

INSTYTUT TELEKOMUNIKACJI I AKUSTYKI
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
Raport nr I28/PRE-017/81

Analiza rezonatorów o konwersji
kierunku drgań metodą elementów
skończonych na przykładzie rezo-
natora o konwersji typu R-L

Tadeusz Gudra

Praca doktorska

Promotor: prof. mgr inż. Zbigniew Żyszkowski

Słowa kluczowe:

konwerter

drgania ultradźwiękowe

mgr inż. Tadeusz Gudra

Instytut Telekomunikacji i Akustyki

Politechniki Wrocławskiej

Wrocław, ul. Wybrzeże Wyspiańskiego 27

Raport wpłynął do redakcji 24.IV.81

Wyrażam wdzięczność za opiekę naukową
i życzliwą pomoc przy realizacji pracy
promotorowi profesorowi Zbigniewowi
Żyszkowskiemu

SPIS TREŚCI

Wykaz ważniejszych oznaczeń	str 5
1. Wstęp	8
1.1. Układ pracy	12
2. Typy rezonatorów o konwersji kierunku drgań	13
2.1. Rezonator o konwersji kierunku drgań typu L-L.	15
2.2. Rezonator o konwersji kierunku drgań typu L-L-L	20
2.3. Rezonator o konwersji kierunku drgań typu R-L	26
2.4. Rezonator o konwersji kierunku drgań typu L-R	32
3. Uwagi dotyczące wyboru typu rezonatora i metody jego analizy	33
4. Opis rezonatora o konwersji kierunku drgań typu R-L metodą elementów skończonych	37
4.1. Istota metody	37
4.2. Geometria układu	45
4.3. Macierz sprężystości, macierz kształtu, macierz mas	50
4.4. Numeryczne wyznaczanie równania wartości włas- nej	54
5. Wyniki obliczeń	58
5.1. Sposób podziału na elementy	58
5.2. Konwerter typu R-L jednorodny	63
5.3. Konwerter typu R-L niejednorodny	83
6. Analiza wyników	96
6.1. Konwerter typu R-L jednorodny	96
6.2. Konwerter typu R-L niejednorodny	102
6.3. Wnioski końcowe	104
7. Zakończenie	108

Dodatek A. Równanie ruchu dysku piezoelektrycznego w me- todzie elementów skończonych	110
Dodatek B. Pomiar charakterystyki częstotliwościowej modułu admitancji elektrycznej konwertera niejednorodnego typu R-L	116
Dodatek C. Sprawdzenie programu FEM2	119
Literatura	121

Wykaz ważniejszych oznaczeń

- [B] - macierz odkształceń
- [C] - macierz tłumienia
- C - prędkość dźwięku
- C_s - prędkość dźwięku dla modu synfazowego drgań
- C_q - prędkość dźwięku dla modu quasisynfazowego drgań
- C_a - prędkość dźwięku dla modu antyfazowego drgań
- [D] - macierz naprężeń
- $\mathcal{D}_z$ - indukcja elektryczna
- E - moduł Younga
- E_s - moduł Younga dla modu synfazowego drgań
- E_q - moduł Younga dla modu quasisynfazowego drgań
- E_a - moduł Younga dla modu antyfazowego drgań
- E_z - pole elektryczne w kierunku osi Z
- {e} - wektor piezoelektryczny naprężenia
- F - siła
- f - częstotliwość
- G - moduł ścinania
- H_e - energia elektrostatyczna
- h - grubość
- I, i - wskaźnik
- J, j - wskaźnik
- J_0 - funkcja Bessla 1-go rodzaju rzędu zerowego
- J_1 - funkcja Bessla 1-go rodzaju rzędu pierwszego
- K, k - wskaźnik
- [K] - macierz sztywności
- k - przesuwność jednostkowa
- l - długość

- $\mathcal{L}$ - funkcja Lagrange'a
- $[M]$ - macierz mas
- m - liczba
- $[N]$ - macierz funkcji kształtu
- n - liczba
- R, r - promień
- R_E - współrzędna R środka ciężkości elementu
- T - energia kinetyczna
- t - czas
- u - składowa pozioma przemieszczenia (patrz również δ_R)
- V - objętość
- V - prędkość
- v - składowa pionowa przemieszczenia patrz również δ_z
- W - praca sił zewnętrznych
- Y_0 - funkcja Bessla drugiego rodzaju rzędu zerowego
- Y_1 - funkcja Bessla drugiego rodzaju rzędu pierwszego
- Z_E - współrzędna Z środka ciężkości elementu
- γ - odkształcenie postaciowe
- $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ - składowe odkształcenia postaciowego we współrzędnych prostokątnych
- δ - przemieszczenie
- δ_R - składowa pozioma przemieszczenia
- δ_z - składowa pionowa przemieszczenia
- ϵ_{zz} - przenikalność dielektryczna
- ξ - odkształcenie
- $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ - wydłużenie jednostkowe w kierunku x, y, z
- Θ - współrzędna walcowa
- $\mathcal{J}$ - energia odkształcenia
- λ - długość fali

ν - współczynnik Poissona

Π - całkowita energia potencjalna

ξ - gęstość

σ - naprężenie

τ - naprężenie styczne

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ - składowe styczne naprężenia we współrzędnych prostokątnych

$\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}$ - składowe styczne naprężenia we współrzędnych walcowych

Ω - energia potencjalna sił zewnętrznych

ω - pulsacja

1. WSTĘP

W technice ultradźwiękowej do wytwarzania drgań o średnich i dużych amplitudach stosowane są powszechnie dwa rodzaje przetworników : magnetostrykacyjne i piezoceramiczne. Maksymalne amplitudy drgań dla przetworników magnetostrykowych są ograniczone m.in. przez nieliniowość efektu magnetostrykowego, natomiast dla przetworników piezoceramicznych - głównie przez małą wytrzymałość materiału aktywnego.

Jednym ze sposobów podwyższania granicznej amplitudy drgań jest stosowanie specjalnych konstrukcji źródeł promieniujących. E.Mori i K.Ito w 1968 r. na VI Międzynarodowym Kongresie Akustyki w Tokio [31] zaproponowali trzy systemy rezonansowe o konwersji kierunku drgań w postaci: układu dwóch prętów wzajemnie prostopadłych, mających wspólną część centralną: układu dysk-pręt, w którym dysk jest odpowiednio nasadzony na pręt i układu pręt - płytką sześciokątną, w którym pręt jest umieszczony w środku geometrycznym płytki.

Na kolejnym VII Międzynarodowym Kongresie Akustyki w Budapeszcie w 1971 r. [17] ci sami autorzy zaproponowali czwarty system - układ trzech prętów wzajemnie prostopadłych, połączonych z sobą w połowie ich długości. W tych czterech systemach rezonansowych mogą zachodzić 3 typy konwersji kierunku drgań: konwersja drgań podłużnych w prostopadłe do nich drgania podłużne, konwersja drgań podłużnych w prostopadłe do nich drgania radialne i konwersja drgań radialnych w prostopadłe do nich drgania podłużne. W zależności od rodzaju konwersji przyjęto nazywać te rezonatory jako rezonatory o konwersji typu L-L (ang:longitudinal - longitudinal), typu L-L-L (longitudinal - longitudinal - longitudinal) , typu R-L (radial - longitudinal) i typu L-R (longitudinal - radial) .

Dotychczasowe, konwencjonalne źródła drgań podłużnych lub radialnych były "jednowymiarowe"; w praktyce wykorzystywane były bądź drgania podłużne (np. głowice defektoskopowe, przetworniki złożone typu "sandwich", przetworniki magnetostrykcyjne stosowane np. w zgrzewarkach, drążarkach ultradźwiękowych, i.t.p.) , bądź drgania radialne (np. przetworniki w urządzeniach hydrolokalacyjnych) . Wydaje się, że duże znaczenie praktyczne może mieć przesyłanie energii ultradźwiękowej z jednego kierunku na inny, a także zdolność koncentrowania energii przez łączenie kilku konwerterów lub dzielenie energii z jednego źródła poprzez konwerter do kilku obciążeń.

Istnieje bogata literatura dotycząca analizy drgań różnego typu rezonatorów; ważniejsze pozycje to m.in. prace R.E.D.Bishopa, G.M.L.Gladwella, S.Michaelsona, D.C.Johnsona [1] , [2] , J.P.Den Hertoga [4], M.R.Redwooda [5], S.Kaliskiego [25], I.Maleckiego [29], J.N.Mc Duffa, J.R.Curreri [30], E.Skudrzyka [45] , Z. Żyszkowskiego [47] . Natomiast literatura poświęcona zagadnieniu rezonatorów o konwersji kierunku drgań jest stosunkowo nieliczna. Poza wspomnianymi już autorami K.Ito i E.Mori [16] , [17], [18] [19] , [20] , [21] , [22] , [31] zagadnieniem tym szerzej zajmowała się również Lwowskaja w pracy [28] , Powołockaja w pracach [34] , [35] , [36] , a także Y.Morihiro i S.Nemoto w pracach [32] [33] wskazując na możliwość wykorzystania innych typów konwersji drgań (np. konwersja drgań podłużnych w drgania skrętne, konwersja drgań giętnych w drgania skrętne). Inne doniesienia na ten temat dotyczą prób praktycznego wykorzystania tego typu rezonatorów (W.N.Ginin, A.W.Starnow-Witkowski - patent [6] , J.Golanowski - patenty [12], [13])

Celem poznawczym niniejszej pracy jest zbadanie zachowania się rezonatora o konwersji kierunku drgań typu R-L bez konieczności ograniczenia jego rozmiarów. Do analizy drgań zastosowano jedną z nowszych metod obliczeniowych, która w ostatnich latach znajduje coraz szersze zastosowanie - metodą elementów skończonych. W literaturze światowej powszechnie przyjęł się skrót FEM - od ang. Finite Elements Method .

Podstawy matematyczne tej metody zostały opublikowane po raz pierwszy przez M.J.Turnera i jego zespół w 1956 r. w pracy [44] . Pewne usystematyzowanie zagadnień występujących w tej metodzie można znaleźć m.in. w pracach G.Stranga i G.J.Fixa [39] , J.S. Przemienieckiego [37] , a zwłaszcza w pracy O.C.Zienkiewicza [46] , który przedstawił ogólną koncepcję metody z jednoczesnym jej rozwinięciem i podaniem wielu praktycznych przykładów zastosowań. Gwałtowny rozwój FEM przypada na lata 60-te i jest związany z powszechnym stosowaniem elektronicznych maszyn cyfrowych. Szerokie wprowadzenie do techniki obliczeniowej rachunku macierzowego pozwoliło na zwięzły opis operacji i ich łatwe programowanie. Opracowano wiele efektywnych algorytmów i programów dla maszyn cyfrowych, zwłaszcza do rozwiązywania powierzchniowych układów ciągłych jak płyty, powłoki, a także do analizy wytrzymałościowej konstrukcji prętowych, prętowo-powłokowych, i.t.p. Duże znaczenie ma ta metoda w mechanice górotworu, mechanice budowli, w technice wojskowej, zwłaszcza lotniczej i kosmicznej. W Polsce najpoważniejsze prace w zakresie FEM prowadzone są pod kierunkiem prof. J.Szmeltera [40] , [41] , [42] w Wojskowej Akademii Technicznej w Warszawie, gdzie opracowuje się głównie systemy do obliczeń statycznych konstrukcji. Warto też wspomnieć, że w ostatnich latach powstała odmiana metody elementów skończonych - metoda sztywnych elementów skończonych przedstawiona w pracy

J. Kruszeńskiego i innych [26] , która znalazła zastosowanie głównie do obliczeń drgań własnych różnych elementów konstrukcji okrętowych.

Metoda elementów skończonych jest uogólnieniem rachunku różnic skończonych (met. Rayleigha - Rietza) z tym , że jej zakres zastosowań jest znacznie większy ze względu na możliwość stosowania w obszarze ciągłym dowolnej gęstości podziału na elementy (w zależności od potrzeb) . Pozwala to na dokładne śledzenie efektów zaburzeń lokalnych w dowolnie wybranych fragmentach obszaru. Ideą tej metody jest podział obszaru ciągłego posiadającego nieskończoną liczbę stopni swobody na podobszary, w których wyodrębnia się określoną i skończoną liczbę stopni swobody. Wykazanie przydatności metody elementów skończonych w analizie zachowania się rezonatorów o konwersji kierunku drgań jest podstawową tezę tej pracy.

Celem użytkowym niniejszej pracy jest opracowanie programu dla EMC dla układu osiowo-symetrycznego; pozwalającego na rozpatrywanie różnych postaci drgań w zależności od założonych warunków brzegowych (sposobu likwidowania stopni swobody układu).

Przedstawiona w pracy nowoczesna metoda analizy systemów rezonansowych o konwersji kierunku drgań na przykładzie rezonatora o konwersji typu R-L pozwala na otrzymanie pełniejszych informacji dotyczących zachowania się tego typu rezonatorów. Wykorzystanie uzyskanych z jej pomocą wyników powinno przyczynić się do szerszego stosowania takich rezonatorów w praktyce.

Określając zakres niniejszej pracy autor był świadom faktu, że wnosi skromny - lecz na miarę ograniczonych sił i posiadanych środków - wkład w teoretyczne opanowanie zagadnienia analizy zachowania się rezonatorów o konwersji kierunku drgań nad którym pracuje nieliczne do tej pory grono badaczy.

1.1. Układ pracy.

Praca składa się z 7 rozdziałów. W rozdziale drugim omówiono poszczególne podstawowe typy rezonatorów o konwersji kierunku drgań z podaniem równań końcowych umożliwiającymi proste obliczanie rezonatorów. Równania te zostały wyprowadzone przez K.Ito i E.Mori, którzy przeprowadzali analizę drgań w oparciu o zastępczy moduł sprężystości podłużnej części centralnej konwertera. W rozdziale trzecim uzasadniono wybór typu rezonatora do analizy oraz zawarto uwagi dotyczące metody zastosowanej do obliczeń. Rozdział czwarty zawiera opis istoty metody elementów skończonych oraz rozważanie rezonatora o konwersji kierunku drgań typu R-L jako przypadek ciała o osiowo-symetrycznym stanie naprężenia i odkształcenia. Wychodząc z zasady prac wirtualnych przedyskutowano warunki brzegowe (stopnie swobody układu) . Przedstawiono sposób rozwiązywania zagadnień dynamicznych za pomocą tej metody z podaniem numerycznego rozwiązywania równania wartości własnej. Podano algorytm obliczeń, który stanowił podstawę do opracowania programu.

Rozdział piąty zawiera wyniki obliczeń. Uzasadniono zaproponowany przez autora sposób podziału na elementy ze względu na dokładność obliczeń. Przedstawiono wyniki obliczeń dla konwertera typu R-L jednorodnego i niejednorodnego.

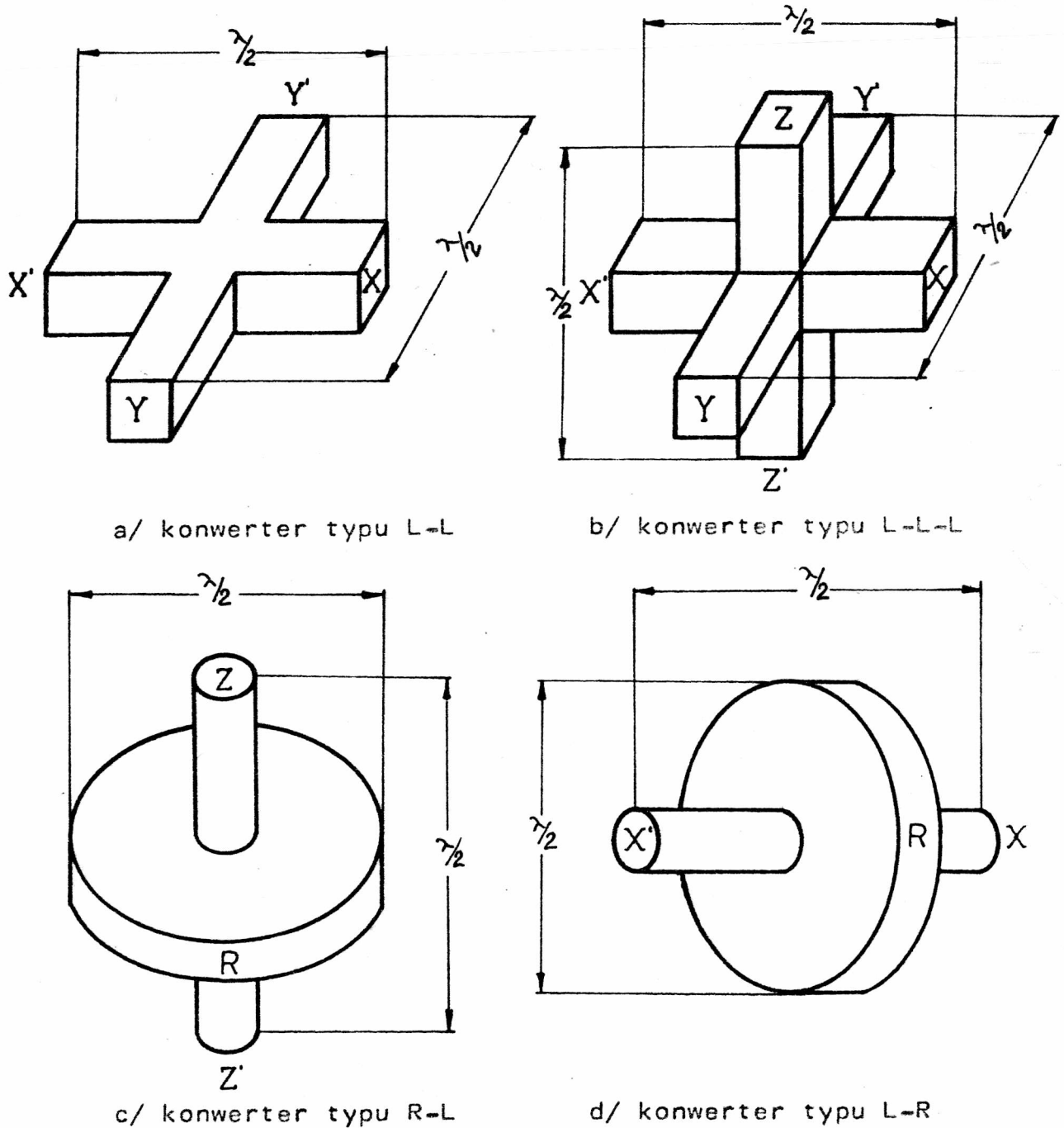
Przedyskutowano wpływ stałych materiałowych na charakterystykę różnicy częstotliwości dla modu współfazowego i przeciwfazowego drgań w funkcji długości rezonatora prętowego dla konwertera niejednorodnego.

Kolejny rozdział zawiera analizę otrzymanych wyników oraz podstawowe wnioski. W oparciu o otrzymane wyniki sformułowano kryteria zestrojenia rezonatora typu R-L.

Rozdział siódmy stanowi zakończenie pracy.

2. TYPY REZONATORÓW O KONWERSJI KIERUNKU DRGAŃ

Jak wspomniano na wstępie rozróżnia się 4 podstawowe typy rezonatorów o konwersji kierunku drgań; przedstawiono je na rys. 1.

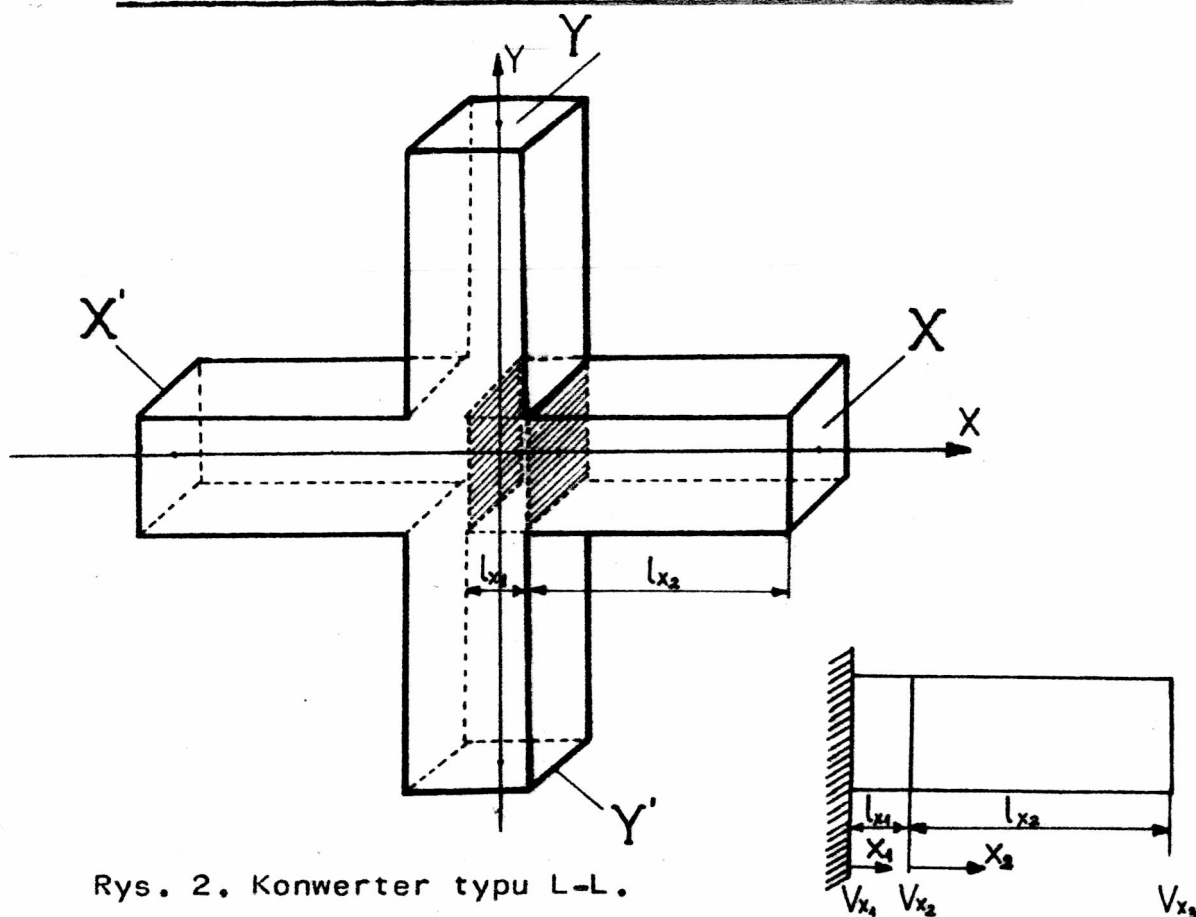


Rys. 1. Typy rezonatorów o konwersji kierunku drgań.

Przy odpowiednim doborze rozmiarów układy te pozwalają otrzymać duże amplitudy drgań rezonatora "roboczego" poprzez sumowanie energii drgań innych rezonatorów drgających z małą amplitudą ($[16]$, $[35]$). Taki korzystny stosunek amplitud można otrzymać na skutek istnienia mechanicznego sprzężenia między poszczególnymi elementami konwertera pobudzanych z zewnątrz a elementem "roboczym" konwertera. Przekazywanie energii z jednego elementu rezonansowego do drugiego zachodzi dzięki efektowi Poissona we wspólnej części tych elementów.

Rezonatory o konwersji kierunku drgań L-L i typu L-L-L zawierają odpowiednio dwa lub trzy pręty połączone z sobą w węzle drgań. Rezonatory o konwersji typu R-L i typu L-R zawierają jeden pręt drgający podłużnie i jeden dysk drgający radialnie, które są również połączone z sobą w węzle drgań. W dalszej części tego rozdziału ograniczymy się do przypadku, gdy rozmiary poprzeczne rezonatorów prętowych są znacznie mniejsze od ich rozmiarów podłużnych, a grubość rezonatora radialnego jest o wiele mniejsza od jego średnicy; wtedy element wspólny /część sprzęgająca/ rezonatora można rozpatrywać jako umieszczony w quasistatycznych warunkach ze środkiem znajdującym się w spoczynku.

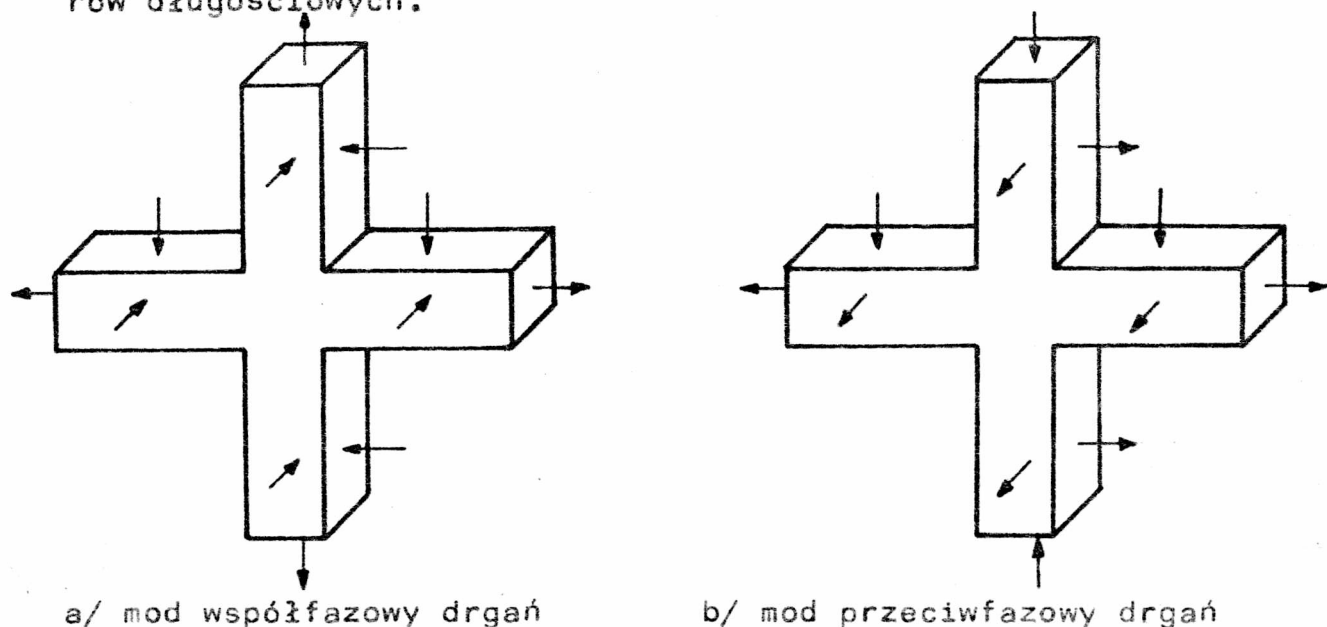
2.1. Rezonator o konwersji kierunku drgań typu L-L



Rys. 2. Konwerter typu L-L.

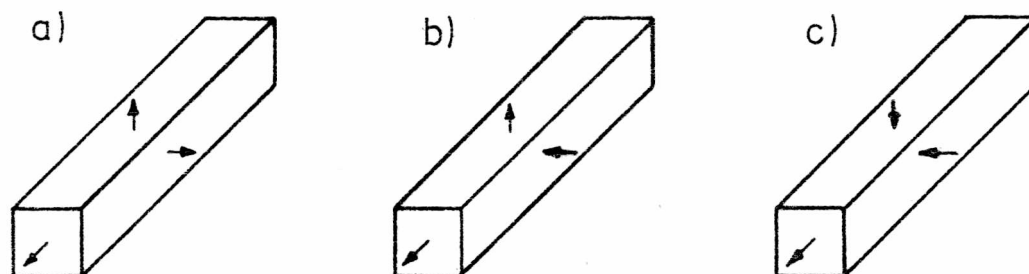
Konwerter typu L-L zawiera dwa wzdłużnie drgające pręty o długości równej pół długości fali. Pręty te połączone są z sobą w węzłach drgań. Taki układ ma dwie częstotliwości rezonansowe, które zależą od tego czy powierzchnie krańcowe X, X', Y, Y' drgają w fazie czy też w przeciwfazie. Drgania współfazowe /synfazowe/ występują wówczas, gdy wszystkie powierzchnie krańcowe w tym samym momencie mają taki sam kierunek wychylenia, natomiast przy drganiach przeciwfazowych /antyfazowych/ powierzchnie krańcowe jednego rezonatora /pręta/ wykonują ruch np. na zewnątrz, podczas gdy powierzchnie krańcowe drugiego rezonatora wykonują ruch do wewnątrz. Obrazują to rys. 3a/ i rys. 3b/, na których w sposób poglądowy przedstawiono mod współfazowy i mod przeciwfazowy drgań. Można łatwo zau-

ważać, że istnieje kilka różnych przypadków dla modu współfazowego drgań zależnych od rodzaju drgań poszczególnych rezonatorów długościowych.



Rys. 3. Mody drgań konwertera typu L-L.

K.Ito i E.Mori w pracy [18] wyróżniają 3 postacie drgań podłużnych rezonatora prętowego; dla każdej z tych postaci wyznaczyli wartości prędkości propagacji fali podłużnej i modułu sprężystości podłużnej. Rys. 4 przedstawia trzy mody drgań rezonatora prętowego.



Rys. 4. Mody drgań rezonatora prętowego.

- a/ mod współfazowy drgań /prędkość - C_s , moduł - E_s /
- b/ mod quasiwspółfazowy drgań /prędkość - C_q , moduł - E_q /
- c/ mod przeciwfazowy drgań / prędkość - C_a , moduł - E_a /

Wyniki pomiarów uzyskane przez autorów pozwalają na napisanie zależności:

$$\begin{aligned} C_s &> C_q > C_a \\ E_s &> E_q > E_a \end{aligned} \quad (2.1)$$

Rozważania ograniczymy do przypadku, gdy poprzeczne rozmiary rezonatorów prętowych są znacznie mniejsze od ich rozmiarów podłużnych.

Część centralna konwertera /wspólna dla obu rezonatorów/ ma kształt sześciangu, którego środek znajduje się w stanie spoczynku. W przestrzennym stanie naprężenia, odkształcenia w kierunku osi x, y, z można zapisać w postaci ([43]) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_x} \sigma_x - \nu \frac{1}{E_y} \sigma_y \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_y} \sigma_y - \nu \frac{1}{E_x} \sigma_x \\ \varepsilon_z &= -\nu \left(\frac{1}{E_x} \sigma_x + \frac{1}{E_y} \sigma_y \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

gdzie:

- ε_x - całkowite wydłużenie w kierunku osi x
- $\frac{\sigma_x}{E_x}$ - wydłużenie w kierunku osi x spowodowane przez naprężenie σ_x
- $\nu \frac{\sigma_y}{E_y}$ - przewężenie /skrócenie/ w kierunku osi x spowodowane przez naprężenie σ_y
- ν - współczynnik Poissona
- E_x - moduł sprężystości w kierunku osi x

Podobnie dla ε_y i ε_z .

/W przypadku liniowego stanu naprężenia, tj. gdy $\sigma_y = 0$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_x} \sigma_x \\ \varepsilon_y &= -\nu \frac{\sigma_x}{E_x} \\ \varepsilon_z &= -\nu \frac{\sigma_x}{E_x} \quad /.. \end{aligned}$$

Wprowadzając związek między naprężeniem σ i modułem Younga E dla poszczególnych kierunków w postaci:

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \pm n \frac{E_x}{E_y} \quad (2.3)$$

gdzie:

znak $/+/-$ - odpowiada drganiom współfazowym

znak $/-/-$ - odpowiada drganiom przeciwfazowym

otrzymuje się układ równań wiążący wielkości l_{x1} , l_{x2} /rys.2/ z częstotliwością drgań własnych ω_0 ([18]):

dla modu współfazowego:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} k_{x5} l_{x1} \cdot \operatorname{tg} k_{x2} l_{x2} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\nu}{n}}} \\ \operatorname{tg} k_{y5} l_{y1} \cdot \operatorname{tg} k_{y2} l_{y2} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \nu \cdot n}} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

dla modu przeciwfazowego

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} k_{xa} l_{x1} \cdot \operatorname{tg} k_{x2} l_{x2} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\nu}{n}}} \\ \operatorname{tg} k_{ya} l_{y1} \cdot \operatorname{tg} k_{y2} l_{y2} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \nu \cdot n}} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} k_{x5} &= \frac{\omega_0}{C_{x5}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_{x5}}{\rho}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\rho(1 - \frac{\nu}{n})}} \\ k_{y5} &= \frac{\omega_0}{C_{y5}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_{y5}}{\rho}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\rho(1 - \nu \cdot n)}} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$$\left. \begin{aligned} k_{xa} &= \frac{\omega_0}{C_{xa}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_{xa}}{\rho}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\rho(1 + \frac{\nu}{n})}} \\ k_{ya} &= \frac{\omega_0}{C_{ya}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_{ya}}{\rho}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\rho(1 - \nu \cdot n)}} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

$$\left. \begin{aligned} k_{x_2} &= \frac{\omega_0}{C_x} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_x}{\xi}}} \\ k_{y_2} &= \frac{\omega_0}{C_y} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_y}{\xi}}} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Indeksy "s" i "a" oznaczają odpowiednio mod współfazowy /synfazowy/ i przeciwfazowy /antyfazowy/ drgań.

Rozkład prędkości wzdłuż zamion rezonatora jest opisany zależnością:

$$V_{x_1} = V_{x_3} \cdot \frac{\cos k_{x_2} l_{x_2}}{\sin k_{x_2} l_{x_1}} \cdot \sin k_{x_2} x_1 \quad (2.9)$$

$$V_{x_2} = V_{x_3} \cdot \cos k_{x_2} l_{x_2} \cdot \cos k_{x_2} x_2 (1 + \operatorname{tg} k_{x_2} l_{x_2} \cdot \operatorname{tg} k_{x_2} x_2) \quad (2.10)$$

Dla modu współfazowego drgań stosunek prędkości powierzchni krańcowych rezonatorów drgających podłużnie wyraża się następująco:

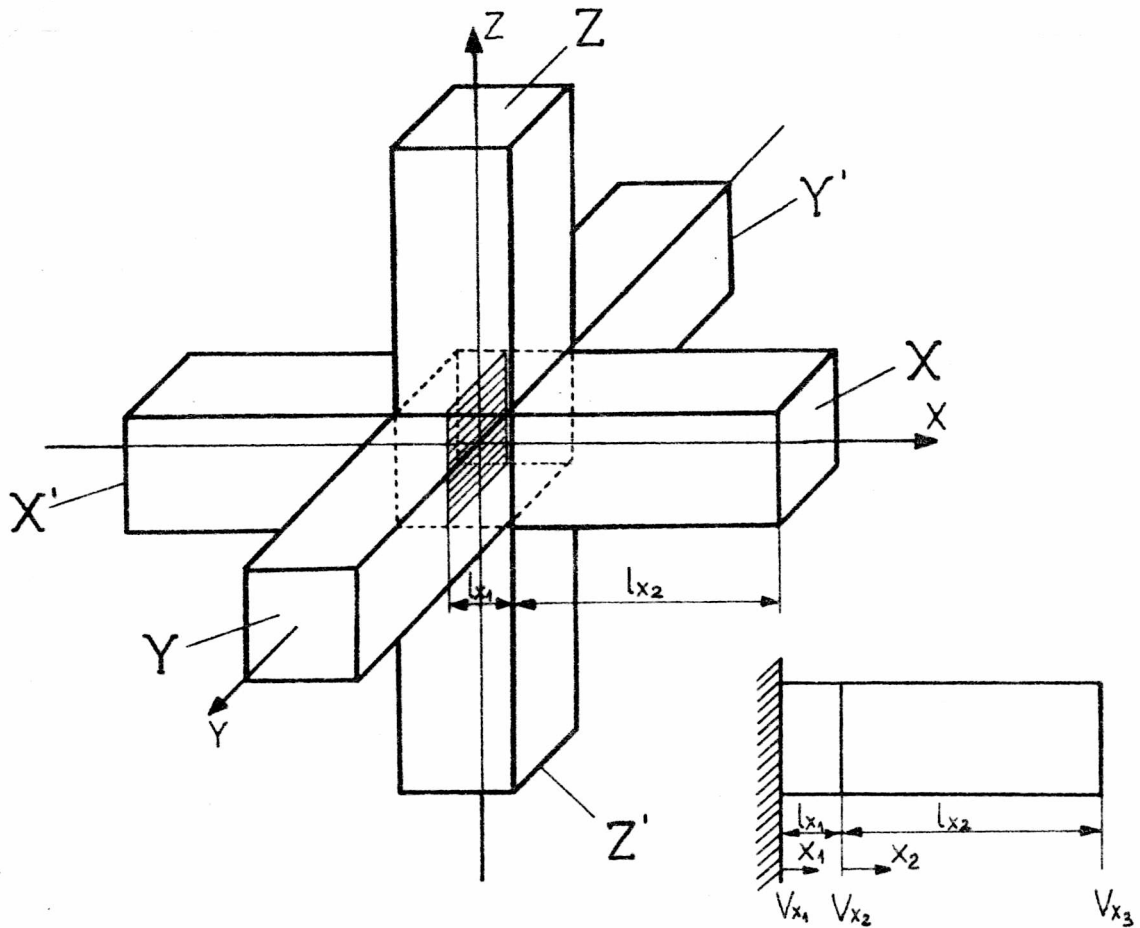
$$\frac{V_{x_3}}{V_{y_3}} = \sqrt{\frac{n(1-\gamma)}{1-\gamma \cdot n}} \cdot \frac{E_x}{E_y} \cdot \frac{\cos k_{y_2} l_{y_2} \cdot \sin k_{x_2} l_{x_1}}{\cos k_{x_2} l_{x_2} \cdot \sin k_{y_2} l_{y_1}} \quad (2.11)$$

Dla modu przeciwfazowego będzie:

$$\frac{V_{x_3}}{V_{y_3}} = - \sqrt{\frac{n(1+\gamma)}{1+\gamma \cdot n}} \cdot \frac{E_x}{E_y} \cdot \frac{\cos k_{y_2} l_{y_2} \cdot \sin k_{x_2} l_{x_1}}{\cos k_{x_2} l_{x_2} \cdot \sin k_{y_2} l_{y_1}} \quad (2.12)$$

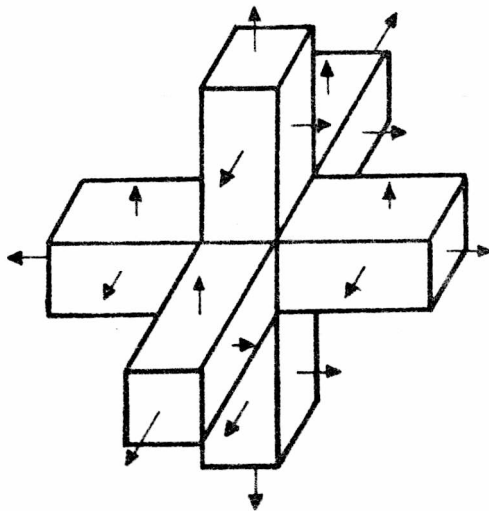
Dobierając odpowiednio rozmiary poszczególnych rezonatorów można otrzymać żadaną wartość tego stosunku. Ma to istotne znaczenie przy połączeniu kilku rezonatorów /np. kaskadowo/ w celu uzyskania podwyższonej amplitudy drgań na wybranych powierzchniach krańcowych.

2.2. Rezonator o konwersji kierunku drgań typu L-L-L.

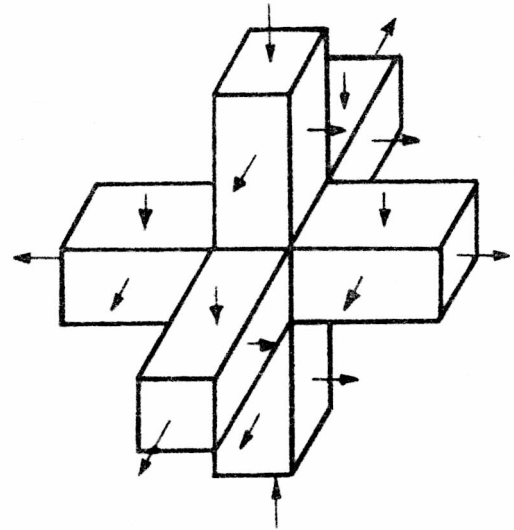


Rys. 5. Konwerter typu L-L-L.

Konwerter typu L-L-L składa się z trzech wzdłużnie drgających prętów o długości równej pół długości fali. Pręty te są połączone z sobą w węzłach drgań tworząc rezonator, który ma dwie częstotliwości rezonansowe odpowiadające dwu modom drgań: współfazowemu i przeciwfazowemu. Drgania współfazowe, podobnie jak w konwerterze L-L występują wówczas, gdy wszystkie powierzchnie krańcowe w danym momencie czasowym znajdują się w tej samej fazie. Drgania przeciwfazowe występują wtedy, gdy powierzchnie krańcowe rezonatorów prętowych są w tej samej fazie na dwóch kierunkach drgań, a w przeciwnej fazie na trzecim kierunku. Obrazuje to rys. 6. Strzałkami oznaczono fazę drgań z jaką drga każda powierzchnia konwertera w rezonansie.



a/ mod współfazowy drgań



b/ mod przeciwfazowy drgań

Rys.6. Mody drgań konwertera typu L-L-L.

Jak łatwo zauważyć tu również istnieje kilka różnych przypadków drgań dla modu współfazowego i przeciwfazowego uzależnionych od tego w jaki sposób drgają poszczególne rezonatory.

Zakładając, że część wspólna /środkowa/ konwertera znajduje się w przestrzennym stanie naprężenia - odkształcenia w kierunku trzech osi x, y, z można przedstawić w następującej postaci:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_x} \sigma_x - \nu \frac{1}{E_y} \sigma_y - \nu \frac{1}{E_z} \sigma_z \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_y} \sigma_y - \nu \frac{1}{E_z} \sigma_z - \nu \frac{1}{E_x} \sigma_x \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E_z} \sigma_z - \nu \frac{1}{E_x} \sigma_x - \nu \frac{1}{E_y} \sigma_y \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

gdzie:

ε_x - całkowite wydłużenie w kierunku osi x

$\frac{\sigma_x}{E_x}$ - wydłużenie w kierunku osi x spowodowane przez naprężenie σ_x

$\nu \frac{\sigma_y}{E_y}$ - skrócenie /przewężenie/ w kierunku osi x spowodowane przez naprężenie σ_y

$\nu \frac{\sigma_z}{E_z}$ - skrócenie /przewężenie/ w kierunku osi x spowodowane przez naprężenie σ_z

Podobnie dla ϵ_y i ϵ_z .

Związek między naprężeniem σ i modułem Younga E dla kierunku x, y, z można zapisać w postaci:

$$\sigma_x : \sigma_y : \sigma_z = n : 1 : \pm m' \quad (2.14)$$

gdzie:

$m' = m$ dla modu współfazowego drgań

$m' = m \frac{E}{E_q}$ dla modu przeciwfazowego drgań

Dla modu współfazowego równania wiążące rozmiary i częstotliwość drgań własnych konwertera mają postać ([19]) :

dla osi x

$$\operatorname{tg} k_{x_1} l_{x_1} \cdot \operatorname{tg} k_{x_2} l_{x_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\gamma(1+m)}{n}}}$$

dla osi y

$$\operatorname{tg} k_{y_1} l_{y_1} \cdot \operatorname{tg} k_{y_2} l_{y_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma(n+m)}}$$

dla osi z

$$\operatorname{tg} k_{z_1} l_{z_1} \cdot \operatorname{tg} k_{z_2} l_{z_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\gamma(1+n)}{m}}}$$

(2.15)

gdzie:

$$k_{x_1} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_{x_1}}{\xi}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_s}{[1 - \frac{\gamma(1+m)}{n}] \cdot \xi}}}$$

$$k_{y_1} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_{y_1}}{\xi}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_s}{[1 - \gamma(n+m)] \cdot \xi}}}$$

$$k_{z_1} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_{z_1}}{\xi}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_s}{[1 - \frac{\gamma(1+n)}{m}] \cdot \xi}}}$$

(2.16)

$$k_{x_2} = k_{y_2} = k_{z_2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_s}{\xi}}} \quad (2.17)$$

E_s - moduł sprężystości podłużnej części rezonatora wystającej poza część centralną dla modu współfazowego drgań

E_{x_1} - moduł sprężystości podłużnej części sprzężonej rezonatora dla modu współfazowego drgań dla kierunku x

Dla modu przeciwfazowego równania wiążące rozmiary rezonatora z częstotliwością własną mają postać:

dla osi x :

$$\operatorname{tg} k_{x_1} l_{x_1} \cdot \operatorname{tg} k_{x_2} l_{x_2} = \sqrt{1 - \frac{\nu(1-m)}{n}}$$

dla osi y :

$$\operatorname{tg} k_{y_1} l_{y_1} \cdot \operatorname{tg} k_{y_2} l_{y_2} = \sqrt{1 - \nu(n-m)}$$

dla osi z :

$$\operatorname{tg} k_{z_1} l_{z_1} \cdot \operatorname{tg} k_{z_2} l_{z_2} = \sqrt{1 + \frac{\nu(1+n)}{m}}$$

(2.18)

gdzie:

$$k_{x_1} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_{x_1}}{\zeta}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_q}{[1 - \frac{\nu(1-m)}{n}] \cdot \zeta}}}$$

$$k_{y_1} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_{y_1}}{\zeta}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_q}{[1 - \nu(n-m)] \cdot \zeta}}}$$

$$k_{z_1} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_{z_1}}{\zeta}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E}{[1 + \frac{\nu(1+n)}{m}] \cdot \zeta}}}$$

(2.19)

$$k_{x_2} = k_{y_2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_q}{\zeta}}}$$

$$k_{z_2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E}{\zeta}}}$$

(2.20)

E_q - moduł sprężystości podłużnej części rezonatora, wystającej poza część centralną dla modu quasiwspółfazowego drga

E_{x_1} - moduł sprężystości podłużnej części sprzężonej rezonatora dla modu przeciwfazowego drgań dla kierunku x

Przedstawione wyżej zależności znacznie się upraszczają dla przypadku, gdy naprężenia działające wzdłuż osi x, y, z są sobie równe, tj. gdy

$$\zeta_x = \zeta_y = \zeta_z \quad (2.21)$$

czyli $n = m = 1$

Wówczas dla modu współfazowego stałe falowe $k_{x_5}, k_{y_5}, k_{z_5}$ przyjmują postać:

$$k_{x_5} = k_{y_5} = k_{z_5} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_s}{(1-2\nu)\cdot\varrho}}} \quad (2.22)$$

Dla modu przeciwfazowego będzie/dla $E_q = E /$

$$k_{x_a} = k_{y_a} = k_{x_2} = k_{y_2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E}{\varrho}}} \quad (2.23)$$

natomiast

$$k_{z_a} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E}{(1+2\nu)\cdot\varrho}}} \quad (2.24)$$

Rozkład prędkości wzdłuż ramion rezonatora można wyznaczyć z zależności:

$$V_{x_1} = V_{x_3} \cdot \frac{\cos k_{x_2} l_{x_2}}{\sin k_{x_5} l_{x_1}} \cdot \sin k_{x_5} x_1 \quad (2.25)$$

$$V_{x_2} = V_{x_3} \cdot \cos k_{x_2} l_{x_2} \cdot \cos k_{x_2} x_2 (1 + \operatorname{tg} k_{x_2} l_{x_2} \cdot \operatorname{tg} k_{x_2} x_2) \quad (2.26)$$

Stosunek prędkości powierzchni krańcowych konwertera można wyznaczyć z wyrażenia:

- dla modu współfazowego drgań

$$\frac{V_{y_3}}{V_{x_3}} = \sqrt{\frac{1-\nu(n-m)}{n[n-\nu(1-m)]}} \cdot \frac{\cos k_{x_2} l_{x_2} \cdot \sin k_{y_5} l_{y_1}}{\cos k_{y_2} l_{y_2} \cdot \sin k_{x_5} l_{x_1}} \quad (2.27)$$

$$\frac{V_{z_3}}{V_{x_3}} = \sqrt{\frac{m[m-\nu(1+n)]}{n[n-\nu(1+m)]}} \cdot \frac{\cos k_{x_2} l_{x_2} \cdot \sin k_{z_5} l_{z_1}}{\cos k_{z_2} l_{z_2} \cdot \sin k_{x_5} l_{x_1}} \quad (2.28)$$

- dla modu przeciwfazowego

$$\frac{V_{y3}}{V_{x3}} = \sqrt{\frac{1-\gamma(n+m)}{n[n-\gamma(1+m)]}} \cdot \frac{\cos k_{x2}l_{x2} \cdot \sin k_{y2}l_{y2}}{\cos k_{y2}l_{y2} \cdot \sin k_{x2}l_{x2}} \quad (2.29)$$

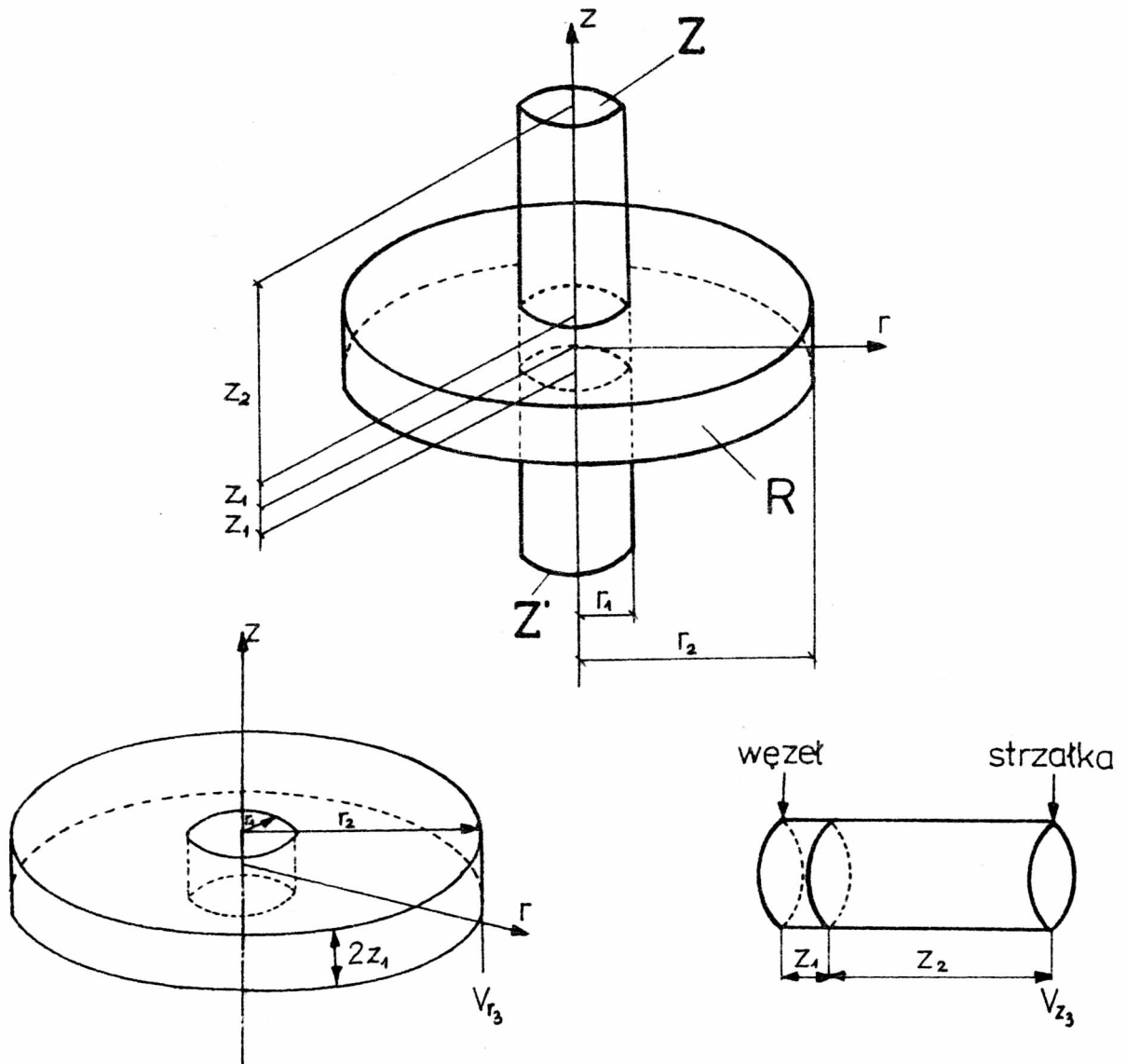
$$\frac{V_{z3}}{V_{x3}} = \sqrt{\frac{m[m+\gamma(1+n)]}{n[n-\gamma(1-m)]}} \cdot \frac{\cos k_{x2}l_{x2} \cdot \sin k_{z2}l_{z2}}{\cos k_{z2}l_{z2} \cdot \sin k_{x2}l_{x2}} \quad (2.30)$$

łatwo zauważyć, że dla

$$G_x = G_y = G_z$$

tj. gdy $m = n = 1$ wyrażenie pod pierwiastkiem we wzorach /2.27/, /2.28/, /2.29/ są równe 1, natomiast ze wzorze /2.30/ człon z pierwiastkiem upraszcza się do wielkości $\sqrt{1+2\gamma}$.

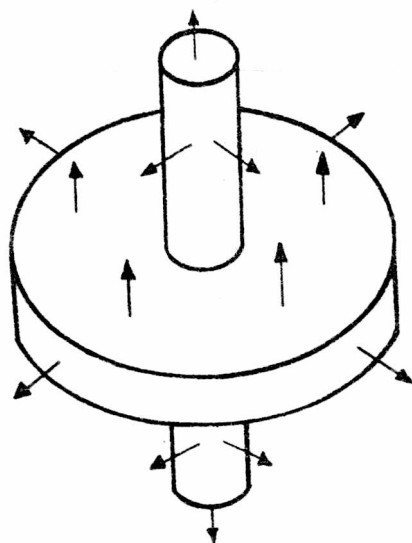
2.3. Rezonator o konwersji kierunku drgań typu R-L.



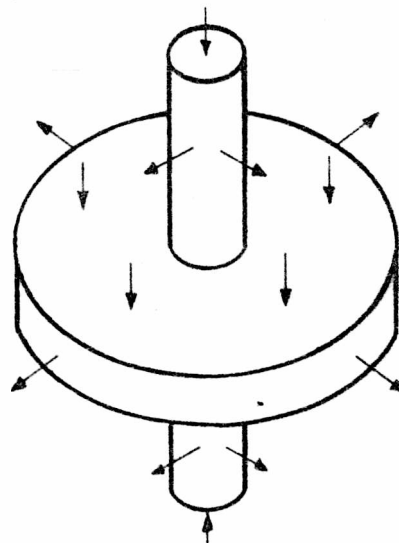
Rys. 7. Konwerter typu R-L.

Konwerter typu R-L składa się z radialnie drgającego dysku i podłużnie drgającego pręta. Pręt i dysk są połączone z sobą w węzłach drgań. Taki układ ma również dwie częstotliwości rezonansowe, które zależą od fazy drgań pręta i dysku. Drgania współfazowe występują wówczas gdy powierzchnie krańcowe pręta i dysku w czasie t są w tej samej fazie, natomiast przy drganiach przeciwfazowych powierzchnie czołowe pręta są w fazie przeciwnej

w stosunku do powierzchni bocznej dysku. Obrazuje to rys. 8.



a/ mod współfazowy drgań

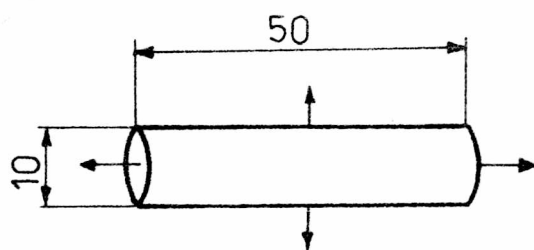


b/ mod przeciwfazowy drgań

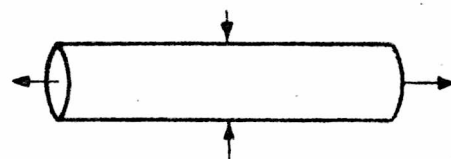
Rys.8. Mody drgań konwertera typu R-L.

Kierunek strzałek pokazuje fazę drgań z jaką drga każda powierzchnia konwertera w rezonansie.

K.Ito i E.Mori w pracy [20] przedstawili zmierzone wartości prędkości propagacji fali odkształceń i modułu sprężystości podłużnej dla pojedynczego pręta i dla dysku, dla modu współfazowego i przeciwfazowego drgań. Dla pręta stalowego / stal S45C - oznacz.jap./ o rozmiarach /w [mm] / jak na rys. 9 wielkości te mają następujące wartości:



a/



b/

Rys. 9. Mody drgań rezonatora prętowego.

a/ mod współfazowy

$$C_{zs} = 7.72 \cdot 10^3 [\text{m/sek}]$$

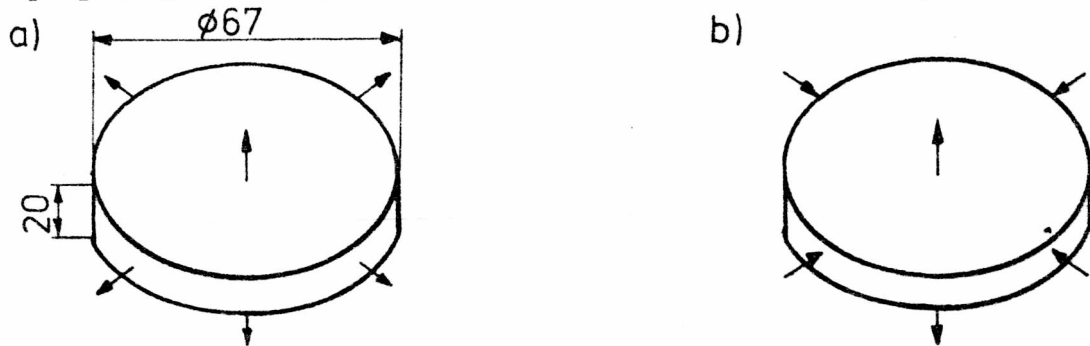
$$E_{zs} = 4.65 \cdot 10^{11} [\text{Pa}]$$

b/ mod przeciwfazowy

$$C_{za} = 5.15 \cdot 10^3 [\text{m/sek}]$$

$$E_{za} = 2.07 \cdot 10^{11} [\text{Pa}]$$

Dla dysku wykonanego ze stali S45C / oznacz.jap./ o rozmiarach /w [mm] / jak na rys. 10 wielkości te są następujące:



Rys. 10. Mody drgań rezonatora radialnego.

a/ mod współfazowy

b/ mod przeciwwfazowy

$$C_{rs} = 7.83 \cdot 10^3 [\text{m/sek}]$$

$$C_{rd} = 5.35 \cdot 10^3 [\text{m/sek}]$$

$$E_{rs} = 4.78 \cdot 10^{11} [\text{Pa}]$$

$$E_{rd} = 2.23 \cdot 10^{11} [\text{Pa}]$$

Jak widać dla obu przypadków wartości C i E są większe dla modu współfazowego /patrz nierówność /2.1/ /

$$C_{zs} > C_{za}$$

$$E_{zs} > E_{za}$$

$$C_{rs} > C_{ra}$$

$$E_{rs} > E_{ra}$$

(2.31)

Oznacza to, że częstotliwość dla modu współfazowego drgań będzie większa od częstotliwości drgań dla modu przeciwwfazowego. Część sprzężoną /wspólną dla obu rezonatorów/ konwertera stanowi walec, który ulega odkształceniom w kierunku osi z i r; odkształcenia te można przedstawić w postaci równania:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_z &= \frac{1}{E_z} G_z - \nu \frac{1}{E_r} G_r \\ \epsilon_r &= \frac{1}{E_r} G_r - \nu \frac{1}{E_z} G_z \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

gdzie:

ϵ_z - całkowite wydłużenie w kierunku osi z

$\frac{G_z}{E_z}$ - wydłużenie w kierunku osi z spowodowane przez napężenie G_z

γ) $\frac{G_r}{E_r}$ - skrócenie /przewężenie/ w kierunku osi z spowodowane przez naprężenie

Podobnie dla ϵ_r

Związek między naprężeniem G i modułem Younga E dla kierunku „r” i „z” można zapisać w postaci:

$$\frac{G_z}{G_r} = \pm n \frac{E_z}{E_r} \quad (2.33)$$

gdzie:

znak /+/ - mod współfazowy drgań

znak /-/ - mod przeciwfazowy drgań

Długość rezonatora prętowego dla modu współfazowego i przeciwfazowego drgań własnych konwertera można wyznaczyć z równań otrzymanych przez K.Ito i E.Mori ([20]) :

dla modu współfazowego

$$\operatorname{tg} k_{z_1} z_1 \cdot \operatorname{tg} k_{z_2} z_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\gamma}{n}}} \quad (2.34)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} k_{z_1} &= \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_{z_1}}{\rho}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_{z_0}}{\rho(1 - \frac{\gamma}{n})}}} \\ k_{z_2} &= \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_{z_2}}{\rho}}} \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

E_{z_2} - moduł sprężystości podłużnej dla kierunku z

E_{z_1} - moduł sprężystości podłużnej części sprzężonej dla modu współfazowego drgań dla kierunku z

dla modu przeciwfazowego:

$$\operatorname{tg} k_{z_1} z_1 \cdot \operatorname{tg} k_{z_2} z_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma}{n}}} \quad (2.36)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} k_{z_1} &= \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_{z_1}}{\rho(1 + \frac{\gamma}{n})}}} \\ k_{z_2} &= \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_{z_2}}{\rho}}} \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

Rozmiary rezonatora dyskowego dla modu współfazowego i przeciwfazowego drgań własnych konwertera można wyznaczyć z równania podanego przez K.Ito i E.Mori w pracy [20] :

$$\begin{aligned}
 & \left\{ k_2 r_2 Y_0(k_2 r_2) - (1-\nu) Y_1(k_2 r_2) \right\} \\
 & \times \left[J_1(k_1 r_1) \frac{E_2}{E_{r_1}} \left\{ k_2 r_1 J_0(k_2 r_1) - (1-\nu) J_1(k_2 r_1) \right\} \right. \\
 & \left. - J_1(k_2 r_1) \left\{ k_1 r_1 J_0(k_1 r_1) - (1-\nu) J_1(k_1 r_1) \right\} \right] \\
 & = \left\{ k_2 r_2 J_0(k_2 r_2) - (1-\nu) J_1(k_2 r_2) \right\} \\
 & \times \left[J_1(k_1 r_1) \frac{E_2}{E_{r_1}} \left\{ k_2 r_1 Y_0(k_2 r_1) - (1-\nu) Y_1(k_2 r_1) \right\} \right. \\
 & \left. - Y_1(k_2 r_1) \left\{ k_1 r_1 J_0(k_1 r_1) - (1-\nu) J_1(k_1 r_1) \right\} \right]
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

gdzie:

- dla modu współfazowego:

$$\left. \begin{aligned}
 E_2 &= E_{rs} \\
 E_{r_1} &= \frac{E_{rs}}{(1-n\nu)} \\
 k_1 &= \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_{rs}}{\xi(1-n\nu)}}} \\
 k_2 &= \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_{rs}}{\xi}}}
 \end{aligned} \right\} \tag{2.39}$$

- dla modu przeciwfazowego:

$$\left. \begin{aligned}
 E_2 &= E_{ra} \\
 E_{r_1} &= \frac{E_{ra}}{(1+n\nu)} \\
 k_1 &= \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_{ra}}{\xi(1+n\nu)}}} \\
 k_2 &= \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{E_{ra}}{\xi}}}
 \end{aligned} \right\} \tag{2.40}$$

natomiast

J_0 - funkcja Bessela pierwszego rodzaju rzędu zerowego

J_1 - funkcja Bessela pierwszego rodzaju rzędu pierwszego

Y_0 - funkcja Bessela drugiego rodzaju rzędu zerowego

Y_1 - funkcja Bessela drugiego rodzaju rzędu pierwszego

Prędkość drgań powierzchni końcowych konwertera /tzn. powierzchni krańcowej rezonatora prętowego i powierzchni na obwodzie dysku/ odzwierciedla skuteczność konwersji; stosunek prędkości powierzchni krańcowych pręta i dysku można definiować jako współczynnik wzmocnienia amplitudy drgań.

Dla konwertera typu R-L stosunek ten można wyznaczyć z zależności podanej przez K.Ito i E.Mori w pracy [20] :

$$\frac{V_{z3}}{V_{r3}} = \pm \frac{n\pi(1-\gamma)(1+\gamma)}{4} \cdot \sqrt{\frac{E_{r1}}{E_{z1}}} \cdot \frac{\sin z_1}{\cos z_2} \cdot \frac{1}{J_1(k_1 r_1)} \times \left[J_1(k_2 r_1) \left\{ k_2 r_2 Y_0(k_2 r_2) - (1-\gamma) Y_1(k_2 r_2) \right\} - Y_1(k_2 r_1) \left\{ k_2 r_2 J_0(k_2 r_2) - (1-\gamma) J_1(k_2 r_2) \right\} \right] \quad (2.41)$$

gdzie:

znak/+/- odpowiada współfazowemu modowi drgań, natomiast

znak/-/- odpowiada przeciwfazowemu modowi drgań

2.4. Rezonator o konwersji kierunku drgań typu L-R.

Rezonator o konwersji kierunku drgań typu L-R jest identyczny w budowie z rezonatorem o konwersji kierunku drgań typu R-L.

Wszystkie zależności przedstawione dla rezonatora typu R-L są więc słuszne dla rezonatora typu L-R. Oba typy rezonatorów różnią się jedynie sposobem pobudzenia ich do drgań. O wyborze określonego sposobu pobudzenia decyduje ich praktyczne wykorzystanie.

3. UWAGI DOTYCZĄCE WYBORU TYPU REZONATORA I METODY JEGO ANALIZY.

Przedstawione w poprzednim rozdziale zależności opisujące poszczególne typy rezonatorów o konwersji kierunku drgań cechuje stosunkowo skomplikowana postać. Poza tym przytoczone zależności pozwalają jedynie na wyznaczanie przemieszczeń wzdłużnych zaniedbując przemieszczenia poprzeczne. Uniemożliwia to przeprowadzenie analizy zachowania się rezonatorów tego typu w ich przekroju poprzecznym. Ponadto do obliczeń wymagana jest znajomość wartości modułu Younga dla dwóch różnych modów drgań: modu współfazowego i modu przeciwfazowego. W praktyce definiuje się jedynie jedną wartość modułu Younga, która odpowiada modowi przeciwfazowemu drgań.

Poza tym przedstawione wyrażenia odnoszą się jedynie do przypadku, gdy poprzeczne rozmiary rezonatorów drgających podłużnie są o wiele mniejsze od ich rozmiarów podłużnych, a grubość rezonatora radialnego jest o wiele mniejsza od jego średnicy.

Ograniczenia te w znacznej mierze ograniczają przydatność przedstawionych zależności zarówno do obliczeń /projektowania/ jak i do pełniejszej analizy drgań tego typu rezonatorów.

Wydaje się, że najbardziej trafną metodą analizy systemów rezonansowych o konwersji kierunku drgań i najlepiej odpowiadającą potrzebom projektowania tego typu rezonatorów jest metoda elementów skończonych. Metoda ta ma wiele zalet w stosunku do klasycznych metod analizy różnego rodzaju rezonatorów. Z uwagi na rekurencyjną formę zależności służących do wyznaczania częstotliwości własnych i postaci drgań jest dobrze przystosowana do obliczeń na maszynach cyfrowych. Metoda ta pozwala na znajdowanie wartości przemieszczeń i naprężeń w dowolnym punkcie rezonatora;

można wyznaczać dwie składowe przemieszczenia: podłużną i poprzeczną. Ponadto jest możliwa dowolna penetracja wewnątrz rozpatrywanego obszaru. Współrzędne punktu wybranego w dowolny sposób zależą jedynie od wymagań projektanta. Za pomocą tej metody jest możliwy dowolny podział rezonatora na części "ważne" i "mniej ważne" z punktu widzenia pracy rezonatora. Jedynym ograniczeniem tej metody jest wielkość obszaru pamięci maszyny cyfrowej zastosowanej do obliczeń. Uwzględniając jednak fakt, że technika cyfrowa cechuje się wysoce dynamicznym rozwojem wydaje się, że ograniczenie to w niedługim czasie będzie nieaktualne.

W dalszej części pracy za pomocą tej metody zostanie przeprowadzona analiza drgań rezonatora o konwersji kierunku drgań typu R-L. Wybór rezonatora o konwersji typu R-L został dokonany z następujących względów:

1. Rezonator o konwersji typu L-L stanowi dla FEM przypadek stosunkowo prosty; można go bowiem rozpatrywać jako przypadek płaski /zagadnienie dwuwymiarowe/.
2. Rezonator o konwersji typu L-L-L jest zagadnieniem trójwymiarowym, co pociąga za sobą konieczność stosowania EMC o bardzo dużej pamięci. Np. dla obszaru dwuwymiarowego zakładając podział $30 \times 30 = 900$ węzłów otrzymujemy 1800 równań /dwie składowe przemieszczenia w węźle/, natomiast dla obszaru trójwymiarowego przy takim samym podziale mamy $30 \times 30 \times 30 = 27000$ węzłów tj. 81000 równań /trzy składowe przemieszczenia w węźle/. Dla tego typu rezonatora wymagane jest stosowanie elementu objętościowego o minimum 4 węzłach. Wiąże się to z koniecznością stosowania bardziej złożonej funkcji kształtu; co najmniej podwaja się liczba stopni swobody /element trójkątny - 6 stopni swobody, element czworoboczny - 12 stopni swobody/ co automatycznie

komplikuje proces obliczeniowy. Opis matematyczny takiego elementu stwarza znaczne trudności dla osoby przygotowującej dane do programu. Dla opisanie bryły sześciiennej trzeba stosować minimum 5 elementów czworościennych, podczas gdy dla kwadratu wystarczy podział na dwa elementy trójkątne. Poza tym rezonator o konwersji typu L-L-L ma stosunkowo małą przydatność praktyczną.

3. Rezonator o konwersji typu R-L stanowi co prawda zagadnienie trójwymiarowe lecz zawarty jest w nim przypadek płaski. Jest to bowiem układ osiowo-symetryczny, a więc można go rozpatrywać jako układ płaski z obrotem wokół osi.
4. Wyniki analizy takiego rezonatora przedstawione w rozdz. 2.3. mają postać najbardziej skomplikowaną /w porównaniu z pozostałymi typami rezonatorów/, bardzo kłopotliwą do obliczeń m.in. ze względu na występowanie funkcji Bessela pierwszego i drugiego rodzaju rzędu zerowego i pierwszego. Wyniki otrzymane za pomocą FEM będą miały w zasadzie podobną postać dla wszystkich typów rezonatorów.
5. Analiza rezonatora o konwersji typu R-L za pomocą FEM pozwala na rozpatrywanie przypadku konwertera jednorodnego i niejednorodnego; komponentami mogą być dwa lub więcej dowolnych materiałów. Do obliczeń wymagane są jedynie trzy podstawowe stałe materiałowe: moduł Younga E , współczynnik Poissona ν i gęstość ρ .
6. Program dla przypadku osiowo symetrycznego umożliwia wykorzystanie go do innych przetworników o symetrii osiowej, które w praktyce spotyka się najczęściej ([11]).
7. Program dla przypadku osiowo-symetrycznego umożliwia również analizę dowolnych postaci drgań /można go wykorzystać

np. do rozwiązywania zagadnienia drgań giętnych membran
o dowolnej grubości/.

4. OPIS REZONATORA O KONWERSJI KIERUNKU DRGAŃ TYPU R-L METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH.

4.1. Istota metody ([46]) .

W każdym kontinuum sprężystym można dokonać podziału na elementy w taki sposób, że będą one połączone z sobą za pomocą skończonej liczby punktów węzłowych. Koncepcja metody elementów skończonych opiera się na takim właśnie podziale kontinuum, przy założeniu, że liczba elementów i liczba punktów węzłowych jest skończona.

Siły działające na węzły elementu są jednoznacznie określone przez

- przemieszczenia węzłów δ
- obciążenie rozłożone na elemencie p
- odkształcenia wstępne /wywołane np. przez różnicę temperatur, skurcz, i.t.p./.

Siły działające na element trójkątny w węzłach można zapisać w postaci:

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

gdzie

U_1 - składowa siły działająca na węzeł 1 w kier. x

V_1 - składowa siły działająca na węzeł 1 w kier. y

Podobnie przemieszczenia węzłów δ można zapisać:

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

gdzie

U_1 - składowa przemieszczenia węzła 1 w kierunku x

V_1 - składowa przemieszczenia węzła 1 w kierunku y

Postać ogólną równania charakterystycznego, przy założeniu sprężystości elementu przedstawia zależność:

$$\{F\} = [k]^e \{\delta\}^e + \{F\}_p^e + \{F\}_{\epsilon_0}^e \quad (4.3)$$

gdzie

$[k]^e \{\delta\}^e$ - siły wywołane przemieszczeniami elementów

$[k]$ - macierz sztywności elementu

$\{F\}_p^e$ - siły węzłowe równoważące obciążenie zewnętrzne działające na element

$\{F\}_{\epsilon_0}^e$ - siły węzłowe wywołane odkształceniami początkowymi

Naprężenie σ w każdym punkcie elementu jest funkcją przemieszczeń węzłów tego elementu. Można je przedstawić w postaci:

$$\{\sigma\}^e = [S] \{\delta\}^e + \{\sigma\}_p^e + \{\sigma\}_{\epsilon_0}^e \quad (4.4)$$

gdzie

$[S]$ - macierz naprężeń elementu

Wyrażenia /4.1/ i /4.2/ można przedstawić w postaci ogólnej:

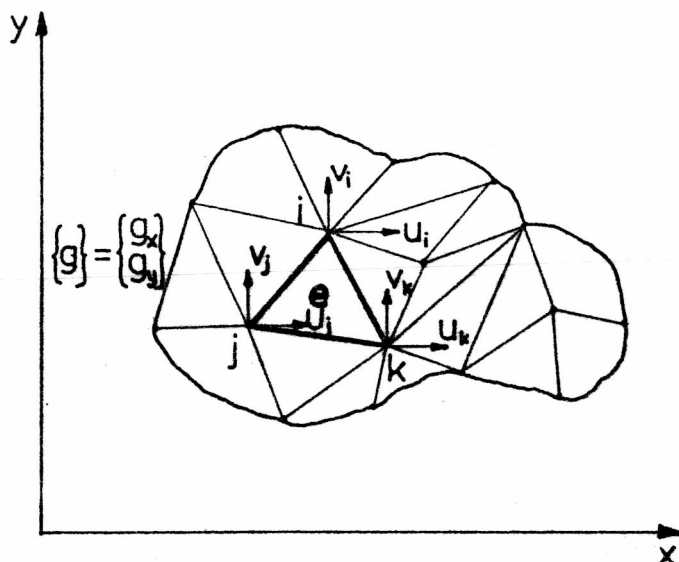
$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_m \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

Składowe wektora F_i i δ_i reprezentują stopnie swobody poszczególnych węzłów ; liczba stopni swobody dla obu wektorów jest jednakowa.

Dla "elementu skończonego" wyodrębnionego z obszaru ciągłego można znaleźć taką funkcję przemieszczeń, która określa jednoznacznie stan przemieszczeń wewnątrz tego elementu

w zależności od przemieszczeń jego węzłów.



Rys. 11. Podział obszaru płaskiego na elementy.

Na rys. 11 przedstawiono przykład obszaru płaskiego podzielonego na "elementy skończone". Wyodrębniono element "e", który ma trzy węzły i, j, k o składowych $u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k$.

4.1.1. Funkcje przemieszczeń, odkształceń i naprężeń.

Przemieszczenie w dowolnym punkcie wewnątrz elementu o dowolnym kształcie można określić za pomocą wektora $\{f(x, y)\}$.

$$\{f\} = [N] \cdot \{\delta\}^e = [N_i, N_j, N_k, \dots] \cdot \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

gdzie

$\{\delta\}$ - zbiór przemieszczeń węzłów elementu

$[N]$ - pewna funkcja, tzw. macierz funkcji kształtu

$[N_i]$ - podmacierz macierzy $[N]$ dla węzła „i”

Funkcje $N_i, N_j, N_k, \dots$ powinny być tak dobrane, aby po wstawieniu do równania /4.7/ współrzędnych poszczególnych węzłów można było otrzymać odpowiednie przemieszczenia tych węzłów.

Znając przemieszczenia we wszystkich punktach elementu można łatwo znaleźć odkształcenia i naprężenia w dowolnym jego punkcie. Wektor odkształceń ma postać:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\delta\}^e \quad (4.8)$$

gdzie

$[B]$ - macierz odkształceń

Związek między odkształceniem a naprężeniem ma postać następującą:

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \quad (4.9)$$

gdzie

$[D]$ - macierz sprężystości opisująca zadane własności materiału

$\{\varepsilon_0\}$ - odkształcenie początkowe

$\{\sigma_0\}$ - naprężenie początkowe

4.1.2. Zasada pracy wirtualnej.

Wychodząc z zasady równości prac sił zewnętrznych i wewnętrznych można wyprowadzić związek:

$$\begin{aligned} \{F\}^e = & \left(\int [B]^T [D] [B] \right) dV - \int [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dV \\ & + \int [B]^T \{\sigma_0\} dV - \int [N]^T \{p\} dV - \int [N]^T \{g\} dS \end{aligned} \quad (4.10)$$

Porównując równanie /4.10/ z /4.3/ i uwzględniając wszystkie siły działające na element otrzymamy wzory definiujące: macierz sztywności:

$$[k]^e = \int [B]^T [D] [B] dV \quad (4.11)$$

siły węzłowe pochodzące od odkształceń początkowych:

$$\{F\}_{\xi_0}^e = - \int [B]^T [D] \{\xi_0\} dV \quad (4.12)$$

siły węzłowe wywołane przez naprężenia początkowe:

$$\{F\}_{\xi_0}^e = \int [B]^T \{\xi_0\} dV \quad (4.13)$$

siły węzłowe wywołane rozłożonym obciążeniem/p/

$$\{F\}_p^e = - \int [N]^T \{p\} dV \quad (4.14)$$

siły pochodzące od obciążenia rozłożonego na brzegu elementu/g/

$$\{F\}_g^e = - \int [N]^T \{g\} dS \quad (4.15)$$

Ponieważ suma prac wirtualnych sił zewnętrznych i wewnętrznych musi być równa zeru przeto równanie równowagi będzie miało postać:

$$[K] \{\delta\} + \{F\}_p + \{F\}_g + \{F\}_{\xi_0} + \{F\}_{\xi_0} - \{R\} = 0 \quad (4.16)$$

gdzie

$[K]$ - macierz sztywności układu

$\{R\}$ - wektor sił skupionych w węzłach

Zgodnie z wzorem /4.11/ wyrazy macierzy $[K]$ będą w postaci:

$$[K_{ij}] = \int [B]_i^T [D] [B]_j dV \quad (4.17)$$

przy czym

$$[K_{ij}] = \sum [k_{ij}]^e$$

Warunek równowagi /4.16/ będzie spełniony jeśli praca wirtualna wszystkich wariacji przemieszczeń będzie jednakowa. Przybliżenie do wszystkich warunków równowagi będzie tym lepsze im większa będzie liczba parametrów $\{\delta\}$.

Zasadę prac wirtualnych można przedstawić w postaci:

$$d(\mathcal{V} + \mathcal{Q}) = d\Pi = 0 \quad (4.18)$$

gdzie

$\mathcal{V}$ - energia odkształcenia układu określona wzorem:

$$\mathcal{V} = \int (d\{\varepsilon\})^T \{\sigma\} dV \quad (4.19)$$

$\mathcal{Q}$ - energia potencjalna sił zewnętrznych, równa ujemnej pracy tych sił wywołanej poszczególnymi przemieszczeniami wirtualnymi $d\{\delta\}$:

$$\mathcal{Q} = -W_e = (d\{\delta\})^T \{R\} + \int (d\{f\})^T \{p\} dV + \int (d\{f\})^T \{g\} dS \quad (4.20)$$

Π - całkowita energia potencjalna

Z wzoru /4.18/ wynika, że aby warunki równowagi układu zostały spełnione całkowita energia potencjalna musi być stacjonarna i minimalna w stanie równowagi.

Przedstawione wyżej równania elementów skończonych można zapisać w postaci ogólnej jako:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\delta\}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial \delta_1} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \delta_2} \\ \vdots \end{bmatrix} = 0 \quad (4.21)$$

W stanie równowagi całkowita energia potencjalna osiąga minimum; poszukiwanie tego minimum przy założonych przemieszczeniach stanowi zasadniczą treść metody elementów skończonych.

Wynika stąd wniosek, że poprawność rozwiązania zagadnienia zależy od liczby założonych przemieszczeń /czyli założonych stopni swobody układu/; ze wzrostem liczby stopni swobody wzrasta dokładność metody.

Funkcje kształtu N przedstawione w równaniu /4.7/ opisują układ o pewnej liczbie stopni swobody. Dla układu rzeczywistego istnieje nieskończona liczba stopni swobody. Zagęszczając siatkę podziału zbliżamy się do wyniku poprawnego, jednak rzeczywista wartość minimum energii potencjalnej nie może być nigdy osiągnięta.

4.1.3. Zagadnienia dynamiczne w metodzie elementów skończonych.

Omówione w dużym skrócie w poprzednim podrozdziale podstawy metody odnoszą się do zagadnień statycznych, a więc przy założeniu, że warunki nie ulegają zmianom w czasie.

Uwzględniając związki charakterystyczne dla FEM równanie ruchu dla układu sprężystego z uwzględnieniem liniowego tłumienia ma postać ([46]) :

$$[K]\{\delta\} + [C] \frac{\partial}{\partial t} \{\delta\} + [M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta\} + \{F\} = 0 \quad (4.22)$$

gdzie

$[K]$ - macierz sztywności

$[C]$ - macierz tłumienia

$[M]$ - macierz mas układu

$\{F\}$ - macierz sił pochodzących od obciążeń zewnętrznych, naprężeń początkowych, i.t.p. - patrz wzór /4.10/

Wektor $\{F\}$ określa obciążenie układu, które może być funkcją czasu :

$$\{F(t)\} = \{F_0\} e^{at} \quad (4.23)$$

Zakładając rozwiązanie równania /4.22/ w postaci

$$\{\delta(t)\} = \{\delta_0\} e^{at} \quad (4.24)$$

otrzymamy z równania /4.22/ następujące równanie:

$$([K] + a[C] + a^2[M])\{\delta_0\} + \{F_0\} = 0 \quad (4.25)$$

Dla wzbudzenia okresowego macierz $\{F\}$ można zapisać:

$$\{F(t)\} = \{F_0\} e^{i\omega t} = \{F_0\} (\cos \omega t + i \sin \omega t) \quad (4.26)$$

Ponieważ macierze $\{F_0\}$ i $\{\delta_0\}$ we wzorach /4.23/ i /4.24/ mogą być zespolone, czyli

$$\{F_0\} = \{\bar{F}_0\} + i \{\bar{\bar{F}}_0\} \quad (4.27)$$

$$\{\delta_0\} = \{\bar{\delta}_0\} + i \{\bar{\bar{\delta}}_0\} \quad (4.28)$$

więc równanie /4.25/ można zapisać w postaci dwóch równań:

$$\begin{bmatrix} [K] - \omega^2 [M] & -\omega [C] \\ -\omega [C] & [K] - \omega^2 [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_0 \\ \bar{\bar{\delta}}_0 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \bar{F}_0 \\ \bar{\bar{F}}_0 \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

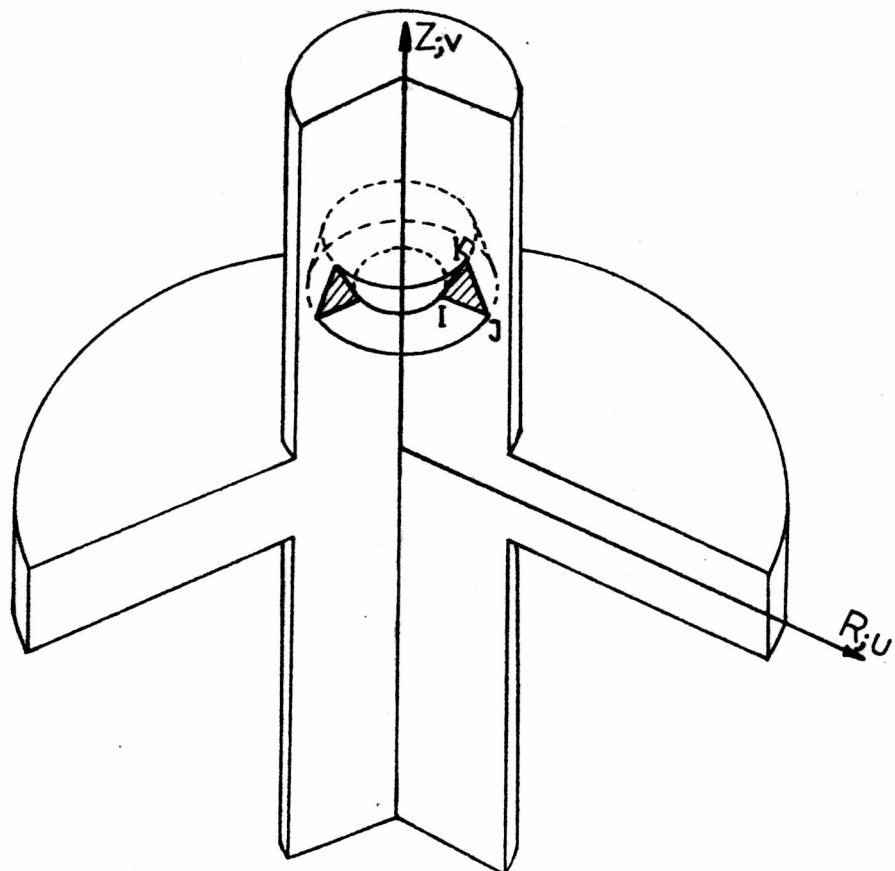
Postać tego równania macierzowego stanowi punkt wyjścia do rozpatrywania różnych zagadnień dynamicznych, w których pobudzenie ma charakter okresowy.

W dalszej części pracy dla rezonatora o konwersji kierunku drgań typu R-L rozpatrywany będzie przypadek drgań własnych tj. przy założeniu, że macierz $[C] = 0$ /brak tłumienia/ i wekto $\{F\} = 0$ /brak sił zewnętrznych/.

4.2. Geometria układu.

Rezonator o konwersji kierunku drgań typu R-L jest układem o osiowo-symetrycznym rozkładzie naprężeń. Z matematycznego punktu widzenia zagadnienie takie jest podobne do zagadnienia płaskiego ponieważ jest to w zasadzie przypadek dwuwymiarowy. Ze względu na symetrię układu w każdym punkcie przekroju poprowadzonego wzdłuż osi symetrii odkształcenie jest zdefiniowane przez dwie składowe.

Jeśli oznaczymy przez "R" współrzędną promieniową i przez "Z" współrzędną osiową punktu, a "u" i "v" będą przemieszczeniami odpowiadającymi tym współrzędnym to otrzymamy przypadek płaski. Wybrany element, obracając się wokół osi, wyznacza objętość, względem której należy przeprowadzać wszystkie całkowania /rys.12/.



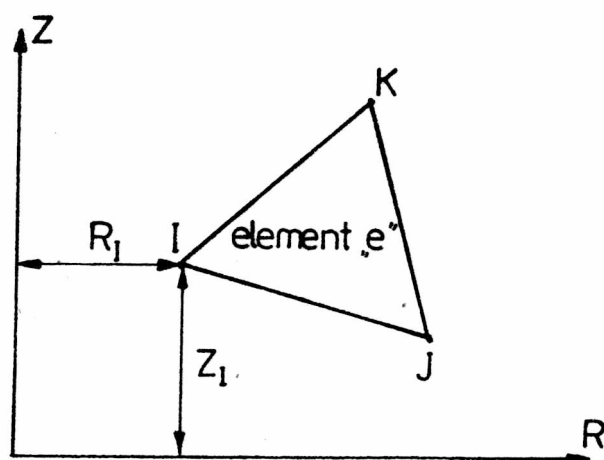
Rys. 12. Konwerter typu R-L jako układ o symetrii osiowej.

Dla elementu jak na rys. 13 oznaczono węzły I, J, K. Przemieszczenie I-tego węzła jest definiowane przez jego dwie składowe:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_I \\ v_I \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

Mamy więc sześć składowych przemieszczenia elementu, które zapiszemy w postaci wektorowej:

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_I \\ \delta_J \\ \delta_K \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$



Rys. 13. Współrzędne elementu.

Przemieszczenia wewnątrz elementu można przedstawić za pomocą dwóch wielomianów liniowych:

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 R + \alpha_3 Z \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 R + \alpha_6 Z \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

Stałe α_k można wyznaczyć rozwiązując dwa układy równań, z których każdy zawiera 3 jednocześnie spełnione równania.

Równania te otrzymuje się przez podstawienie do równań /4.32/ współrzędnych i składowych przemieszczeń poszczególnych węzłów:

$$\left. \begin{aligned} u_I &= \alpha_1 + \alpha_2 R_I + \alpha_3 Z_I \\ u_J &= \alpha_1 + \alpha_2 R_J + \alpha_3 Z_J \\ u_K &= \alpha_1 + \alpha_2 R_K + \alpha_3 Z_K \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

Równanie dla przemieszczenia "u" można otrzymać rozwiązując powyższy układ równań względem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; ma ono postać następującą:

$$u = \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i R + c_i Z) u_i + (a_j + b_j R + c_j Z) u_j + (a_k + b_k R + c_k Z) u_k] \quad (4.34)$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_i &= R_j Z_k - R_k Z_j \\ a_j &= R_k Z_i - R_i Z_k \\ a_k &= R_i Z_j - R_j Z_i \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} b_i &= Z_j - Z_k \\ b_j &= Z_k - Z_i \\ b_k &= Z_i - Z_j \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} c_i &= R_k - R_j \\ c_j &= R_i - R_k \\ c_k &= R_j - R_i \end{aligned} \quad (4.37)$$

natomiast

$$2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & R_i & Z_i \\ 1 & R_j & Z_j \\ 1 & R_k & Z_k \end{vmatrix} \quad (4.38)$$

Δ - pole trójkąta

W podobny sposób można otrzymać równanie dla przemieszczenia pionowego "v":

$$v = \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i R + c_i Z)v_i + (a_j + b_j R + c_j Z)v_j + (a_k + b_k R + c_k Z)v_k] \quad (4.39)$$

Przemieszczenie w dowolnym punkcie wewnątrz elementu, zgodnie z wzorem /4.7/ jest wektorem

$$\begin{aligned} \{f\} = \begin{Bmatrix} u(R,Z) \\ v(R,Z) \end{Bmatrix} &= [N] \{\delta\}^e = [N_i, N_j, N_k] \{\delta\}^e = \\ &= [I \cdot N'_i, I \cdot N'_j, I \cdot N'_k] \{\delta\}^e \end{aligned} \quad (4.40)$$

gdzie

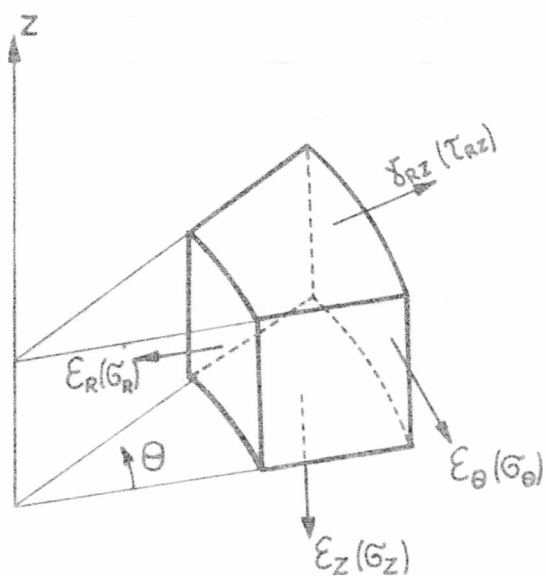
I - kwadratowa macierz jednostkowa 2×2

N'_i, N'_j, N'_k - współczynniki dane wzorem:

$$\left. \begin{aligned} N'_i &= \frac{a_i + b_i R + c_i Z}{2\Delta} \\ N'_j &= \frac{a_j + b_j R + c_j Z}{2\Delta} \\ N'_k &= \frac{a_k + b_k R + c_k Z}{2\Delta} \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

W układzie symetrii osiowej każde przemieszczenie promieniowe wywołuje odkształcenie obwodowe /rys.14/. Składowe wektora odkształcenia są funkcjami przemieszczeń poszczególnych punktów ([43]) :

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_z \\ \epsilon_R \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{RZ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial Z} \\ \frac{\partial u}{\partial R} \\ \frac{u}{R} \\ \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial v}{\partial R} \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$



Rys. 14. Składowe odkształcenia i naprężenia w układzie symetrii osiowej.

4.3. Macierz sprężystości, macierz kształtu, macierz mas.

Macierz $[D]$ opisująca własności mechaniczne materiału, z którego zbudowany jest element /wzór 4.9/ powinna uwzględniać rodzaj tego materiału. Dla materiałów anizotropowych jednoznaczne określenie związków między naprężeniami a odkształceniami wymaga znajomości 21 niezależnych stałych sprężystości ([15], [27]). W praktyce najczęściej spotykanym przypadkiem anizotropii jest anizotropia warstwowa. Dla takiego materiału wymagana jest znajomość 5 niezależnych stałych sprężystości. Zakładając, że warstwy materiału są prostopadłe do osi Z i że odkształcenia początkowe są równe zero - macierz sprężystości można zapisać w postaci:

$$[D] = D_0 \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 \\ & D_{22} & D_{23} & 0 \\ & & D_{33} & 0 \\ \text{(sym)} & & & D_{44} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= \frac{E_2}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2\frac{E_1}{E_2}\nu_2^2)} \\ D_{11} &= 1-\nu_1^2 \\ D_{12} &= D_{13} = \frac{E_1}{E_2}\nu_2(1+\nu_1) \\ D_{22} &= D_{33} = \frac{E_1}{E_2}\nu_2^2(1-\frac{E_1}{E_2}) \\ D_{23} &= \nu_1 + \frac{E_1}{E_2}\nu_2^2 \\ D_{44} &= \frac{G_2}{E_2}(1+\nu_1)(1-\nu_1-2\frac{E_1}{E_2}\nu_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.44)$$

E_1, ν_1 - stałe materiałowe w płaszczyźnie warstw

E_2, G_2, ν_2 - stałe materiałowe w kierunku normalnym do warstw

Do obliczeń przyjęto, że materiał ma strukturę izotropową, tzn.

$$E_1 = E_2 = E \quad ; \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu \quad \text{oraz} \quad \frac{G_2}{E_2} = \frac{G}{E} = \frac{1}{2(1+\nu)} \quad ;$$

wówczas po przekształceniach współczynniki macierzy $[D]$ uproszczą się do postaci:

$$\left. \begin{aligned} D_{00} &= \frac{E(1-\nu)}{(1-\nu)(1-2\nu)} \\ D_{11} &= D_{22} = D_{33} = 1 \\ D_{12} &= D_{13} = D_{23} = \frac{\nu}{1-\nu} \\ D_{44} &= \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

Postać ogólna macierzy sztywności $[K]$ z uwzględnieniem objętości wyznaczanej przez obrót wszystkich elementów jest następująca:

$$[K] = 2\pi \int [B]^T [D] [B] r dr dz \quad (4.46)$$

Dla elementu trójkątnego "e" macierz sztywności /macierz cząstkowa/ zgodnie z /4.11/ będzie miała postać:

$$[k_i] = [B_i]^T [D] [B_j] \cdot 2\pi \cdot \Delta \cdot R_E \quad (4.47)$$

gdzie:

R_E - współrzędna środka ciężkości elementu

$$R_E = \frac{1}{3} (R_I + R_J + R_K) \quad (4.48)$$

$$Z_E = \frac{1}{3} (Z_I + Z_J + Z_K) \quad (4.49)$$

Macierze $[B_i]$, $[B_j]$, $[B_k]$ są macierzami otrzymanymi z wzoru (4.42) po uwzględnieniu zależności (4.40) dla środka ciężkości elementu o współrzędnych R_E , Z_E :

$$[B_i] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i'}{\partial Z} \\ \frac{\partial N_i'}{\partial R} & 0 \\ \frac{1}{R} N_i' & 0 \\ \frac{\partial N_i'}{\partial Z} & \frac{\partial N_i'}{\partial R} \end{bmatrix}_{(R_E Z_E)} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 0 & c_i \\ b_i & 0 \\ \frac{a_i}{R_E} + b_i + c_i \frac{Z_E}{R_E} & 0 \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Analogiczną postać mają macierze $[B_j]$ i $[B_k]$ /po uwzględnieniu zmiany indeksów odpowiednio na "i" i "k" /.

Podmacierze macierzy $[K]$ z wzoru /4.48/ są wyznaczane dla wszystkich kombinacji indeksów i, j, k :

$$\begin{aligned} & [k_{ii}]^e, [k_{ij}]^e, [k_{ik}]^e \\ & [k_{ji}]^e, [k_{jj}]^e, [k_{jk}]^e \\ & [k_{ki}]^e, [k_{kj}]^e, [k_{kk}]^e \end{aligned}$$

Postać ogólna macierzy mas układu $[M]$ z uwzględnieniem objętości wyznaczonej przez obrót wszystkich elementów ma postać ([45]) :

$$[M] = 2\pi \int [N]^T \cdot \xi \cdot [N] \cdot r \cdot dr \cdot dz \quad (4.51)$$

Macierz ta zbudowana jest z macierzy cząstkowych $[m_{ij}]^e$, które są wyznaczone dla wszystkich kombinacji indeksów i, j, k :

$$[M] = \begin{bmatrix} [m_{ii}]^e & [m_{ij}]^e & [m_{ik}]^e \\ [m_{ji}]^e & [m_{jj}]^e & [m_{jk}]^e \\ [m_{ki}]^e & [m_{kj}]^e & [m_{kk}]^e \end{bmatrix}$$

Dla elementu trójkątnego przedstawionego na rys. 13 poszczególne wyrazy tej macierzy mają postać ([24]) :

dla $i = j$

$$[m_{ii}]^e = \frac{\pi \cdot \Delta \cdot \xi}{30} \begin{bmatrix} 6R_i + 2(R_j + R_k) & 0 \\ 0 & 6R_i + 2(R_j + R_k) \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

dla $i \neq j$

$$[m_{ij}]^e = \frac{\pi \cdot \Delta \cdot \xi}{30} \begin{bmatrix} R_k + 2(R_i + R_j) & 0 \\ 0 & R_k + 2(R_i + R_j) \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Przedstawione zależności dla elementu "e" rezonatora zostają obliczone dla takiej liczby elementów, na jaką został on wcześniej podzielony. Poszczególne macierze cząstkowe zostają odpowiednio umieszczone w macierzach głównych. Po uzyskaniu macierzy końcowych dokonuje się skreśleń wierszy i kolumn dla tych stopni swobody, dla których dany węzeł jest unieruchomiony.

4.4. Numeryczne wyznaczanie równania wartości własnej.

Jak już wspomniano w p.4.1.3. interesuje nas drgania własne rezonatora przy założeniu, że tłumienie jest równe zero i brak jest sił obciążających.

Równanie ruchu /4.23/ upraszcza się wtedy do postaci:

$$[K] \cdot \{\delta\} + [M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta\} = 0 \quad (4.54)$$

Zakładając rozwiązanie takiego równania względem $\{\delta\}$ w postaci:

$$\{\delta(t)\} = \{\delta_0\} e^{i\omega t} = \{\delta_0\} (\cos \omega t + i \sin \omega t) \quad (4.55)$$

równanie /4.54/ dla części rzeczywistej przyjmuje postać

$$\cos \omega t ([K] - \omega^2 [M]) \cdot \{\delta\} = 0 \quad (4.56)$$

Aby układ był rozwiązywalny, musi zachodzić

$$\det [K] - \omega^2 [M] = 0 \quad (4.57)$$

Wyznaczając z powyższego równania wielkość ω znajdujemy częstotliwości własne układu drgającego i odpowiadające im wektory własne. Problem obliczania tych wielkości może być rozwiązywany różnymi sposobami /np. [14] , [38] , [42] /. Obliczenia wartości własnych dokonano wg następującej procedury postępowania:

$$\begin{aligned} \det [K] - \omega^2 [M] &= 0 \quad | \cdot [K]^{-1} \\ \det [K][K]^{-1} - \omega^2 [M][K]^{-1} &= 0 \quad | - \frac{1}{\omega^2} \\ \det [M][K]^{-1} - \frac{1}{\omega^2} [I] &= 0 \end{aligned}$$

gdzie

$$[I] \quad \text{macierz jednostkowa}$$

Wprowadzając :

$$[H] = [M] [K]^{-1}$$

oraz $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$

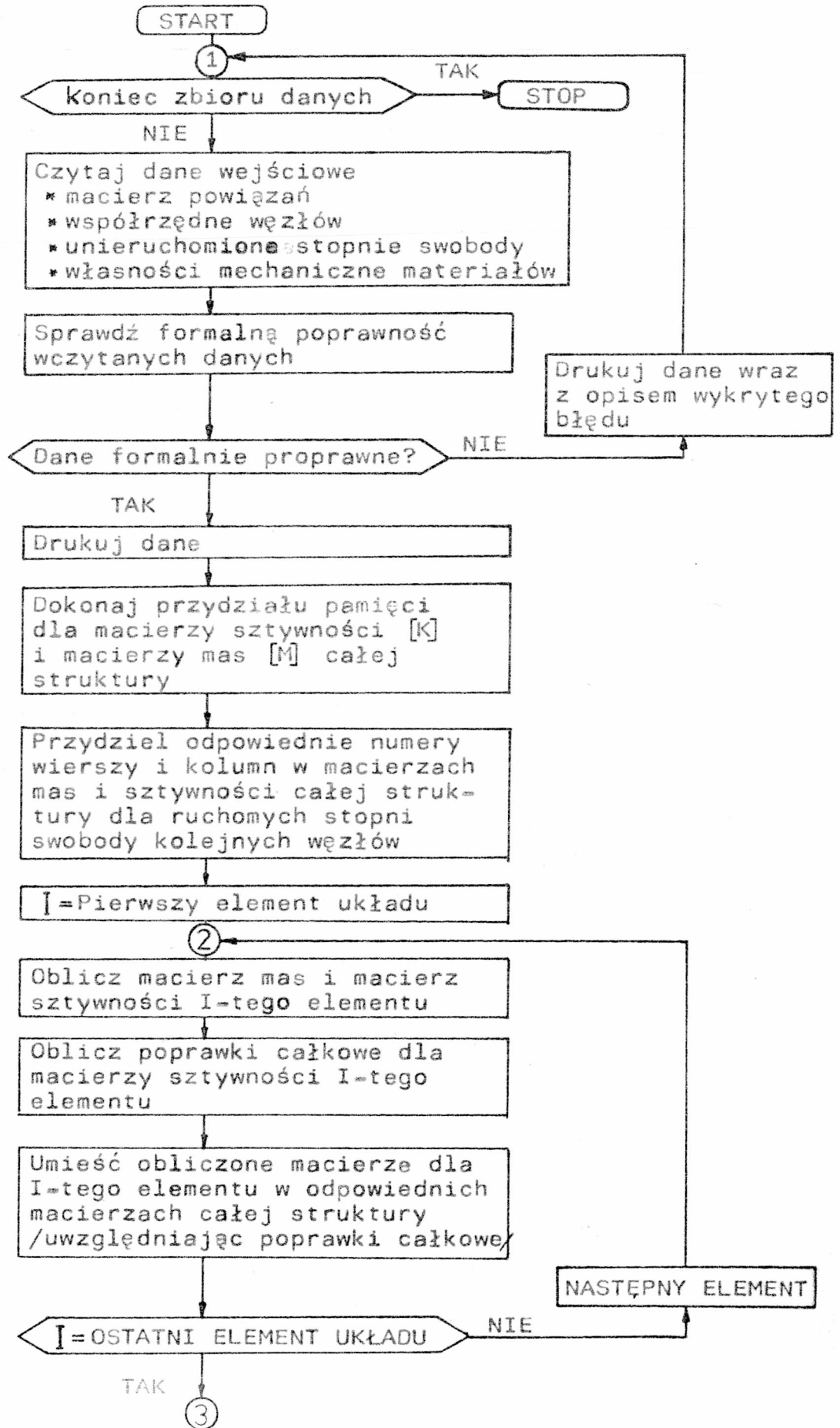
otrzymuje się równanie charakterystyczne w postaci

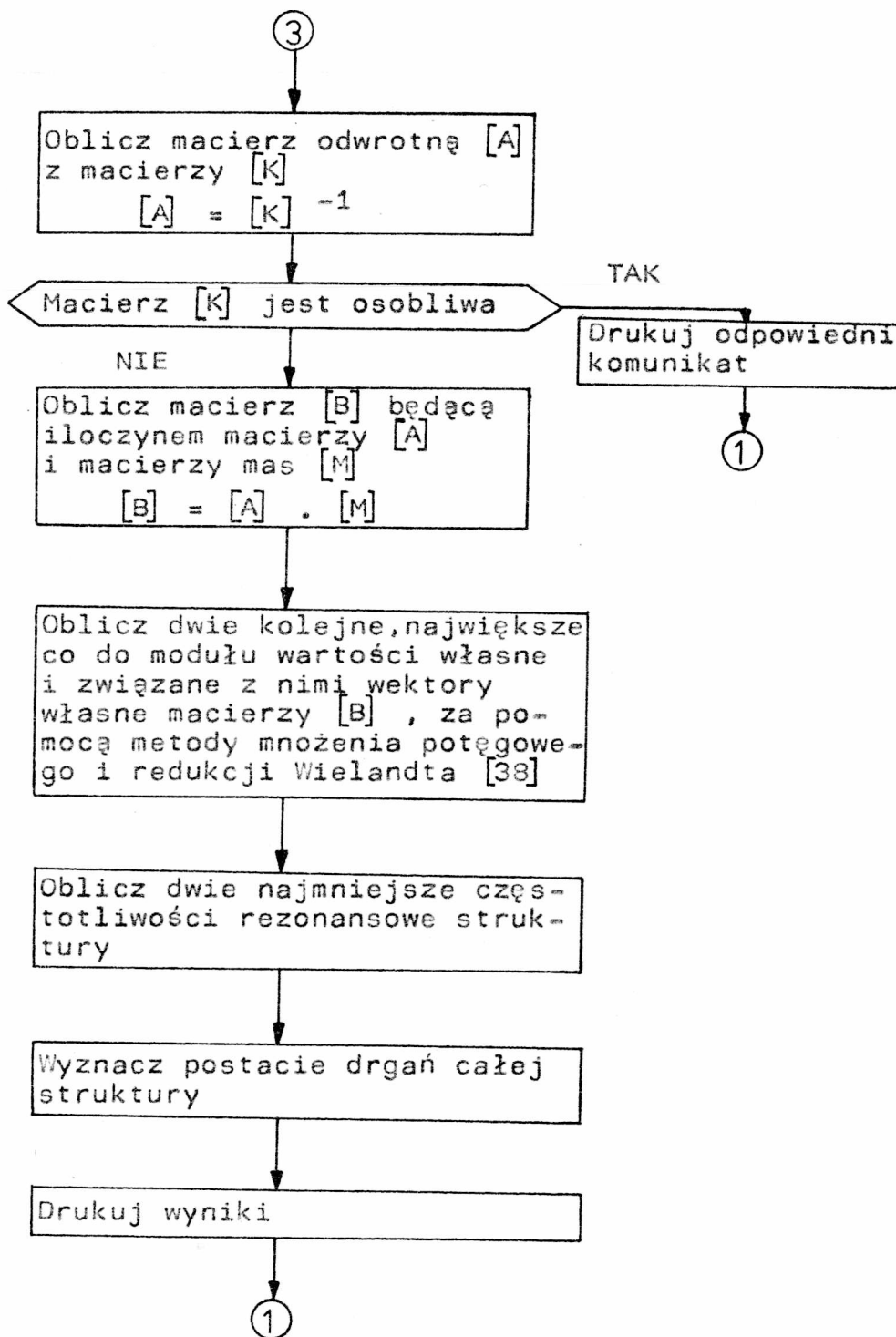
$$\det | [H] - \lambda [I] | = 0 \quad (4.58)$$

Wyznaczając maksymalną wartość λ otrzymujemy częstotliwość podstawową drgań układu; następne wartości λ określają kolejne pozostałe częstotliwości drgań własnych układu.

Do wyznaczenia wartości własnych z równania /4.57/ oraz związanych z nimi wektorów własnych zastosowano metodę mnożenia potęgowego ([38]). Obliczenia zostały wykonane w programie FEM2 wg następującego algorytmu postępowania:

ALGORYTM OBLICZEŃ





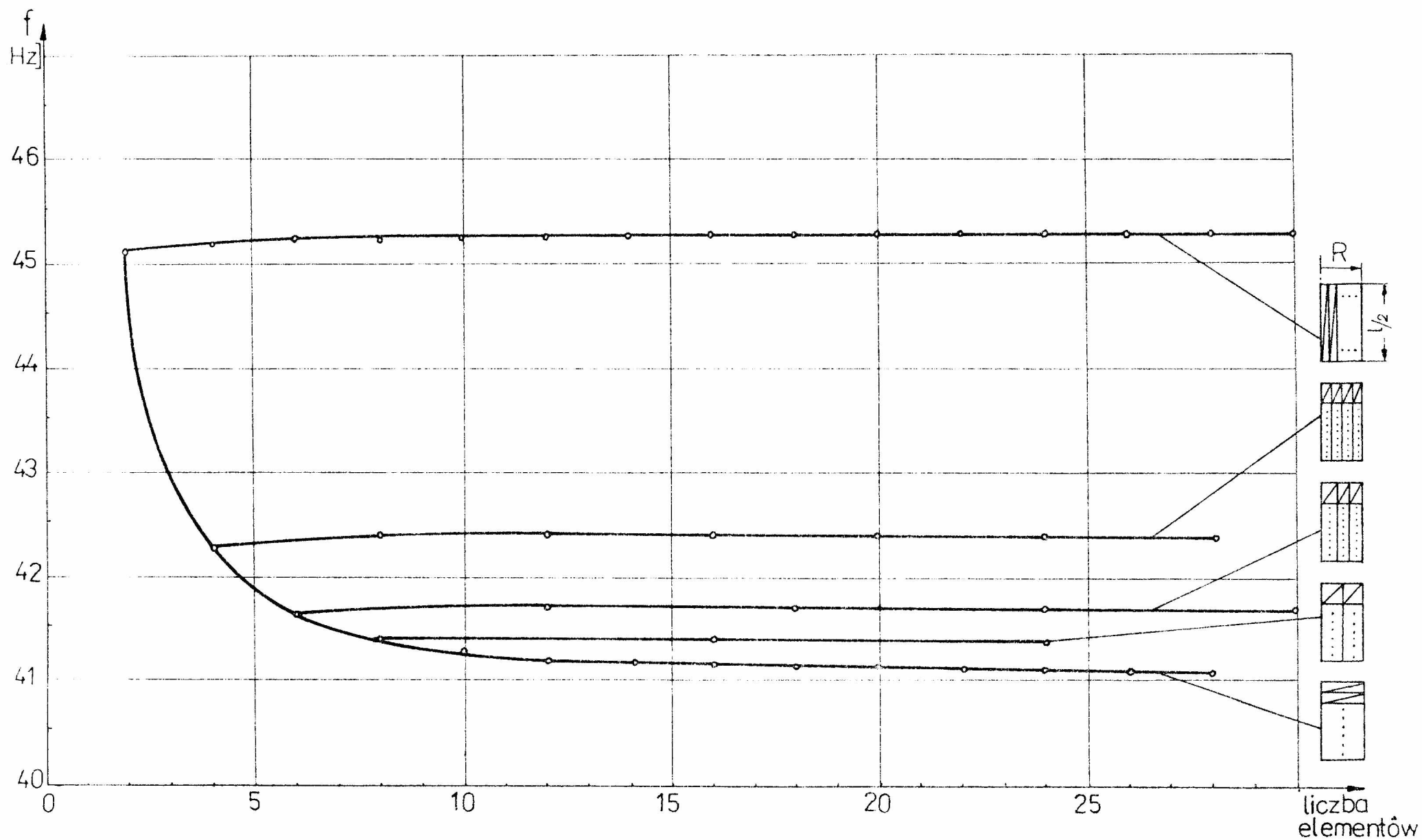
Tabulogram programu FEM2 przedstawiono w załączniku.

5. WYNIKI OBLICZEŃ

W pracy ograniczono się do wyznaczania dwóch pierwszych częstotliwości własnych rezonatora przy zadanych warunkach brzegowych. Dla każdej częstotliwości własnej program oblicza składowe wektora przemieszczeń, które są drukowane razem z daną częstotliwością. Składowe te są unormowane przy założeniu, że maksymalna wartość składowej "R" lub "Z" wynosi 1. Pozwala to na wyznaczenie szeregu interesujących zależności mówiących o wielkości i charakterze przemieszczeń w poszczególnych punktach układu, a także o rozkładzie przemieszczeń wzdłuż poszczególnych kierunków.

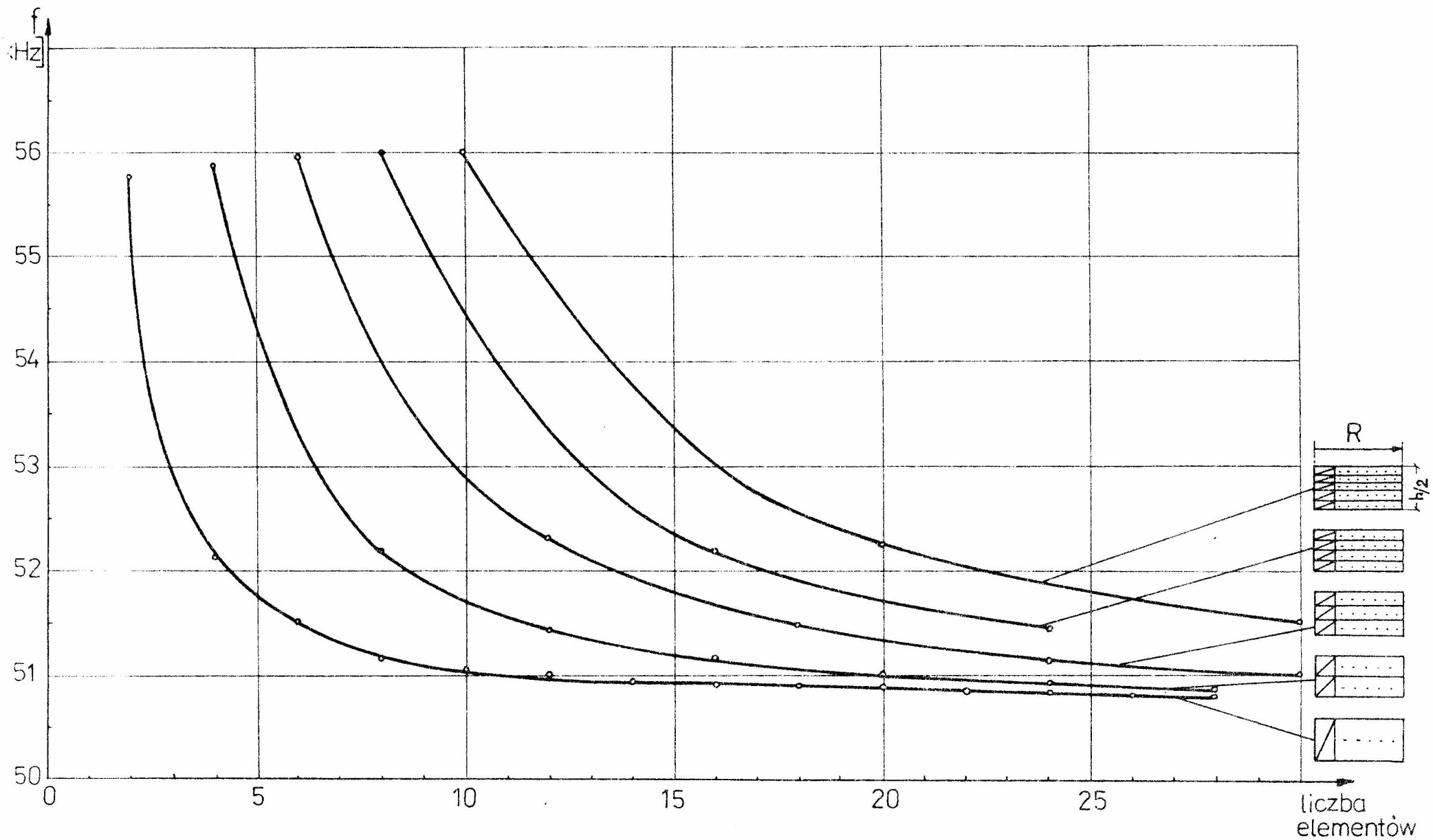
5.1. Sposób podziału na elementy

Jak wynika to z istoty metody zbieżność do wyniku poprawnego, a więc i wartość częstotliwości drgań własnych układu zależy od ilości elementów, na które został podzielony układ, a także od sposobu podziału na te elementy. Na rys. 15 przedstawiono wpływ sposobu podziału pręta stalowego o przekroju kołowym drgającego podłużnie na jego częstotliwość drgań własnych, natomiast na rys. 16 przedstawiono wpływ sposobu podziału dysku stalowego na jego częstotliwość drgań radialnych. Rozmiary pręta i dysku służące do obliczeń przedstawiają rys. 17 i rys. 18, na których zaznaczono ruchome i unieruchomione stopnie swobody. Ze względu na symetrię układu wystarczy rozpatrywać jedynie 1/4 pola przekroju poprzecznego pręta lub dysku.



Rys. 15. Wpływ sposobu podziału pręta stalowego na jego czystotliwość drgań podłużnych

Dane: $E = 0,206 \cdot 10^{12} [\text{Pa}]$, $\nu = 0,283$, $\rho = 7700 [\text{kg/m}^3]$, $R = 7,5 [\text{mm}]$, $l = 62,8 [\text{mm}]$

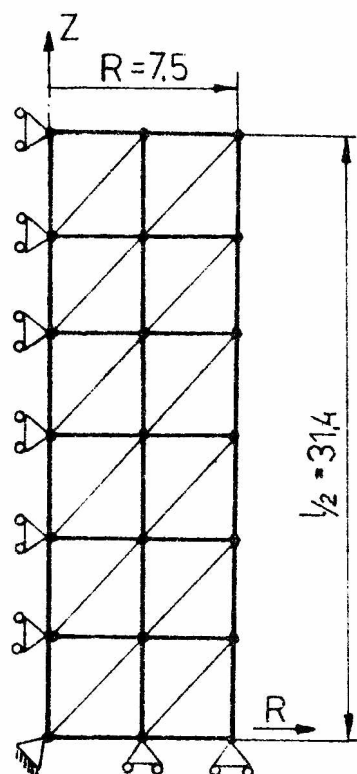


Rys. 16 Wpływ sposobu podziału dysku stalowego na jego częstotliwość drgań radialnych
Dane: $E = 0,206 \cdot 10^{12}$ [Pa] , $\nu = 0,283$, $\rho = 7700$ [kg/m³] , $R=34$ [mm] , $h=20$ [mm]

Z charakterystyki przedstawionej na rys. 15 wynika, że najbardziej właściwym podziałem dla pręta drgającego podłużnie jest podział poziomy /poziomo-skośny/. Przy stosunkowo niewielkiej ilości elementów /rzędu $15 \div 20$ / otrzymuje się najmniejsze częstotliwości drgań własnych pręta. Dalsze zwiększenie ilości elementów pozwala wprowadzić na uzyskanie nieco większej dokładności obliczeń, lecz jest nieekonomiczne ze względu na zajmowanie dużego obszaru pamięci komputera. Kombinacja podziału pionowego i poziomego może być przydatna w przypadku, gdy istnieje potrzeba wyznaczania rozkładu przemieszczeń wewnątrz rezonatora. Otrzymana charakterystyka wskazuje jednak, że podział pionowy nie powinien odbywać się kosztem podziału poziomego.

Z charakterystyki przedstawionej na rys. 16 wynika, że dla dysku drgającego radialnie najmniejszą częstotliwość drgań własnych otrzymuje się przy podziale pionowym /pionowo-skośnym/. Kombinacja podziału pionowego i poziomego pociąga za sobą konieczność zwiększenia liczby elementów dla uzyskania takiej samej dokładności obliczeń. Otrzymana rodzina charakterystyk prowadzi do wniosku, że dla drgań radialnych podział poziomy jest niewłaściwy; dopuszczalna jest jedynie kombinacja obydwu sposobów podziału.

Na rys. 17 i rys. 18 przedstawiono przykładowy sposób podziału pręta stalowego i dysku na elementy.



Liczba elementów - 24

Liczba węzłów - 21

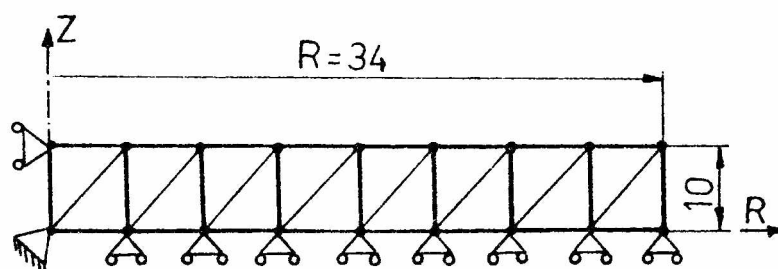
Liczba ruchomych stopni swobody dla
kier. R - 2

Liczba ruchomych stopni swobody dla
kier. Z - 6

Liczba ruchomych stopni swobody dla
kier. R i Z - 12

Liczba unieruchomionych stopni swobody - 1

Rys. 17. Przykładowy sposób podziału pręta na elementy.



Rys. 18. Przykładowy sposób podziału dysku na elementy.

Liczba elementów - 16

liczba węzłów - 18

Liczba ruchomych stopni swobody dla kier. R - 8

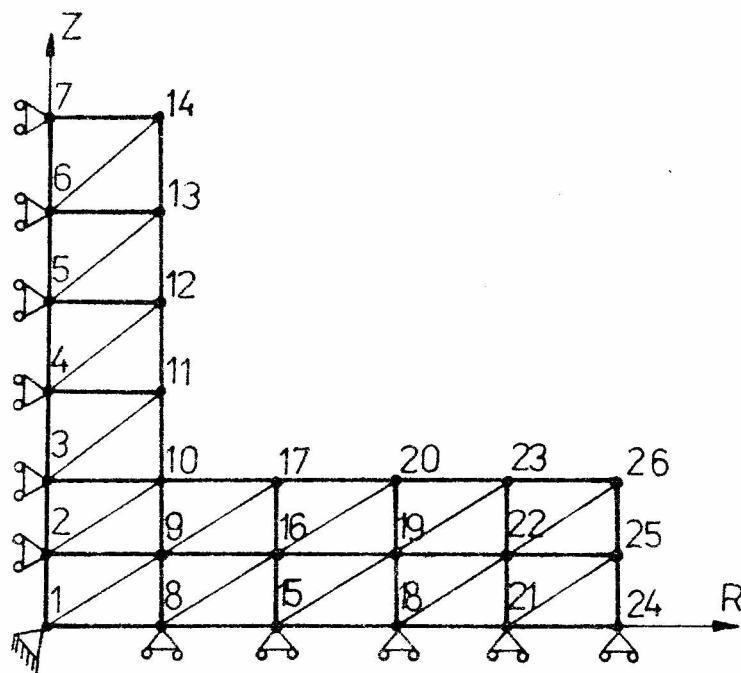
Liczba ruchomych stopni swobody dla kier. Z - 1

Liczba ruchomych stopni swobody dla kier. R i Z - 8

Liczba unieruchomionych stopni swobody - 1

5.2. Konwerter typu R-L jednorodny.

Opierając się na przedstawionych wyżej przesłankach przyjęto sposób podziału konwertera typu R-L na elementy, przedstawiony na rys. 19. Ze względu na symetrię układu przyjęto podział 1/4 powierzchni przekroju na 28 elementów. Zwiększenie liczby elementów nie przedstawia żadnych trudności formalnych; powoduje jedynie konieczność korzystania z komputera o większej pojemności obszaru pamięci.



Rys. 19. Sposób podziału konwertera typu R-L na elementy

Liczba elementów - 28

Liczba węzłów - 26

Liczba ruchomych stopni swobody dla kierunku R - 5

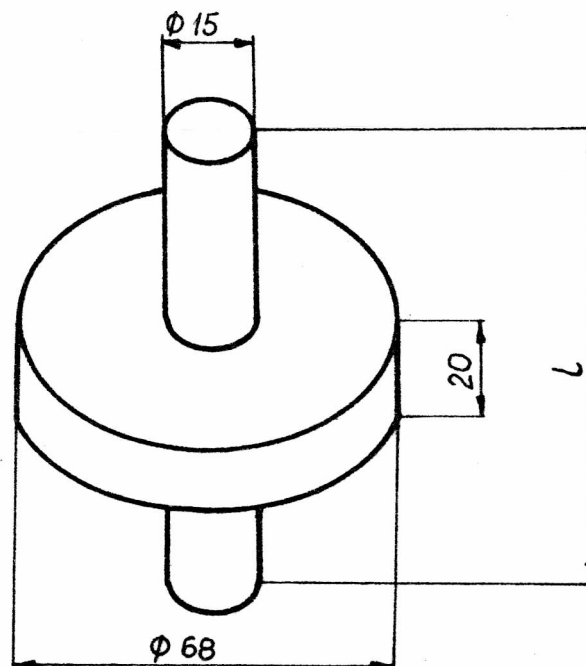
Liczba ruchomych stopni swobody dla kierunku Z - 5

Liczba ruchomych stopni swobody dla kierunku R i Z
- 14

Liczba unieruchomionych stopni swobody - 1

Na rys. 20 przedstawiono rozmiary rezonatora jednorodnego o konwersji typu R-L wykonanego ze stali, który był przedmiotem

eksperymentu numerycznego. Rozmiary tego rezonatora zostały tak dobrane, aby wyniki obliczeń można było porównać z wynikami doświadczalnymi uzyskanymi przez innych autorów ([17] , [20]).



Rys. 20. Rozmiary rezonatora jednorodnego o konwersji typu R-L stanowiące podstawę do analizy.

Do obliczeń przyjęto, że konwerter wykonany jest ze stali o następujących stałych materiałowych:

$$E = 0,206 \cdot 10^{12} \text{ [Pa]}$$

$$\nu = 0,283$$

$$\rho = 7700 \text{ [kg/m}^3\text{]}$$

Tabela 1 przedstawia przykład zapisu macierzy powiązań elementów, współrzędne węzłów i unieruchomione stopnie swobody oraz przykład obliczonych częstotliwości drgań własnych i odpowiadające im składowe wektora własnego.

Na rys. 21÷23 i rys. 30÷31 przedstawiono charakterystyki opisujące wpływ niektórych parametrów rezonatora na jego częstotliwości własne. Rys. 24÷29 przedstawiają zachowanie się konwertera przy różnych kryteriach zestrojenia.

Rys. 32÷35 obrazują rozkład przemieszczeń wzdłuż rezonatora drgań podłużnych i wzdłuż promienia rezonatora radialnego.

Analiza wyników przedstawiona zostanie w rozdziale 6.

TABELA 1

Przykładowy wydruk danych wejściowych i wyników obliczeń.

DANE OGÓLNE:

ELEMENTY WYŁĄCZNIE TRÓJKATNE /3 WIERZCHOŁKI/

LICZBA ELEMENTÓW W UKŁADZIE: 28

LICZBA WEZŁÓW W UKŁADZIE: 26

LICZBA RÓŻNYCH MATERIAŁÓW: 1

WŁASNOŚCI MECHANICZNE MATERIAŁÓW W UKŁADZIE:

NR MAT:1, E=0.2060E+12 N/M2, WSP.POISSONA:0.283,GEST.:7700.0 KG/M3

MACIERZ POWIĄZAŃ, NUMERY MATERIAŁÓW

NR ELEMENTU: 1	I = 1	J = 8	K = 9	MATERIAŁ: 1
NR ELEMENTU: 2	I = 1	J = 9	K = 2	MATERIAŁ: 1
NR ELEMENTU: 3	I = 2	J = 9	K =10	MATERIAŁ: 1
NR ELEMENTU: 4	I = 2	J =10	K = 3	MATERIAŁ: 1
NR ELEMENTU: 5	I = 3	J =10	K =11	MATERIAŁ: 1
NR ELEMENTU: 6	I = 3	J =11	K = 4	MATERIAŁ: 1
NR ELEMENTU: 7	I = 4	J =11	K =12	MATERIAŁ: 1
NR ELEMENTU: 8	I = 4	J =12	K = 5	MATERIAŁ: 1
NR ELEMENTU: 9	I = 5	J =12	K =13	MATERIAŁ: 1
NR ELEMENTU:10	I = 5	J =13	K = 6	MATERIAŁ: 1
NR ELEMENTU:11	I = 6	J =13	K =14	MATERIAŁ: 1
NR ELEMENTU:12	I = 6	J =14	K = 7	MATERIAŁ: 1
NR ELEMENTU:13	I = 8	J =15	K =16	MATERIAŁ: 1
NR ELEMENTU:14	I = 8	J =16	K = 9	MATERIAŁ: 1
NR ELEMENTU:15	I = 9	J =16	K =17	MATERIAŁ: 1
NR ELEMENTU:16	I = 9	J =17	K =10	MATERIAŁ: 1
NR ELEMENTU:17	I =15	J =18	K =19	MATERIAŁ: 1
NR ELEMENTU:18	I =15	J =19	K =16	MATERIAŁ: 1
NR ELEMENTU:19	I =16	J =19	K =20	MATERIAŁ: 1
NR ELEMENTU:20	I =16	J =20	K =17	MATERIAŁ: 1
NR ELEMENTU:21	I =18	J =21	K =22	MATERIAŁ: 1
NR ELEMENTU:22	I =18	J =22	K =19	MATERIAŁ: 1
NR ELEMENTU:23	I =19	J =22	K =23	MATERIAŁ: 1
NR ELEMENTU:24	I =19	J =23	K =20	MATERIAŁ: 1
NR ELEMENTU:25	I =21	J =24	K =25	MATERIAŁ: 1
NR ELEMENTU:26	I =21	J =25	K =22	MATERIAŁ: 1
NR ELEMENTU:27	I =22	J =25	K =26	MATERIAŁ: 1
NR ELEMENTU:28	I =22	J =26	K =23	MATERIAŁ: 1

TABELA 1 c.d.

WSPÓŁRZEDNE KOLEJNYCH WEZŁÓW I UNIERUCHOMIONE STOPNIE SWOBODY:

NR WEZŁA:	1	R = 0.000 MM	Z = 0.000 MM	NSS = 11
NR WEZŁA:	2	R = 0.000 MM	Z = 5.000 MM	NSS = 10
NR WEZŁA:	3	R = 0.000 MM	Z = 10.000 MM	NSS = 10
NR WEZŁA:	4	R = 0.000 MM	Z = 15.350 MM	NSS = 10
NR WEZŁA:	5	R = 0.000 MM	Z = 20.700 MM	NSS = 10
NR WEZŁA:	6	R = 0.000 MM	Z = 26.050 MM	NSS = 10
NR WEZŁA:	7	R = 0.000 MM	Z = 31.400 MM	NSS = 10
NR WEZŁA:	8	R = 7.500 MM	Z = 0.000 MM	NSS = 01
NR WEZŁA:	9	R = 7.500 MM	Z = 5.000 MM	NSS = 00
NR WEZŁA:	10	R = 7.500 MM	Z = 10.000 MM	NSS = 00
NR WEZŁA:	11	R = 7.500 MM	Z = 15.350 MM	NSS = 00
NR WEZŁA:	12	R = 7.500 MM	Z = 20.700 MM	NSS = 00
NR WEZŁA:	13	R = 7.500 MM	Z = 26.050 MM	NSS = 00
NR WEZŁA:	14	R = 7.500 MM	Z = 31.400 MM	NSS = 00
NR WEZŁA:	15	R = 14.125 MM	Z = 0.000 MM	NSS = 01
NR WEZŁA:	16	R = 14.125 MM	Z = 5.000 MM	NSS = 00
NR WEZŁA:	17	R = 14.125 MM	Z = 10.000 MM	NSS = 00
NR WEZŁA:	18	R = 20.750 MM	Z = 0.000 MM	NSS = 01
NR WEZŁA:	19	R = 20.750 MM	Z = 5.000 MM	NSS = 00
NR WEZŁA:	20	R = 20.750 MM	Z = 10.000 MM	NSS = 00
NR WEZŁA:	21	R = 27.375 MM	Z = 0.000 MM	NSS = 01
NR WEZŁA:	22	R = 27.375 MM	Z = 5.000 MM	NSS = 00
NR WEZŁA:	23	R = 27.375 MM	Z = 10.000 MM	NSS = 00
NR WEZŁA:	24	R = 34.000 MM	Z = 0.000 MM	NSS = 01
NR WEZŁA:	25	R = 34.000 MM	Z = 5.000 MM	NSS = 00
NR WEZŁA:	26	R = 34.000 MM	Z = 10.000 MM	NSS = 00

TABELA 1 c.d.

CZESTOTLIWOŚĆ REZONANSOWA: 47.441 KHZ

WEKTOR WŁASNY:

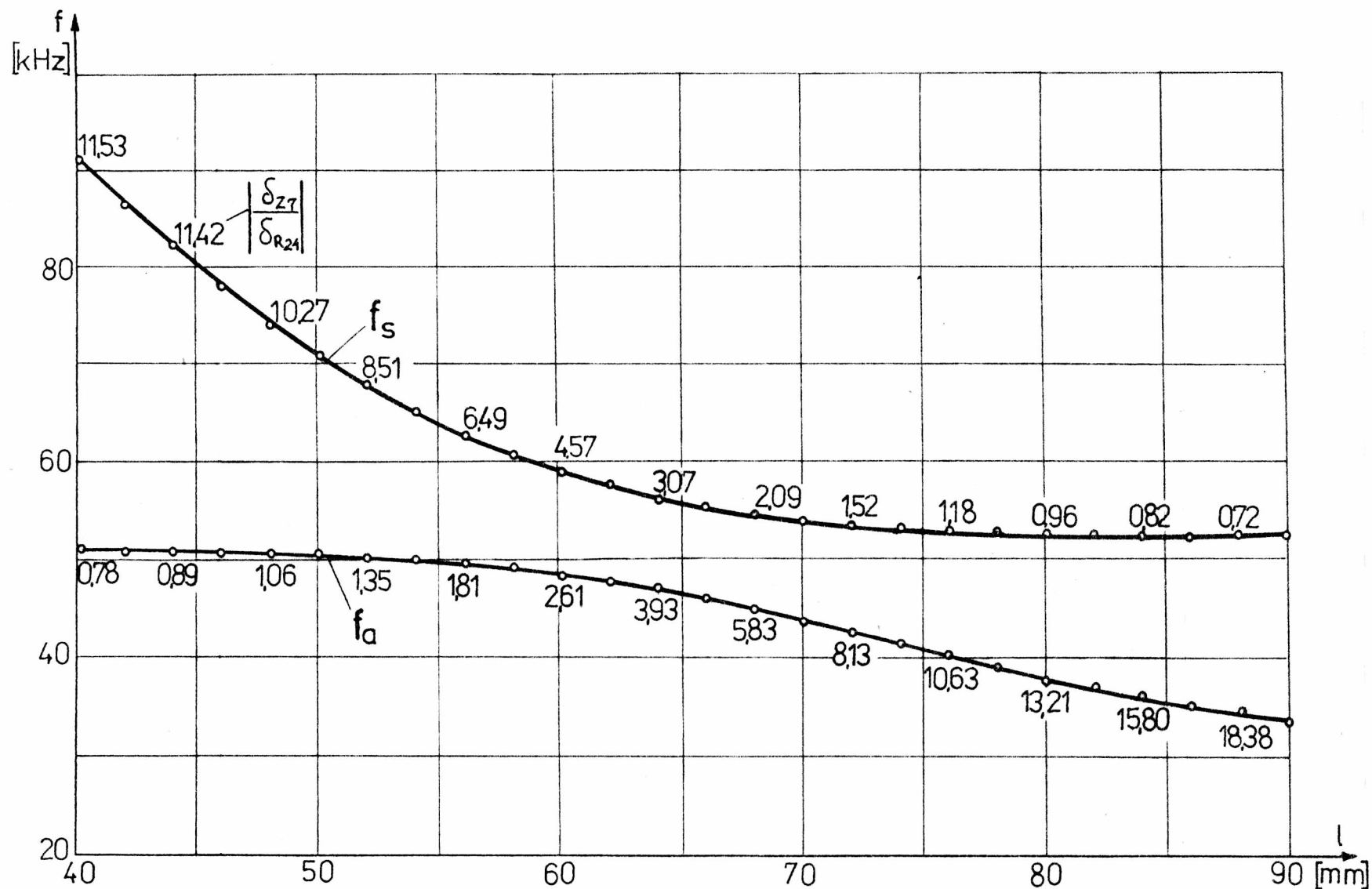
NR WEZŁA	R	Z
1	0.00000	0.00000
2	0.00000	0.22682
3	0.00000	0.42704
4	0.00000	0.65144
5	0.00000	0.83841
6	0.00000	0.95200
7	0.00000	0.98199
8	-0.16327	0.00000
9	-0.15080	0.15031
10	-0.10453	0.29734
11	-0.08760	0.57853
12	-0.06564	0.79585
13	-0.03515	0.93909
14	-0.01610	1.00000
15	-0.22993	0.00000
16	-0.22458	0.06592
17	-0.19215	0.12297
18	-0.27035	0.00000
19	-0.26572	0.03946
20	-0.24538	0.07628
21	-0.28775	0.00000
22	-0.28561	0.02576
23	-0.27421	0.05057
24	-0.28259	0.00000
25	-0.28387	0.01891
26	-0.27814	0.03710

TABELA 1 c.d.

CZESTOTLIWOŚĆ REZONANSOWA: 56.944 KHZ

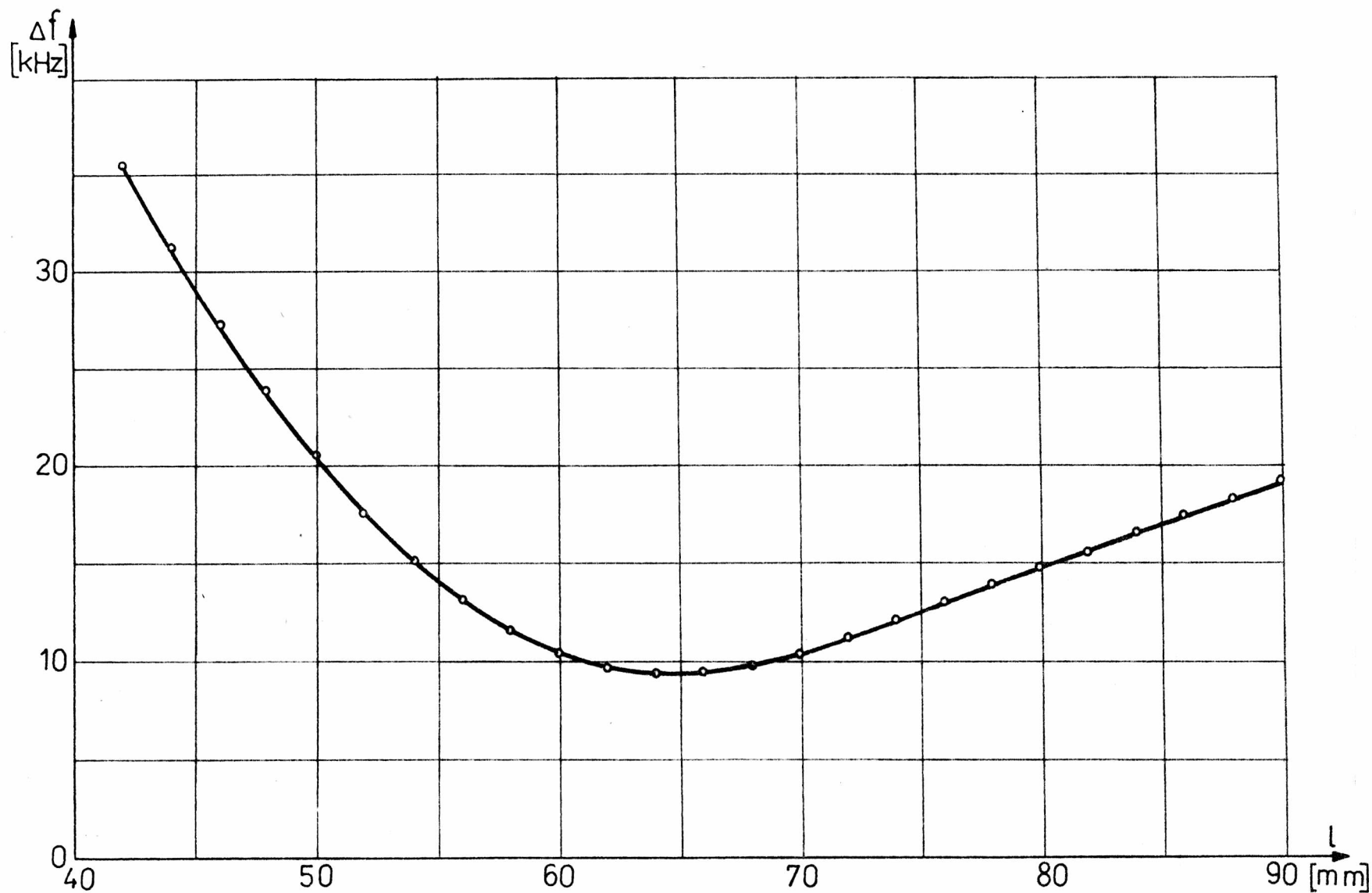
WEKTOR WŁASNY:

NR WEZŁA	R	Z
1	0.00000	0.00000
2	0.00000	0.09705
3	0.00000	0.22488
4	0.00000	0.51394
5	0.00000	0.77171
6	0.00000	0.93245
7	0.00000	0.97523
8	0.04584	0.00000
9	0.04401	0.05267
10	0.02091	0.11722
11	-0.11017	0.41851
12	-0.09191	0.71136
13	-0.05048	0.91230
14	-0.02319	1.00000
15	0.14813	0.00000
16	0.13702	-0.03354
17	0.13628	-0.06850
18	0.23212	0.00000
19	0.22524	-0.04194
20	0.21855	-0.08336
21	0.27692	0.00000
22	0.27555	-0.03212
23	0.26959	-0.06335
24	0.28163	0.00000
25	0.28503	-0.02611
26	0.28438	-0.05000



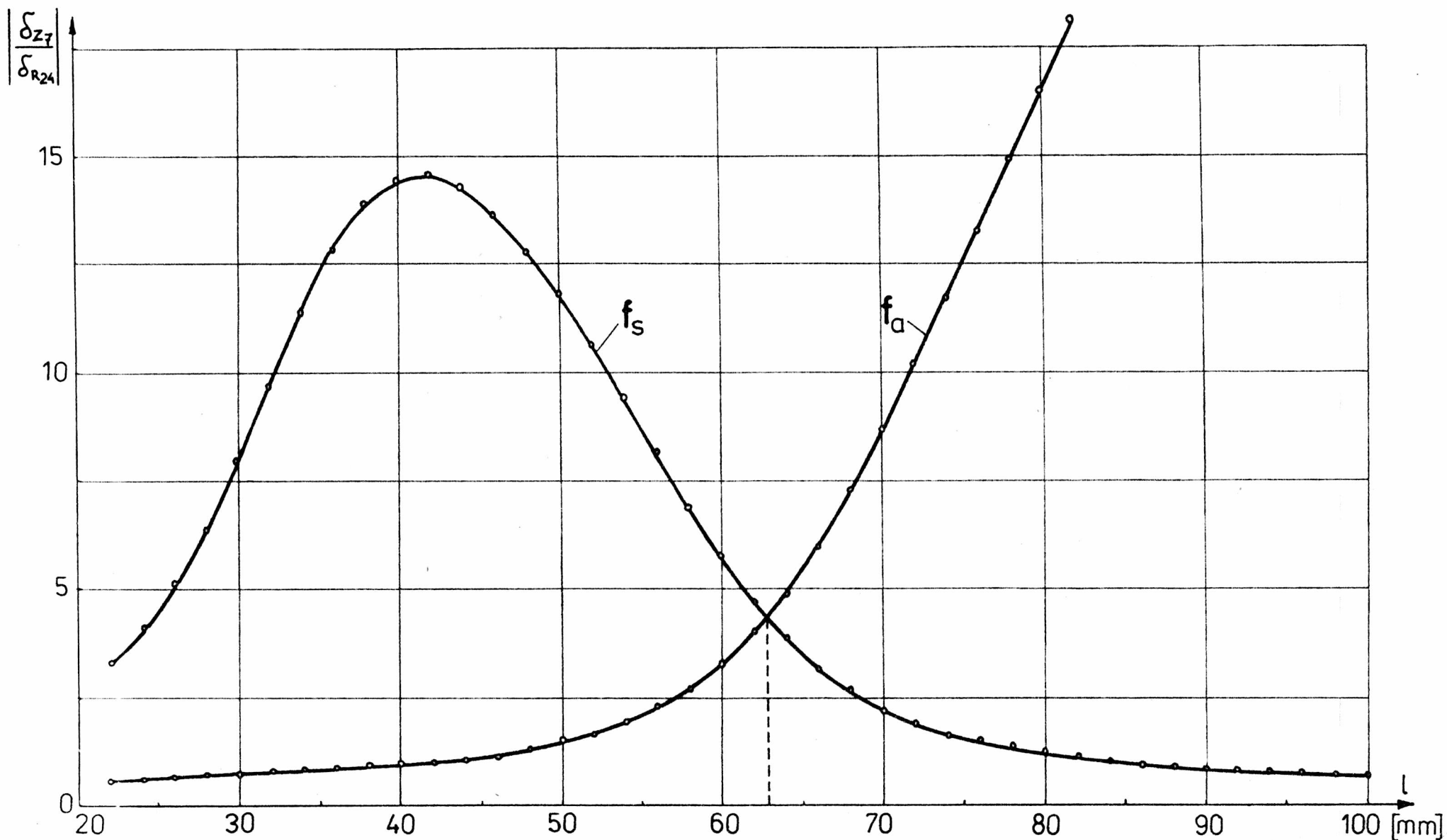
Rys. 21. Zależność częstotliwości drgań własnych rezonatora jednorodnego o konwersji kierunku drgań typu R-L od długości rezonatora prętowego.

Dane: $E = 0,206 \cdot 10^{12}$ [Pa] , $\nu = 0,283$, $\rho = 7700$ [kg/m³] , ϕ pręta = 15 [mm] , $\phi_{\text{dysku}} = 68$ [mm] ,
 $h_{\text{dysku}} = 20$ [mm]



Rys. 22. Zależność różnicy częstotliwości modu współfazowego i przeciwfazowego drgań rezonatora jednorodnego o konwersji typu R-L od długości rezonatora prętowego.

Dane: $E = 0,206 \cdot 10^{12}$ [Pa] , $\nu = 0,283$, $\rho = 7700$ [kg/m³] , $\phi_{\text{pręta}} = 15$ [mm] , $\phi_{\text{dysku}} = 68$ [mm]
 $h_{\text{dysku}} = 20$ [mm].

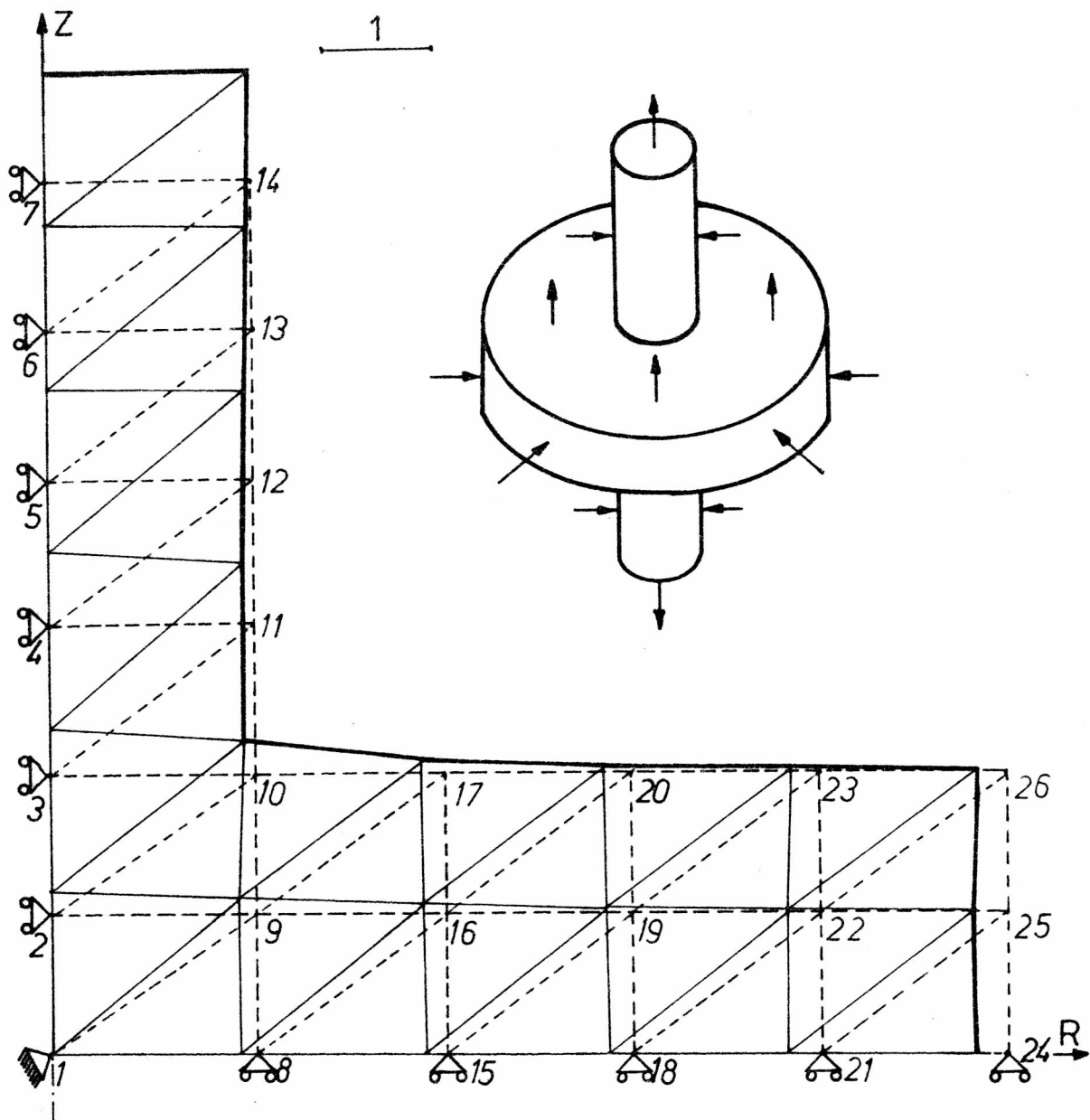


rys.23. Moduł stosunku amplitudy przesunięcia powierzchni czołowej rezonatora prętowego i rezonatora dyskowego w zależności od długości rezonatora prętowego.

Dane: $E=0,206 \cdot 10^{12}$ [Pa], $\nu=0,283$, $\rho=7700$ [kg/m³], $\phi_{pręta}=15$ [mm], $\phi_{dysku}=68$ [mm], $h_{dysku}=20$ [mm]

Mod przeciwfazowy

$f_a = 47.441 \text{ Hz}$



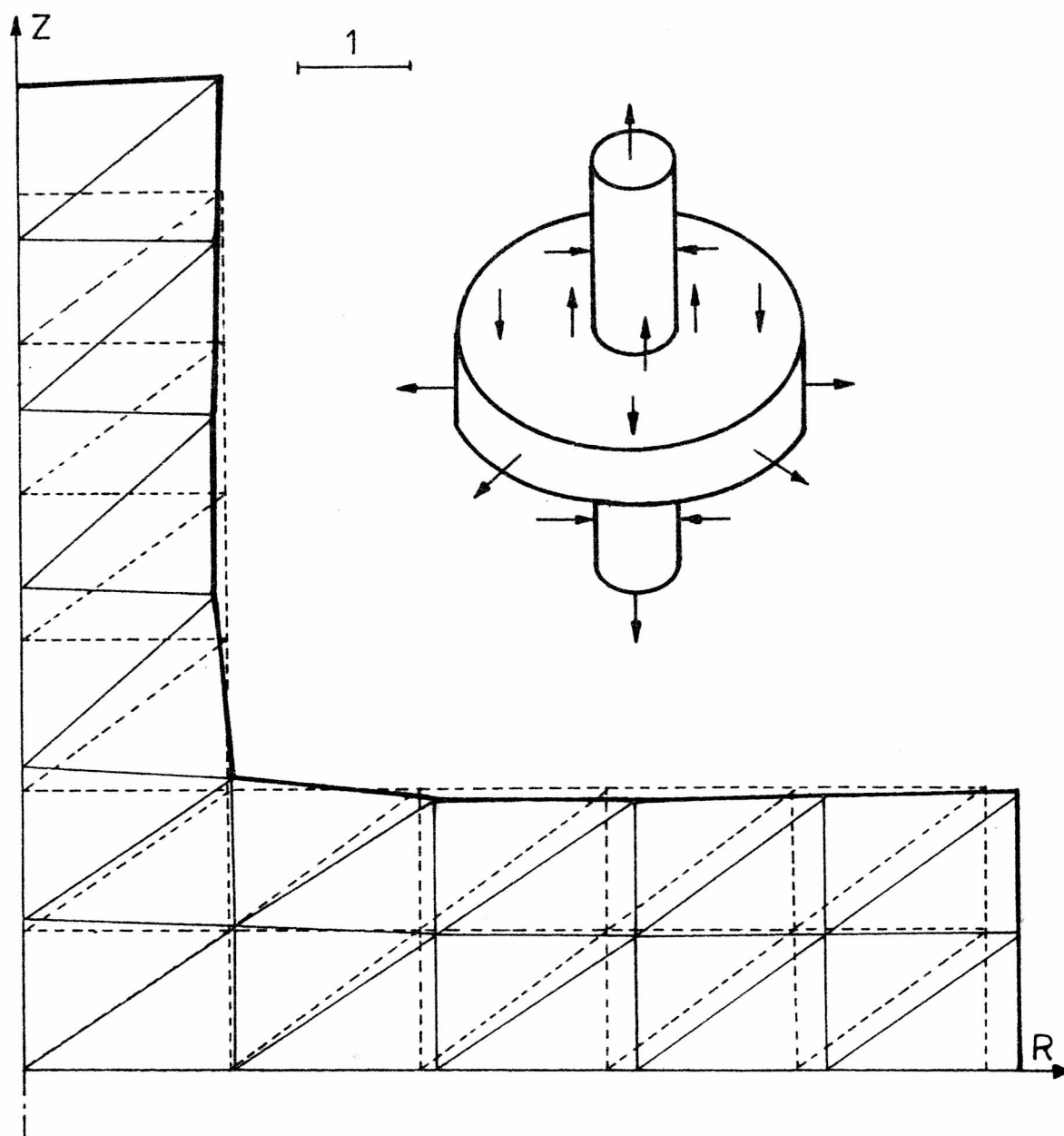
Rys. 24. Postać drgań konwertera jednorodnego typu R=L

dla modu przeciwfazowego drgań dla przypadku:

$$\left| \frac{\delta_{z7}}{\delta_{R24}} \right|_{f_a} \approx \left| \frac{\delta_{z7}}{\delta_{R24}} \right|_{f_s}$$

Mod współfazowy

$f_s = 56.944 \text{ Hz}$



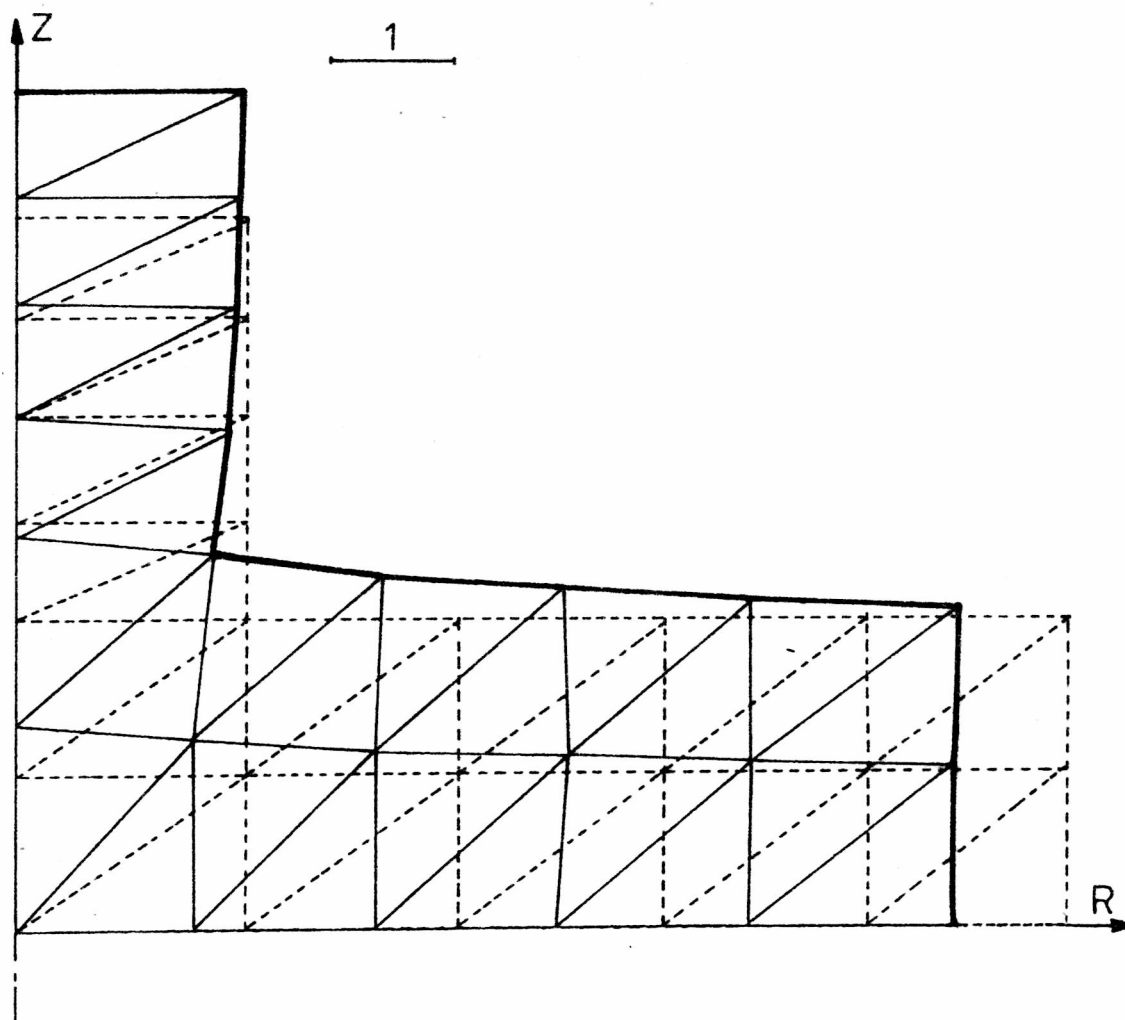
Rys. 25. Postać drgań konwertera jednorodnego typu R-L

dla modu współfazowego drgań dla przypadku:

$$\left| \frac{\delta_{Z1}}{\delta_{R24}} \right|_{f_a} \approx \left| \frac{\delta_{Z1}}{\delta_{R24}} \right|_{f_s}$$

Mod przeciwfazowy

$f_a = 50.439 \text{ Hz}$

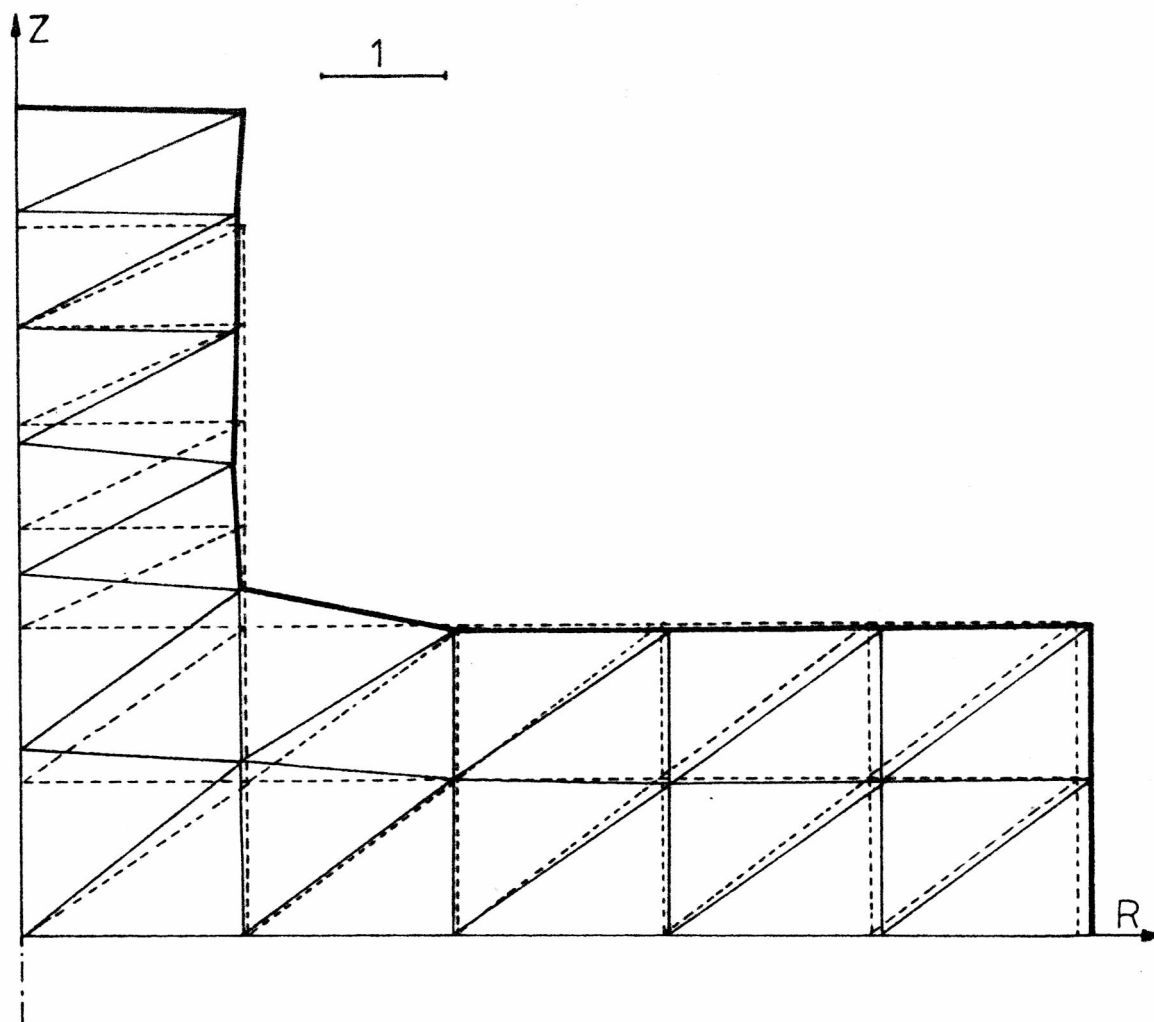


Rys. 26. Postać drgań konwertera jednorodnego typu R-L dla modu przeciwfazowego drgań dla przypadku:

$$\left| \frac{\delta_{Z7}}{\delta_{\max}} \right|_{f_a} \approx \left| \frac{\delta_{R24}}{\delta_{\max}} \right|_{f_a}$$

Mod współfazowy

$$f_s = 74.290 \text{ Hz}$$

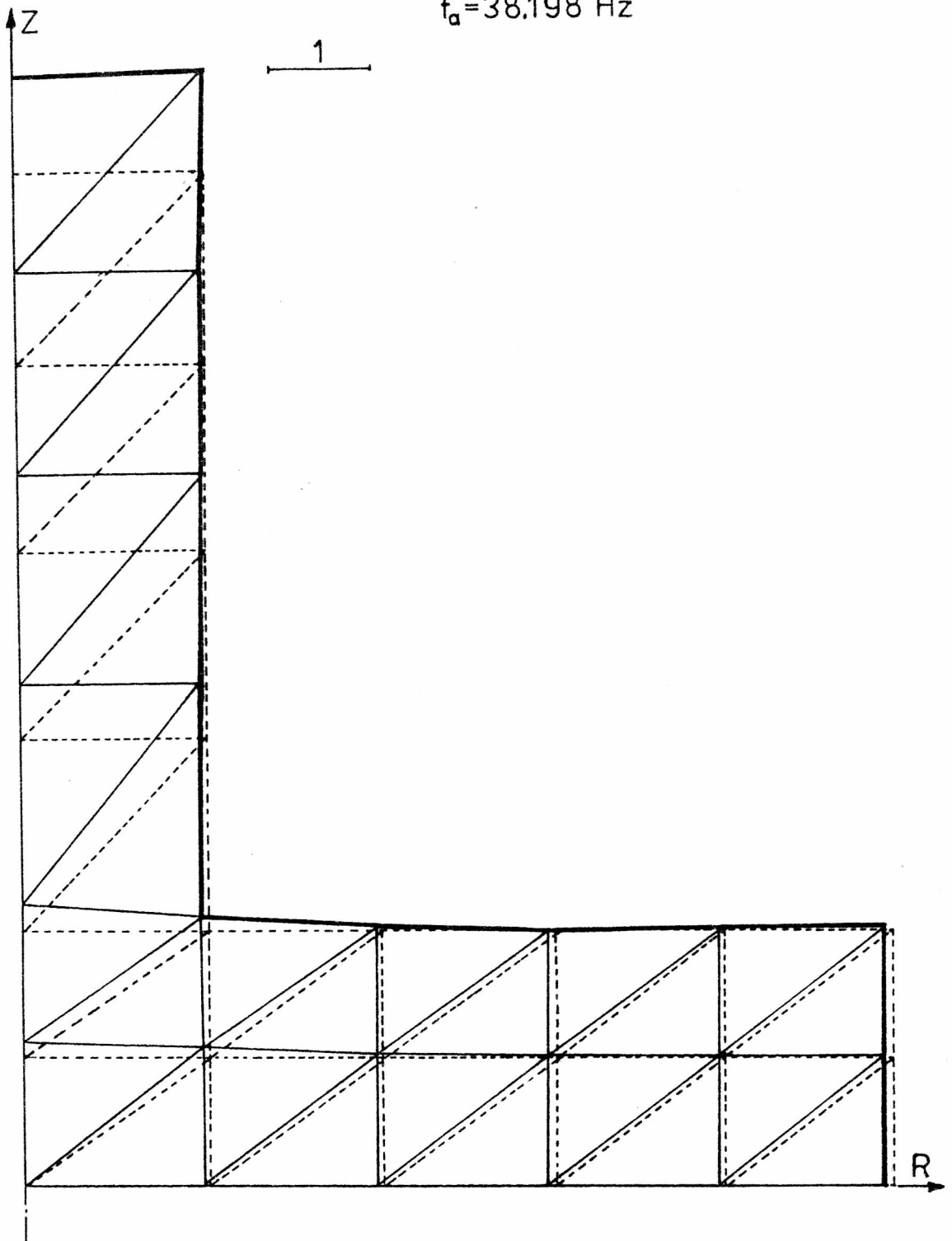


Rys. 27. Postać drgań konwertera jednorodnego typu R-L
dla modu współfazowego drgań dla przypadku:

$$\left| \frac{\delta_{Z7}}{\delta_{\max}} \right|_{f_a} \approx \left| \frac{\delta_{R24}}{\delta_{\max}} \right|_{f_a}$$

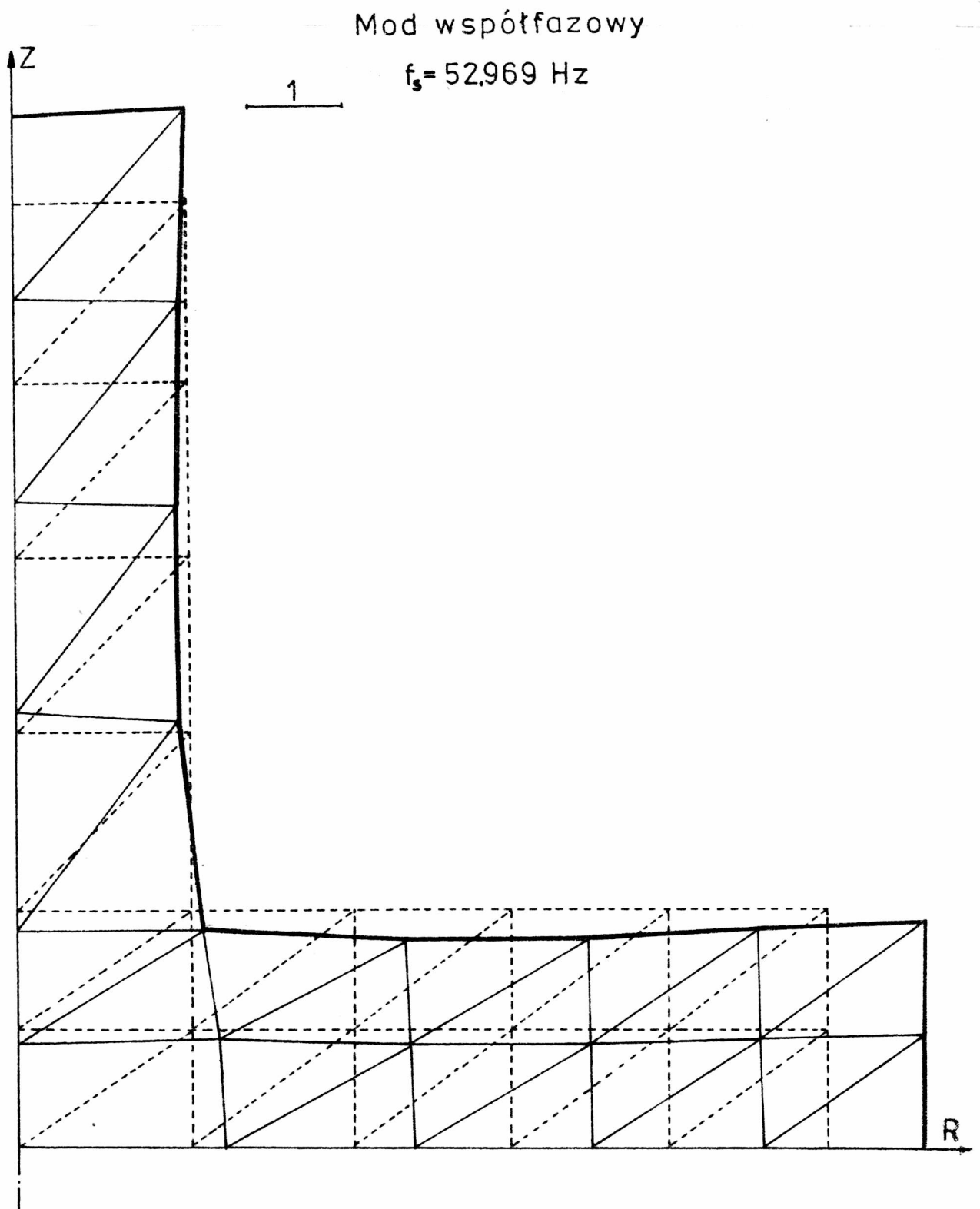
Mod przeciwfazowy

$f_a = 38.198 \text{ Hz}$



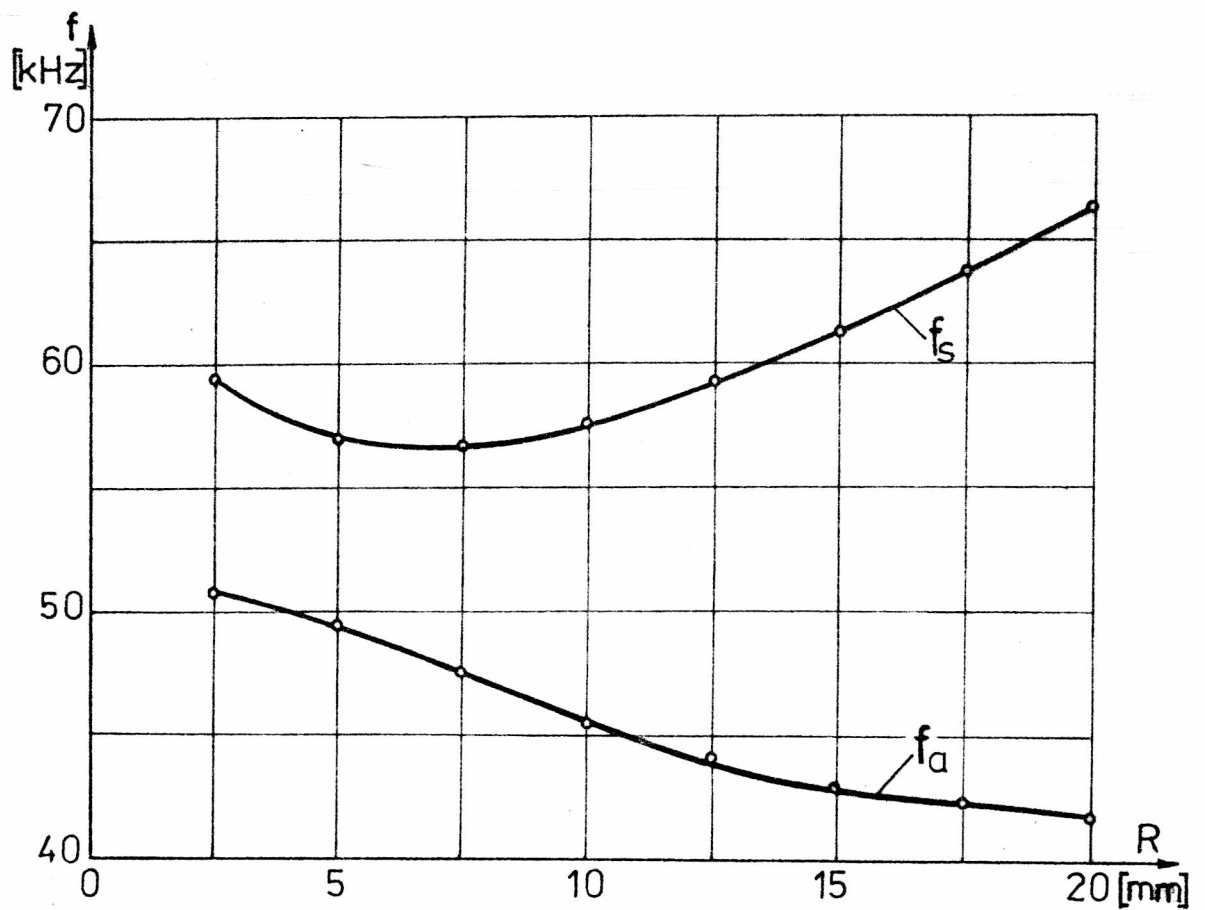
Rys. 28. Postać drgań konwertera jednorodnego typu R-L dla modu przeciwfazowego drgań dla przypadku:

$$\left| \frac{\delta_{Z7}}{\delta_{\max}} \right|_{f_s} \approx \left| \frac{\delta_{R24}}{\delta_{\max}} \right|_{f_s}$$



Rys. 29. Postać drgań konwertera jednorodnego typu R-L dla modu współfazowego drgań dla przypadku:

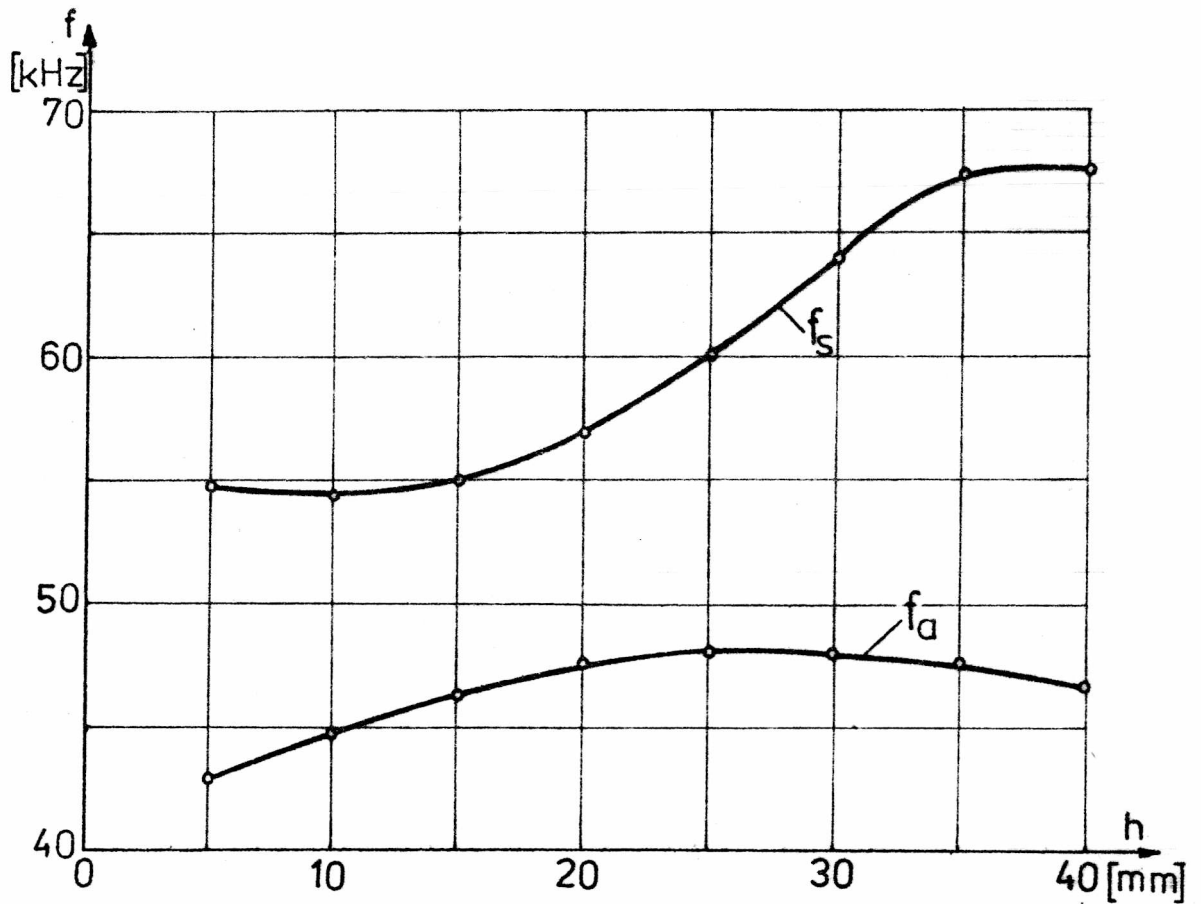
$$\left| \frac{\delta_{Z1}}{\delta_{\max}} \right|_{f_s} \approx \left| \frac{\delta_{R24}}{\delta_{\max}} \right|_{f_s}$$



Rys. 30. Zależność częstotliwości drgań własnych rezonatora jednorodnego o konwersji typu R-L od średnicy rezonatora prętowego.

Dane: $E = 0,206 \cdot 10^{12}$ [Pa] , $\nu = 0,283$, $\rho = 7700$ [kg/m³]

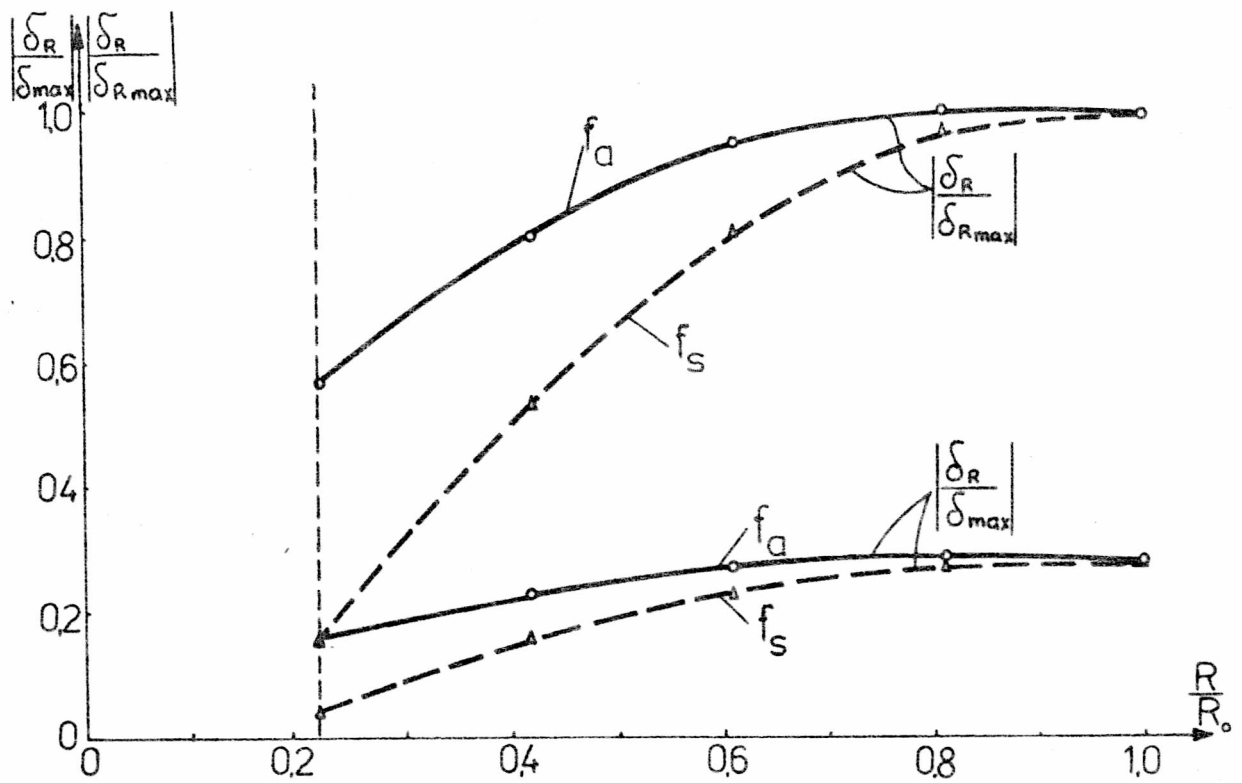
$\phi_{\text{dysku}} = 68$ [mm] , $h_{\text{dysku}} = 20$ [mm] , $l_{\text{pręta}} = 62,8$ [mm]



Rys. 31. Zależność częstotliwości drgań własnych rezonatora jednorodnego o konwersji typu R-L od grubości rezonatora dyskowego.

Dane: $E = 0,206 \cdot 10^{12}$ [Pa], $\nu = 0,283$, $\rho = 7700$ [kg/m³]

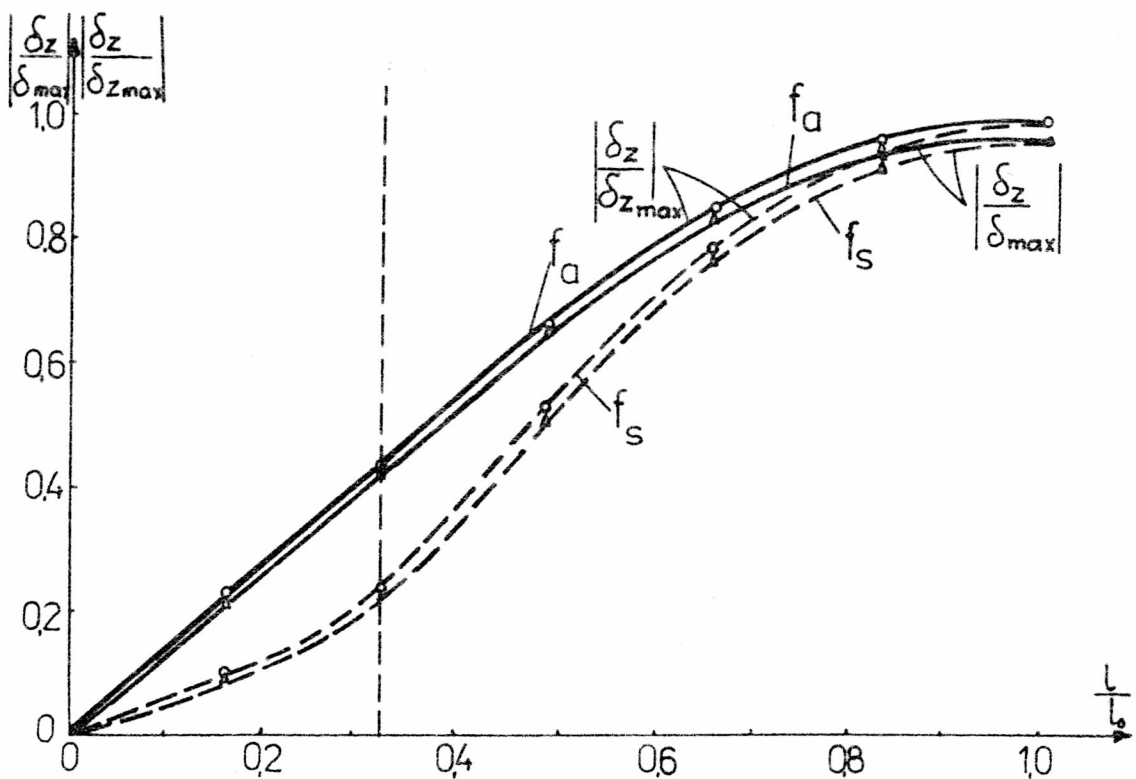
$\phi_{\text{dysku}} = 68$ [mm], $\phi_{\text{pręta}} = 15$ [mm], $l_{\text{pręta}} = 62,8$ [mm]



Rys. 32. Rozkład przemieszczeń wzdłuż promienia rezonatora

dyskowego dla konwertera jednorodnego typu R-L

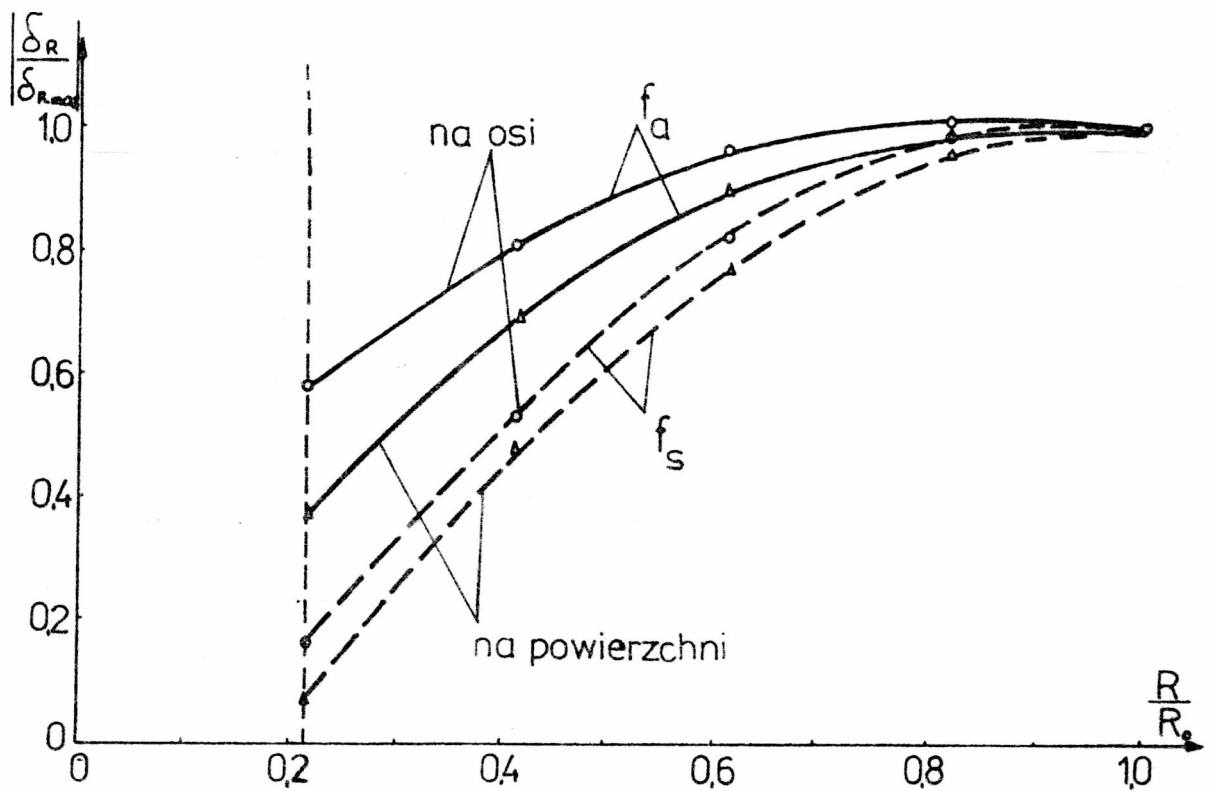
/dla przypadku: $\left| \frac{\delta_{z7}}{\delta_{R24}} \right|_{f_a} \approx \left| \frac{\delta_{z7}}{\delta_{R24}} \right|_{f_s} /$.



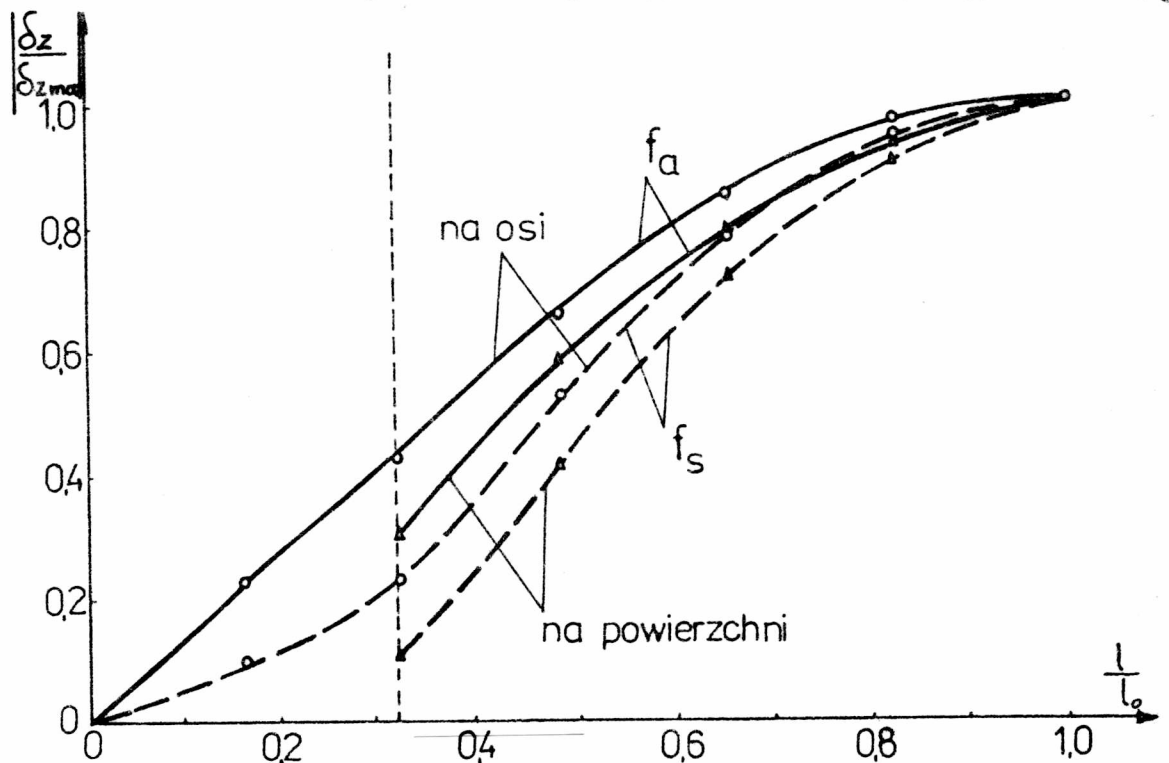
Rys. 33. Rozkład przemieszczeń wzdłuż osi rezonatora prętowego dla konwertera jednorodnego typu R-L /dla

przypadku: $\left| \frac{\delta_{z7}}{\delta_{R24}} \right|_{f_a} \approx \left| \frac{\delta_{z7}}{\delta_{R24}} \right|_{f_s} /$.

$$\left| \frac{\delta_{z7}}{\delta_{R24}} \right|_{f_a} \approx \left| \frac{\delta_{z7}}{\delta_{R24}} \right|_{f_s} /$$



Rys. 34. Rozkład przemieszczeń wzdłuż promienia rezonatora dyskowego na powierzchni i na osi symetrii dla konwertera jednorodnego typu R-L /dla przypadku: $\left| \frac{\delta_{z_7}}{\delta_{R_{24}}} \right|_{f_a} \approx \left| \frac{\delta_{z_7}}{\delta_{R_{24}}} \right|_{f_s}$

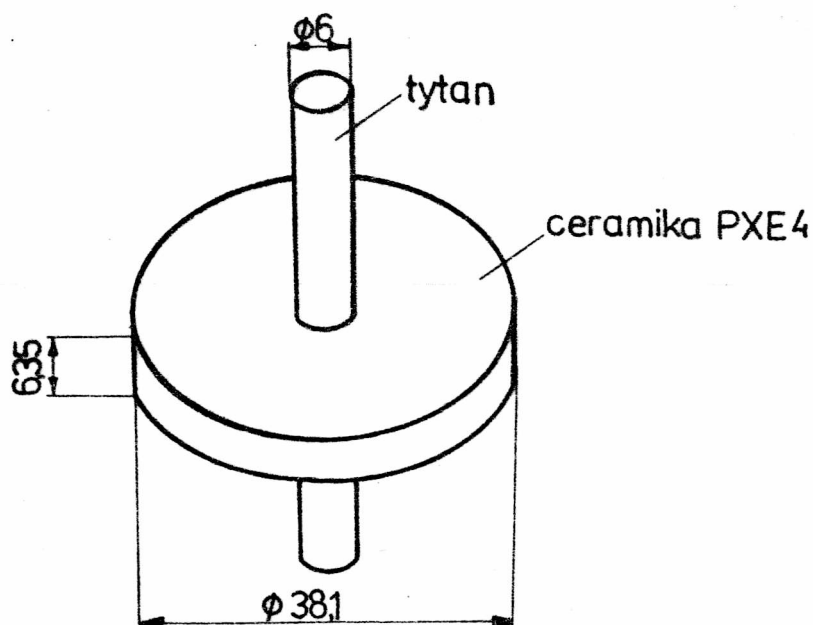


Rys. 35. Rozkład przemieszczeń wzdłuż osi i na powierzchni rezonatora prętowego dla konwertera jednorodnego typu R-L /dla przypadku: $\left| \frac{\delta_{z_7}}{\delta_{R_{24}}} \right|_{f_a} \approx \left| \frac{\delta_{z_7}}{\delta_{R_{24}}} \right|_{f_s}$

5.3. Konwerter typu R-L niejednorodny

Metoda elementów skończonych umożliwia również analizę struktur składających się z kilku elementów wykonanych z różnych materiałów.

Na rys. 36 przedstawiono konwerter niejednorodny typu R-L, który jest przykładem takiej struktury i który był przedmiotem analizy.



Rys. 36. Konwerter typu R-L niejednorodny.

Konwerter ten został zbadany eksperymentalnie przez autora i opisany w pracach [9], [10]. Znalazł on zastosowanie praktyczne/[3]/, Rezonator drgań radialnych stanowi w nim dysk piezoelektryczny z ceramiki PXE-4. Rezonatorem drgań podłużnych jest pręt tytanowy osadzony sztywno w ceramice. Dysk piezoelektryczny i pręt tytanowy zostały w nim podzielone na elementy w taki sam sposób jak dla konwertera jednorodnego. Jeśli zaciski elementu piezoelektrycznego są zwarte i pominięte są siły zewnętrzne równanie ruchu będzie dane zależnością /4.54// patrz dodatek A/.

Do obliczeń przyjęto następujące stałe materiałowe tytanu i ceramiki PXE-4:

$$\text{Ti} : E = 0,1157 \cdot 10^{12} \quad [\text{Pa}]$$

$$\nu = 0,321$$

$$\rho = 4\,580 \quad [\text{kg/m}^3]$$

$$\text{PXE-4} : E = 0,85 \cdot 10^{11} \quad [\text{Pa}]$$

$$\nu = 0,3$$

$$\rho = 7\,500 \quad [\text{kg/m}^3]$$

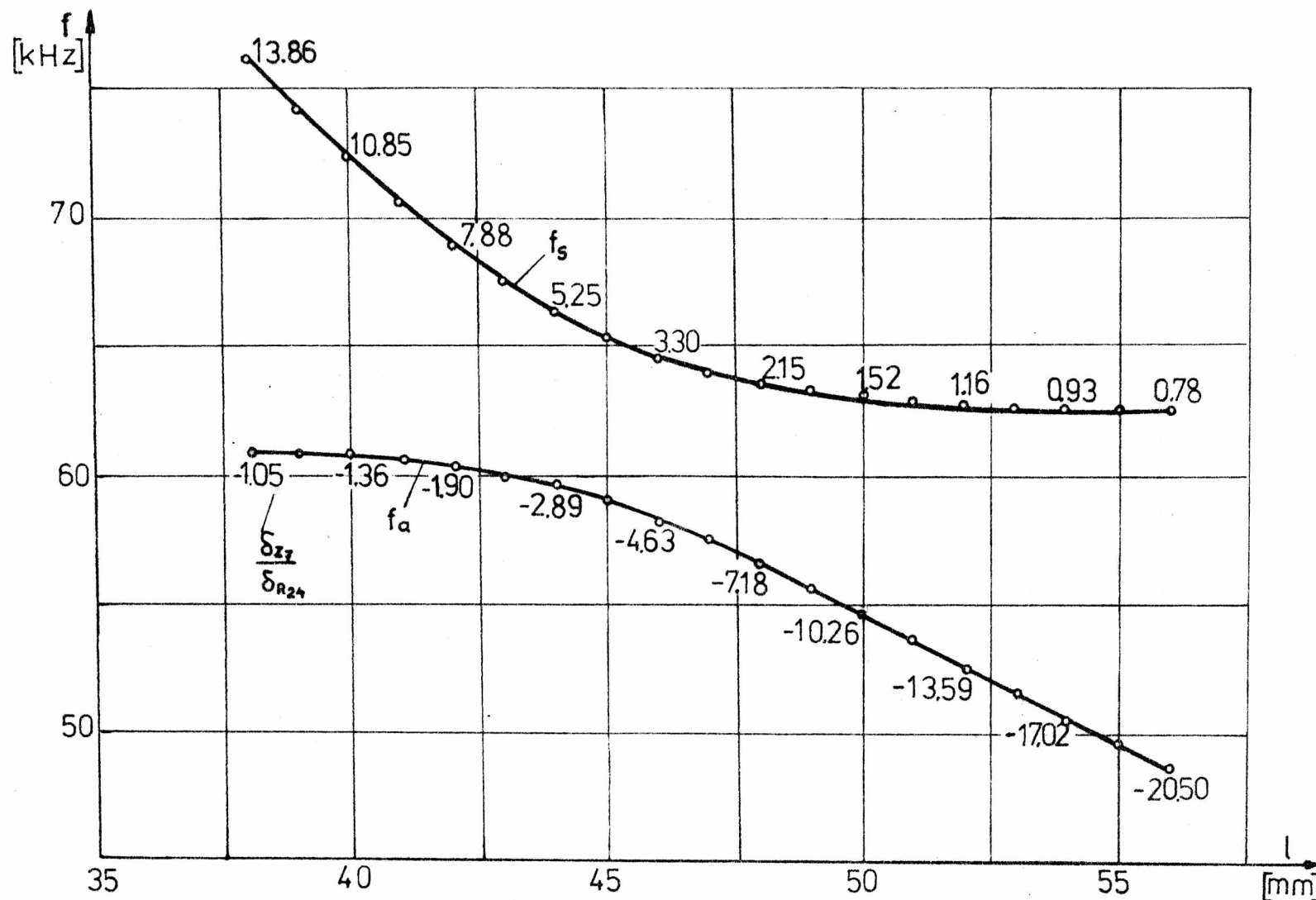
Na rys. 37 przedstawiono zależność częstotliwości drgań własnych konwertera niejednorodnego typu R-L od długości rezonatora prętowego.

Rys. 38 przedstawia moduł stosunku amplitudy przesunięcia powierzchni czołowej rezonatora prętowego i rezonatora dyskowego w zależności od długości rezonatora prętowego, natomiast na rys. 39 przedstawiono obliczoną i zmierzoną zależność różnicy częstotliwości $\Delta f = f_s - f_a$ od długości rezonatora prętowego. Sposób pomiaru podano w dodatku B.

Na rys. 40 ÷ 43 pokazano wpływ stałych materiałowych E i ρ tytanu i ceramiki PXE-4 na przebieg charakterystyki różnicy częstotliwości w zależności od długości rezonatora prętowego.

Rys. 44 ÷ 45 przedstawiają postać drgań konwertera niejednorodnego typu R-L dla modu przeciwfazowego i współfazowego drgań dla jednego, przykładowego kryterium zestrojenia.

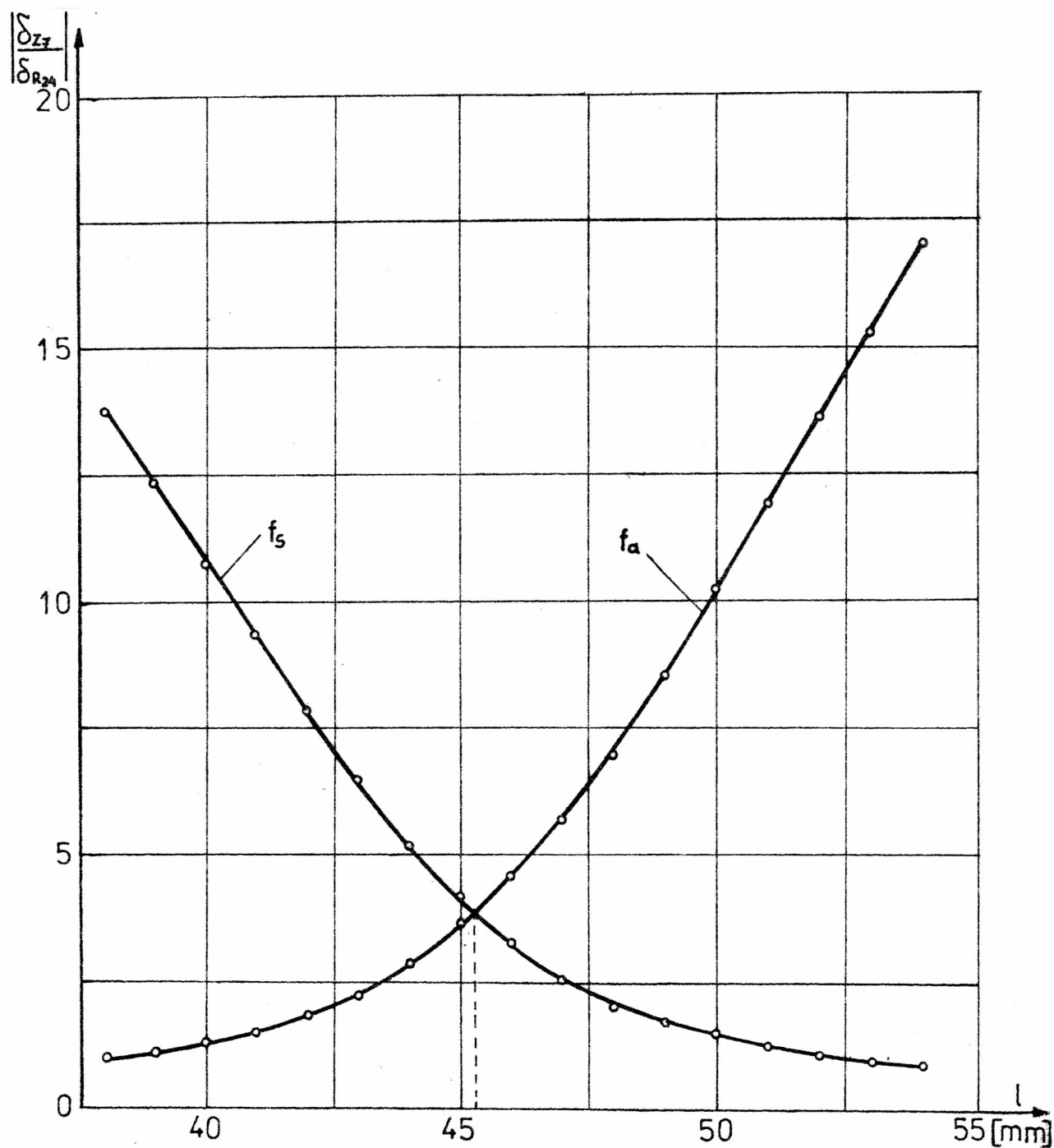
Rys. 46 ÷ 49 obrazują rozkład przemieszczeń wzdłuż rezonatora drgań podłużnych i wzdłuż promienia rezonatora drgań radialnych. Analiza wyników zostanie przedstawiona w rozdziale 6.



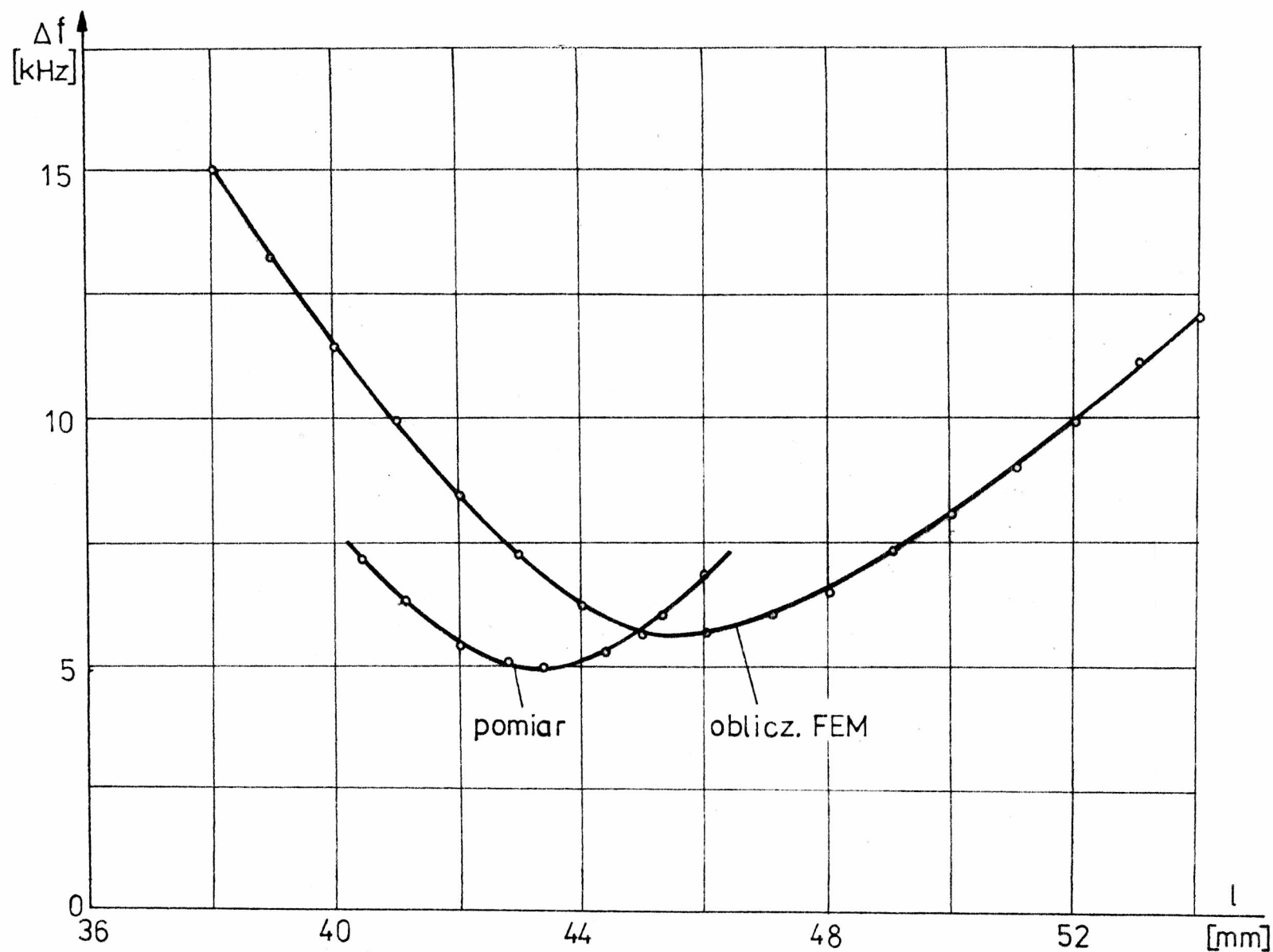
Rys. 37. Zależność częstotliwości drgań własnych rezonatora niejednorodnego o konwersji

kierunku drgań typu R-L od długości rezonatora prętowego.

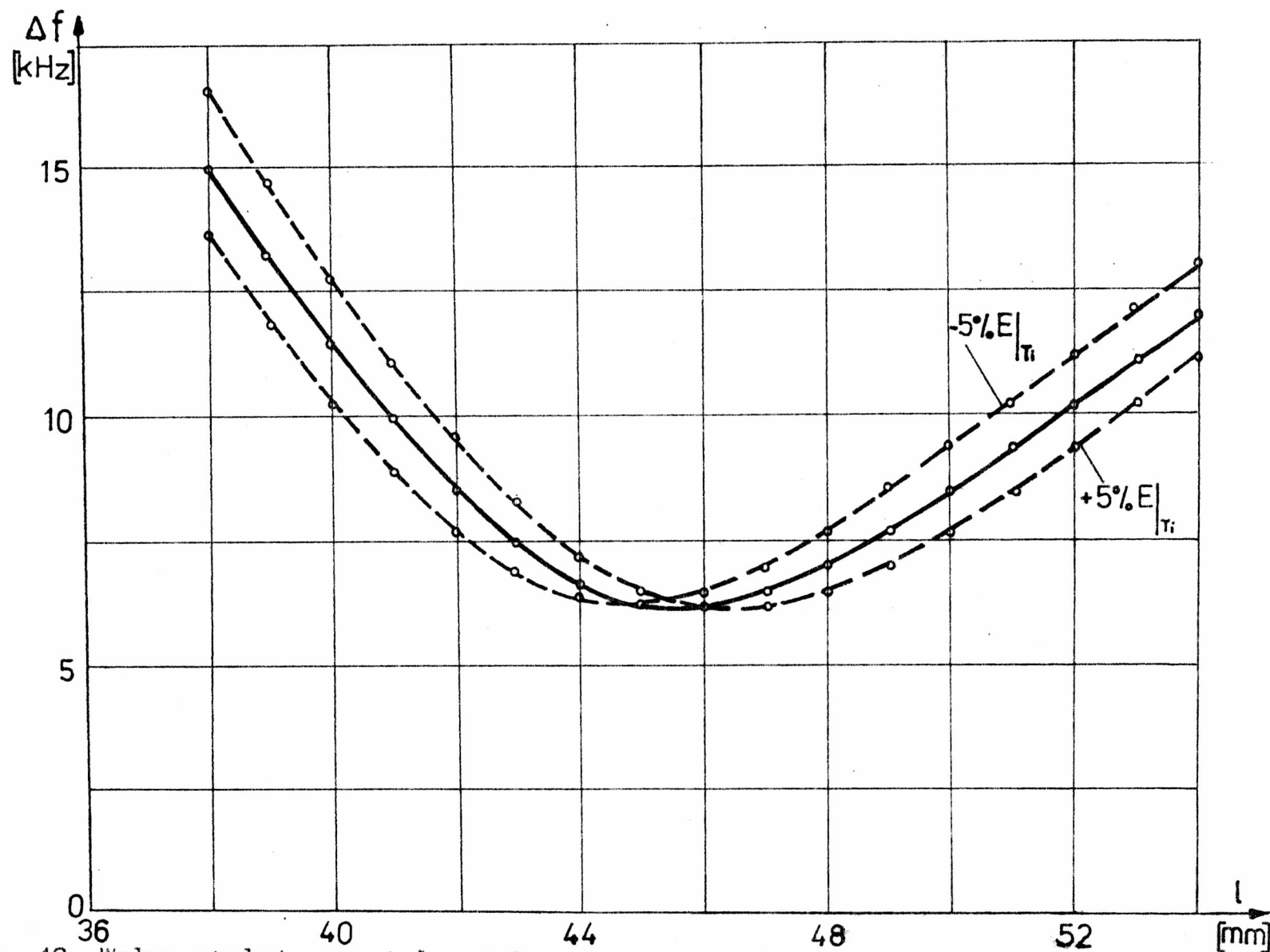
Dane: dysk - PXE-4, $E=0,85 \cdot 10^{11}$ [Pa], $\nu=0,3$, $\rho=7\,500$ [kg/m³], $\phi=38,1$ [mm]
 $h=6,15$ [mm] pręt - tytan, $E=0,1157 \cdot 10^{12}$ [Pa], $\nu=0,321$, $\rho=4580$ [kg/m³], $\phi=6$ [mm]



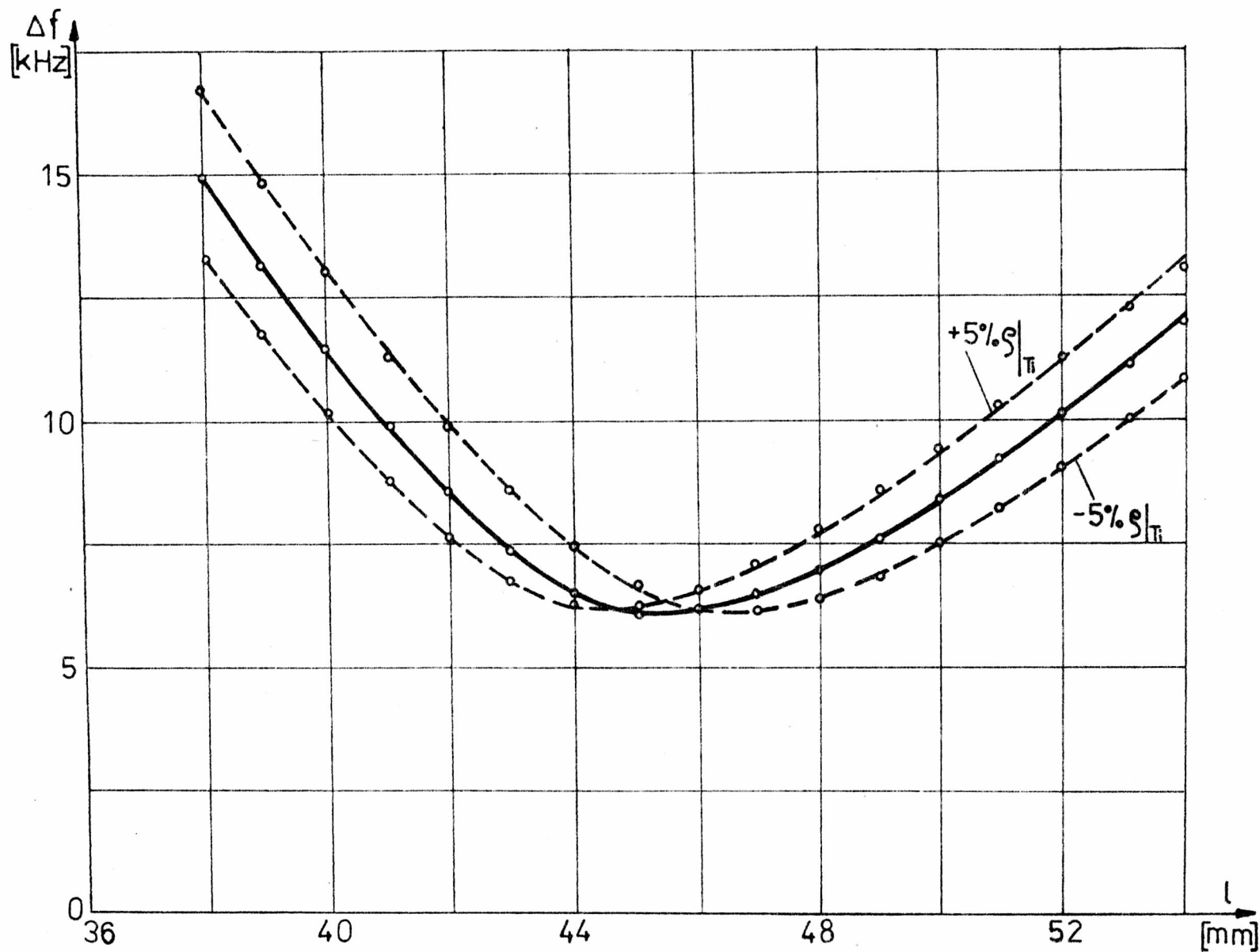
Rys. 38. Moduł stosunku amplitudy przesunięcia powierzchni czołowej rezonatora prętowego i rezonatora dyskowego w zależności od długości rezonatora prętowego. Dane: jak na rys. 37.



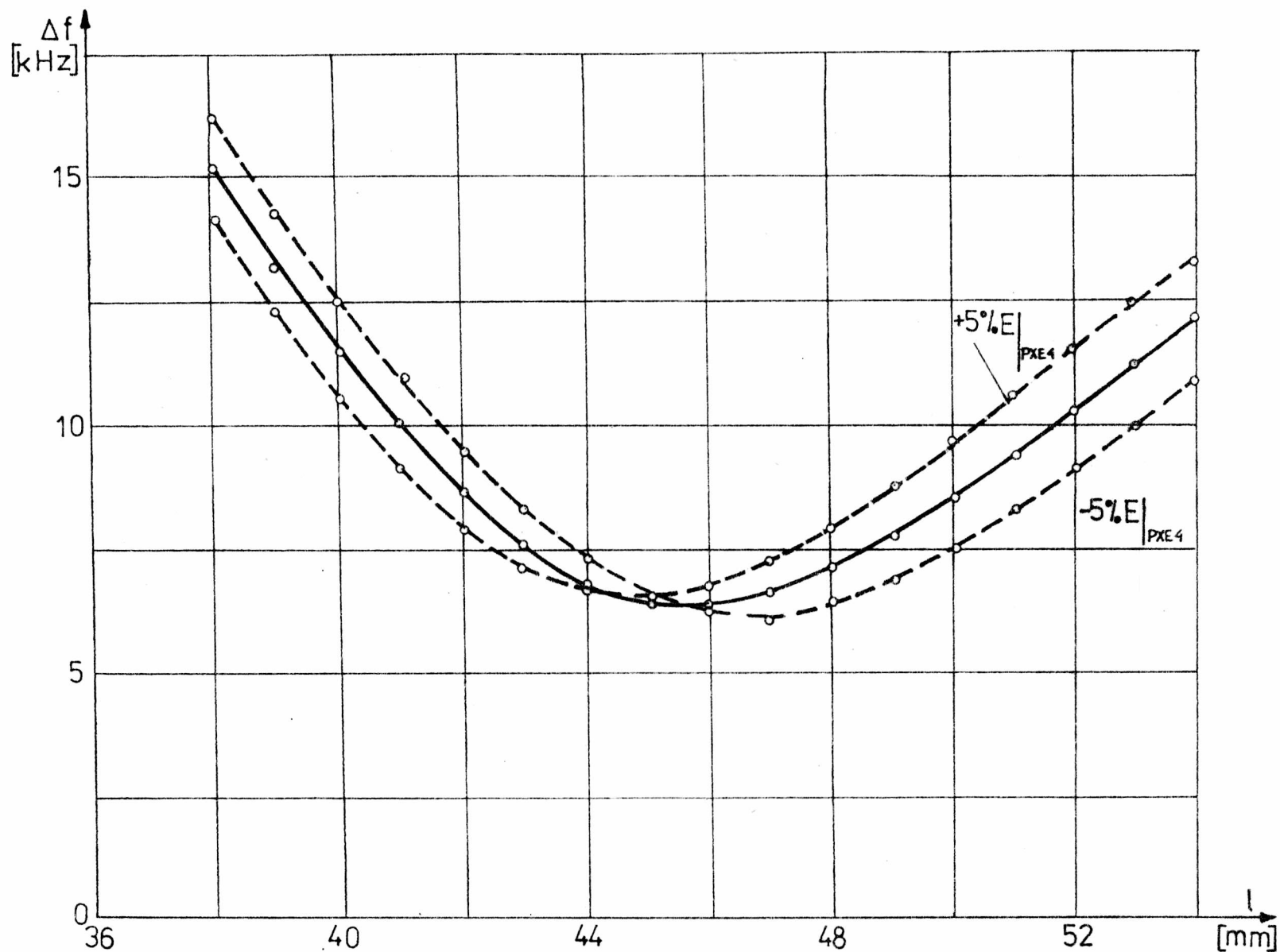
Rys. 39. Zależność różnicy częstotliwości modu współfazowego i przeciwfazowego drgań rezonatora niejednorodnego o konwersji typu R-L od długości rezonatora prętowego.
Dane: jak na rys. 37.



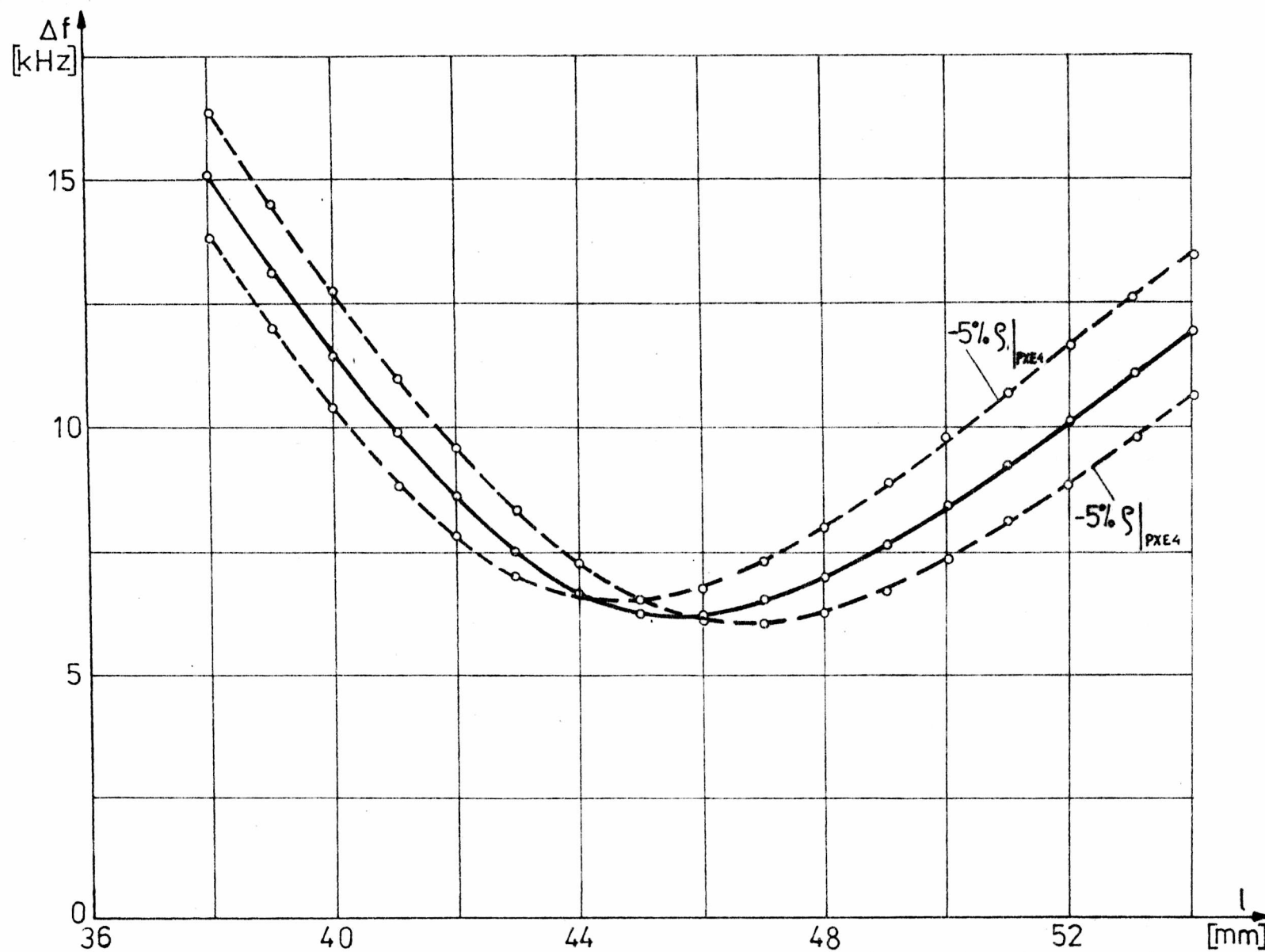
Rys. 40. Wpływ stałej materiałowej E tytanu na przebieg charakterystyki różnicy częstotliwości modu współfazowego i przeciwfazowego drgań konwertera niejednorodnego typu R-L w zależności od długości rezonatora prętowego. /Linia ciągła - dla danych jak na rys. 37.



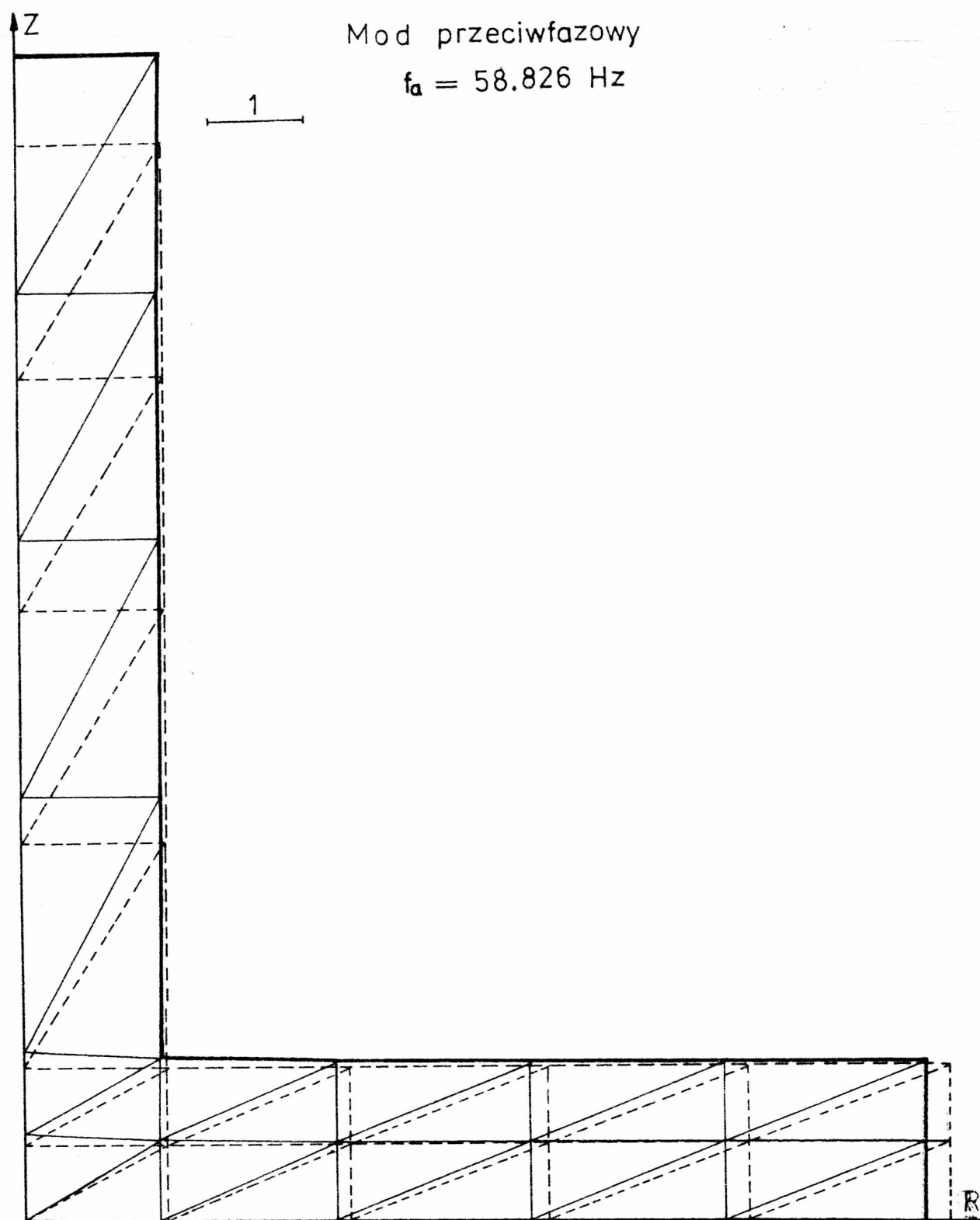
Rys. 41. Wpływ stałej materiałowej ξ tytanu na przebieg charakterystyki różnicy częstotliwości modu współfazowego i przeciwfazowego drgań konwertera niejednorodnego typu R-L w zależności od długości rezonatora prętowego. /Linia ciągła – dla danych jak na rys. 37. /.



Rys. 42. Wpływ stałej materiałowej E ceramiki na przebieg charakterystyki różnicy częstotliwości modu współfazowego i przeciwfazowego drgań konwertera niejednorodnego typu R-L w zależności od długości rezonatora prętowego. /Linia ciągła dla danych z rys. 41./.

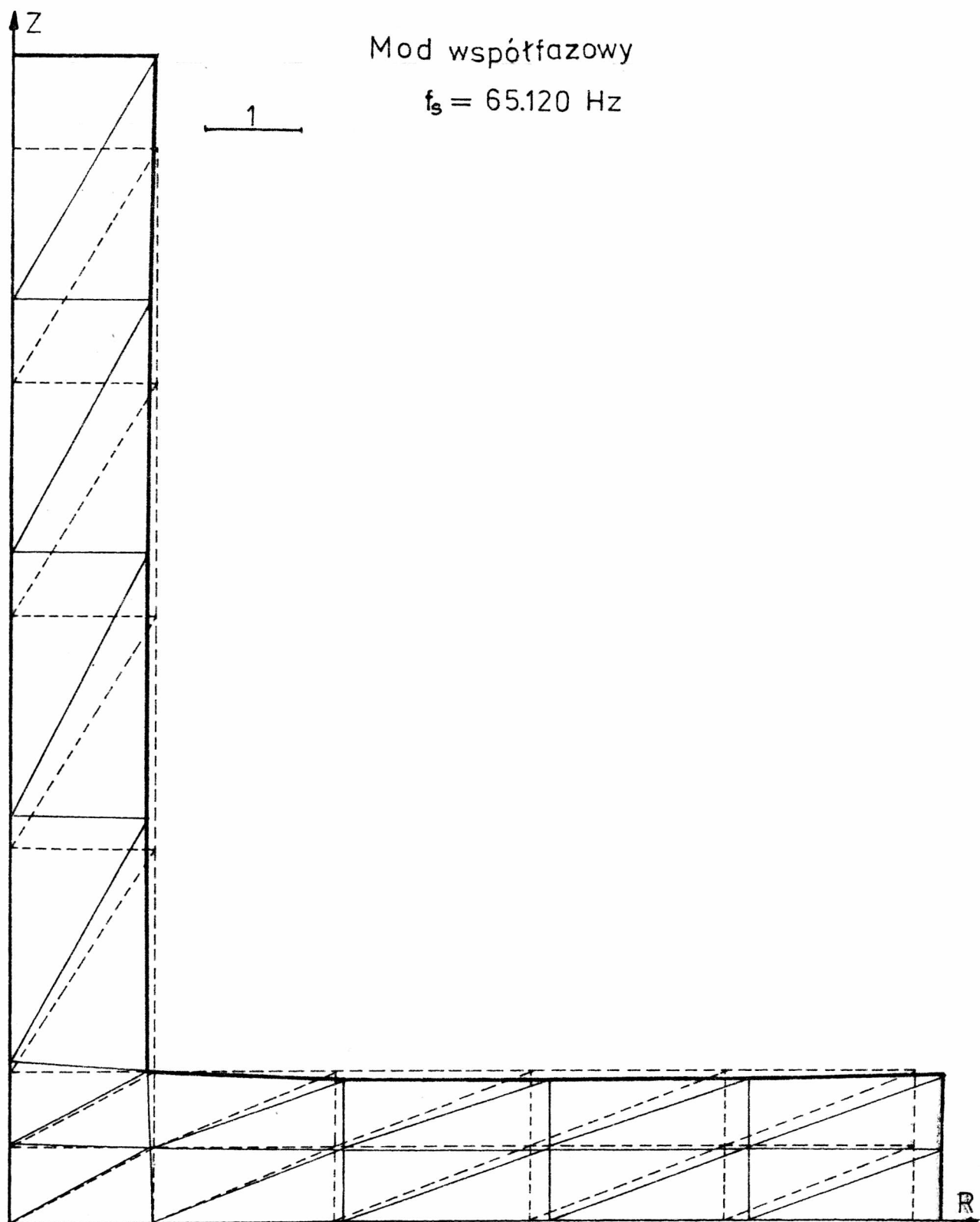


Rys. 43. Wpływ stałej materiałowej Q ceramiki na przebieg charakterystyki różnicy częstotliwości modu współfazowego i przeciwfazowego drgań konwertera niejednorodnego typu R-L w zależności od długości rezonatora prętowego. /Linia ciągła - dla danych jak na rys. 37/.



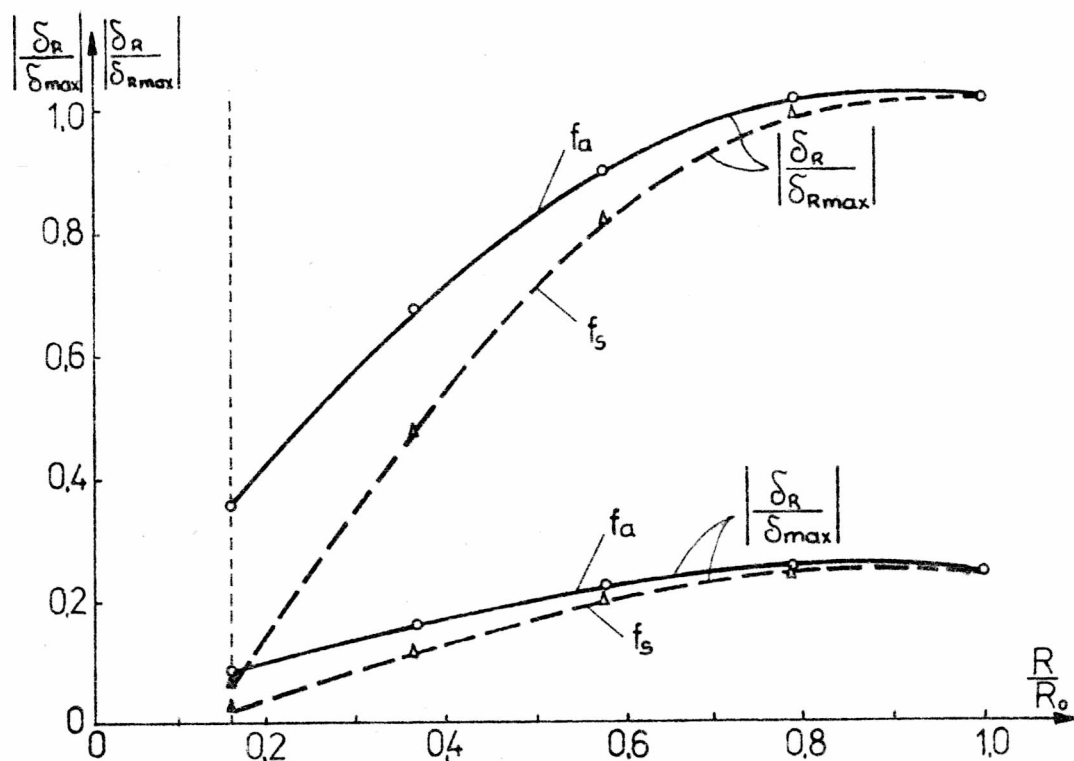
Rys. 44. Postać drgań konwertera niejednorodnego typu R-L
 dla modu przeciwfazowego drgań dla przypadku:

$$\left| \frac{\delta_{Z7}}{\delta_{R24}} \right|_{f_a} \approx \left| \frac{\delta_{Z7}}{\delta_{R24}} \right|_{f_s}$$

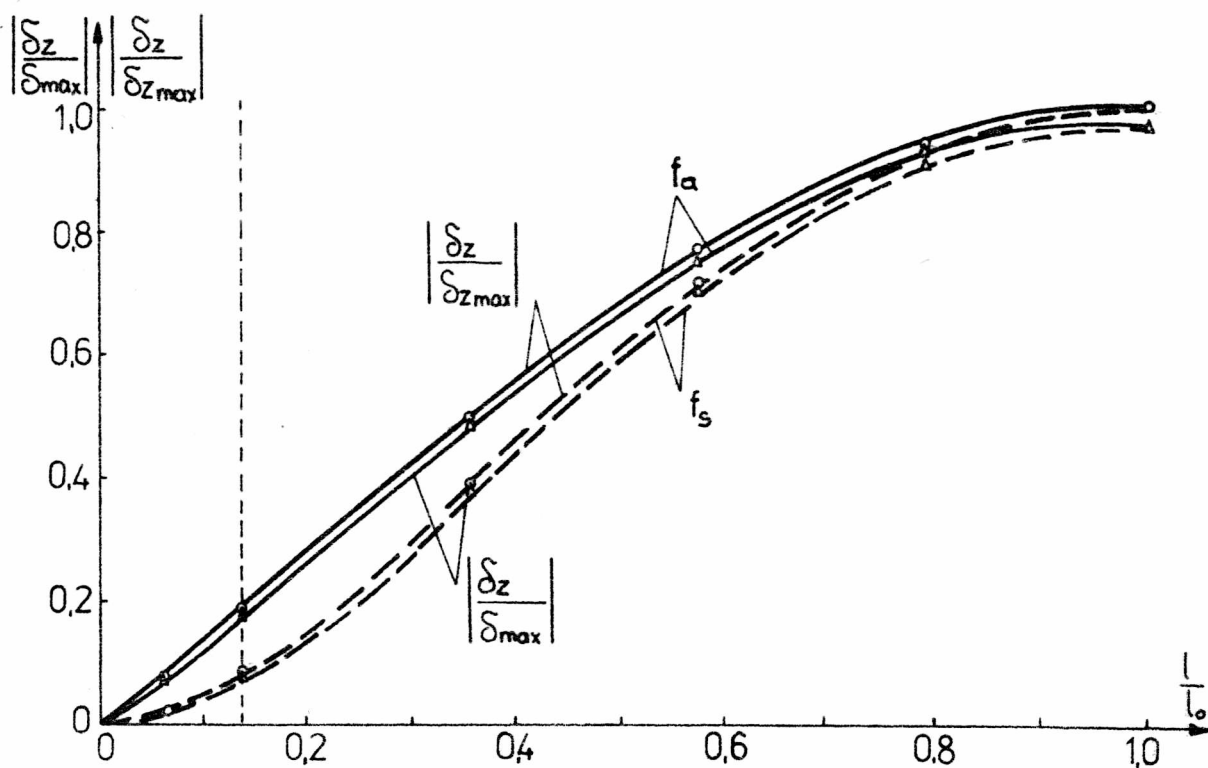


Rys. 45. Postać drgań konwertera niejednorodnego typu R-L dla modu współfazowego drgań dla przypadku:

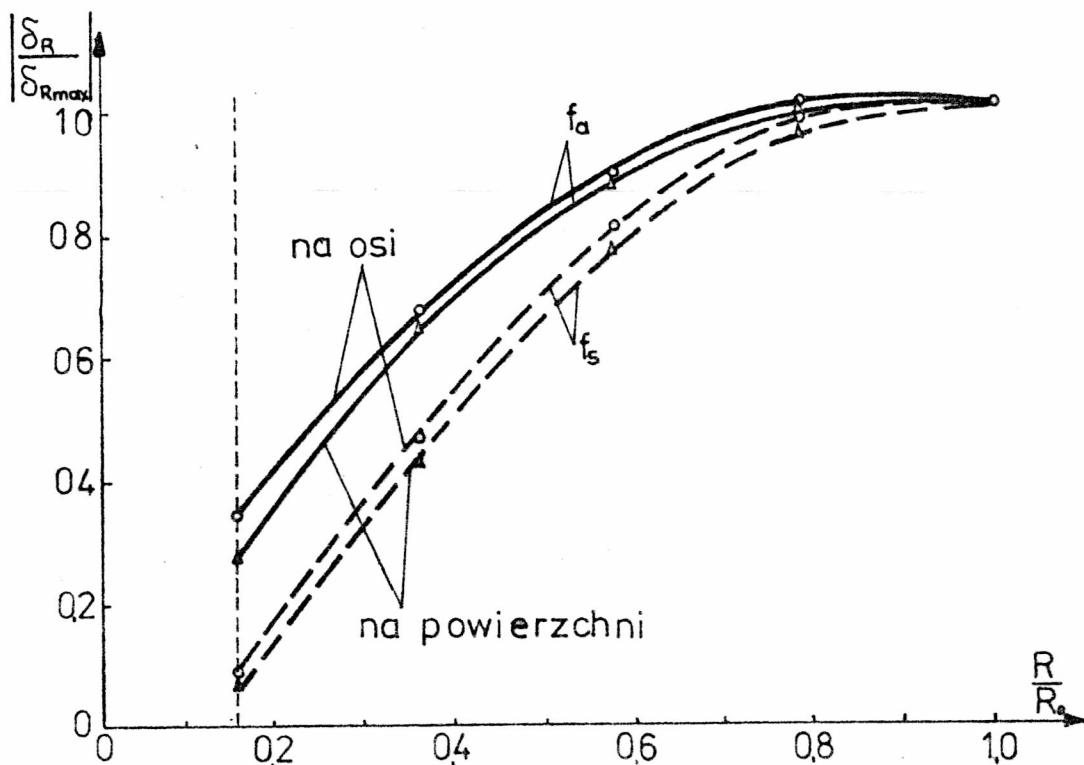
$$\left| \frac{\delta_{Z1}}{\delta_{R24}} \right|_{f_a} \approx \left| \frac{\delta_{Z1}}{\delta_{R24}} \right|_{f_s}$$



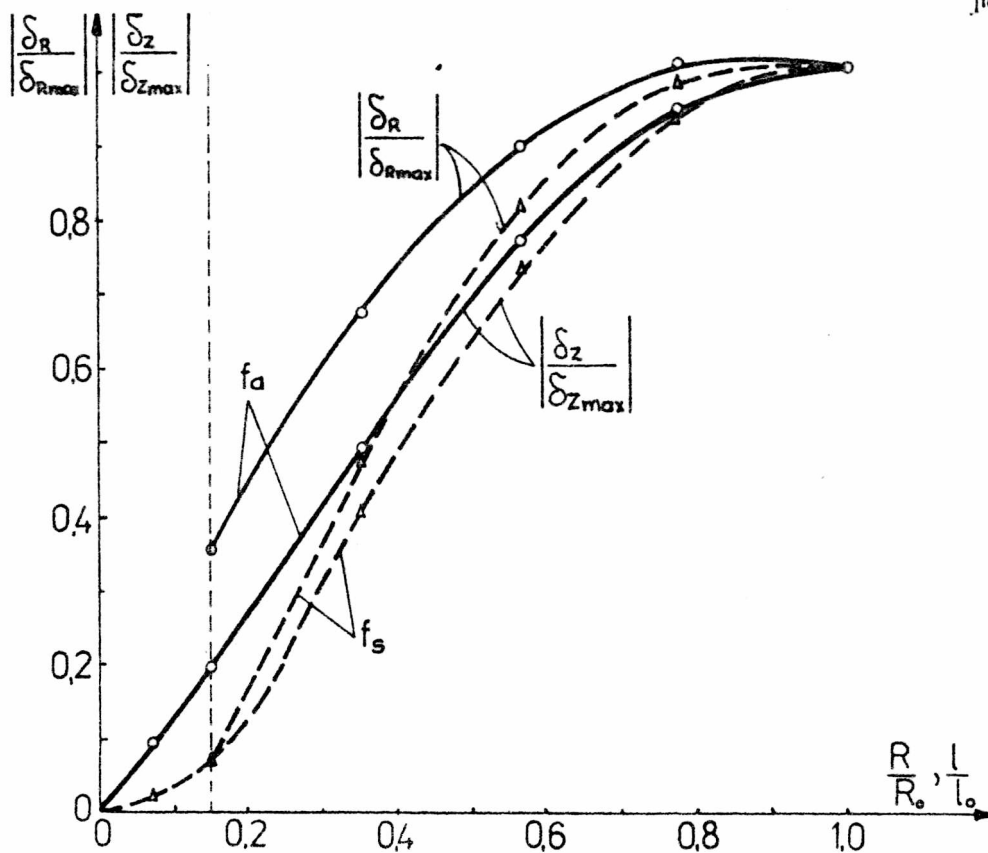
Rys. 46. Rozkład przemieszczeń wzdłuż promienia rezonatora dyskowego dla konwertera niejednorodnego typu R-L /dla przypadku: $\left| \frac{\delta_{z7}}{\delta_{R24}} \right|_{f_a} \approx \left| \frac{\delta_{z7}}{\delta_{R24}} \right|_{f_s} /$.



Rys. 47. Rozkład przemieszczeń wzdłuż osi rezonatora prętowego dla konwertera niejednorodnego typu R-L /dla przypadku: $\left| \frac{\delta_{z7}}{\delta_{R24}} \right|_{f_a} \approx \left| \frac{\delta_{z7}}{\delta_{R24}} \right|_{f_s} /$.



Rys. 48. Rozkład przemieszczeń wzdłuż promienia rezonatora dyskowego na powierzchni i na osi symetrii dla konwertera niejednorodnego typu R-L /dla przypadku: $\left| \frac{\delta_{z_f}}{\delta_{R_{24}}} \right|_{f_a} \approx \left| \frac{\delta_{z_f}}{\delta_{R_{24}}} \right|_{f_s}$.



Rys. 49. Rozkład przemieszczeń wzdłuż unormowanych rozmiarów rezonatora prętowego i rezonatora dyskowego dla konwertera niejednorodnego typu R-L /dla przypadku:

$$\left| \frac{\delta_{z_f}}{\delta_{R_{24}}} \right|_{f_a} \approx \left| \frac{\delta_{z_f}}{\delta_{R_{24}}} \right|_{f_s}.$$

6. ANALIZA WYNIKÓW

Wyniki obliczeń otrzymane z przeprowadzonego eksperymentu numerycznego pozwalają na wyciągnięcie wielu interesujących i istotnych wniosków dotyczących zachowania się rezonatorów o konwersji kierunku drgań typu R-L. Otrzymane charakterystyki dają szereg informacji przydatnych do projektowania tego typu rezonatorów.

6.1. Konwerter typu R-L jednorodny.

Na rys. 21 przedstawiono zależność częstotliwości drgań własnych rezonatora o konwersji kierunku drgań typu R-L od długości rezonatora prętowego. Zależność tę obrazują dwie krzywe odpowiadające częstotliwościom dwóch modów drgań: f_s - częstotliwość dla modu współfazowego drgań i f_a - częstotliwość dla modu przeciwfazowego drgań. Odległość między krzywymi dla poszczególnych długości rezonatora prętowego odpowiada różnicy częstotliwości

$\Delta f = f_s - f_a$. Charakterystykę różnicy częstotliwości $f_s - f_a$ w zależności od długości rezonatora prętowego przedstawia rys.22. Liczby umieszczone obok poszczególnych punktów krzywej na rys.21

są obliczonym modulem stosunku amplitudy wychylenia powierzchni czołowej rezonatora drgań podłużnych i rezonatora drgań radialnych. Stosunek ten można interpretować jako współczynnik wzmocnienia amplitudy drgań konwertera. Ma to duże znaczenie praktyczne, pozwala bowiem na wykorzystywanie tego typu rezonatorów do wzmocniania amplitudy drgań. Dla wartości $\min /f_s - f_a/$ wartość tego stosunku jest jednakowa dla modu współfazowego i przeciwfazowego drgań. Obrazuje to dokładniej rys. 23, na którym przedstawiono zależność modułu stosunku amplitudy przesunięcia składowej pionowej przemieszczenia węzła znajdującego się

w osi symetrii na powierzchni czołowej pręta (δ_{Z_p}) do składowej poziomej węzła znajdującego się w osi symetrii na powierzchni bocznej dysku (δ_{R_d}) dla obydwu modów drgań. /Oznaczenia węzłów- jak na rys. 19/. Dla jednakowej wartości tego stosunku /punkt przecięcia obydwu krzywych/ wyznaczono długość rezonatora prętowego przyjmując, że jest to jedno z możliwych kryteriów "zestrojenie" konwertera. Kryterium to można zapisać w postaci:

$$\left| \frac{\delta_{Z_p}}{\delta_{R_d}} \right|_{f_s} = \left| \frac{\delta_{Z_p}}{\delta_{R_d}} \right|_{f_a} \quad (6.1)$$

gdzie:

δ_{Z_p} - przemieszczenie powierzchni czołowej pręta w kierunku Z

δ_{R_d} - przemieszczenie powierzchni bocznej dysku w kierunku R

Dla tak "zestrojonego" konwertera wyznaczono przemieszczenia poszczególnych węzłów, co pozwoliło otrzymać postać drgań dla modu przeciwfazowego /rys.24/ i modu współfazowego /rys.25/ drgań. Na obu rysunkach zaznaczono strzałkami /w sposób poglądowy/ kierunek drgań poszczególnych powierzchni konwertera. Porównując rys. 24 i rys. 25 z wynikami przedstawionymi przez K.Ito i E.Mori w pracy [20] /rys. 8a/b/ / widzimy, że istnieje zgodność sposobu drgań poszczególnych powierzchni jedynie dla modu przeciwfazowego drgań /por. rys. 24 i rys.8b/ /natomiast dla modu współfazowego drgań istnieje pewna różnica w sposobie drgań /por.rys. 25 i rys. 8a/. Dzięki wynikom uzyskanym za pomocą FEM można dokładniej śledzić zachowanie się poszczególnych fragmentów rezonatora podczas drgań.

Dla modu współfazowego drgań istnieje pewna optymalna długość rezonatora prętowego, dla której wartość stosunku $\left| \frac{\delta_{zp}}{\delta_{Rd}} \right|$ /współczynnik "wzmocnienia amplitudy drgań"/ osiąga maksimum. Jest to szczególnie przydatne dla projektowania takich rezonatorów; pozwala bowiem na określenie optymalnych rozmiarów rezonatora przy zadanej częstotliwości i zadany modzie drgań.

Obok kryterium "zestrojenie" konwertera typu R-L przedstawionego w postaci zależności /6.1/ można zaproponować inne. Jest nim jednakowa wartość modułu stosunku amplitudy wychylenia powierzchni czołowej obu rezonatorów do maksymalnej amplitudy wychylenia występującej w danym kierunku dla poszczególnych modów drgań. Kryterium to można zapisać w postaci:

$$\left| \frac{\delta_{zp}}{\delta_{\max}} \right|_{f_a} = \left| \frac{\delta_{Rd}}{\delta_{\max}} \right|_{f_a} \quad (6.2)$$

oraz

$$\left| \frac{\delta_{zp}}{\delta_{\max}} \right|_{f_s} = \left| \frac{\delta_{Rd}}{\delta_{\max}} \right|_{f_s} \quad (6.3)$$

Na rys. 26 i rys. 27 przedstawiono postacie drgań konwertera typu R-L przy tak przyjętym kryterium "zestrojenia" /zależność (6.1)/ dla modu przeciwfazowego i współfazowego drgań.

Podobną parę tworzą rys. 28 i rys. 29 dla przypadku zestrojenia wg zależności /6.3/. Porównując postacie drgań na rys. 26÷27 i na rys. 28÷29 można łatwo zauważyć, że istnieje znaczna różnica wielkości amplitudy wychylenia poszczególnych powierzchni czołowych dla obu modów drgań dla określonego kryterium zestrojenia. Natomiast porównanie otrzymanych częstotliwości drgań

własnych i długości rezonatora prętowego dla postaci drgań wynikających z wszystkich kryteriów "zestrojenia" /wzory/6.1/, /6.2/ i /6.3/ / pozwala zauważyć, że istnieje duża rozpiętość między tymi parametrami, co ma istotne znaczenie przy kaskadowym łączeniu kilku konwerterów.

Przedstawiona na rys. 21 charakterystyka zależności częstotliwości drgań własnych od długości rezonatora prętowego została wykreślona przy założonych stałych rozmiarach pozostałych. Wpływ zmian innych rozmiarów konwertera na częstotliwość drgań własnych pokazuje rys. 30 i rys. 31. Wykres przedstawiony na rys. 30 sporządzono dla zmieniającej się średnicy rezonatora prętowego; częstotliwość f_a maleje tu ze wzrostem średnicy rezonatora drgań ^{podłużnych} (natomiast częstotliwość f_s początkowo maleje osiągając minimum a następnie rośnie. Istnieje więc pewien zakres średnicy, dla którego $\Delta f = f_s - f_a$ przyjmuje wartość minimalną. Do podobnych wniosków prowadzi analiza wykresu przedstawionego na rys. 31; tu również istnieje pewien zakres grubości rezonatora radialnego, w którym różnica $\Delta f = f_s - f_a$ osiąga minimum. W badanym zakresie grubości rezonatora radialnego charakter krzywej f_s jest podobny do poprzedniego rysunku, natomiast krzywa f_a ma kształt paraboli o łagodnym maksimum.

Na rys. 32 przedstawiono rozkład przemieszczeń występujących wzdłuż promienia rezonatora dyskowego dla konwertera jednorodnego typu R-L zestrojonego wg kryterium podanym we wzorze /6.1/. Rozkład ten wyznaczono dla modu współfazowego i przeciwfazowego drgań dla stosunku $\left| \frac{\delta_R}{\delta_{Rmax}} \right|$ i $\left| \frac{\delta_R}{\delta_{max}} \right|$. Z przedstawionych krzywych wynika, że przemieszczenia radialne dla modu przeciwfazowego drgań są większe od przemieszczeń dla modu współfazowego.

Podobny przebieg ma wykres przedstawiony na rys.33, na którym wyznaczono rozkład przemieszczeń wzdłuż osi rezonatora prętowego również dla dwóch modów drgań dla stosunku $\left| \frac{\delta_z}{\delta_{z_{\max}}} \right|$ i $\left| \frac{\delta_z}{\delta_{\max}} \right|$. Wartość przemieszczeń dla modu przeciwfazowego drgań jest w obu przypadkach nieznacznie większa niż dla modu współfazowego drgań. Zastosowany podział konwertera na elementy /rys. 19/ pozwala wyznaczyć rozkład przemieszczeń na powierzchni i wzdłuż osi symetrii konwertera. Stosując odpowiednio gęsty podział na elementy można wyznaczyć rodzinę charakterystyk opisujących przemieszczenia wewnątrz całego obszaru konwertera. Rys. 34 przedstawia rozkład przemieszczeń wzdłuż promienia rezonatora dyskowego występujących na powierzchni i wzdłuż osi symetrii, natomiast na rys. 35 przedstawiono rozkład przemieszczeń wzdłuż osi i na powierzchni rezonatora prętowego /dla drgań podłużnych/. Z obu rysunków widać, że przemieszczenia występujące wzdłuż osi są większe od przemieszczeń występujących na powierzchni poszczególnych rezonatorów /dla obu modów drgań/. W rezonatorze prętowym największe wartości przemieszczeń występują na końcu rezonatora; dla rezonatora dyskowego maksymalne wartości przemieszczeń zależą od modu drgań. Dla modu przeciwfazowego maksimum wartości przemieszczeń występuje na 0,8 - 0,9 długości promienia, natomiast dla modu współfazowego - na obrzeżu dysku, Różnice są tu jednak minimalne, rzędu pojedynczych procent.

Interesująco przedstawia się porównanie częstotliwości drgań własnych oddzielnych rezonatorów: pręta drgającego podłużnie i dysku drgającego radialnie, o rozmiarach odpowiadających konwerterowi "zestrojonemu" np. wg kryterium z wzoru /6.1/. Częstotliwości drgań własnych dla konwertera wynoszą:

- dla modu przeciwfazowego drgań - $f_a = 47.441 \text{ [Hz]}$

- dla modu współfazowego drgań - $f_s = 56.944 \text{ [Hz]}$

Częstotliwości drgań własnych pręta drgającego podłużnie i dysku drgającego radialnie wynoszą odpowiednio:

- dla pręta - $f = 41.239 \text{ [Hz]}$

- dla dysku - $f = 51.007 \text{ [Hz]}$

Sprzężenie obydwu rezonatorów tworzących konwerter powoduje, że częstotliwości drgań własnych zmieniają się.

Częstotliwość drgań własnych konwertera dla modu przeciwfazowego drgań jest większa od częstotliwości drgań własnych rezonatora prętowego i mniejsza od częstotliwości drgań własnych rezonatora dyskowego, natomiast dla modu współfazowego częstotliwość f_s jest większa od częstotliwości drgań własnych obu rezonatorów rozpatrywanych oddzielnie. Otrzymane wyniki uzyskano dla takiego sposobu podziału na elementy rezonatora prętowego i rezonatora dyskowego, w jaki są one podzielone w układzie konwertera typu R-L.

6.2. Konwerter typu R-L niejednorodny.

Na rys. 37 przedstawiono zależność częstotliwości drgań własnych konwertera niejednorodnego typu R-L, od długości rezonatora prętowego. Wykres ten ma podobny przebieg do wykresu z rys. 21 dla konwertera jednorodnego z tym, że krzywe f_a i f_s leżą tu bliżej siebie. Wynika to z faktu, że rozmiary części sprzężonej /części centralnej konwertera/ są dla tego konwertera mniejsze; ze wzrostem rozmiarów części sprzężonej różnica częstotliwości $f_s - f_a$ rośnie. Jest to zgodne z wynikami badań uzyskanymi przez G.F.Powołocką ([35]).

Rys. 39 przedstawia obliczoną i zmierzoną zależność $\Delta f = f_s - f_a$ od długości rezonatora prętowego. /Sposób pomiaru został przedstawiony w dodatku B/. Obie krzywe mają taki sam charakter, występuje natomiast różnica w położeniu minimum krzywych. Powodem tego jest m.in. rozbieżność między wartościami rzeczywistymi i katalogowymi stałych materiałowych ceramiki piezoelektrycznej i tytanu. Do budowy konwertera użyto bowiem stopu tytanowego o nieznanych dokładnie parametrach E , ρ , i ν .

Na rys. 40÷43 przedstawiono wpływ $\pm 5\%$ zmiany wartości modułu Younga E i gęstości ρ tytanu i ceramiki PXE-4 na przebieg charakterystyki różnicy częstotliwości modu współfazowego i przeciwfazowego drgań jako funkcji długości rezonatora prętowego. Z przedstawionych wykresów wynika, że nawet niewielka zmiana tych wartości powoduje przesunięcie minimum różnicy $f_s - f_a$.

Rys. 38 przedstawia moduł stosunku amplitudy przesunięcia powierzchni czołowej rezonatora prętowego i powierzchni bocznej rezonatora dyskowego jako funkcji długości rezonatora prętowego. Przejście krzywych pozwala znaleźć optymalne rozmiary konwertera,

dla których $\left| \frac{\delta_{z\dot{z}}}{\delta_{R_{24}}} \right|_{f_a} = \left| \frac{\delta_{z\dot{z}}}{\delta_{R_{24}}} \right|_{f_s}$ /wzór 6.1/. Dla takiego konwertera przedstawiono na rys. 41 i rys. 45 obliczone przemieszczenia węzłów poszczególnych elementów, na które podzielono konwerter; w rezultacie otrzymano postać drgań konwertera dla modu przeciwnofazowego i współfazowego drgań.

Na rys. 46 przedstawiono rozkład przemieszczeń wzdłuż promienia rezonatora dyskowego, a na rys. 47 - wzdłuż osi rezonatora prętowego dla konwertera zestrojonego wg zależności /6.1/. Charakter tych rozkładów jest podobny do rozkładów dla konwertera jednorodnego /rys.32-33/.

Rys. 48 przedstawia rozkład przemieszczeń wzdłuż promienia rezonatora dyskowego występujących na powierzchni i wzdłuż osi symetrii omawianego konwertera. Charakterystyczne jest tu również występowanie maksimum przemieszczeń dla modu przeciwnofazowego drgań w odległości ok. $0,8 \div 0,9 \frac{R}{R_0}$. Przemieszczenie występujące wzdłuż osi są większe od przemieszczeń na powierzchni /dla obu modów drgań/. Wartość przemieszczeń dla modu przeciwnofazowego jest większa niż dla modu współfazowego.

Na rys. 49 zestawiono rozkład przemieszczeń wzdłuż unormowanych rozmiarów rezonatora prętowego i rezonatora dyskowego. Z rysunku widać, że przemieszczenie wzdłuż promienia rezonatora drgającego radialnie są większe niż wzdłuż rezonatora drgającego podłużnie.

6.3. Wnioski końcowe.

Otrzymane wyniki częściowo dają się porównać z wynikami podanymi w pracach K.Itoh i E.Mori ([17], [20]).

Na przykład K.Itoh i E.Mori badając eksperymentalnie konwerter jednorodny wykonany ze stali S45C /wg oznacz.jap/ o rozmiarach: $\phi_{\text{pręta}} = 15 \text{ [mm]}$, $l_{\text{pręta}} = 52,4 \text{ [mm]}$, $\phi_{\text{dysku}} = 68 \text{ [mm]}$, $h_{\text{dysku}} = 20 \text{ [mm]}$ otrzymali dwie częstotliwości własne odpowiadające modowi przeciwnofazowemu drgań $f_a = 50\,235 \text{ [Hz]}$ i modowi współfazowemu $f_s = 60\,487 \text{ [Hz]}$

. Różnica $\Delta f = f_s - f_a$ wynosi tu $10\,252 \text{ [Hz]}$. Otrzymane za pomocą metody elementów skończonych wyniki wskazują, że nie były to warunki optymalne dla otrzymania konwertera "zestrojonego" wg któregośkolwiek z przyjętych kryteriów zestrojenia; najbliższy wynik odpowiada zestrojeniu I typu /wzór 6.1/; odpowiednie wielkości dla tego typu zestrojenia wynoszą:

$\phi_{\text{pręta}} = 15 \text{ [mm]}$, $l_{\text{pręta}} = 62,8 \text{ [mm]}$, $\phi_{\text{dysku}} = 68 \text{ [mm]}$, $h_{\text{dysku}} = 20 \text{ [mm]}$
 $f_a = 47\,441 \text{ [Hz]}$, $f_s = 56\,944 \text{ [Hz]}$, $\Delta f = 9\,503 \text{ [Hz]}$.

Pewien wpływ na różnicę wyników pomiarów uzyskanych przez autorów w pracy [17] i wyników obliczeń otrzymanych za pomocą FEM w niniejszej pracy może mieć niezgodność stałych materiałowych.

Przeprowadzony test prawidłowości działania programu FEM2 praktycznie wyklucza możliwość wystąpienia błędu w programie /patrz dodatek C/.

Zastosowanie metody elementów skończonych do projektowania rezonatorów o konwersji kierunku drgań pozwala na swobodną manipulację poszczególnymi rozmiarami rezonatorów w celu uzyskania żądanych parametrów.

Wydaje się, że jednym z najważniejszych zagadnień przy obliczaniu

rezonatorów tego typu jest, obok częstotliwości drgań własnych, dobór rozmiarów pod kątem uzyskania odpowiedniego współczynnika wzmocnienia amplitudy drgań /patrz rys. 23/.

Otrzymane wyniki obliczeń i ich analiza przedstawione w rozdz.5 i rozdz. 6 pozwalają na sformułowanie kilku zasadniczych wniosków wynikających z niniejszej pracy:

- Metoda elementów skończonych dobrze nadaje się do analizy rezonatorów o konwersji kierunku drgań. Spośród wielu cech wyróżniających tę metodę w analizie rezonatorów o konwersji kierunku drgań należy wyróżnić:
 - możliwość dowolnej penetracji obszaru rezonatora
 - możliwość wyznaczania składowej poprzecznej drgań
- Rezonator o konwersji kierunku drgań typu R-L /L-R/ ma dwie podstawowe częstotliwości rezonansowe f_a i f_s odpowiadające modowi przeciwfazowemu i modowi współfazowemu drgań, przy czym $f_a < f_s$.
- Z analizy rezonatorów o konwersji kierunku drgań typu R-L /L-R/ wynikają następujące typy zestrojenia:
 - 1^o. Zestrojenie I typu zachodzi wówczas, jeśli moduł stosunków amplitud przemieszczenia powierzchni czołowej rezonatora drgań podłużnych i amplitud przemieszczenia powierzchni bocznej rezonatora drgań radialnych dla modu przeciwfazowego i modu współfazowego drgań są sobie równe co można zapisać w postaci warunku:

$$\left| \frac{\delta_{z\text{powierzchni czołowej pręta}}}{\delta_{R\text{powierzchni bocznej dysku}}} \right|_{f_a} = \left| \frac{\delta_{z\text{powierzchni czołowej pręta}}}{\delta_{R\text{powierzchni bocznej dysku}}} \right|_{f_s}$$

2°. Zestrojenie II typu zachodzi wówczas, jeśli dla modu przeciwnofazowego drgań moduły stosunków amplitudy przemieszczenia powierzchni czołowej rezonatora drgań podłużnych i amplitudy przemieszczenia powierzchni bocznej rezonatora drgań radialnych do maksymalnej amplitudy przemieszczenia są sobie równe, co można zapisać w postaci warunku:

$$\left| \frac{\delta_{z \text{ powierzchni czołowej pręta}}}{\delta_{\max}} \right|_{f_a} = \left| \frac{\delta_{R \text{ powierzchni bocznej dysku}}}{\delta_{\max}} \right|_{f_a}$$

3°. Zestrojenie III typu zachodzi wówczas, jeśli dla modu współfazowego drgań moduły stosunków amplitudy przemieszczenia powierzchni czołowej rezonatora drgań podłużnych i amplitudy przemieszczenia powierzchni bocznej rezonatora drgań radialnych do maksymalnej amplitudy przemieszczenia są sobie równe, co można zapisać w postaci warunku:

$$\left| \frac{\delta_{z \text{ powierzchni czołowej pręta}}}{\delta_{\max}} \right|_{f_s} = \left| \frac{\delta_{R \text{ powierzchni bocznej dysku}}}{\delta_{\max}} \right|_{f_s}$$

- Rezonator o konwersji kierunku drgań typu R_L-L /L-R/ może być wykorzystany jako wzmacniacz amplitudy drgań. Za pomocą FEM można wyznaczyć wielkość tego wzmocnienia przy założonych parametrach wejściowych, jak również można znaleźć częstotliwość drgań własnych konwertera, dla której występuje maksimum wzmocnienia przy określonych rozmiarach rezonatora.
- Ze wzrostem długości rezonatora drgań podłużnych /przy stałych rozmiarach pozostałych/ zmieniają się częstotliwości f_a i f_s /rys. 21 i rys. 37/; krzywa f_a ma kształt paraboli wypukłej natomiast krzywa f_s - paraboli wklęsłej. W obszarze najmniejszej

odległości między krzywymi $\min \Delta f = f_s - f_a$ /istnieje optymalna długość rezonatora drgań podłużnych, dla której moduły stosunku amplitud przemieszczeń powierzchni czołowej pręta i powierzchni bocznej dysku dla modu współfazowego i przeciwfazowego są sobie równe /zestrojenie I typu/.

- Ze wzrostem średnicy rezonatora drgań podłużnych /przy stałych rozmiarach pozostałych/ częstotliwości f_a i f_s zmieniają się jak na rys. 30.
- Ze wzrostem grubości rezonatora drgań radialnych /przy stałych rozmiarach pozostałych/ częstotliwości f_a i f_s zmieniają się jak na rys. 31.
- Częstotliwość drgań własnych rezonatora o konwersji kierunku drgań typu R-L znacznie różni się od częstotliwości drgań własnych rezonatorów tworzących konwerter rozpatrywanych oddzielnie.
- Wartość przemieszczeń wzdłuż osi rezonatora prętowego i wzdłuż promienia rezonatora dyskowego są większe dla modu przeciwfazowego drgań niż dla modu współfazowego.
- Przemieszczenia wzdłuż promienia rezonatora dyskowego na osi symetrii są większe od przemieszczeń na powierzchni tego rezonatora /odpowiednio dla obu modów drgań/.
- Przemieszczenia wzdłuż osi symetrii rezonatora prętowego są większe od przemieszczeń na powierzchni /odpowiednio dla obu modów drgań/.

7. ZAKOŃCZENIE

Rezonatory o konwersji kierunku drgań stanowią pewną alternatywę dla stosowanych do tej pory źródeł drgań ultradźwiękowych, zwłaszcza średnich i dużych mocy. Znajomość zachowania się tego typu rezonatorów podczas drgań pozwoli z pewnością na ich szersze zastosowanie w praktyce. W niektórych przypadkach, np. przy kaskadowym łączeniu kilku konwerterów ([16]) możliwe jest uzyskanie efektu sumowania energii, a tym samym uzyskanie dużej amplitudy drgań powierzchni roboczej. Przy ograniczonych możliwościach uzyskiwania dużych mocy z pojedynczych źródeł ultradźwiękowych stosowanie takich układów ma dużą perspektywę rozwoju. Nie bez znaczenia jest również możliwość wykorzystania efektu odwrotnego, tj. dzielenie energii z jednego źródła poprzez konwerter bądź układ konwerterów do kilku obciążeń.

Duże zastosowanie praktyczne mogą znaleźć zarówno konwertery jednorodne jak i niejednorodne, w których jednym z rezonatorów może być element aktywny. Do prawidłowego ich obliczania i projektowania niezbędna jest dokładna znajomość sposobu ich zachowania się podczas drgań.

Celem niniejszej pracy było m.in. stworzenie aparatu obliczeniowego, za pomocą którego można przewidzieć niektóre własności projektowanego rezonatora przed jego realizacją, a także można przeprowadzać pewną korektę po realizacji. Ważne jest by ta korekta była prowadzona we właściwym kierunku.

Wydaje się, że cel ten został osiągnięty. Przedstawiony sposób rozwiązania zagadnienia wraz z programem na EMC /patrz załącznik do pracy/ umożliwia niemal bezpośrednie stosowanie wyników pracy. Przeprowadzone obliczenia wykonano dla rzeczywistych materiałów

co pozwala na zorientowanie się w rzędach poszczególnych wielkości.

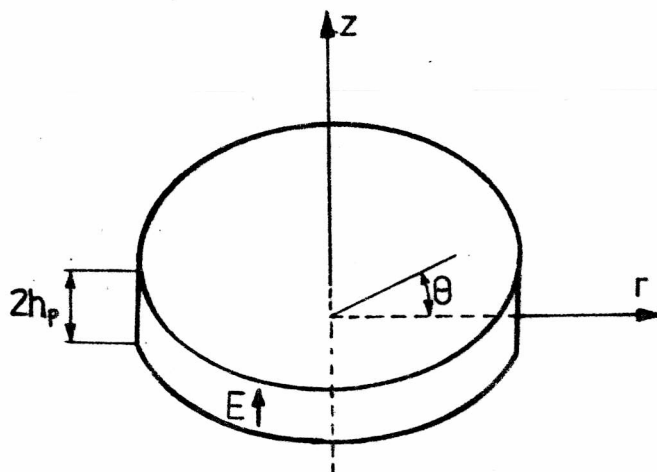
Praca stanowi zakończenie pierwszego ważnego etapu badań nad możliwością wykorzystania rezonatorów o konwersji kierunku drgań w praktyce, potwierdzając przydatność zaproponowanej metody do ich analizy.

Jak wynika z doniesień literaturowych badania takich rezonatorów prowadzone były jedynie w Japonii i w ZSRR; w Polsce - poza Instytutem Telekomunikacji i Akustyki Politechniki Wrocławskiej - nie prowadzono do tej pory żadnych prac naukowo-badawczych na ten temat.

Autor pragnie wyrazić głęboką wdzięczność mgr inż. Z.Janellemu za pomoc w kodowaniu programu i realizacji obliczeń na EMC.

Dodatek A

Równanie ruchu dysku piezoelektrycznego w metodzie elementów skończonych ([23],[24]).



Rys. A1. Dysk piezoelektryczny.

Zakładając, że pole elektryczne w dysku piezoelektrycznym jest równoległe do osi "z" i niezależne od "r" i "θ" równanie stanu opisujące materiał piezoelektryczny można zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} \{G\} \\ \mathcal{D}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [D^E] & -\{e\} \\ \{e\}^T & \epsilon_{zz}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\mathcal{E}\} \\ E_z \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

gdzie:

$\mathcal{D}_z$ - indukcja elektryczna

$\{e\}$ - wektor piezoelektryczny naprężenia

$[D^E]$ - tensor sprężystości, gdy $E_z = 0$

ϵ_{zz}^E - przenikalność elektryczna gdy $\{\mathcal{E}\} = 0$

E_z - pole elektryczne w kierunku osi z :

$$E_z = \frac{V_E}{2h_p} \quad (A.2)$$

$$(V_E = \int E_z dz = 2h_p E_z)$$

natomiast

$$\{G\} = \begin{Bmatrix} G_z \\ G_r \\ G_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} \quad (A.3)$$

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_{zz} \\ e_{zr} \\ e_{zr} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (A.4)$$

Macierz $[D^E]$ ma postać:

$$[D^E] = \begin{bmatrix} D_{33}^E & D_{43}^E & D_{43}^E & 0 \\ & D_{44}^E & D_{42}^E & 0 \\ & & D_{44}^E & 0 \\ (sym) & & & D_{44}^E \end{bmatrix} \quad (A.5)$$

/Gdy element jest czysto sprężysty zależność (A.1) sprowadza się do postaci danej wzorem (4.9) /.

Funkcja Lagrange'a ([24] , [46]) dla rozważanego systemu określająca jego energię jest dana zależnością:

$$\mathcal{L} = \sum_e (\mathcal{V}_e - H_e - T_e - W_e) \quad (A.6)$$

gdzie:

$\mathcal{V}_e$ - energia odkształcenia związana z elementem "e"

H_e - energia elektrostatyczna związana z elementem "e"

T_e - energia kinetyczna związana z elementem "e"

W_e - praca sił zewnętrznych na okręgach węzłowych elementu "e"

Energię odkształcenia /zgodnie z wzorem (4.19) i korzystając z zależności (4.8) , (A.1) , (4.11) i (A.2)/ można wyznaczyć w sposób następujący:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}_e &= \frac{1}{2} \int (\{\mathcal{E}\})^T \{G\}^e d\theta dr dz = \\
 &= \frac{1}{2} \int (\{\delta\}^e)^T [B]^T ([D]^e \{\mathcal{E}\}^e - \{e\} E_z) d\theta dr dz = \\
 &= \frac{1}{2} \int \left((\{\delta\}^e)^T [B]^T [D]^e [B] \{\delta\} + (\{\delta\}^e)^T [B]^T \{e\} \frac{V_E}{2h_p} \right) d\theta dr dz = \quad (A.7) \\
 &= \frac{1}{2} (\{\delta\}^e)^T [K]^e \{\delta\}^e - \frac{1}{2} \frac{V_E}{2h_p} (\{\delta\}^e)^T [G]^e \{e\}
 \end{aligned}$$

gdzie macierze:

$$[G]^e = 2 \pi \int [B]^T r dr dz \quad (A.8)$$

$$[K]^e - \text{dana wzorem (4.46)}$$

Wprowadzając tzw. wektor współczynników sprzężeń $\{P\}$ w postaci

$$\{P\}^e = [G]^e \{e\} \quad (A.9)$$

otrzymamy końcowe wyrażenie na energię odkształcenia

$$\mathcal{V}_e = \frac{1}{2} (\{\delta\}^e)^T [K]^e \{\delta\}^e - \frac{1}{2} \frac{V_E}{2h_p} (\{\delta\}^e)^T \{P\}^e \quad (A.10)$$

Energia elektrostatyczna H_e związana z elementem "e" jest dana zależnością:

$$H_e = \frac{1}{2} \int D_z E_z d\theta dr dz \quad (A.11)$$

Podstawiając $\mathcal{D}_z$ z równania (A.1) oraz korzystając z zasady przemienności iloczynu skalarnego wektorów / a także z wzorów (4.8) i przekształceń podanych we wzorze (A.7) / otrzymamy:

$$\begin{aligned} H_e &= \frac{1}{2} \int (\{e\}^T \{\mathcal{E}\}^e + \epsilon_{zz}^e E_z) E_z d\theta dr dz = \\ &= \frac{1}{2} \int [(\{\mathcal{E}\}^e)^T \{e\} + \epsilon_{zz}^e E_z] E_z d\theta dr dz = \\ &= \frac{1}{2} \int [(\{\mathcal{S}\}^e)^T ([B]^e)^T \{e\} E_z + \epsilon_{zz}^e E_z^2] d\theta dr dz = \\ &= \frac{1}{2} \frac{V_E}{2h_p} (\{\mathcal{S}\}^e)^T \{P\}^e + \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi \epsilon_{zz}^e \Delta R_E V_E^2}{4h_p^2} \end{aligned} \quad (A.12)$$

Energia kinetyczna T_e dana jest zależnością:

$$T_e = \frac{1}{2} \int \rho_e \{\dot{f}\}^T \{\dot{f}\} d\theta dr dz \quad (A.13)$$

gdzie

$$\{f\} = f(r, z, t)$$

Wprowadzając

$$f(r, z, t) = f(r, z) e^{j\omega t}$$

i korzystając z wzoru (4.40) i (4.51) otrzymamy

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{1}{2} \int \rho_e \omega^2 (\{\mathcal{S}\}^e)^T [N]^T [N] \{\mathcal{S}\}^e d\theta dr dz = \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 (\{\mathcal{S}\}^e)^T [M]^e \{\mathcal{S}\}^e \end{aligned} \quad (A.14)$$

gdzie:

$[M]^e$ - macierz mas elementu dana wzorem (4.51) .

Pracę sił zewnętrznych na okręgach węzłowych elementu "e" można zapisać w postaci:

$$W_e = (\{\delta\}^e)^T \{F\}^e \quad (A.15)$$

gdzie:

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} 2\pi r_i \bar{R}_i \\ 2\pi r_i \bar{Z}_i \end{Bmatrix}$$

$\bar{R}_i$ - wektor sił radialnych w węźle "i"

$\bar{Z}_i$ - wektor sił działających wzdłuż osi Z w węźle "i"

Podstawiając otrzymane w wzorach (A.10), (A.12), (A.14) i (A.15) wyrażenia na poszczególne rodzaje energii do wzoru (A.6) i minimalizując funkcjonal Lagrange'a $\mathcal{L}$ względem wszystkich parametrów $\{\delta\}$ otrzymuje się równanie ruchu w postaci ([23]) :

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\delta\} = \frac{V_E}{2h_p} \{P\} + \{F\} \quad (A.16)$$

gdzie

V_E - napięcie elektryczne

$\{P\}$ - wektor współczynników sprzężeń /wzór (A.9) /

$\{F\}$ - wektor sił zewnętrznych odpowiadających przemieszczeniom $\{\delta\}$.

Jeśli zaciski elementu piezoelektrycznego są zwarte ($V_E=0$) i gdy pominięte są siły zewnętrzne równanie ruchu uprości się do postaci:

$$([K] - \omega^2 [M]) \{S\} = 0 \quad (A.17)$$

Jest to równanie charakterystyczne układu mechanicznego przy okresowym wzbudzeniu. Rozwiązanie tego równania jest możliwe tylko dla określonych wartości ω , dla których wyznacznik

$$\det | [K] - \omega^2 [M] | = 0 \quad (A.18)$$

Wyznacznik ten jest rzędu n /dla macierzy o wymiarach $n \times n$ /; istnieje więc n pierwiastków będących rzeczywistymi wartościami ω^2 .

W dziedzinie drgań mechanicznych pierwiastki równania (A.18) są rzeczywiste.

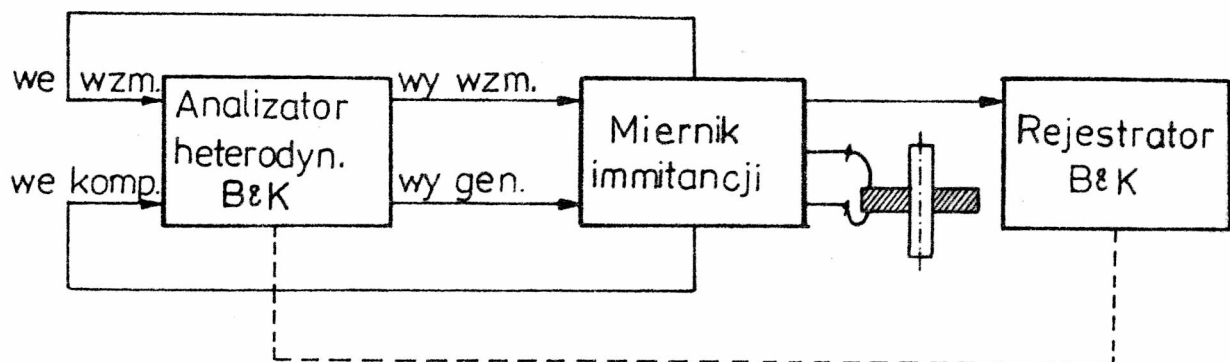
Dodatek B

Pomiar charakterystyki częstotliwościowej modułu admitancji elektrycznej konwertera niejednorodnego typu R-L.

Autor w pracach [9], [10] przedstawił niektóre wyniki badań eksperymentalnych rezonatorów o konwersji kierunku drgań typu L-L i typu R-L. Przedmiotem badań był m.in. konwerter niejednorodny typu R-L składający się z dysku piezoelektrycznego wykonanego z ceramiki PXE-4 i pręta tytanowego. Pręt i dysk były połączone z sobą za pomocą kleju cyjanoakrylowego firmy Hotinger Z-70, który zapewnia dobrą sztywność połączenia, niezbędną przy przenoszeniu drgań. Długość pręta została tak dobrana by jego podstawowa częstotliwość rezonansowa drgań podłużnych znajdowała się w zakresie rezonansu radialnego dysku.

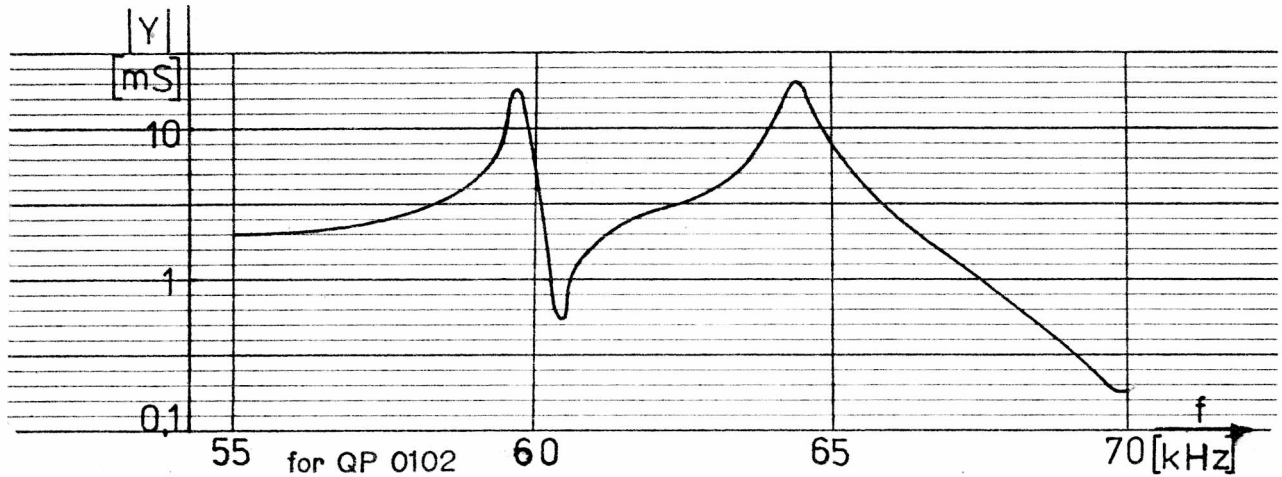
Jedną z wielkości charakteryzujących taki konwerter jest jego admitancja elektryczna wejściowa. Rys. B.1 przedstawia układ do pomiaru modułu admitancji elektrycznej konwertera typu R-L.

W układzie wykorzystano miernik immitancji elektrycznej współpracujący z analizatorem heterodynowym firmy Brüel - Kjaer typu 2010 i rejestratorem poziomu typu 2305.



Rys.B.1. Układ do pomiaru modułu admitancji elektrycznej konwertera niejednorodnego typu R-L.

Przykładową charakterystykę modułu admitancji elektrycznej przedstawiono na rys. B.2



Rys. B.2. Przykład charakterystyki częstotliwościowej modułu admitancji elektrycznej wejściowej konwertera niejednorodnego typu R-L.

Maksima tej charakterystyki znajdują się w pobliżu częstotliwości własnych konwertera. Mniejsza częstotliwość odpowiada modowi przeciwfazowemu, większa - modowi współfazowemu. Odstęp między częstotliwościami zależy od rozmiarów części wspólnej dla obydwu rezonatorów ; jest on tym większy im rozmiary te są większe. Wartości maksymalne modułu admitancji elektrycznej konwertera zależą od długości rezonatora prętowego.

Dodatek C

Sprawdzenie programu FEM2

W celu przetestowania programu dokonano porównania wyników obliczeń z wynikami otrzymanymi przez Gladwella ([7]).

Gladwell analizował m.in. płaską płytkę okrągłą o rozmiarach $\phi = 80$ [mm] i grubości $d = 1$ [mm] o następujących stałych materiałowych:

$$E = 13,69 \cdot 10^{10} \text{ [Pa]}$$

$$\nu = 0,384$$

$$\rho = 10\,000 \text{ [kg/m}^3\text{]}$$

Klasyczna analiza drgań radialnych wyrażona poprzez funkcje Bessla dała rezultat częstotliwości drgań własnych $f = 33\,484$ [Hz] ([8]). Stosując podział na 10 i 16 elementów otrzymano odpowiednio $f = 33\,529$ [Hz] i $f = 33\,514$ [Hz].

Obliczenia przeprowadzone z zastosowaniem programu przedstawionego w niniejszej pracy z podziałem na elementy trójkątne przyniosły rezultat $f = 33\,592$ [Hz]. Stanowi to wzrost częstotliwości o 0,2 % w stosunku do wyniku uzyskanego przez Gladwella.

Inny sprawdzian dotyczył pierścienia o przekroju trapezowym.

Tu wyniki przedstawiają się następująco:

stałe materiałowe $E = 0,718 \cdot 10^{11} \text{ [Pa]}$

$$\nu = 0,34$$

$$\rho = 2\,800 \text{ [kg/m}^3\text{]}$$

częstotliwość zmierzona:

$$f = 30\,100 \text{ [Hz]}$$

Stosując elementy trapezoidalne Gladwell otrzymał następujące wyniki:

podział na 4 elementy - $f = 29\,750$ [Hz]

podział na 12 elementów- $f = 29\,630$ [Hz]

podział na 16 elementów- $f = 29\,620$ [Hz]

Obliczenia przeprowadzone przez autora pracy z podziałem na elementy trójkątne /przy podziale na 20 elementów/ dały rezultat $f = 29\,590$ [Hz] co daje błąd 0,1 % w stosunku do ostatniego wyniku Gladwella.

Wyniki te potwierdzają poprawność obliczeń programu FEM 2 .

LITERATURA

1. R.E.D. Bishop, G.M.L. Gladwell, S. Michaelson: - "Macierzowa analiza drgań" tłum. z jęz.ang., Warszawa 1972
2. R.E.D. Bishop, D.C. Johnson: - "The Mechanics of Vibration", Cambridge University Press, 1960
3. T. Ciszewski, J. Golanowski, T. Gudra, E. Talarczyk: - "Opracowanie ultradźwiękowego układu do dyspersji osadów w procesie elektrodializy wód słonych" Raport Inst.Telekom. i Akustyki Politechniki Wrocławskiej I-28/R-062/78
4. J.P. Den Hertog: - "Mechanical Vibration", Mc Graw-Hill, 1956
5. M.R. Redwood: - "Mechanical Waveguides" Oxford, London, New York, Paris, Pergamon Press, 1960
6. W.N. Ginin, A.W. Stamow-Witkowski: - "Utrazwukowaja akusticeskaja sistema" patent ZSRR N⁰ 281047
7. G.M.L. Gladwell: - "The Vibration of Mechanical Resonators: Rings, Discs, of Arbitrary Profile", J.Sound Vibration, 1967, 6/3/, str. 351-364
8. G.M.L. Gladwell; N. Popplewell: - "The Vibration of Mechanical Resonators: Uniform Rings and Discs", J. Sound Vib. 1967, 6, str. 343-350
9. J. Golanowski, T. Gudra: - "Ultrasonic transducers using radial vibrations of a piezoelectric disk", Archives of Acoustics, 4, 3, 1979
10. J. Golanowski, T. Gudra: - "Eksperymentalne badanie układów rezonansowych z konwersją kierunku drgań" - prace XXIII Otwartego Seminarium z Akustyki, Lispa 1978

11. J. Golanowski, T. Gudra, Z. Janelli: - "Analiza przetwornika piezoelektrycznego metodą elementów skończonych", Materiały XXVII Otwartego Seminarium z Akustyki, Warszawa-Puławy 1980
12. J. Golanowski: - "Przetwornik elektroakustyczny z konwersją R-L kierunku drgań" patent PRL N^o 98858
13. J. Golanowski: - "Przetwornik elektroakustyczny z konwersją R-L kierunku drgań" patent PRL N^o 98529
14. K.K. Gupta: - "Eigenproblem Solution by a Combined Sturm Sequence and Inverse Iteration Technique" International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.7, 17-42, 1973, s.17-42.
15. R.F.S. Hearmon: - "An Introduction to Applied Anisotropic Elastic Body" - San Francisco, 1963/ za [46] /
16. K.Itoh, E.Mori - "Power Summation of Vibration Energy", Eight International Congress on Acoustics, London, 1974, s. 428
17. K.Itoh, E. Mori: - "Experimental Study on Directional Converters of Ultrasonic Vibration" - Seventh International Congress on Acoustics, Budapest, 1971, 25-V-7
18. K.Itoh, E.Mori: - "Study on resonator with directional converter /L-L type converter/" J.Acoustic. Soc.Japan,1972, vol 28, No 3 ,str. 127-135
19. K.Itoh, E.Mori: - "Studies on Resonator with Directional Converter /L-L-L type converter/" J.Acoustic. Soc. Japan 1973, vol. 29 N^o 1 str.23-36
20. K.Itoh, E.Mori: - "Study on Resonator with Directional Converter /R-L type converter/" J.Acoustic. Soc.Japan,1973,

vol.29, No 5, 307-314

21. K.Itoh, E.Mori: - "Resonator with Directional Converter of L-L Type by Electrical Equivalent Circuit" J. Acoustic. Soc. Japan, 1973 vol. 29, No 8, str. 458-464
22. K. Itoh, E.Mori: - "Studies on Resonator with Directional Converter /R-L type Converter with Circular Disk of Various Thickness/" J.Acoustic. Soc. Japan, 1974, vol. 30, No 11, str. 587-591
23. Y.Kagawa, T.Yamabuchi:- "Finite Element Simulation of Two-Dimensional Electromechanical Resonators" IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics, 1974, vol. SU-21, No 4, str. 275 - 283
24. Y.Kagawa, T. Yamabuchi: - "Finite Element Approach for a Piezoelectric Circular Rod" IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics, 1976, vol. SU-23, No 6, str. 379-385
25. S. Kaliski: - "Drgania i fale" - Warszawa 1966
26. J.Kruszewski, W.Gawroński, E.Wittbrodt, F.Najbar, S.Grabowski:- "Metoda sztywnych elementów skończonych " - Warszawa 1975
27. S.G. Leknitski: - "Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body" - San Francisco 1963 /za [46] /.
28. G.F. Lwowskaja: - "Teoretičeskoje issledowanije charakteristik diskostierźniewogo ultrazwukowogo instrumenta" Akustičeskij žurnal, t.XXII, 1976, 4, s.552-557
29. I. Malecki: - "Teoria fal i układów akustycznych" - Warszawa 1974

30. J.N. McDuff, J.C.Curreri: - "Organia w technice" - tłum. z jęz.ang., Warszawa 1960
31. E.Mori, K.Itoh: - "The Inwestigation of Resonator with Directional Conwerter" The 6-th International Congress on Acoustics, Tokyo, 1968, K-5-13.
32. Y. Morihiro, E.Mori: - "Elastic wibration mode conwerter for ultrasonic power aplication" - Seventh International Congress on Acoustic, Budapest 1971, 25 U 8, s.645-648
33. S. Nemoto, E.Mori: - "Multi-axis Energy Concentrator/Divider for Torsional Vibrations Utilizing Flexural Modes", J.Acous-tic.Soc.Japan, 1974, vol. 30 ,No 4, s.329-335
34. G.F. Powołockaja: - "Teoretičeskoje issledowanie instrumen-tov s preobrazowaniem napravlenija kolebanij", Akustičeskij Žurnał, t.XX, 1,1974, str. 87-94
35. G.F. Powołockaja: - "Rasčet dwuhstierźniewogo ultrazwukowogo instrumenta rabotajuszčego s małoj aktiwnoj nagrużkoj" Akustičeskij Žurnał, t.XXI, 4, 1975, s.598-604.
36. G.F. Powołockaja: - "Teoretičeskoje issledowanie sistem s preobrazowaniem napravlenija kolebanij" - VIII Wsies. akust. konf. - Referaty dokładow, , 1973 /za [35] /.
37. J.S. Przemieniecki: - "Theory of matrix structural analysis" Mc Graw Hill, N.Y.London 1968
38. A. Ralston: - "Wstęp do analizy numerycznej" - Warszawa 1971
39. G. Strang, G.J. Fix: - "An Analysis of the Finite Element Method" - New York, 1973
40. J.Szmelter, M.Dacko, S.Dobrociński, M.Wieczorek: - "Programy metody elementów skończonych" - Warszawa 1973.

41. J.Szmelter, M.Dacko, S.Dobrociński, M.Wieczorek: -"Metoda elementów skończonych w statyce konstrukcji" - Warszawa 1979
42. J.Szmelter: - "Metody komputerowe w mechanice" - Warszawa 1980
43. S.Timoshenko, J.M.Goodier: - "Teoria sprężystości" - tłum. z jęz. ang., Warszawa 1962
44. M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin, L.J. Topp: - "Stiffness and deflection analysis of complex structures" Journal Aero Sciences, 1956, 23- str. 805-823 /za [39], [46] /.
45. E.Skudrzyk: - "Proste i složne kolebatelnye sistemy" - tłum. z jęz. ang., Moskwa 1971
46. D.C. Zienkiewicz: - "Metoda elementów skończonych" - tłum. z jęz. ang., Warszawa 1968
47. Z.Żyszkowski: - "Podstawy elektroakustyki" wyd II Warszawa 1966

Analysis of Resonators with Directional Converter by Finite Elements Method exemplified to R-L type Converter

In ultrasonic technology to obtain medium and high amplitude vibrations, two types of transducers are applied generally: magnetostrictive and piezoceramic transducers. Maximum value of vibration amplitude for magnetostrictive transducers are limited by magnetostrictive effect nonlinearity, whereas for piezoceramic transducer - by low mechanical strength of piezoceramic material. One method of increasing the vibration amplitude upper limit is using of radiating source of special design.

Four resonator types with directional converter have been proposed by K.Ito and I.Mori /Japan/: L-L type, L-L-L- type, R-L type and L-R type /L - longitudinal, R - radial/. The aim of this work was to perform analysis of R-L type converter. One of the newest method /Finite Elements Method - FEM/ has been adapted. This method permits to find the displacement and stress values in any particular point of a resonator. It's possible to determine two components of displacement - longitudinal and transversal.

From analysis three types of resonator tuning have resulted, and these types can be used for another type converters. For all types of tuning the modal patterns in antiphase and inphase vibration modes have been presented. The choice of particular tuning depends on the way of converter using. Moreover in the paper the influence of rod and disc resonator dimensions on converter vibration proper frequencies have been described. The displacement distributions along symmetry axis and on the surface of the rod resonator and along disc resonator radius /on symmetry axis and on the surface/ have been determined. The uniform and nonuniform converters have been analysed. The obtained results confirm the usefulness

of the finite elements method to analysis this type resonators
- the better information on resonator vibrations can be achieved.

Odbiorcy:

	egz.
1. Biblioteka Główna Politechniki Wrocławskiej	1
2. Ośrodek Informacji Naukowo-Technicznej ITA	1
3. Promotor	1
4. Recenzenci	2
5. Egzemplarze autorskie	5

Razem:

10