położenie równowagi. 6. Lokalna teoria bifurkacji. D. Zastosowanie do teorii stabilności hydrodynamicznej. Str. 244.

my ją wybrać, decydując, w jakiej klasie regularności szukamy rozwiązań. Może to być klasa funkcji dwukrotnie różniczkowalnych względem zmiennej x i raz względem zmiennej t (jak wymagają tego równania), ale może też nią być klasa funkcji mających jedynie słabe pochodne (tak czy inaczej rozumiane, np. któraś z przestrzeni Sobolewa). Rozważane w każdej z tych przestrzeni równania Navier-Stokesa można zapisać w postaci równania różniczkowego

$$\frac{du}{dt} = f(u) \quad (2)$$

z warunkiem początkowym $u(t) = u_0$ (warunek brzegowy spełniony jest przez wszystkie elementy wybranej przestrzeni fazowej). Jest to więc układ dynamiczny rozważany w nieskończenie wymiarowej przestrzeni fazowej (f jest operatorem nieliniowym określonym w tej przestrzeni), a jego postać (2) pozwala mówić o rozwiązaniu jako o krzywej (trajektorii) w tej przestrzeni, wychodzącej z punktu początkowego u_0 . W przypadku jednoznaczności rozwiązania trajektorie te, nie przecinając się, gładko wypełniają przestrzeń fazową (lub jej część). Ale tu pojawia się istotna trudność: z definicji układu dynamicznego jego rozwiązania muszą być jednoznacznie określonymi przez warunek początkowy rozwiązaniami globalnymi (tzn. dla wszystkich $t > 0$). Na razie matematycy nie potrafią spełnić obu warunków jednocześnie: albo w wybranej przestrzeni rozwiązania są jednoznacznie określone dla wszystkich t jedynie dla małych wartości początkowych u_0 (a więc przepływów powolnych), albo też istnieją dla wszystkich t , ale nie są jednoznaczne. Mając nadzieję na pozytywną odpowiedź, matematycy badają jej konsekwencje.

W hydromechanice ruchy cieczy dzieli się (dość nieprecyzyjnie) na spokojne, gładkie (laminarne) i burzliwe, chaotyczne, zwane turbulentnymi. Nas będą interesować te ostatnie. Gdy odkręcamy powoli kran, w miarę zwiększania prędkości wypływającej wody jej strumień początkowo gładki i spokojny zaczyna się faldować, powierzchnia jego zaczyna coraz szybciej drgać, aby przejść w pewnym momencie w stan wzburzony, chaotyczny. Moment, kiedy to następuje, określa liczba Reynoldsa $Re = LU/\mu$; L jest wielkością charakteryzującą rozmiary obszaru przepływu – w naszym przypadku może to być np. średnica otworu kranu, U – prędkością wypływającej wody, μ – współczynnikiem lepkości. Gdy Re przekroczy pewną krytyczną wartość, przepływ staje się turbulentny. Jeśli tego rodzaju nieregularny ruch chcemy opisać na podstawie równań Navier-Stokesa, odpowiadające mu rozwiązania muszą być też w jakimś sensie nieregularne, co usprawiedliwia konieczność poszukiwania rozwiązań we wspomnianych wyżej klasach mniej regularnych funkcji. Ale czy możliwy jest opis przepływu turbulentnego przez gładką trajektorię, ale o chaotycznym przebiegu?

Okazało się, że regularny obraz modelu deterministycznego nie jest sprzeczny z bardzo chaotycznym, mającym cechy procesu losowego, przebiegiem trajektorii. Co więcej, tego rodzaju chaos deterministyczny jest zjawiskiem typowym w obszernej klasie modeli nieliniowych. Zauważono to już wcześniej (pierwszy był

H. Poincaré analizujący tzw. zagadnienie trzech ciał), ale bliższy wgląd w strukturę takich rozwiązań stał się możliwy dopiero dzięki komputerom pozwalającym skonstruować przebieg trajektorii w dostatecznie długim odcinku czasu. Na gruncie równań hydromechaniki odkrycia takiego dokonał E.N. Lorenz (1963), rozważając uproszczony, dwuwymiarowy model atmosfery ziemskiej w postaci warstwy cieczy zawartej między dwiema poziomymi płaszczyznami utrzymywanymi w stałych temperaturach – wyższej na dolnej płaszczyźnie i niższej na górnej. Różnica temperatur powoduje ruch konwekcyjny cieczy; jeśli przekroczy pewną wartość, ruch cieczy staje się turbulentny. Opisujący ten model układ równań różniczkowych cząstkowych, uwzględniający również procesy termiczne, Lorenz drastycznie uprościł, redukując go do trzech równań różniczkowych zwyczajnych:

$$x' = -sx + sy, \quad y' = -xz + rx - y, \quad z' = xy - bz,$$

gdzie $r = 28$, $s = 10$, $b = 8/3$. Występujące w tym układzie funkcje x , y , z są zależnymi od czasu współczynnikami pierwszych wyrazów w rozwinięciach na szereg Fouriera funkcji określających temperaturę i dwie składowe prędkości cieczy. Okazało się, że chaotyczny przebieg trajektorii w przestrzeni fazowej R^3 tego układu uwarunkowany jest obecnością atraktora o bardzo dziwnych własnościach. Przypomnijmy, że atraktorem A układu równań różniczkowych jest zbiór (zwarty, spójny), do którego zbiegają, gdy t dąży do nieskończoności, wszystkie trajektorie układu z pewnego otoczenia zbioru A (zwanego basenem atraktora A). W najprostszym przypadku układów liniowych $dx/dt = Ax$ atraktorem jest punkt równowagi układu $x = 0$, jeśli tylko części rzeczywiste wartości własnych macierzy A są ujemne, a basenem jest cała przestrzeń. Koniecznym warunkiem na pojawienie się atraktorów o ciekawszej strukturze topologicznej jest nieliniowość układu. W przypadku płaszczyzny mogą to być stabilne cykle graniczne – krzywe zamknięte, a bardziej skomplikowane atraktory mogą pojawić się dopiero w przestrzeniach trójwymiarowych; tu ich struktura może być istotnie niezwykle skomplikowana. Można śledzić pojawianie się atraktorów i ich przekształcanie w wyniku ciągłej zmiany wartości parametrów liczbowych występujących w równaniach. Tak jest w układzie Lorenza: przy małych wartościach parametrów r , s , b atraktory są jednopunktowe, przy ich wzroście atraktory te przekształcają się, przy podanych wartościach parametrów jeden z nich staje się „dziwnym atraktorem”, a przebiegające w jego otoczeniu (i na nim) trajektorie stają się niezwykle skomplikowanymi krzywymi. Atraktor ten ma kształt podobny do rozłożonych skrzydełek motyla. Na każdym z tych skrzydełek lub w ich dostatecznie bliskim sąsiedztwie trajektorie układu wykonują wielokrotne obroty, a ich losowy charakter wyraża następująca własność: dla każdego nieskończonego ciągu liczb naturalnych $n_1, n_2, n_3, \dots$ można wybrać taki punkt przestrzeni, że wybiegająca z niego trajektoria układu Lorenza wykonuje kolejno: najpierw n_1 obrotów na jednym ze skrzydełek, potem przeskakuje na drugie, wykonując na nim n_2 obrotów, następnie przeskakuje z powrotem na pierwsze, wykonując n_3 obroty itd. Dowolnie mała zmiana warunku początko-

wego powoduje drastyczną modyfikację wybranego ciągu liczb określających liczby kolejnych obrotów; nowa trajektoria przebiega zupełnie inaczej, odpowiadające tej samej chwili punkty obu trajektorii rozbiegają się.

Tak skomplikowany charakter przebiegu całek układu wskazuje na to, że atraktor ten nie może być 2-wymiarową rozmaitością (którą możemy utożsamić z płaszczyzną) – opisany przebieg całek nie może być zrealizowany na płaszczyźnie bez konieczności pojawienia się ich wzajemnych przecięć. Atraktor ten ma bardzo złożoną strukturę topologiczną; korzystając z rozszerzonego pojęcia wymiaru (tzw. wymiaru Hausdorffa) trzeba mu przypisać wymiar zawarty między dwójką i trójką. Sam proces, który opisuje przebiegająca w jego otoczeniu trajektoria, nazwano „chaosem deterministycznym”. W sposób naturalny nasunęło się przypuszczenie, że obiekt analogiczny do atraktora Lorenza w przestrzeni rozwiązań pełnego układu równań Navier-Stokesa mógłby opisać zjawisko turbulencji. Dodatkowym argumentem byłby fakt, iż atraktor ten pojawił się przy rozważaniu rozwiązań równań hydromechaniki.

Oczywiście nie w każdym układzie deterministycznym może pojawić się chaos. Wiemy już, że układ taki musi być nieliniowy, co najmniej trójwymiarowy. Znalaziono dalsze warunki konieczne. Najważniejszy z nich określono nazwą „dużej wrażliwości na zmianę warunków początkowych”: mała zmiana warunku początkowego powoduje bardzo dużą zmianę przebiegu rozwiązania dla dużych wartości czasu: punkty odpowiadające tej samej chwili t rozbiegają się. Zauważmy, że praktycznie oznacza to niekontrolowalność procesu dla dalekich chwil t . Ponadto układ musi być dysypatywny (rozpraszający energię) – w przypadku równań Navier-Stokesa wyraża się to obecnością wyrazu Δu .

Podjęmowane są liczne próby wytłumaczenia zjawiska turbulencji jako procesu w pełni zdeterminowanego samymi równaniami Navier-Stokesa i uwarunkowania jako przebiegu pojawieniem się w przestrzeni rozwiązań, przy przekroczeniu przez liczbę Reynoldsa wartości krytycznej, dziwnego atraktora. Uzyskano już w tym kierunku wstępne ważne wyniki: istnienie skończenie wymiarowego atraktora w (nieskończenie wymiarowej) przestrzeni rozwiązań, a także wrażliwość rozwiązań na warunki początkowe. Wobec dużych trudności w pełnej realizacji tego projektu podjęto próby stworzenia teorii turbulencji przyjmujące za punkt wyjścia pewien z góry założony mechanizm, którego szczegóły uzupełniane są pewnymi wyróżnionymi własnościami rozwiązań oryginalnych równań – np. w pełni rozwinięta turbulencja jest wynikiem stopniowej komplikacji atraktora przez wzrastanie jego wymiaru, następującej na drodze kolejnych bifurkacji opisujących proces nakładania się coraz drobniejszych wirów. Najbardziej obiecująca teoria (stworzona przez A.N. Kołmogorowa) oparta na analizie wymiarowej zajmuje się głównie analizą wielostopniowego procesu przepływu energii kinetycznej od zaburzeń („wirów”) wielkoskalowych do drobnoskalowych. W innych teoriach dokonuje się uproszczeń równań Navier-Stokesa przez różnego rodzaju ich obcinanie (działania podobne jak u Lorenza, ale robione bardziej subtelne). Są również konstrukcje,

w których rozwiązania zastępuje się miarami określonymi na przestrzeni rozwiązań, a także inne, statystyczne, traktujące zagadnienie jako czyste losowe.

Czy modele ekonomiczne i równania hydromechaniki mają ze sobą coś wspólnego? W wielu modelach rozważanych w ekonomii, podobnie jak w hydromechanice, pojawiają się procesy chaotyczne wymagające wytłumaczenia i precyzyjnej analizy. Celem referatu jest zaznajomienie słuchaczy z pewnymi faktami dotyczącymi równań Navier-Stokesa i modelowania ekonomicznego. Wiele ciekawego materiału na temat teorii chaosu deterministycznego, turbulencji, a także informacji na temat literatury można znaleźć w wydanej przez PWN w 1993 r. książce H.G. Schustera, *Chaos deterministyczny. Wprowadzenie*.

Literatura

- W.I. Arnold (1983). *Teoria równań różniczkowych*. PWN. Warszawa.
- R. Dorbusch, S. Fischer (1981). *Macro – Economics*. McGraw-Hill Book Co. New York .
- B. Hansen (1976). *Przegląd systemów równowagi ogólnej*. PWN. Warszawa.
- Z. Hellwig (1999). *Metody ilościowe w ekonomii*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.
- J. Juzwiszyn (2003a). *Giełdowa liczba Reynoldsa*. Wydawnictwo Uniwersytetu Szczecińskiego.
- J. Juzwiszyn (2003b). *Rynkowy wskaźnik ostrzegawczy Reynoldsa*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.
- J. Juzwiszyn (2004). *Concerning the Revolution of Financial Spheres*. Applications of Physics in Financial Analyses 4. Warsaw University of Technology.
- Juzwiszyn J. (2005a). *Efektywność – wirowa równowaga ekonomiczna*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.
- J. Juzwiszyn (2005b). *Ekonofizyczna próba sformalizowania fal Elliotta*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.
- B. Klimczak (1998). *Mikroekonomia*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.
- H. Lamb (1993). *Hydrodynamics*. Cambridge: Cambridge Mathematical Library.
- U. Siedlecka (1993). *Prognozy ostrzegawcze*. Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 651. Seria: Monografie i opracowania nr 99.

HYDRODYNAMIC EQUATIONS – ECONOMIC MODELS?

Summary

The phenomenon of the appearance of chaotic solutions in deterministic models will be presented on the example of hydrodynamic equations.

Can such models help in describing economic models?