

Anna Janiga-Ćmiel

Akademia Ekonomiczna w Katowicach

WYKORZYSTANIE MODELU RÓŻNICOWEGO DO ANALIZY CYKLICZNOŚCI WYDATKÓW BUDŻETU PAŃSTWA W ZALEŻNOŚCI OD DOCHODÓW

1. Wstęp

Rozwój nauki wymaga coraz szerszego spojrzenia na zakres wiedzy; przy zawężającej się specjalizacji wymagane jest nowe usystematyzowanie wiedzy dotychczas poznanej.

Badacze powinni charakteryzować się umiejętnością zarówno analizy wiedzy, jak i jej syntezy, i to w zakresie nauczania i badania pod kątem poszerzania i odkrywania nowych wycinków wiedzy.

Niezależnie od tego ekonomista nie może ograniczać się do wąskiej specjalności.

W każdej sytuacji zakres specjalności poszerza wiedza z matematyki i statystyki. Przy dzisiejszych możliwościach komputerów matematyka i statystyka stanowią ogromną możliwość dokładniejszego i nowego sposobu wyjaśnienia dotychczas poznanej wiedzy.

Każdy z problemów wymaga analizy dużych baz danych. Istotne znaczenie w poznawaniu wiedzy ma modelowanie matematyczne. Współczesna wiedza ekonomiczna powinna łączyć klasyczną wiedzę z elementami wiedzy współcześnie poszerzonej. Jest to taki ogrom wiedzy, nad jakim może zapanować jedynie matematyka, która syntezuje, analizuje, klasyfikuje i porządkuje. Przemawia za tym nie sam rozmiar wiedzy, lecz jej złożoność i kombinacja kierunków.

Obecne kierunki rozwoju ekonomii wymagają wykrywania badań jednoczesnego oddziaływania wielu różnych czynników wpływających w różnym stopniu na badane zjawisko.

Znaczenia nabierają wielowymiarowe analizy gospodarki kraju. Problem ten wymaga ciągłego porządkowania przekazywanej studentom wiedzy z zakresu matematyki. Chodzi tu o analizę funkcji wielu zmiennych i tematykę związaną równaniami różniczkowymi.

Ogromny zakres prowadzonych badań ukierunkowany jest głównie na formułowanie prognoz. W tym celu należy dokładnie rozpoznać rzeczywistość i zaszłość, co można osiągnąć gruntownym zbadaniem dynamiki zjawisk. Problem ten podjęty został w szeregu prac, jednak rzadko do jego rozwiązania używa się równań różniczkowych lub różnicowych. W pracy mojej zamierzam zająć się problemem metod opartych na wykorzystaniu równań różnicowych. Wykorzystam je do scharakteryzowania cykliczności wydatków budżetu państwa.

Badanie dynamiki zjawisk, jakie w analizie klasycznej jest wykonywane na podstawie analizy wskaźnikowej lub badania składowych szeregu czasowego (trend, wahania), również wzbogacić należy o wykorzystanie równań różnicowych lub różniczkowych, czego przykładem jest problem poruszony w tej pracy.

2. Założenia konstrukcji modelu różnicowego

W pracy zbadamy dynamikę wydatków budżetu państwa w zależności od przyrostu dochodów:

$$W_t = V_t(D_t - D_{t-1}), \quad (1)$$

gdzie W_t to wydatki budżetu państwa w roku t , D_t to dochód budżetu państwa w roku t .

Przyjmujemy, że na wydatki w roku t wpływ mają dochody w roku t i dochody w roku $t - 1$, a w głównej mierze przyrost dochodów, przy czym wydatki są proporcjonalne do przyrostu dochodów. Jest to jedno z podstawowych praw ekonomii, przyrost $D_t - D_{t-1}$ oznacza niedobór lub nadwyżkę dochodów w roku t . Współczynnik proporcjonalności oznaczony przez V , wyznaczamy empirycznie.

W celu jego wyznaczenia obliczamy dla każdego okresu t stosunek wydatków do przyrostu dochodu, czyli

$$V_t = \frac{W_t}{D_t - D_{t-1}}, \quad (2)$$

otrzymane wartości wskaźników V_t uśredniamy, a wartość średnią przyjmujemy za współczynnik proporcjonalności V

$$V = \frac{\sum V_t}{n}. \quad (3)$$

W dalszej kolejności wyznaczamy średni indeks zmian dochodów. W tym celu wyznaczamy indeksy łańcuchowe dynamiki dochodów

$$i_{t/t-1} = \frac{D_t}{D_{t-1}}, \quad (4)$$

a do uśrednienia stosujemy średnią geometryczną

$$\bar{i} = \sqrt[n]{i_{2/1} \cdot i_{3/2} \cdot \dots \cdot i_{n/n-1}}. \quad (5)$$

Indeks średni wykorzystujemy jako operator przesunięcia w modelu dynamiki dochodu

$$D_t = \bar{i} \cdot D_{t-1}. \quad (6)$$

Średnia wartość indeksu dynamiki dochodów informuje nas o tendencji zmian w dochodach. Jest to najprostszy sposób zaobserwowania monotoniczności dochodów.

Jeżeli $\bar{i} > 1$, to dynamika dochodów kształtuje się według tendencji rosnącej. W każdym kolejnym roku można liczyć na nadwyżkę w porównaniu z rokiem poprzednim. Jeżeli $\bar{i} < 1$, to tendencja zmienności dochodów jest malejąca i w każdym roku dochód będzie obciążony zadłużeniem z roku poprzedniego. Z kolei o zmianach dochodu z roku na rok informuje wartość indeksu łańcuchowego mierzona w odpowiednim roku.

Wykorzystując równanie operatora przesunięcia, otrzymujemy:

$$D_{t-1} = \bar{i}^{-1} \cdot D_t = \frac{1}{\bar{i}} D_t. \quad (7)$$

Biorąc pod uwagę dochód z okresu dwa lata wstecz, można zauważyć, że

$$D_{t-2} = \bar{i}^{-1} D_{t-1} = \bar{i}^{-2} D_t. \quad (8)$$

Wtedy inwestycje w roku t są proporcjonalne do przyrostu dochodów z dwóch lat wstecz, a współczynnik proporcjonalności nie różni się istotnie od współczynnika wydatków w zależności od przyrostu dochodów w roku t .

$$I_t = V(D_{t-1} - D_{t-2}) = V(\bar{i}^{-1} D_t - \bar{i}^{-2} D_t) = V\bar{i}^{-1}(D_t - \bar{i}^{-1} D_t) = V\bar{i}^{-1}(1 - \bar{i}^{-1})D_t.$$

Jest to model inwestycji zależny od dochodu i od nadwyżki albo niedoboru z roku poprzedniego.

W dalszej kolejności konstrukcji modelu uwzględnimy podział wydatków z budżetu państwa na konsumpcję i inwestycje. Przez K oznaczmy współczynnik proporcjonalności konsumpcji do dochodu. Wyznaczamy go również empirycznie

$$C_t = K_t D_t, \quad (9)$$

$$K_t = \frac{C_t}{D_t}. \quad (10)$$

W ten sposób obliczamy ten współczynnik dla każdego okresu i uśredniamy

$$K = \frac{\sum K_t}{n}. \quad (11)$$

Podsumowując, konsumpcja jest proporcjonalna do dochodu, a inwestycje są proporcjonalne do przyrostu dochodu w latach poprzednich, tj. $t-1$, $t-2$ poprzedzających okres t .

$$\begin{aligned} C_t &= K_t D_t, \\ I_t &= V_t (D_{t-1} - D_{t-2}). \end{aligned} \quad (12)$$

Wykorzystujemy przedstawione zależności w celu skonstruowania modelu

$$\begin{aligned} W_t &= C_t + I_t, \\ W_t &= K_t D_t + V_t (D_{t-1} - D_{t-2}). \end{aligned} \quad (13)$$

Kwota, która powstaje z pomniejszenia z wydatków o kwotę konsumpcji, jest również proporcjonalna do dochodu, przedstawia to zależność:

$$W_t - K_t D_t = S_t D_t, \quad (14)$$

gdzie S_t jest to współczynnik udziału konsumpcji w kwocie dochodu. Powyższe rozważania wynikają z tego, że zarówno konsumpcja, jak i wydatki są proporcjonalne do dochodu, więc ich różnica jest również do dochodu proporcjonalna. Współczynnik tej proporcjonalności oznaczamy przez S_t .

Z powyższej zależności wyznaczamy współczynniki proporcjonalności S_t

$$S_t = \frac{W_t}{D_t} - K_t. \quad (15)$$

Podobnie jak poprzednio przez uśrednienie odpowiednich stosunków otrzymujemy

$$S = \frac{\sum S_t}{n}. \quad (16)$$

Ostateczna postać modelu wyraża się równaniem różnicowym

$$SD_t - VD_{t-1} + VD_{t-2} = 0. \quad (17)$$

Równanie to jest modelem różnicowym rzędu drugiego. Ogólna postać rozwiązania równania różnicowego wyraża się wzorem

$$D = A_1 U_{1t} + A_2 U_{2t}, \quad (18)$$

gdzie U_{1t}, U_{2t} to funkcje tworzące układ fundamentalny rozwiązania powyższego równania różnicowego; wyznaczamy je, wykorzystując wielomian charakterystyczny.

$$\begin{aligned} Sp^2 - Vp + V &= 0. \\ \Delta &= V^2 - 4VS = V(V - 4S). \end{aligned} \quad (19)$$

W zależności od wyróżnika wielomianu charakterystycznego otrzymujemy różne postaci modelu.

1. $\Delta > 0$, czyli $V - 4S > 0$ ma miejsce w przypadku, gdy w modelu nie występują wahania cykliczne, wtedy model stanowi podstawę określenia równomiernego wzrostu lub spadku tendencji zjawiska przy upływie czasu.

2. Interesujący jest przypadek $\Delta < 0$, wtedy $V - 4S < 0$, p_1, p_2 jako pierwiastki wielomianu charakterystycznego są liczbami zespolonymi. Model otrzymujemy w postaci trygonometrycznej. W zjawisku ma miejsce oprócz trendu oscylacja.

Rozważaniom powyższym poddana zostanie analiza przykładu empirycznego i w przedstawionym niżej przykładzie dokonamy oszacowania funkcji trendu i poziomu wahań.

3. Przykład empiryczny

Badaniu poddano dochody budżetu państwa i wydatki z podziałem ich na konsumpcję i inwestycje. Celem badania jest wykrycie amplitud istotnych dla zmienności konsumpcji w zależności od dochodów i długości cykli.

Tabela 1. Dane empiryczne

Lata	Dochody budżetu państwa	Wydatki budżetu państwa	Konsumpcja	Inwestycje
1	2	3	4	5
1956	13431765,6	13253783,4	8344254,6	5087511
1957	16646496,56	16224127,14	11230095,96	5416400,6
1958	165604777	15886560,3	160327126,7	5277650,3
1959	184351401,6	19670824,8	179155973,7	5195427,9
1960	21323740,6	20371707,0	16092340,4	5231400,2
1961	23685546,3	23515564,7	18510674,0	5174872,3
1962	26383336	25621976,25	21115963,5	5267372,5
1963	26750152,8	25322280,48	21570141,6	5180011,2
1964	28681304,52	27744455,64	23480737,72	5200566,8
1965	30272623,4	29145368,6	25087473,3	5185150,1
1966	32719295,84	32208802,56	27518729,04	5200566,8
1967	33156629,45	32683598,85	27940645,95	5215983,5
1968	33496138,24	33167218,4	28275015,84	5221122,4
1969	35052864,6	33589155,6	29842020	5210844,6
1970	39388762,2	38351172,9	34193334,3	5195427,9
1971	40307951,7	43281774,9	35174190,6	5133761,1
1972	43829600	44465400	38690700	5138900
1973	57695266,4	56244244,4	52412477,2	5282789,2
1974	72962303,4	71213253,3	67458541,5	5503761,9

1	2	3	4	5
1975	74174420	72271289	68881353	5293067
1976	92018264,4	83467173,6	86653252,8	5365011,6
1977	104265145,2	93109135,1	98874439,1	5390706,1
1978	119283701,7	107468479,8	113728550,8	5555150,9
1979	123093977	118729768	117595354	5498623
1980	132941567,2	136342485	127319610,6	5621956,6
1981	161753520	165559200	155525173,2	6228346,8
1982	470936240	435013120	460617328,8	10318911,2
1983	314517390	277423410	308242793,1	6274596,9
1984	371974515	338867970	366064780	5909735
1985	465395340	401422760	459480466,1	5914873,9
1986	576565220	493504330	570516734,7	6048485,3
1987	732482600	629831120	726048697,2	6433902,8
1988	1616209740	1350582120	1607977222	8232517,8
1989	10571094350	10398704250	10553051672	18042677,9
1990	181447592,4	174658172,4	146205016,2	35242576,2
1991	3591371,55	4118841,74	-5160175,15	8751546,7
1992	44726896,5	5461141,4	37378269,5	7348627
1993	6210378,24	6797850,84	-742553,46	6952931,7
1994	8345151,44	9103953	1551525,64	6793625,8
1995	10699633,26	11651487,66	4132119,06	6567514,2
1996	13003274,9	13263697,7	6841733,8	6161541,1
1997	126138598,8	13725034,8	120234002,7	5904596,1
1998	14149396,82	15624217,7	8404106,62	5745290,2
1999	15371368,8	15954329,7	9857329,1	5514039,7
2000	14936595,39	16631144,49	9278666,49	5657928,9
2001	14825587,95	18239388,6	9404048,45	5421539,5

Źródło: Roczniki statystyczne, GUS 1956-2001.

Na podstawie powyższych danych wyznaczono współczynnik proporcjonalności V , który wynosi

$$V = \frac{\sum V_i}{n} = 0,1182.$$

Współczynnik ten otrzymano przez uśrednienie wskaźników $V_t = \frac{W_t}{D_t - D_{t-1}}$; ana-

logicznie otrzymuje się K – współczynnik proporcjonalności konsumpcji do dochodu:

$$K = \frac{\sum K_t}{n} = 0,7665 \text{ oraz wskaźnik } S = \frac{\sum S_t}{n} - K = 0,3193,$$

gdzie:

$$K_t = \frac{C_t}{D_t}, \quad S_t = \frac{W_t}{D_t} - K_t.$$

Rozwiązania wielomianu charakterystycznego

$$Sp^2 - Vp + V = 0$$

przybierają postać

$$p_1, p_2 = \frac{V}{2S} \pm \sqrt{\frac{V}{S} \left(\frac{V}{4S} - 1 \right)}.$$

Otrzymujemy wielomian charakterystyczny.

$$0,3193p^2 - 0,1182p + 0,1182 = 0,$$

zatem

$$\Delta < 0, \quad V - 4S = -1,1589, \quad p_{1,2} = 0,185 \pm i0,547$$

$$r = \sqrt{\frac{V}{S}} = 0,608, \quad \alpha = \arccos \frac{V}{2rS} = 1,26, \quad \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

$$\cos \alpha = \frac{V}{2rS} = 0,3042$$

Ogólna postać rozwiązania równania różnicowego wyraża się wzorem

$$W_t^0 = A_1 q_1^t + A_2 q_2^t,$$

ale zamiast tej postaci zastosujemy w modelu trend.

Funkcje U_1, U_2 przyjmujemy jako potęgowe $U_1 = q_1^t, U_2 = q_2^t$. Ze względu na to, że $p_{1,2} = 0,185 \pm i0,547$ jest liczbą zespoloną, postać funkcyjną rozwiązania W_c przedstawimy w postaci trygonometrycznej:

$$W_c = \sum_i a_i(t) \cos(\alpha_i t), \text{ gdzie } a_i(t) = r_i' = r'.$$

Postać powyższą szacujemy po wyeliminowaniu funkcji trendu. Otrzymano trend dynamiki wydatków w postaci wykładniczej

$$y_t = 93945 e^{0,1158t}.$$

Ze względu na to, że w rozpatrywanym przykładzie relacja jest stała, przyjmujemy, że wszystkie α_i odpowiadające kolejnym okresom rozwoju są stałe, czyli

$\alpha = 1,26$. Zastosowanie takiego uproszczenia pozwala przedstawić model wahań wydatków w uproszczonej postaci: $W_t = y_t + W_c$

$$W_t = y_t + \sum_{i=1}^n r_i^t \cos \alpha i t, \text{ gdzie } y_t = 93945 e^{0,1158t} \text{ to model trendu.}$$

Model ostateczny rozwoju wydatków przybiera więc postać:

$$W_t = 93945 e^{0,1158t} + r \cos \alpha t + r^2 \cos 2\alpha t + r^3 \cos 3\alpha t + r^4 \cos 4\alpha t \dots$$

Model ten można rozpatrywać z dokładnością pewnej skończonej liczby składników. W związku z tym, że $r = 0,608$ ma wartość ułamkową, szereg ten jest szybko zbieżny. Wystarczającą precyzję oszacowań wydatków gwarantuje uwzględnienie trzech, czterech składników. Odchylenie resztowe modelu stanowi 5% wartości przeciętnej. Oznacza to wysoką precyzję oszacowania modelu i to, że może być wykorzystany do celów diagnostycznych zjawiska i do szacowania prognozy. Oszacowany model charakteryzuje się wysokim współczynnikiem determinacji, który wynosi 0,9632; oznacza to, że model jest zgodny z badanym zjawiskiem w 96,32% zakresu zmienności wydatków i taki zakres wydatków ma zmienność przez model wyjaśnioną, a $\varphi^2 = 0,0368$ to współczynnik zbieżności. Widzimy, że ma wartość bliską zera, a tym samym w znikomym stopniu, bo tylko w 3,68%, zmienność wydatków przez oszacowany model nie jest wyjaśniona.

4. Zakończenie

Podsumowując, należy zaznaczyć, że równania różniczkowe lub różnicowe pozwalają precyzyjnie opisać badane zjawisko. Precyzja oszacowań jest na pewno wyższa niż w KMNK z zastosowaniem modeli wyłącznie liniowych. Wyniki analizy zależą w znacznym stopniu od wyjściowych danych empirycznych. Aktualność i wiarygodność wyjściowych danych przyczynia się do uzyskania równie precyzyjnych i wysoce wiarygodnych wyników.

Stosując analizę różnicową, otrzymujemy model o wysokiej wiarygodności badanego zjawiska, co pozwala zwiększyć użyteczność wyników pracy, a tym samym spełnić potrzeby odbiorców, dostosować się do ich wymagań.

Istotnym wynikiem jest oszacowanie zmiennych okresów wahań, zmiennych amplitud wahań zjawiska wokół funkcji trendu.

W pracy przyjęto wykładniczą postać funkcji trendu, a przez oszacowanie wahań systematycznych i przypadkowych osiągnięto zwiększenie precyzji oszacowania modelu.

Parametr r ma wartość ułamkową, podniesienie do kolejnych potęg zmniejsza jego wartość, co oznacza, że wahania gasną wraz z upływem czasu i realizacja zjawiska coraz bardziej przybliża się do trendu.

Literatura

- R.G.D. Allen (1975). *Teoria makroekonomiczna*. PWN. Warszawa.
E. Panek (1993). *Elementy ekonomii matematycznej. Statyka*. PWN. Warszawa.
E. Panek (1997). *Elementy ekonomii matematycznej. Równowaga i wzrost*. PWN. Warszawa.

APPLICATION OF DIFFERENTIAL MODEL TO THE ANALYSIS OF REVENUE-BASED STATE BUDGET EXPENDITURE PERIODICITY

Summary

Complex economic phenomena develop as time passes consistently with a fixed function of the trend around which some regular or irregular oscillations occur. Regular oscillations occur periodically, however in the case of the state budget and other variables characterizing variability of the economic situation in a global way, they have variable amplitudes and variable consecutive periods of cycles. They can be detected using differential or difference equations. Square different equations with complex characteristic roots were used in this work. Solutions of a characteristic equation are complex numbers because the examined phenomenon, which is the economic situation, shows oscillations. It is necessary to introduce trigonometric functions into the trigonometric model. Their sum allows to determine the oscillation amplitude variable within consecutive cycles as well as variable lengths of consecutive cycles.

Moreover, it is possible to estimate a prognosis of amplitudes and the length of periods of cycles for future cycles. In the solution of the equation, except a specific solution presented in the trigonometric form, we obtain a general solution which constitutes a function of the trend of the phenomenon examined. The form of the trend function is precisely adjusted to the phenomenon in question and there is no better method to determine it.

To sum up, thorough examination of the periodisation of the phenomenon is a priority for the decision-making process in management. On the other hand, results of this work can be practically used to make a right decision.