

Andrzej Kisielewicz

O LICZBIE OPERACJI ALGEBRAICZNYCH W ALGEBRACH IDEMPOTENTNYCH

praca doktorska wykonana w Instytucie Matematycznym
Polskiej Akademii Nauk, Wrocław 1978.

promotor: doc.dr hab. Jerzy Płonka

SPIS TREŚCI

WSTĘP	2
 CZĘŚĆ I	
§1.1. Terminologia	5
§1.2. Przykłady	7
§1.3. Stosowane rezultaty	9
§1.4. Twierdzenia i wnioski	11
 CZĘŚĆ II	
§2.1. Uwagi ogólne	14
§2.2. Pierwsza część dowodu Twierdzenia 1 ..	15
§2.3. Druga część dowodu Twierdzenia 1	20
§2.4. Algebry diagonalne	22
§2.5. Dekompozycja diagonalna	30
§2.6. Trzecia część dowodu Twierdzenia 1 ...	32
§2.7. Dowody twierdzeń 2 i 3	37
 BIBLIOGRAFIA	39

W S T Ę P

Pojęcie algebry ogólnej jako pary $\langle A; F \rangle$, gdzie A jest zbiorem elementów, a F zbiorem pewnych operacji na A (tzn. funkcji postaci $f: A^n \rightarrow A$) wyrosło z uogólnienia takich pojęć jak grupa, pierścień czy ciało. Zgodnie z duchem algebry klasycznej cechą charakterystyczną algebry ogólnej $\langle A; F \rangle$ jest ilość i rodzaj operacji należących do F , zwanych fundamentalnymi.

W pracy tej prezentujemy inne podejście. Mianowicie, dwie algebry ogólne mające ten sam zbiór operacji algebraicznych (tzn. zbiór operacji generowanych przez operacje fundamentalne; por. §1.1.) traktujemy tutaj jako jednakowe. W ten sposób abstrahujemy niejako od struktury algebraicznej i patrzymy na algebrę $\mathcal{O} = \langle A; F \rangle$ po prostu jako na pewien zbiór operacji na A zamknięty na składanie funkcji i identyfikowanie zmiennych. Z tego też powodu zdecydowaliśmy się na stosowanie terminu "operacja" zamiast, częściej używanego w literaturze polskiej, terminu "działanie".

W [7] G. Grätzer, J. Plonka i A. Sekanina sformułowali dla takich zbiorów problem charakteryzacji liczby $p_n(\mathcal{O})$ - operacji zależnych dokładnie od n zmiennych (Colloq. Math. P. 691-692). Okazało się, iż przy założeniu, że istnieją operacje

stałe (t.j. niezależne od żadnej zmiennej) liczba $p_n(\mathcal{O})$ jest w pewnym sensie niezależna. Konkretnie, dla każdego ciągu liczb naturalnych $\langle p_0, p_1, p_2, \dots \rangle$, gdzie $p_0 > 0$, istnieje algebra $\mathcal{O}$ (odpowiedni zbiór operacji zamknięty na składanie funkcji i identyfikowanie zmiennych), taki że $p_n(\mathcal{O}) = p_n$ (por. [7]). Poza pewnym szczególnym przypadkiem, problem ten został również rozwiązany przy założeniu, że istnieje nietrywialna operacja unarna (t.j. zależna od jednej zmiennej i różna od $f(x) = x$); podane zostały mianowicie pewne warunki konieczne i dostateczne na liczbę $p_n(\mathcal{O})$ dotyczące jej podzielności (por. [6], [14], [15]).

Natomiast przy założeniu, że nie ma stałych ani nietrywialnych operacji unarnych (innymi słowy, że algebra jest idempotentna, t.j. każda operacja f spełnia równość $f(x, x, \dots, x) = x$) problem okazał się nieco bardziej skomplikowany: W [4] G. Grätzer i J. Płonka wysunęli następującą hipotezę:

Jeśli $\mathcal{O}$ jest algebrą idempotentną, wtedy istnieje takie $m \gg 0$, że dla każdego $n > m$, warunek $1 < p_n(\mathcal{O}) < \aleph_0$ pociąga nierówność $p_n(\mathcal{O}) < p_{n+1}(\mathcal{O})$.

Jak dotąd, hipoteza ta została zweryfikowana tylko przy pewnych dodatkowych założeniach; a mianowicie, przy założeniu, że $\mathcal{O}$ ma binarną przemianą operację algebraiczną [4], że $\mathcal{O}$ ma niediagonalną binarną operację algebraiczną o pewnej szczególnej własności [13], i wreszcie przy założeniu, że $p_2(\mathcal{O}) = 0, p_3(\mathcal{O}) > 0$ i $p_4(\mathcal{O}) > 0$ [5].

W niniejszej pracy całkowicie weryfikujemy tę hipotezę. Co więcej, dla danej algebry $\mathcal{O}$ charakteryzujemy liczbę m , począwszy od której ciąg $\langle p_n(\mathcal{O}) \rangle$ jest rosnący, jak również charakteryzujemy ciąg $\langle p_n(\mathcal{O}) \rangle$ dla $n \leq m$. Ponadto zostaje dowiedzione, że jeśli $p_n(\mathcal{O}) \geq \aleph_0$, to $p_n(\mathcal{O}) \leq p_{n+1}(\mathcal{O})$. Tak więc, pokazujemy w rezultacie, że dla każdej algebry idem-

potentnej istnieje liczba m , taka że dla $n > m$ albo ciąg $\langle p_n(\alpha) \rangle$ jest rosnący albo $p_n(\alpha) \leq 1$, przy czym algebry spełniające drugi warunek okazują się wyjątkowe i są dokładnie opisane. Wyniki tej pracy pokrywają się z wynikami zawartymi w [8] i [10].

Część I ma charakter wprowadzający. W §1.1 podajemy terminologię, którą się posługujemy, opartą na książce G. Grätzera [2]. W §1.2 podane zostają pewne przykłady algebr idempotentnych niezbędne do sformułowania wyników i dowodów. W §1.3, dla wygody czytelnika, cytujemy rezultaty pochodzące z prac [1, 4, 5, 11, 16], które wykorzystujemy w dowodach. Twierdzenia i wnioski zostają sformułowane w §1.4. Część II poświęcona jest ich udowodnieniu. Dowód głównego rezultatu (Twierdzenie 1) rozpada się w naturalny sposób na trzy części. Część pierwszą i drugą stanowią §§ 2.2 i 2.3. W trzeciej części pozostają nam do rozważenia algebry posiadające diagonalne operacje algebraiczne, co wymaga rozstrzygnięcia pewnych problemów dotyczących tych operacji (§2.4). W §2.5 konstruujemy pewną ogólną metodę badania tego typu algebr. Przy pomocy tej metody i rezultatów §2.4 kończymy dowód Twierdzenia 1 (§2.6) oraz dowodzimy twierdzeń 2 i 3 (§2.7).

Na zakończenie chciałbym podziękować prof. G. Grätzerowi, za jego cenne uwagi, które pozwoliły mi nadać pracy tej właściwą formę, a także uczestnikom seminarium prof. W. Narkiewicza w roku 1977/78, gdzie pracę moją miałem okazję referować, a w szczególności prof. W. Narkiewiczowi, doc. J. Płonce oraz dr J. Dudkowi, za uważne wysłuchanie i liczne uwagi, a przede wszystkim za życzliwą pomoc, bez której praca ta nie mogłaby być napisana.

Wrocław, 16 maja 1978.

C Z Ę Ś Ć I

§1.1. Terminologia

Przez algebrę ogólną, krótko: algebrę, rozumiemy parę $\langle A; F \rangle$, gdzie A jest zbiorem elementów, a F zbiorem operacji na A , tzn. funkcji postaci $f: A^n \rightarrow A$ ($n \geq 0$), zwanych operacjami fundamentalnymi. Dla $n = 0$, f jest po prostu funkcją ze zbioru $A^0 = \{ \emptyset \}$ w zbiór A , a więc stałą. Każdą operację postaci $e_1^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1$, gdzie $n > 0, 1 \leq i \leq n$, nazywamy trywialną. Zbiór n -arnych operacji algebraicznych algebry $\mathcal{U} = \langle A; F \rangle$ definiujemy jak następuje:

/i/ Operacje trywialne $e_1^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ są n -arnymi operacjami algebraicznymi ($1 \leq i \leq n$).

/ii/ Jeśli $f(x_1, x_2, \dots, x_m) \in F$, a $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ są n -arnymi operacjami algebraicznymi, to operacja $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$ jest n -arną operacją algebraiczną.

/iii/ n -arnymi operacjami algebraicznymi są te i tylko te, które otrzymujemy stosując /i/ i /ii/ skończoną ilość razy.

Równość operacji rozumiemy jako zwykłą równość funkcji. Mówiąc operacja algebraiczna mamy na myśli n -arną operację algebraiczną dla dowolnego n . W ten sposób zbiór operacji algebraicznych jest to najmniejszy zbiór zamknięty na składanie funkcji zawierający operacje fundamentalne i trywialne (te ostatnie umożliwiają po prostu permutowanie i identyfikowanie zmiennych). Fakt ten wyrażamy często skrótowo, mówiąc że operacje fundamentalne generują zbiór operacji algebraicznych lub wręcz, algebrę.

Algebrę $\mathcal{U} = \langle A; F \rangle$ nazywamy reduktem algebry $\mathcal{A} = \langle A; F_1 \rangle$ jeśli zbiór

operacji algebraicznych $\mathcal{O}$ zawarty jest w zbiorze operacji algebraicznych $\mathcal{K}$. Jeśli zbiory te pokrywają się, to przyjmujemy $\mathcal{O} = \mathcal{K} \equiv$. Jeśli więc w pracy tej mówimy, że algebra $\mathcal{O}$ jest np. półgrupą, to oznacza tyle, że istnieje półgrupa $\mathcal{G}$, taka że $\mathcal{O} = \mathcal{G}$.

O operacji $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ na zbiorze A mówimy, że zależy od zmiennej x_i , jeśli istnieją $a_1, a_2, \dots, a_n, a_i^* \in A$, takie że $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i^*, a_{i+1}, \dots, a_n)$. Operację n -arną nazywamy się istotnie n -arną, jeśli zależy od wszystkich zmiennych. Podobnie pojęcia te definiujemy dla dowolnej funkcji n zmiennych.

Na mocy definicji operacji algebraicznych, dla każdej operacji n -arnej $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ istnieje operacja istotnie m -arna $g(x_1, x_2, \dots, x_m)$, taka że $m \leq n$ oraz $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Dlatego zajmując się mocą zbioru operacji wygodnie jest rozważać tylko operacje istotnie n -arne dla każdego n . I tak, dla danej algebry $\mathcal{O}$ i $n \geq 2$ przez $P_n(\mathcal{O})$ oznaczamy zbiór istotnie n -arnych operacji algebraicznych; moc tego zbioru oznaczamy przez $p_n(\mathcal{O})$. Ponadto przyjmując, że $p_0(\mathcal{O})$ jest to liczba stałych unarnych operacji algebraicznych, zaś $p_1(\mathcal{O})$ - liczba istotnie unarnych operacji algebraicznych z wyłączeniem trywialnej, otrzymujemy ścisłą definicję liczby $p_n(\mathcal{O})$ dla każdego $n \geq 0$, która odpowiada definicji zasugerowanej we Wstępie. Gdy nie zachodzi możliwość nieporozumienia, często piszemy krótko P_n i p_n zamiast $P_n(\mathcal{O})$ i $p_n(\mathcal{O})$. Zauważmy w tym miejscu, że jeśli zbiór operacji fundamentalnych jest mocy $\aleph_0$, to wobec "finitarnego" charakteru definicji operacji algebraicznych, $p_n \leq \aleph_0$ dla każdego n .

Operację $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nazywamy idempotentną, jeśli zależy co najmniej od jednej zmiennej i spełnia równość $f(x, x, \dots, x) = x$. Jeśli każda operacja algebraiczna algebry $\mathcal{O}$

jest idempotentna, to mówimy, że algebra $\mathcal{U}$ jest idempotentna. Nietrudno zauważyć, iż jest to równoważne warunkowi $p_0 = p_1 = 0$. Biorąc pod uwagę definicję operacji algebraicznych, łatwo zauważyć także, że na to aby algebra była idempotentna potrzeba i wystarcza, żeby operacje fundamentalne były idempotentne.

W końcu, operację $d(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nazywamy diagonalną jeśli jest idempotentna i spełnia równość:

$$d(d(x_1, \dots, x_n), d(x_1^2, \dots, x_n^2), \dots, d(x_1^n, \dots, x_n^n)) = d(x_1, x_2^2, \dots, x_n^n)$$

W niniejszej pracy wygodnie nam będzie również przyjąć analogiczną do poprzedniej definicję, że algebrę nazywamy diagonalną, jeśli tylko każda operacja algebraiczna jest diagonalna (co, zwracamy uwagę, nie pokrywa się z terminologią wprowadzoną w [11]; por. §2.4).

§1.2. Przykłady

W rozdziale tym podajemy przykłady liczby p_n dla pewnych algebr idempotentnych. Trzy pierwsze, wobec naszych rezultatów, okazują się wyjątkowe.

P1. Rozważmy półkratę $\langle L; \cdot \rangle$, t.j. idempotentną i przemenną półgrupe. Łatwo zauważyć, iż jedyną operacją należącą do P_n jest operacja postaci $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$. W związku z tym, $p_n = 1$ dla każdego $n \geq 2$.

P2. Niech $\langle G; +, 0 \rangle$ będzie nietrywialną grupą Boolea, t.j. grupą abelową, w której zachodzi równość $x + x = 0$. Rozważmy algebrę $\langle G; g \rangle$, gdzie g jest ternarną operacją zdefiniowaną następująco: $g(x, y, z) = x + y + z$. Łatwo zauważyć, że g jest idempotentna. Algebrę $\langle G; g \rangle$ nazywamy idempotentnym reduktem grupy Boolea $\langle G; +, 0 \rangle$. Zwróćmy uwagę, że każda operacja algebraiczna w tej algebrze jest postaci $x_1 + x_2 + \dots + x_{2k+1}$, w związku z czym mamy, $p_n = 1$ dla każdego nieparzystego $n \geq 1$, oraz $p_n = 0$ dla pozostałych.

P3. Rozważmy algebrę $\mathcal{D} = \langle D; d \rangle$, gdzie operacja $d = d(x_1, x_2, \dots, x_r)$ jest diagonalna. Algebry tej postaci były wprowadzone i rozważane przez J. Płonkę [11]. Jeśli d jest istotnie r -arna, wtedy za K. Urbanikiem [16], algebrę $\mathcal{D}$ nazywać będziemy r -wymiarową algebrą diagonalną.

(Algebra ta jest diagonalna w sensie definicji przyjętej w §1.1 ; por R3, §1.3). Zauważmy, że jedno-wymiarowa algebra diagonalna jest algebrą trywialną, tzn. taką, w której wszystkie operacje algebraiczne są trywialne. Jeśli $\mathcal{D}$ jest r -wymiarową algebrą diagonalną $r \geq 1$, wtedy na mocy R5, §1.3, $p_n > 0$ dla $2 \leq n \leq r$ oraz $p_n = 0$ dla pozostałych przypadków.

Dwa dalsze przykłady pochodzą od K. Urbanika [16]:

P4. Niech $\langle G; g \rangle$ będzie idempotentnym reduktom nieskończonej grupy Boolea. Dla $m \geq 5$ definiujemy m -arną operację p^m jak następuje: $p^m(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_m$, jeśli wszystkie elementy $x_1, x_2, \dots, x_m$ należą do jakiejś podalgebry $\langle G; g \rangle$ generowanej przez mniej niż m elementów oraz $p^m(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_1$ w przeciwnym wypadku. Połóżmy $\mathcal{U} = \langle G; g, p^m \rangle$. Łatwo pokazać, (por. [16]), że dla $n < m$, $p_n = 1$ jeśli n jest nieparzyste i różne od 1 oraz $p_n = 0$ dla pozostałych n . Natomiast dla każdego $n \geq m$ mamy $p_n > 0$.

P5. Niech $\langle D; d \rangle$ będzie r -wymiarową algebrą diagonalną ($r \geq 1$). Zakładając, że D jest nieskończony (por. R3, §1.3), dla $m \geq 3$ definiujemy m -arną operację p^m tak samo jak w poprzednim przykładzie, z tym, że bierzemy odpowiednio pod uwagę podalgebrę $\langle D; d \rangle$. Połóżmy $\mathcal{U} = \langle D; d, p^m \rangle$. Łatwo znowu pokazać (por. [16]), że dla $n < m$, $p_n = p_n(\langle D; d \rangle)$, natomiast dla pozostałych n mamy $p_n > 0$.

§1.3. Stosowane rezultaty

W rozdziale tym przytaczamy rezultaty z innych prac, które zostaną wykorzystane w naszych dowodach. Dwa poniższe są po prostu weryfikacjami pewnych szczególnych przypadków hipotezy G.Grätzera i J.Płonki.

R1. (G.Grätzer, J.Płonka [4]) Jeśli algebra idempotentna posiada przemienną binarną operację algebraiczną, a nie jest półkratą, wtedy dla każdego $n \geq 2$, $p_{n+1} \geq p_n + n-1$.

R2. (G.Grätzer, J.Płonka [5]) Jeśli algebra idempotentna spełnia $p_2 = 0, p_3 > 0, p_4 > 0$, wtedy dla każdego $n \geq 2$, $p_{n+1} \geq p_n + 1$.

Kolejny rezultat jest charakteryzacją r -wymiarowych algebr diagonalnych.

R3. (J.Płonka [11]) Algebra $\mathcal{D}$ jest r -wymiarową algebrą diagonalną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją zbiory $A_1, A_2, \dots, A_r$ oraz takie że $\mathcal{D} = \langle A_1 \times A_2 \times \dots \times A_r; d \rangle$, gdzie operacja $d = d(x_1, x_2, \dots, x_r)$ zdefiniowana jest następująco:

$$d(\langle a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^r \rangle, \langle a_2^1, a_2^2, \dots, a_2^r \rangle, \dots, \langle a_r^1, a_r^2, \dots, a_r^r \rangle) = \langle a_1^1, a_2^2, \dots, a_r^r \rangle$$

Co więcej, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jest operacją algebraiczną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(\langle a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^r \rangle, \langle a_2^1, a_2^2, \dots, a_2^r \rangle, \dots, \langle a_n^1, a_n^2, \dots, a_n^r \rangle) = \langle a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, \dots, a_{i_r}^r \rangle$$

gdzie $i_1, i_2, \dots, i_r \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Korzystamy również z następującego lematu:

R4. (J.Dudek [1]) Niech $x \cdot y$ będzie idempotentną, niediagonalną binarną operacją. Dla każdego $n \geq 2$ definiujemy

$$f_n = x_1 \cdot (x_2 \cdot (\dots (x_{n-1} \cdot x_n) \dots)) \quad , \quad g_n = (\dots ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \dots \cdot x_{n-1}) \cdot x_n$$

Wtedy (dla $n \geq 2$) wszystkie f_n lub wszystkie g_n są istotnie n -arne.

Ostatni cytowany rezultat dotyczy zbioru $S(\mathcal{O})$ definio-
wanego dla danej algebry $\mathcal{O}$ jak następuje: $S(\mathcal{O}) = \{s: p_s(\mathcal{O}) > 0\}$.
Zanim sformułujemy ten rezultat, wprowadzimy oznaczenia dla
pewnych zbiorów liczb naturalnych. Mianowicie, dla $n \geq 1$
przyjmujemy $D_n = \{s: 2 \leq s \leq n\}$ oraz $A_n = \{s: s \geq n\}$
(zauważmy, że D_1 jest zbiorem pustym). Natomiast przez B ozna-
czymy zbiór nieparzystych liczb naturalnych większych niż 1,
t.j. $B = \{3, 5, 7, \dots\}$.

R5. (K. Urbanik [16]) Niech $\mathcal{O}$ będzie algebrą idempotentną.
Jeśli $S(\mathcal{O}) \neq A_2, A_3$, to zachodzi jeden z poniższych przypadków

$$\text{/i/ } S(\mathcal{O}) = D_n \quad (n \geq 1).$$

$$\text{/ii/ } S(\mathcal{O}) = B$$

$$\text{/iii/ } S(\mathcal{O}) = A_m \cup D_n \quad (n \geq 1, m \geq 4, m > n+1).$$

$$\text{/iv/ } S(\mathcal{O}) = A_m \cup B \quad (m \geq 5).$$

Co więcej,

1. $S(\mathcal{O}) = D_n$ dla $n \geq 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{O}$ jest
 n -wymiarową algebrą diagonalną.

2. $S(\mathcal{O}) = B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{O}$ jest idempoten-
tnym reduktom grupy Boolea.

3. $S(\mathcal{O}) = A_m \cup D_n$ dla $n \geq 1, m \geq 4$ i $m > n+1$ wtedy i tylko
wtedy, gdy $\mathcal{O} = \langle A; \{d\} \cup F \rangle$, gdzie $\langle A; d \rangle$ jest n -wymia-
rową algebrą diagonalną, zbiór F zawiera istotnie m -arną ope-
rację oraz wszystkie operacje f z F zależą od co najmniej
 m zmiennych i spełniają równość $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1$ jeśli
tylko elementy $x_1, x_2, \dots, x_k$ należą do jakiejś podalgebry
algebry $\langle A; d \rangle$ generowanej przez mniej niż m elementów.

4. $S(\mathcal{O}) = A_m \cup B$ dla $m \geq 5$ i $p_m > 1$ wtedy i tylko wtedy,
gdy $\mathcal{O} = \langle A; \{g\} \cup F \rangle$, gdzie $\langle A; g \rangle$ jest idempotentnym
reduktom grupy Boolea, zbiór F zawiera istotnie m -arną ope-
rację oraz wszystkie operacje f z F zależą co najmniej od m
zmiennych i spełniają równość $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1$ jeśli

tylko elementy $x_1, x_2, \dots, x_k$ należą do jakiejś podalgebry algebry $\langle A; g \rangle$ generowanej przez mniej niż m elementów.

Uwaga. W oryginale [16] w tezie 4., R5 nie ma założenia " $p_m > 1$ ", jednakże dowód przeprowadzony w [16] wskazuje, że takie założenie może być przyjęte, podczas gdy zauważmy, że bez niego sformułowanie jest nieścisłe, bowiem mamy np.

$$A_6 \cup B = A_5 \cup B.$$

Wobec R5 widzimy, że za wyjątkiem dwóch przypadków, kiedy $S(\mathcal{O}) = A_2$ lub A_3 , zbiór $S(\mathcal{O})$ determinuje możliwą strukturę algebry $\mathcal{O}$ i dlatego weryfikacja hipotezy G.Grätzera i J.Płonki jest wtedy stosunkowo łatwa (por. §2.3). W istocie, główna trudność leży właśnie w tych dwóch przypadkach, które obejmują, jak się okazuje, szeroką i bardzo różnorodną klasę algebr.

§1.4. Twierdzenia i wnioski

Ponieważ w dalszym ciągu wszystkie rozważane przez nas algebry są idempotentne, a rozważane operacje algebraiczne, często więc będziemy opuszczać te przymiotniki.

Teraz wprowadzimy definicję, która odgrywa kluczową rolę w naszej pracy.

DEFINICJA. Dla danej algebry $\mathcal{O}$, przez $\mu(\mathcal{O})$ oznaczamy najmniejszą liczbę naturalną m taką, że dla każdego $k > m$ istnieje istotnie k -arna operacja algebraiczna, która nie jest diagonalna. Jeśli żadna liczba nie ma tej własności, to kładziemy $\mu(\mathcal{O}) = \infty$.

Nasz główny wynik jest następujący:

TWIERDZENIE 1. Niech $\mathcal{O}$ będzie algebrą idempotentną różną od półkraty. Jeśli $\mu(\mathcal{O}) \neq \infty$, to dla każdego $n \geq \mu(\mathcal{O})$

/1/

$$P_{n+1}(\mathcal{O}) \geq P_n(\mathcal{O}) + 1$$

Przykłady algebr spełniające $p_n = n$ ($n \geq 2$), rozważane w [12], pokazują, że nierówność /1/ w ogólnym przypadku nie może być ulepszona. Co więcej, Wniosek 1 pokazuje, że liczba $\mu(U)$ w Twierdzeniu 1 jest w pewnym sensie minimalna. Zauważmy także, że jeśli $p_n \geq N_0$, to nierówność /1/ jest równoważna nierówności $p_{n+1} \geq p_n$, jednakże i w tym przypadku nie może być ona ulepszona, jako że bardzo łatwo wskazać przykłady algebr spełniających $p_n = m \geq N_0$ dla n większych od pewnego m (por. Wniosek 3, §2.4).

Twierdzenie 2. Jeśli U jest algebrą idempotentną, to $\mu(U) = \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy U jest albo idempotentnym reduktem grupy Boolea albo algebrą diagonalną.

Twierdzenia 1 i 2, Wniosek 3 charakteryzujący w pewnym stopniu algebry diagonalne (§2.4) oraz przykłady P1, P2 i P3 całkowicie weryfikują hipotezę G. Grätzera i J. Płonki. Jeśli więc $\mu(U) = \infty$, wtedy ciąg $\langle p_n \rangle$ scharakteryzowany jest przez Twierdzenie 2. Jeśli $\mu(U) \neq \infty$, wtedy na mocy Twierdzenia 1 i P1, albo $p_n = 1$ dla $n \geq 2$, albo ciąg $\langle p_n \rangle$ jest rosnący począwszy od $n = \mu(U)$. Poniżej sformułowane twierdzenie charakteryzuje ciąg $\langle p_n \rangle$ dla $n \leq \mu(U)$:

Twierdzenie 3. Niech U będzie algebrą idempotentną spełniającą $1 < \mu(U) < \infty$. Przjmując $m = \mu(U)$, zachodzi jeden z poniższych przypadków:

/i/ $p_n = p_n(D)$ dla $n \leq m$, gdzie D jest pewną algebrą diagonalną.

/ii/ m jest parzyste i $p_n = p_n(I)$ dla $n \leq m$, gdzie I jest idempotentnym reduktem grupy Boolea.

Na odwrót; jeśli ciąg $\langle p_0, p_1, \dots, p_m \rangle$ spełnia jeden z warunków /i/ lub /ii/, to istnieje algebra idempotentna U taka, że $\mu(U) = m$ oraz $p_n(U) = p_n$ dla $n \leq m$.

Dwa wnioski wydają się być warte sformułowania:

WNIOSEK 1. Niech dla danej algebry idempotentnej $\mathcal{O}_V$, $m(\mathcal{O}_V)$ będzie najmniejszą liczbą naturalną taką, że dla każdego $n \geq m(\mathcal{O}_V)$ zachodzi nierówność /1/. Wtedy $m(\mathcal{O}_V) = \mu(\mathcal{O}_V)$ lub $m(\mathcal{O}_V) = 1$.

Jest to bezpośrednia konsekwencja Twierdzenia 3. Żeby to wykazać, wystarczy zauważyć, że na mocy R3, dla r -wymiarowej algebry diagonalnej ($r > 3$), ciąg $\langle p_2, p_3, \dots, p_r \rangle$ jest do połowy ściśle rosnący, a od połowy ściśle malejący. Na mocy drugiej części Twierdzenia 3 istnieją więc algebry, dla których $\mu(\mathcal{O}_V) \neq m(\mathcal{O}_V) = 1$. W pozostałych przypadkach $\mu(\mathcal{O}_V) = m(\mathcal{O}_V)$ (por. też Wniosek 3, §2.4).

Żeby sformułować drugi wniosek, przyjmijmy, że ciąg liczb kardynalnych $\langle p_n \rangle$ nazywamy warunkowo ściśle rosnącym, jeśli jest rosnący i $p_n < \aleph_0$ pociąga $p_{n+1} > p_n$ (por. [4]).

WNIOSEK 2. Jeśli dla algebry idempotentnej $\mathcal{O}_V$, ciąg $\langle p_m, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots \rangle$ nie jest warunkowo ściśle rosnący dla żadnego $m \geq 2$, to $\mathcal{O}_V$ jest albo półkratą albo idempotentnym reduktem grupy Boolea albo r -wymiarową algebrą diagonalną.

Wobec Wniosku 3, (§2.4), jest to bezpośrednia konsekwencja Twierdzeń 1 i 2. Wniosek ten formułujemy dlatego, że stanowi on wspólne uogólnienie Wniosku 1 z [4], Wniosku 2 z [4] i Twierdzenia z [3].

W pracy niniejszej dowodzimy ponadto pewnego twierdzenia dotyczącego algebr diagonalnych, które stosujemy w naszych dowodach i którego konsekwencją jest użyteczny, jak można było się zorientować, Wniosek 3; jednakże ponieważ nie dotyczy ono bezpośrednio problematyki związanej z liczbą p_n , więc formułujemy je w tekście (Twierdzenie 1, §2.4).

C Z E S C I I

§2.1. Uwagi ogólne

Twierdzenie 1 zostało dotąd udowodnione w pewnych szczególnych przypadkach. W dotychczasowych pracach (por. [4, 5, 13]) technika dowodu polegała na tym, że z operacji należących do P_n konstruowało się odpowiednią ilość operacji należących do P_{n+1} , wykorzystując przy tym szczególne własności algebry, które się zakładało. Chcąc posłużyć się tą techniką, rozbijamy dowód nasz na trzy przypadki (wtedy o rozważanej algebrze można powiedzieć coś więcej, niż tylko to, że jest idempotentna). I tak, w §2.2 zakładamy, że algebra ma niediagonalną operację istotnie binarną. Przy dodatkowym założeniu że operacja jest przemienna przypadek ten został rozważony w [4]. Odnosny rezultat, R1, wykorzystujemy w naszym dowodzie. W §2.3 zakładamy, że algebra nie ma w ogóle operacji istotnie binarnych ($p_2 = 0$). Zauważmy, że wobec klasyfikacji K. Urbanika R5, przy $\mu(OV) \neq \infty$, jest to równoważne założeniu, że algebra OV spełnia albo warunek /iii/ z R5 dla $n \neq 1$ albo warunek /iv/ z R5 albo $S(OV) = A_3$. Dla dwóch pierwszych przypadków druga część R5 określa możliwą strukturę algebraiczną OV , a ponieważ ostatni przypadek został rozważony w [5] (por. R2), więc możemy to wykorzystać w naszym dowodzie. Warto zauważyć, że pewne podobieństwo tej struktury w obu przypadkach pozwala nam na potraktowanie ich łącznie. Jako ostatnie, pozostają nam do rozważenia algebry, gdzie $p_2 > 0$, ale wszystkie binarne operacje są diagonalne. Jest to w istocie część najtrudniejsza, a to z tego względu, że wyrażając się obrazowo, operacje diagonalne nie nadejdą się do konstruowania operacji o wyższych arnościach. Na przykład okazało się (por. [1]), że o ile dla $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_n$

i niediagonalnej operacji $x \cdot y \in P_2$, jedna z operacji $f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i \cdot x_{n+1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in P_{n+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), o tyle dla operacji diagonalnej $x \cdot y$ nie jest to prawdziwe. Dlatego też, w tym przypadku trzeba było zastosować nieco inne podejście, wykorzystujące specyficzne własności operacji diagonalnych. Jednak dotychczasowe wiadomości o tych operacjach okazały się niewystarczające. nierozstrzygnięte były istotne dla naszych rozważań problemy, takie jak: Czy algebra generowana przez operacje diagonalne jest diagonalna? Czy istnieje algebra diagonalna, która by nie była r -wymiarową algebrą diagonalną dla żadnego r ?

Stąd, przed przystąpieniem do trzeciej części dowodu Twierdzenia 1 (§2.6), dowodzimy twierdzenia rozstrzygającego nazwane problemy (§2.4) i konstruujemy ogólną metodę badania algebr posiadających nietrywialne operacje diagonalne (§2.5), która wydaje się użyteczną do szeregu innych pokrewnych problemów (por. np. [9]). Uzyskane wyniki wykorzystujemy również w dowodach twierdzeń 2 i 3 (§2.7).

§2.2. Pierwsza część dowodu Twierdzenia 1

Zgodnie z tym co powiedziane w §2.1, w rozdziale tym zakładamy, że $UV = \langle A; F \rangle$ jest algebrą posiadającą przemienną operację algebraiczną. Pokażemy, że wtedy nierówność $/1/$ zachodzi dla $n \geq 1$ (Na mocy Twierdzenia 3 mamy tu istotnie $\mu(UV) = 1$).

Dla dowolnej operacji $x \cdot y \in P_2$ definiujemy indukcyjnie

$$g_1 = g_1(x_1) = x_1$$

i dla $s \geq 1$

$$g_{s+1} = g_{s+1}(x_1, x_2, \dots, x_{s+1}) = g_s \cdot x_{s+1}$$

Teraz podamy tezy, które stanowią kolejne kroki dowodu, a następnie udowodnimy je.

/i/ Istnieje $x \cdot y \in P_2$ takie, że $g_s \in P_s$ dla każdego $s \geq 2$.

/ii/ Jeśli $x \cdot y$ jest takie, jak określone w /i/, to dla każdej operacji $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_n$ istnieje indeks k ($1 \leq k \leq n$), taki, że dla każdego $s \geq 1$ operacja

$$f_{ks} = f(x_{s+1}, \dots, x_{s+k-1}, g_s, x_{s+k}, \dots, x_{s+n-1}) \in P_{n+s-1}$$

/iii/ Niech dla danej operacji $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_n$ ($n \geq 1$) $k(f)$ oznacza najmniejsze k takie, że dla każdego $s \geq 1$, $f_{ks} \in P_{n+s-1}$. Definiujemy

$$f_L = f(x_1, \dots, x_{k(f)-1}, x_{k(f)}, x_{n+1}, x_{k(f)+1}, \dots, x_n)$$

Wtedy L jest różnowartościowym odwzorowaniem P_n w P_{n+1} .

/iv/ Jeśli $\mathcal{G} = \langle A; x \cdot y \rangle$ jest grupoidem nieprzemiennym, wtedy dla $n \geq 1$ zachodzi

$$(n+1) \cdot p_n(\mathcal{G}) \leq n \cdot p_{n+1}(\mathcal{G})$$

Na mocy /iii/ mamy nierówność $p_{n+1} \geq p_n$ ($n \geq 1$). Żeby ją ulepszyć, zauważmy, że f_L jest operacją algebraiczną reduktu

$\mathcal{G} = \langle A; x \cdot y \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest operacją algebraiczną $\mathcal{G}$. Wystarczy zatem dowieść nierówności /1/ dla grupoidów. Dla $n = 1$, /1/ jest oczywiste, jako że $\mathcal{G}$ jest grupoidem idempotentnym, a więc $p_1 = 0$, a $p_2 > 0$. Jeśli $\mathcal{G}$ jest grupoidem przemiennym, to dla $n \geq 2$ /1/ zachodzi na mocy R1. Jeśli $\mathcal{G}$ jest grupoidem nieprzemiennym to tezę otrzymujemy na mocy /iv/.

Teraz dowiedzimy naszych tez.

Dowód /i/. Na mocy założenia istnieje binarna niediagonalna operacja $x \circ y \in P_2$. Na mocy R4, jedna z operacji $x \cdot y = x \circ y$ lub $x \cdot y = y \circ x$ spełnia tezę /i/.

Dowód /ii/. Najpierw zauważmy, że operacja f_{ks} zależy od wszystkich zmiennych $x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_{s+n-1}$. Rzeczywiście, podstawienie $x_1 = x_2 = \dots = x_s$ w f_{ks} , na mocy definicji g_s , daje w wyniku $f(x_{s+1}, \dots, x_{s+k-1}, x_s, x_{s+k}, \dots, x_{s+n-1})$, która z zało-

zenia jest istotnie n -arna. Łatwo zaś zauważyć, że jeśli operacja zależy od jakiejś zmiennej po identyfikacji różnych od niej zmiennych, to musi zależeć od tej zmiennej przed identyfikacją. W dalszym ciągu często będziemy wykorzystywać ten fakt, traktując go jako oczywisty.

Z kolei, zauważmy, że jeśli dla ustalonego $k, f_{ks} \notin P_{n+s-1}$, to $f_{k(s+1)} \notin P_{n+s}$, jako że na mocy definicji g_s zachodzi

$$/3/ \quad g_{s+1} = g_s(x_1 \cdot x_2, x_3, x_4, \dots, x_{s+1})$$

Założmy, że dla każdego k istnieje s takie, że $f_{ks} \notin P_{n+s-1}$. Na mocy ostatniej uwagi, istnieje więc największe s takie, że $f_{ks} \notin P_{n+s-1}$. Oznaczmy je przez s_k .

Wobec podstawienia $x_1 = x_2$ w /3/, f_{ks_k} zależy od wszystkich zmiennych $x_3, x_4, \dots, x_s$. Na początku zauważyliśmy, że zależy również od zmiennych z wyższymi indeksami, więc wobec definicji s_k , nie zależy od jednej ze zmiennych x_1 lub x_2 .

Pokażemy, że jeśli f_{ks} nie zależy od x_2 , to dla każdego $r \geq 1$, $f_{k(s+r)}$ nie zależy od x_2 . Rzeczywiście, wobec /3/ widzimy od razu, że $f_{k(s+1)}$ nie zależy od x_3 . Możemy więc za x_3 podstawiać dowolne elementy nie zmieniając wartości $f_{k(s+1)}$; połóżmy $x_3 = x_1 \cdot x_2$.

Na mocy /3/ i definicji g_s , uwzględniając fakt, że operacja $x \cdot y$ jest idempotentna, otrzymujemy dla $s \geq 2$

$$g_{s+1}(x_1, x_2, x_1 \cdot x_2, x_4, \dots, x_{s+1}) = g_s(x_1, x_2, x_4, \dots, x_{s+1})$$

A zatem, $f_{k(s+1)}$ nie zależy od x_2 , a przez indukcję również $f_{k(s+r)}$ dla każdego $r \geq 1$.

Z kolei, jeśli f_{ks} nie zależy od x_1 , to wobec /3/, od razu widać, że $f_{k(s+1)}$ nie zależy od x_2 .

Ponieważ zaś pokazaliśmy, że f_{ks} nie zależy od x_1 lub x_2 , więc otrzymujemy, że $f_{k(s+r)}$ nie zależy od x_2 dla każdego $r \geq 2$.

W końcu, z uwagi na to, że f jest idempotentne, mamy

$$f(g_s, g_s, \dots, g_s) = g_s$$

Jeśli rozważyć tę równość dla s takiego, że $s \geq s_k + 2$ dla

każdego k ($1 \leq k \leq n$), to na mocy tego co udowodniliśmy, operacja po lewej stronie nie zależy od x_2 . Ponieważ zaś, operacja po lewej stronie z założenia jest istotnie s-arna, więc otrzymujemy sprzeczność dowodzącą /ii/.

Dowód /iii/. Ponieważ $g_2 = x_1 \cdot x_2$, więc na mocy definicji $k(f)$, $fL \in P_{n+1}$. Żeby pokazać, że L jest różnowartościowe, zauważmy, iż skonstruowane jest w taki sposób, że $k(fL) = k(f)$. Zakładając więc, że $fL = gL$ dla $f, g \in P_n$, mamy oczywiście $k(fL) = k(gL)$, a co za tym idzie, $k(f) = k(g)$. Podstawiając więc $x_{k(f)} = x_{k(g)}$ w równości $fL = gL$, otrzymujemy, przy uwzględnieniu definicji L i tego, że $x \cdot y$ jest idempotentem, $f = g$, co należało dowieść.

Dowód /iv/. Jeśli $p_n \geq \aleph_0$, wtedy /2/ zachodzi na mocy /iii/. Możemy więc założyć, że $p_n < \aleph_0$. Ponadto, założmy na razie, że dla każdego $n \geq 2$, dla każdego $f \in P_n$ i dla każdego $k=1, 2, \dots, n$ $f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k \cdot x_{n+1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in P_{n+1}$.

Wtedy, zauważmy, dla każdego takiego f istnieje indeks i ($1 \leq i \leq n$), taki, że

$$\begin{aligned} /4/ \quad f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i \cdot x_{n+1}, x_{i+1}, \dots, x_n) &\neq \\ &\neq f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{n+1} \cdot x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Rzeczywiście, w przeciwnym bowiem razie mamy $x \cdot y = f(x \cdot y, x \cdot y, \dots, x \cdot y) = f(y \cdot x, y \cdot x, \dots, y \cdot x) = y \cdot x$ co przeczy założeniu, że $x \cdot y$ jest nieprzemienne. Oczywiście, skorzystaliśmy tu z faktu, że algebra jest idempotentna.

Niech dla danego n , r będzie taką liczbą naturalną, że $p_n = nr + k$, gdzie $0 < k \leq n$. Łatwo spostrzec, że wtedy istnieje taki indeks i , że /4/ zachodzi dla co najmniej $r+1$ operacji $f \in P_n$. W przeciwnym razie, /4/ zachodziłoby dla nie więcej niż $nr < p_n$ operacji f należących do P_n , przecząc temu, że dla każdego f /4/ zachodzi przy pewnym i .

A zatem dla pewnego indeksu i wśród operacji $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i \cdot x_{n+1}, \dots, x_n)$, $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{n+1} \cdot x_i, \dots, x_n)$,

gdzie $f \in P_n$, jest co najmniej $p_n + r + 1$ operacji różnych, jako że podstawienie $x_i = x_{n+1}$ w dowolnej z nich daje w wyniku operację wyjściową należącą do P_n .

Powyższe pociąga nierówność $p_{n+1} \geq p_n + r + 1 \geq p_n + \frac{1}{n}p_n$, co jest równoważne /2/.

Możemy więc założyć, że istnieje $g(x_1, x_2, \dots, x_m) \in P_m$ oraz indeks i ($1 \leq i \leq m$), powiedzmy $i = 1$, taki, że

$g^* = g(x_1 \cdot x_{m+1}, x_2, x_3, \dots, x_m) \notin P_{m+1}$. Wobec podstawienia $x_1 = x_{m+1}$, g^* zależy od zmiennych $x_2, x_3, \dots, x_m$, a więc nie zależy od jednej ze zmiennych x_1 lub x_{m+1} . Stąd mamy $g^* = g(x_k, x_2, x_3, \dots, x_m)$, gdzie $k = 1$ lub $m+1$. Z kolei, ponieważ

$\mathcal{G}$ jest grupoidem, więc dla każdej operacji algebraicznej f , otrzymujemy równość

$$g(f(x_1, x_2, \dots, x_n), y_2, y_3, \dots, y_m) = g(x_k, y_2, y_3, \dots, y_m)$$

gdzie $1 \leq k \leq n$. Widzimy, że powyższa równość każdej operacji algebraicznej $\mathcal{G}$ przyporządkowuje jedną z jej zmiennych.

W dalszym ciągu będziemy nazywać ją główną zmienną operacji.

Zaobserwujmy następujący fakt: jeśli przez $P_n^{(k)}$ oznaczmy zbiór operacji $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_n$ z główną zmienną x_k , a przez r_n^k moc tego zbioru, to $r_n^k = r_n^i = r_n$ dla każdych k, i , $1 \leq k, i \leq n$. Tak jest ponieważ odpowiednia permutacja zmiennych daje różnowartościowe odwzorowanie $P_n^{(k)}$ w $P_n^{(i)}$. Z kolei, ponieważ dwie operacje z różnymi głównymi zmiennymi są, oczywiście, różne, więc mamy $P_n = nr_n$.

Nieznacznie modyfikując L , określamy odwzorowanie zbioru $P_n^{(n)}$ w zbiór $P_{n+1}^{(n)}$. Mianowicie, niech $fL_0 = fL$, jeśli $k(f) < n$, natomiast jeśli $k(f) = n$, niech fL_0 będzie tą z dwóch operacji $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \cdot x_{n+1})$, $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n+1} \cdot x_n)$, dla której główną zmienną jest x_n . Wobec definicji L danej w /iii/, oczywiście jest, że jeśli $f \in P_n^{(n)}$, to $fL_0 \in P_{n+1}^{(n)}$. Z kolei, jeśli $f, h \in P_n^{(n)}$, $f \neq h$ i $k(f), k(h) < n$, to $fL_0 \neq hL_0$, bo L jest różnowartościowe. Jeśli $k(f) < n$, a $k(h) = n$, to $k(fL_0) < n$, podczas

gdy $k(hL_0) = n$ lub $n+1$, a więc również $fL_0 \neq hL_0$. Wreszcie, jeśli $k(f) = k(h) = n$, to $fL_0 \neq hL_0$ wobec podstawienia $x_n = x_{n+1}$.

A zatem mamy $r_{n+1} \geq r_n$. Ponieważ zaś $p_n = nr_n$, więc $p_{n+1} = (n+1)r_{n+1} \geq (n+1)r_n = \frac{n+1}{n}p_n$, co należało dowieść.

§2.3. Druga część dowodu Twierdzenia 1.

W rozdziale tym zakładamy, że $\mathcal{U} = \langle A; F \rangle$ jest algebrą, dla której $p_2(\mathcal{U}) = 0$. Na mocy R2 możemy ponadto założyć, że $p_3(\mathcal{U}) = 0$ lub $p_4(\mathcal{U}) = 0$, a na mocy założenia $\mu(\mathcal{U}) \neq \infty$, że $\mathcal{U}$ nie jest idempotentnym reduktom grupy Boolea (por. P2).

Wobec R5, $\mathcal{U}$ spełnia wtedy jeden z dwu warunków:

W1. $S(\mathcal{U}) = A_m, m \geq 4$.

W2. $S(\mathcal{U}) = A_m \cup B, m \geq 5, p_m > 1$.

Zanotujmy dwie bezpośrednie konsekwencje drugiej części R5.

/i/ Istnieje operacja $g(x_1, x_2, \dots, x_m) \in P_m$ taka, że $g(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_1$ jeśli elementy $x_1, x_2, \dots, x_m$ nie są wszystkie różne.

/ii/ Jeśli $\mathcal{U}$ spełnia W2, to istnieje grupa Boolea $\langle A; +, 0 \rangle$, taka, że każda operacja algebraiczna $\mathcal{U}$ zależna od mniej niż m zmiennych, jest operacją algebraiczną reduktu idempotentnego grupy $\langle A; +, 0 \rangle$. Jeśli $\mathcal{U}$ spełnia W1, to każda taka operacja jest trywialna.

Dla danej operacji $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_n$ ($n \geq m-1$), przyjmujemy

/5/ $f^* = f(x_1, x_2, \dots, x_{m-2}, x_{m-1}, x_{m-1}, \dots, x_{m-1})$

a $k(f)$ niech będzie najmniejszą liczbą taką, że f^* zależy od $x_{k(f)}$. Zauważmy, że do f^* stosuje się /ii/; istnieje zatem operacja algebraiczna grupy $\langle A; +, 0 \rangle$, f^{**} taka, że

/6/ $f^{**} + f^* = x_{k(f)}$

Jeśli $\mathcal{U}$ spełnia W1, to oczywiście $f^* = x_{k(f)}$ i przyjmujemy formalny zapis $f^{**} = 0$, żeby uniknąć rozważania osobnych przypadków.

Dowód nasz opiera się na następujących tezach:

/iii/ Niech dla $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_n$ ($n \geq m-1$)

$$fL = g\left(f(x_1, x_2, \dots, x_n) + f^{**}, \underline{x_2, x_3, \dots, x_{m-1}}, x_{n+1}\right) + f^{**}$$

gdzie operacja g wyznaczona jest przez /i/, a podkreślenie oznacza, że jeśli wśród wymienionych nad linią zmiennych znajduje się $x_k(f)$, to jest ona zastąpiona przez x_1 .

Wtedy L jest różnowartościowym odwzorowaniem P_n w P_{n+1} .

/iv/ Dla każdego $n \geq m$ istnieje $f_n \in P_n$ takie, że dla każdego $f \in P_n$ ($n \geq m-1$), $f_{n+1} \neq fL$.

Zauważmy teraz, że założenie $p_2 = 0$, wobec R_3 , oznacza, iż w $\mathcal{U}$ nie ma nietrywialnej diagonalnej operacji algebraicznej. Łatwo więc spostrzec, że $\mu(\mathcal{U}) = m-1$ w przypadku W_1 oraz $\mu(\mathcal{U}) = m-1$ lub $m-2$ w przypadku W_2 . A zatem, /iii/ i /iv/ dowodzą nierówności /1/ dla $n \geq \mu(\mathcal{U})+1$ w każdym z tych przypadków. Z kolei, ponieważ w $\mathcal{U}$ nie ma nietrywialnej diagonalnej operacji, więc na mocy definicji $\mu(\mathcal{U})$ mamy $p_{\mu(\mathcal{U})} = 0$ oraz $p_{\mu(\mathcal{U})+1} > 0$, co oznacza, że nierówność /1/ zachodzi również dla $n = \mu(\mathcal{U})$ i tym samym kończy dowód.

Dowód /iii/. Zauważmy, że wobec /5/ i /6/ albo $f^{**} = 0$ albo $f^{**} = x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_r}$, gdzie r jest parzyste, a $i_j < m$ (mamy bowiem $x + x = 0$). Stąd wynika, że operacja $x_m + f^{**}$, albo jest trywialna albo jest algebraiczną operacją idempotentnego reduktu grupy $\langle A; +, 0 \rangle$ (por. P2), a co za tym idzie jest operacją algebraiczną $\mathcal{U}$. Stąd widzimy, że również fL jest operacją w $\mathcal{U}$.

Dalej, ponieważ $m \geq 4$, więc co najmniej dwie spośród zmiennych x_1, x_2, x_3 są wśród zmiennych podkreślonych w fL (już po ewentualnym zastąpieniu którejś przez $x_k(f)$). A zatem, co najmniej dwa z podstawień $x_1 = x_{n+1}, x_2 = x_{n+1}, x_3 = x_{n+1}$ w fL dają w wyniku $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (stosujemy /i/ oraz fakt, że $f^{**} + f^{**} = 0$). Stąd wynika, że fL zależy od każdej ze zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Pokażemy, że fL zależy również od x_{n+1} . Na mocy /5/ i /6/

podstawienie $x_{m-1} = x_m = x_{m+1} = \dots = x_n$ w fL daje w wyniku $fL^0 = g(x_{k(f)}, x_2, x_3, \dots, x_{m-1}, x_{n+1}) + f^{**}$. Na mocy tego, co zostało zauważone na wstępie, f^{**} nie zależy od x_{n+1} , podczas gdy $fL^0 + f^{**} = g(x_{k(f)}, x_2, x_3, \dots, x_{m-1}, x_{n+1})$ zależy od x_{n+1} . Stąd wynika, że fL^0 zależy od x_{n+1} , i co za tym idzie, również fL zależy od tej zmiennej.

Pozostaje pokazać, że równość $fL = hL$, gdzie $f, h \in P_n$, pociąga równość $f = h$. Rzeczywiście, zauważmy, że co najmniej jedna ze zmiennych x_1, x_2, x_3 należy jednocześnie do podkreślonych zmiennych w fL i hL . Podstawiając tę zmienną za x_{n+1} w zakładanej równości $fL = hL$, otrzymujemy, na mocy /i/, $f = h$.

Dowód /iv/. Definiujemy indukcyjnie $g_m = g(x_1, x_2, \dots, x_m)$ oraz dla $n \geq m$, $g_{n+1} = g_n^L$. Łatwo pokazać przez indukcję, że $g_n^* = x_1$. A zatem $g_{n+1} = g(g_n, x_2, x_3, \dots, x_{m-1}, x_{n+1})$ i na mocy tego, co dowiedzione o L , $g_n \in P_n$.

Położmy $f_n = g_n(x_n, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_1)$. $f_n \in P_n$, bowiem otrzymane zostało z g_n tylko przez zamianę miejscami zmiennych x_1 i x_n . Z kolei, łatwo zauważyć, że podstawienie $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ w fL daje x_1 (jako że $k(f) < m$), podczas gdy to samo podstawienie w $f_{n+1} = g(g_n(x_{n+1}, x_2, \dots, x_n), x_2, x_3, \dots, x_{m-1}, x_1)$, na mocy tego, że $g_n^* = x_1$, daje x_{n+1} , co pociąga $fL \neq f_{n+1}$ i kończy dowód.

§2.4. Algebry diagonalne

Żeby zakończyć dowód Twierdzenia 1 oraz udowodnić twierdzenia 2 i 3, musimy najpierw rozstrzygnąć pewne problemy związane z operacjami diagonalnymi. W rozdziale tym dowiedzimy następującego:

TWIERDZENIE 4. Niech $\mathcal{A} = \langle A; F \rangle$ będzie algebrą, w której każda binarna operacja algebraiczna jest diagonalna. Jeśli F jest skończonym zbiorem operacji diagonalnych, wtedy $\mathcal{A}$ jest r -wymiarową algebrą diagonalną dla pewnego $r \geq 1$.

Pod koniec tego rozdziału pokażemy, że żadne z założeń w powyższym twierdzeniu nie może być opuszczone.

Przed przystąpieniem do dowodu zauważmy, iż wystarczy dowieść Twierdzenia 4 przy dodatkowym założeniu, że F zawiera wyłącznie binarne operacje. Rzeczywiście, na mocy R_3 , dla dowolnej istotnie r -arnej operacji diagonalnej $d(x_1, x_2, \dots, x_r)$, gdzie $r \geq 3$, mamy równość:

$$d(x_1, x_2, \dots, x_r) = d_1(d_2(\dots d_{r-3}(d_{r-1}(x_r, x_{r-1}), x_{r-2}), \dots, x_2), x_1)$$

gdzie binarne operacje d_i ($i = 1, 2, \dots, r-1$) zdefiniowane są przy użyciu R_3 i tamtejszych oznaczeń jak następuje:

$$d_i(\langle a_1^i, a_2^i, \dots, a_r^i \rangle, \langle a_1^i, a_2^i, \dots, a_r^i \rangle) = \langle a_1^i, \dots, a_{i-1}^i, a_i^i, a_{i+1}^i, \dots, a_r^i \rangle$$

Co więcej, zauważmy, iż na mocy R_3 , dla każdego $n \in \{3, \dots, r\}$, operacje istotnie n -arne w r -wymiarowej algebrze diagonalnej generują wszystkie operacje binarne w tej algebrze. Mamy zatem ogólniej:

/1/ Jeśli $\mathcal{D} = \langle D; F^* \rangle$ jest r -wymiarową algebrą diagonalną, to $\mathcal{D} = \langle D; P_n(\mathcal{D}) \rangle$, gdzie $2 \leq n \leq r$.

Fakt ten wykorzystamy do wyciągnięcia pewnego pożytecznego wniosku z Twierdzenia 4.

W dowodzie posłużymy się pojęciem pewnego produktu algebr, wprowadzonym przez W. Narkiewicza, który tutaj nazywamy "diagonalnym". Mianowicie, dla danych zbiorów A i B oraz dwóch operacji n -arnych, $f_1(a_1, a_2, \dots, a_n)$ na zbiorze A i $f_2(b_1, b_2, \dots, b_n)$ na zbiorze B , definiujemy n -arną operację na kartezjańskim produkcie $A \times B$:

$$/7/ \quad f(\langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle, \dots, \langle a_n, b_n \rangle) = \langle f_1(a_1, a_2, \dots, a_n), f_2(b_1, b_2, \dots, b_n) \rangle$$

Diagonalnym produktem algebr $\mathcal{U} = \langle A; F_1 \rangle$ i $\mathcal{V} = \langle B; F_2 \rangle$ nazywamy algebrę $\mathcal{U} * \mathcal{V} = \langle A \times B; F \rangle$, przy czym zbiór F jest zbiorem wszystkich operacji postaci /7/, gdzie f_1 i f_2 są odpowiednio operacjami algebraicznymi algebr $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Łatwo zauważyć, iż w ten sposób określony zbiór F zamknięty jest na superpozycje funkcji i identyfikacje zmiennych, a więc stanowi

od razu zbiór operacji algebraicznych algebry $\mathcal{A} * \mathcal{B}$.

Wobec R3, następujący fakt jest oczywisty:

/ii/ Jeśli $\mathcal{D}_1$ i $\mathcal{D}_2$ są odpowiednio r_1 - i r_2 -wymiarowymi algebrami diagonalnymi, to $\mathcal{D}_1 * \mathcal{D}_2$ jest $r_1 + r_2$ -wymiarową algebrą diagonalną.

Dowód Twierdzenia 4. Na mocy /i/ możemy założyć, że $F = \{f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_k(x, y)\}$, gdzie wszystkie $f_i(x, y)$ są diagonalne, różne i istotnie binarne (bo, unarna operacja diagonalna jest trywialna). Stosujemy indukcję względem k .

Jeśli $k = 0$, to $\mathcal{A}$ jest algebrą trywialną, a więc jedno-wymiarową algebrą diagonalną.

Dowodzimy twierdzenia dla $k = m > 0$, przy założeniu, że jest już dowiedzione dla $k < m$. Rozważmy w tym celu redukt $\langle A; f_1(x, y) \rangle$. Na mocy R3, istnieją takie zbiory B i C , że $A = B \times C$ oraz

$$/8/ \quad f_1(\langle b_1, c_1 \rangle, \langle b_2, c_2 \rangle) = \langle b_1, c_2 \rangle$$

gdzie $b_1, b_2 \in B$, $c_1, c_2 \in C$. Co więcej, pokażemy, że

/iii/ Dla każdego $i = 1, 2, \dots, m$

$$f_i(\langle b_1, c_1 \rangle, \langle b_2, c_2 \rangle) = \langle d_i^1(b_1, b_2), d_i^2(c_1, c_2) \rangle$$

gdzie d_i^1, d_i^2 są operacjami diagonalnymi odpowiednio na B i C .

oraz

/iv/ Jeśli $\mathcal{B} = \langle B; d_1^1, d_2^1, \dots, d_m^1 \rangle$, a $\mathcal{C} = \langle C; d_1^2, d_2^2, \dots, d_m^2 \rangle$

gdzie binarne operacje d_i^1, d_i^2 są wyznaczone przez /iii/, to zachodzi równość $\mathcal{A} = \mathcal{B} * \mathcal{C}$.

Dowody tych faktów zostawiamy na później, teraz zaś zauważamy, że ponieważ wobec /8/, d_1^1 i d_1^2 są operacjami trywialnymi, więc na mocy założenia indukcyjnego, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ są odpowiednio r_1 - i r_2 -wymiarowymi algebrami diagonalnymi dla pewnych r_1 i r_2 . A zatem, wobec /ii/ i /iv/

$\mathcal{U}$ jest $r_1 + r_2$ -wamiarową algebrą diagonalną, co należało dowieść.

Dowód /iii/. Ponieważ $A = B \times C$, więc dla każdego $i = 1, 2, \dots, k$ możemy napisać

/9/ $f_i(\langle b_1, c_1 \rangle, \langle b_2, c_2 \rangle) = \langle f_i^1(b_1, c_1, b_2, c_2), f_i^2(b_1, c_1, b_2, c_2) \rangle$
gdzie f_i^1, f_i^2 są pewnymi funkcjami wyznaczonymi przez f_i ze zbioru $B \times C \times B \times C$ w zbiory B i C , odpowiednio. Musimy udowodnić, że $f_i^1(b_1, c_1, b_2, c_2)$ nie zależy od zmiennych c_1, c_2 i jako binarna operacja na B jest diagonalna. Analogiczną tezę należy udowodnić dla f_i^2 , ale pominiemy to, bo ze względu na symetrię założeń, dowód jest identyczny.

Niech i będzie ustalone. Używając $f_1(x, y)$ oraz $f_i(x, y)$ skonstruujemy pewne binarne operacje algebraiczne w $\mathcal{U}$. Dla uproszczenia zapisu, połóżmy $f_1(x, y) = x \cdot y$ oraz $f_1^1 = f$. I tak, niech $x \circ y = f_i(x, y) \cdot x$, $x \oplus y = f_i(x, y) \cdot y$ oraz $x \ominus y = (x \cdot y) \oplus x$. Na mocy założenia wszystkie zdefiniowane operacje, jako binarne, są diagonalne.

Wobec /8/, /9/ i przyjętego uproszczenia w zapisie, mamy

$$/10/ \quad \langle b_1, c_1 \rangle \cdot \langle b_2, c_2 \rangle = \langle b_1, c_2 \rangle$$

$$/11/ \quad \langle b_1, c_1 \rangle \circ \langle b_2, c_2 \rangle = \langle f(b_1, c_1, b_2, c_2), c_1 \rangle$$

$$/12/ \quad \langle b_1, c_1 \rangle \oplus \langle b_2, c_2 \rangle = \langle f(b_1, c_1, b_2, c_2), c_2 \rangle$$

$$/13/ \quad \langle b_1, c_1 \rangle \ominus \langle b_2, c_2 \rangle = \langle f(b_1, c_2, b_1, c_1), c_1 \rangle$$

Na mocy definicji binarna operacja diagonalna $x \circ y$ spełnia

$$/14/ \quad x \circ y = x \circ (z \circ y)$$

$$/15/ \quad x \circ y = (x \circ z) \circ y$$

Stosując /11/ do /14/ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle b_1, c_1 \rangle \circ \langle b_2, c_2 \rangle &= \langle b_1, c_1 \rangle \circ (\langle b_3, c_3 \rangle \circ \langle b_2, c_2 \rangle) = \\ &= \langle b_1, c_1 \rangle \circ \langle f(b_3, c_3, b_2, c_2), c_3 \rangle = \\ &= \langle f(b_1, c_1, f(b_3, c_3, b_2, c_2), c_3), c_1 \rangle \end{aligned}$$

a stąd, porównując to z /11/

$$/16/ \quad f(b_1, c_1, b_2, c_2) = f(b_1, c_1, f(b_3, c_3, b_2, c_2), c_3)$$

Analogicznie postępując dla operacji $\oplus$ i $\ominus$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\langle b_1, c_1 \rangle \oplus \langle b_2, c_2 \rangle &= \langle b_1, c_1 \rangle \oplus (\langle b_3, c_3 \rangle \oplus \langle b_2, c_2 \rangle) = \\ &= \langle b_1, c_1 \rangle \oplus \langle f(b_3, c_3, b_2, c_2), c_2 \rangle = \\ &= \langle f(b_1, c_1, f(b_3, c_3, b_2, c_2), c_2), c_2 \rangle\end{aligned}$$

a stąd, wobec /12/

$$/17/ \quad f(b_1, c_1, b_2, c_2) = f(b_1, c_1, f(b_3, c_3, b_2, c_2), c_2)$$

oraz

$$\begin{aligned}\langle b_1, c_1 \rangle \ominus \langle b_2, c_2 \rangle &= \langle b_1, c_1 \rangle \ominus (\langle b_3, c_3 \rangle \ominus \langle b_2, c_2 \rangle) = \\ &= \langle b_1, c_1 \rangle \ominus \langle f(b_3, c_2, b_3, c_3), c_3 \rangle = \langle f(b_1, c_3, b_1, c_1), c_1 \rangle\end{aligned}$$

a stąd wobec /13/

$$/18/ \quad f(b_1, c_2, b_1, c_1) = f(b_1, c_3, b_1, c_1)$$

Z kolei, stosując podobnie /15/ dla operacji $\odot$ i $\oplus$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\langle b_1, c_1 \rangle \odot \langle b_2, c_2 \rangle &= (\langle b_1, c_1 \rangle \odot \langle b_3, c_3 \rangle) \odot \langle b_2, c_2 \rangle = \\ &= \langle f(b_1, c_1, b_3, c_3), c_1 \rangle \odot \langle b_2, c_2 \rangle = \\ &= \langle f(f(b_1, c_1, b_3, c_3), c_1, b_2, c_2), c_1 \rangle\end{aligned}$$

a stąd, wobec /11/

$$/19/ \quad f(b_1, c_1, b_2, c_2) = f(f(b_1, c_1, b_3, c_3), c_1, b_2, c_2)$$

oraz

$$\begin{aligned}\langle b_1, c_1 \rangle \oplus \langle b_2, c_2 \rangle &= (\langle b_1, c_1 \rangle \oplus \langle b_3, c_3 \rangle) \oplus \langle b_2, c_2 \rangle = \\ &= \langle f(b_1, c_1, b_3, c_3), c_3 \rangle \oplus \langle b_2, c_2 \rangle = \\ &= \langle f(f(b_1, c_1, b_3, c_3), c_3, b_2, c_2), c_2 \rangle\end{aligned}$$

a stąd, wobec /12/

$$/20/ \quad f(b_1, c_1, b_2, c_2) = f(f(b_1, c_1, b_3, c_3), c_3, b_2, c_2).$$

Wreszcie ponieważ $x \odot x = x$, więc wobec /11/ mamy

$$\langle b_1, c_1 \rangle = \langle b_1, c_1 \rangle \odot \langle b_1, c_1 \rangle = \langle f(b_1, c_1, b_1, c_1), c_1 \rangle$$

a stąd

$$/21/ \quad f(b_1, c_1, b_1, c_1) = b_1$$

Stosując ostatnią równość do /18/, gdzie podstawiamy $c_3 = c_1$, otrzymujemy

$$/22/ \quad f(b_1, c_2, b_1, c_1) = b_1$$

Z kolei, podstawiając w /16/ $b_2 = b_3$, a w /20/, $b_1 = b_3$, na mocy /22/ otrzymujemy

$$/23/ \quad f(b_1, c_1, b_2, c_2) = f(b_1, c_1, b_2, c_3)$$

oraz

$$/24/ \quad f(b_1, c_1, b_2, c_2) = f(b_1, c_3, b_2, c_2)$$

co oznacza, że $f(b_1, c_1, b_2, c_2)$ nie zależy od zmiennych c_2 i c_1 .

Tak więc możemy napisać $f(b_1, c_1, b_2, c_2) = d(b_1, b_2)$. Na mocy

/21/, $d(b_1, b_1) = b_1$. W końcu, odpowiednia modyfikacja /17/ i /19/ daje

$$d(b_1, b_2) = d(b_1, d(b_3, b_2))$$

$$d(b_1, b_2) = d(d(b_1, b_3), b_2)$$

dowodząc, iż $d(b_1, b_2)$ jest operacją diagonalną; c.b.d.o.

Dowód /iv/. Wobec /iii/, każda z operacji $f_i(x, y)$, $i = 1, 2, \dots, m$, jest operacją algebraiczną produktu diagonalnego $\mathcal{D} * \mathcal{C}$, a stąd, każda operacja algebraiczna algebry jest operacją algebraiczną tego produktu. Pozostaje do pokazania, że i na odwrót, każda operacja algebraiczna tego produktu jest operacją algebraiczną $\mathcal{C}_V$. Innymi słowy, że dla ustalonego n , każda operacja postaci

$$f(\langle b_1, c_1 \rangle, \langle b_2, c_2 \rangle, \dots, \langle b_n, c_n \rangle) = \langle f_1(b_1, b_2, \dots, b_n), f_2(c_1, c_2, \dots, c_n) \rangle$$

gdzie f_1, f_2 są odpowiednio operacjami algebraicznymi $\mathcal{D}$ i $\mathcal{C}$, jest operacją (algebraiczną) $\mathcal{C}_V$.

W tym celu, pokażemy najpierw, że każda operacja postaci

$$f(\langle b_1, c_1 \rangle, \langle b_2, c_2 \rangle, \dots, \langle b_n, c_n \rangle) = \langle b_1, f_2(c_1, c_2, \dots, c_n) \rangle$$

jest operacją $\mathcal{C}_V$.

Ponieważ wobec /8/

$$\langle b_1, e_i^n(c_1, c_2, \dots, c_n) \rangle = f_1(\langle b_1, c_1 \rangle, e_i^n(\langle b_1, c_1 \rangle, \langle b_2, c_2 \rangle, \dots, \langle b_n, c_n \rangle))$$

więc jest to operacja $\mathcal{C}_V$.

Założmy, że $\langle b_1, f_{21}(c_1, c_2, \dots, c_n) \rangle, \langle b_1, f_{22}(c_1, c_2, \dots, c_n) \rangle$ (gdzie f_{21}, f_{22} są operacjami $\mathcal{C}$) są operacjami $\mathcal{C}_V$. Wtedy, wobec /8/

$$\langle b_1, d_i^2(f_{21}, f_{22}) \rangle = f_1(\langle b_1, c_1 \rangle, f_i(\langle b_1, f_{21} \rangle, \langle b_1, f_{22} \rangle))$$

skąd wynika, że jest to operacja $\mathcal{C}_V$.

Analogicznie pokazujemy, że każda operacja postaci

$$f(\langle b_1, c_1 \rangle, \langle b_2, c_2 \rangle, \dots, \langle b_n, c_n \rangle) = \langle f_1(b_1, b_2, \dots, b_n), c_1 \rangle$$

jest operacją $\mathcal{C}_V$. Na mocy /8/ zachodzi równość

$$\langle f_1(b_1, b_2, \dots, b_n), f_2(c_1, c_2, \dots, c_n) \rangle = f_1(\langle f_{21}, c_1 \rangle, \langle b_1, f_{22} \rangle)$$

która daje tezę.

Na zakończenie tego rozdziału zanalizujemy założenia Twierdzenia 4 oraz wyciągniemy wniosek charakteryzujący w pewnym stopniu algebry diagonalne.

W [12] podany jest przykład algebry idempotentnej $\mathcal{O}_V = \langle A; f(x,y,z) \rangle$, w której każda binarna operacja algebraiczna jest diagonalna, podczas gdy sama algebra nie jest diagonalna. W [8] podany jest przykład algebry $\mathcal{O}_V = \langle A; x \cdot y, x \circ y \rangle$ gdzie obie operacje fundamentalne są diagonalne, a jednak algebra nie jest diagonalna. Powyższe przykłady wskazują, że odpowiednie założenia w Twierdzeniu 4 są istotne.

Z kolei, ponieważ na mocy R_3^3 , dla r -wymiarowej algebry diagonalnej $\left| \bigcup_{n=2}^{\infty} P_n \right| < \aleph_0$, więc również założenie o skończoności zbioru F nie może być opuszczone.

Jednakże, wobec Twierdzenia 4, algebra $\mathcal{O}_V = \langle A; F \rangle$, gdzie każda operacja binarna jest diagonalna, a F jest dowolnym zbiorem operacji diagonalnych, jest diagonalna. Z drugiej strony, każda algebra diagonalna jest tej postaci. Co więcej, wobec /1/, możemy przyjąć, że F zawiera tylko binarne operacje. Załóżmy, że $|F| = \aleph_0$ i obliczmy liczbę $p_n(\mathcal{O}_V)$ dla takiej algebry.

Na mocy /1/, w każdej algebrze diagonalnej r -wymiarowej, za operacje fundamentalne możemy przyjąć operacje istotnie n -arne dla $2 \leq n \leq r$. Z drugiej strony, na mocy Twierdzenia 4, każdy redukt ~~generowany~~^{dowolnej} algebry diagonalnej generowany przez skończoną liczbę operacji binarnych jest r -wymiarową algebrą diagonalną, przy czym biorąc dostatecznie dużą liczbę tych operacji otrzymujemy r -wymiarową algebrę diagonalną dla dowolnie dużego r . Stąd wynika, że w algebrze diagonalnej nie będącej r -wymiarową algebrą diagonalną, za operacje fundamentalne możemy przyjąć operacje istotnie n -arne dla każdego $n \leq 2$. Z kolei, ze względu na "finitarny" charakter definicji operacji algebra-

icznych, jeśli zbiór operacji fundamentalnych jest mocy $\aleph_0$, to $p_n \leq \aleph$ dla każdego $n \geq 2$. A zatem, jeśli przy naszych założeniach $|F| = \aleph \geq \aleph_0$, to wszystkie p_n ($n \geq 2$) są równe. Mamy więc:

WNIOSEK 3. Jeśli $\mathcal{D}$ jest algebrą diagonalną, a nie jest r -wymiarową algebrą diagonalną dla żadnego $r \geq 1$, to
 $p_n(\mathcal{D}) = \aleph \geq \aleph_0$ dla każdego $n \geq 2$.

Wypada jeszcze pokazać, że takie algebry w ogóle istnieją.

W tym celu rozważmy zbiór ciągów pozaskończonych $\langle a_1, a_2, \dots, a_\gamma, \dots \rangle$, $\gamma < \aleph$, określonych na więcej niż jednoelementowym zbiorze A , gdzie $\aleph$ jest dowolną liczbą porządkową. Definiujemy na zbiorze tych ciągów zbiór operacji binarnych F jak następuje:

$$d \left(\langle a_1^1, a_2^1, \dots, a_\gamma^1, \dots \rangle, \langle a_1^2, a_2^2, \dots, a_\gamma^2, \dots \rangle \right) = \\ = \langle a_1^{i_1}, a_2^{i_2}, \dots, a_\gamma^{i_\gamma}, \dots \rangle$$

dla każdego ciągu $i_1, i_2, \dots, i_\gamma, \dots$ wskaźników ze zbioru $\{1, 2\}$. Nietrudno zauważyć, że operacje te nie generują innych operacji binarnych, są wszystkie różne, idempotentne i $|F| \geq |\aleph|$.

Pokażemy, że wszystkie są diagonalne. Rzeczywiście, mamy

$$d \left(d \left(\langle a_1^1, a_2^1, \dots, a_\gamma^1, \dots \rangle, \langle a_1^2, a_2^2, \dots, a_\gamma^2, \dots \rangle \right), d \left(\langle b_1^1, b_2^1, \dots, b_\gamma^1, \dots \rangle, \langle b_1^2, b_2^2, \dots, b_\gamma^2, \dots \rangle \right) \right) \\ = d \left(\langle a_1^{i_1}, a_2^{i_2}, \dots, a_\gamma^{i_\gamma}, \dots \rangle, \langle b_1^{i_1}, b_2^{i_2}, \dots, b_\gamma^{i_\gamma}, \dots \rangle \right) = \langle c_1, c_2, \dots, c_\gamma, \dots \rangle$$

gdzie $i_1, i_2, \dots, i_\gamma, \dots \in \{1, 2\}$, przy czym, jeśli $i_\gamma = 1$, to $c_\gamma = a_\gamma^{i_\gamma}$, jeśli zaś $i_\gamma = 2$, to $c_\gamma = b_\gamma^{i_\gamma}$. A zatem

$$\langle c_1, c_2, \dots, c_\gamma, \dots \rangle = d \left(\langle a_1^1, a_2^1, \dots, a_\gamma^1, \dots \rangle, \langle b_1^2, b_2^2, \dots, b_\gamma^2, \dots \rangle \right)$$

co należało pokazać.

Ponieważ nic nie zakładaliśmy o liczbie porządkowej $\aleph$, więc pokazaliśmy tym samym, że istnieją zbiory na których można zdefiniować dowolnie wiele binarnych operacji diagonalnych, takich, że nie generują operacji niediagonalnych. Wybierając

$\aleph \geq \aleph_0$ takich operacji, za fundamentalne, otrzymujemy na mocy tego, co dotąd dowiedliśmy algebrę diagonalną spełniającą $p_n(CV) = \aleph$ ($n \geq 2$).

§2.5. Dekompozycja diagonalna

Na mocy R3, zbiór A w r -wymiarowej algebrze diagonalnej $\langle A; d \rangle$ daje się przedstawić jako iloczyn kartezjański r zbiorów, co z uwagi na proste przedstawienie operacji algebraicznych na tym iloczynie, znacznie ułatwia badanie algebr diagonalnych. Jeśli jednak nawet algebra $\mathcal{U} = \langle A; F \rangle$ nie jest diagonalna, ale zawiera jakąś istotnie r -arną operację diagonalną d ($r \geq 2$), to na mocy R3, zbiór A również da się przedstawić jako iloczyn kartezjański r zbiorów, jako że $\mathcal{U}$ ma redukt $\langle A; d \rangle$ będący r -wymiarową algebrą diagonalną.

W niniejszym rozdziale zajmiemy się przedstawieniem operacji algebraicznych $\mathcal{U}$ na tym iloczynie. Nie jest ono tak proste jak w przypadku r -wymiarowych algebr diagonalnych, ale jak się okazuje, również ułatwia badanie tego typu algebr.

Niech więc $\mathcal{U} = \langle A; F \rangle$ będzie algebrą idempotentną, a $d = d(x_1, x_2, \dots, x_r)$ jej diagonalną istotnie r -arną operacją algebraiczną ($r \geq 2$). Niech $\mathcal{D} = \langle A; d \rangle$. Na mocy R3, istnieją zbiory $A_1, A_2, \dots, A_r$ takie, że $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_r$. Dla każdej operacji algebraicznej $\mathcal{U}$ możemy więc napisać:

$$\begin{aligned} /25/ \quad f(x_1, x_2, \dots, x_r) &= \\ &= \langle f^1(x_1, x_2, \dots, x_r), f^2(x_1, x_2, \dots, x_r), \dots, f^r(x_1, x_2, \dots, x_r) \rangle \end{aligned}$$

gdzie f^i ($i = 1, 2, \dots, r$) są pewnymi funkcjami ze zbioru A^n w zbiór A_i , wyznaczonymi przez f .

Przyjmujemy następujące definicje

DEFINICJE.

/i/ Dla każdej operacji algebraicznej $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ w $\mathcal{U}$ definiujemy r funkcji $f^i = f^i(x_1, x_2, \dots, x_r)$ wzorem /25/, $i = 1, 2, \dots, r$.

/ii/ Dla każdego $i = 1, 2, \dots, r$ definiujemy funkcję $h_i(x) = h_i$ ze zbioru A w zbiór A_i jak następuje

$$h_i(\langle a_1, a_2, \dots, a_r \rangle) = a_i$$

/iii/ Dla każdego $i = 1, 2, \dots, r$ niech $A_i/F/$ oznacza zbiór wszystkich funkcji g ze zbioru A^n w zbiór A_i ($n \geq 1$), dla których istnieje w $\mathcal{O}$ operacja algebraiczna f taka, że

$$f^1 = g$$

Całe to postępowanie nazywać będziemy dekompozycją diagonalną algebry $\mathcal{O} = \langle A; F \rangle$ ze względu na diagonalny redukt $\mathcal{D}$.

Teraz ustalimy najprostsze własności.

LEMAT 1.

/i/ Operacja $d(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jest operacją algebraiczną reduktu $\mathcal{D}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle h_1(x_{i_1}), h_2(x_{i_2}), \dots, h_r(x_{i_r}) \rangle$, gdzie $i_1, i_2, \dots, i_r \in \{1, 2, \dots, n\}$

/ii/ $h_i \in A_i/F/$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, r$.

/iii/ Dla każdego $g \in A_i/F/$ ($i = 1, 2, \dots, r$), g zależy co najmniej od jednej zmiennej oraz $g(x, x, \dots, x) = h_i(x)$.

/iv/ Dla każdej operacji algebraicznej f w $\mathcal{O}$ oraz dla każdego $i = 1, 2, \dots, r$: $h_i(f) = f^1$.

/v/ Każda operacja postaci $g = \langle g_1, g_2, \dots, g_r \rangle$, gdzie $g_i \in A_i/F/$ ($i = 1, 2, \dots, r$) jest operacją algebraiczną.

Dowód. /i/ jest natychmiastową konsekwencją R3. /ii/ wynika bezpośrednio z /i/. Dla dowodu /iii/, założmy, że przy ustalonym i , f jest operacją algebraiczną $\mathcal{O}$ taką, że $f^1 = g$ (por. def. /iii/). Ponieważ f jest idempotentna, więc zależy co najmniej od jednej zmiennej i mamy równość $f(x, x, \dots, x) = x = \langle h_1(x), h_2(x), \dots, h_r(x) \rangle$, co dowodzi /iii/. /iv/ wynika wprost z definicji h_i ; mamy mianowicie,

$$h_i(f) = h_i(\langle f^1, f^2, \dots, f^r \rangle) = f^1$$

W końcu, dla dowodu /v/, założmy, że zgodnie z definicją /iii/ dla każdego $i = 1, 2, \dots, r$, f_i jest operacją algebraiczną $\mathcal{O}$ taką, że $f_i^1 = g_i$.

Niech $d(x_1, x_2, \dots, x_r) = \langle h_1(x_1), h_2(x_2), \dots, h_r(x_r) \rangle$. Na mocy /i/ jest to operacja algebraiczna $\mathcal{D}$, a więc i $\mathcal{C}_V$. Stosując /iv/, mamy $d(f_1, f_2, \dots, f_r) = \langle h_1(f_1), h_2(f_2), \dots, h_r(f_r) \rangle = \langle f_1^1, f_2^2, \dots, f_r^r \rangle = \langle g_1, g_2, \dots, g_r \rangle = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, co oznacza, że g jest operacją algebraiczną $\mathcal{C}_V$; c.b.d.o.

§2.6. Trzecia część dowodu Twierdzenia 1

W rozdziale tym dowodzimy Twierdzenia 1 dla wszystkich pozostałych algebr, które nie zostały uwzględnione w §§2.2, 2.3.

Zakładamy więc, że $\mathcal{C}_V = \langle A; F \rangle$ jest algebrą spełniającą $p_2(\mathcal{C}_V) > 0$, w której wszystkie binarne operacje są diagonalne. Przy tych założeniach pełny redukt diagonalny $\mathcal{C}_V$ (t.j. generowany przez wszystkie operacje diagonalne) jest, na mocy Twierdzenia 4, algebrą diagonalną. Ponieważ wygodnie jest rozpatrywać dekompozycję diagonalną ze względu na pełny redukt diagonalny (wtedy, wobec /i/ Lematu 1 pozbywamy się niejako operacji diagonalnych), więc założmy na razie, że $p_2(\mathcal{C}_V) < \aleph_0$. Wtedy zgodnie z Twierdzeniem 4 pełny redukt diagonalny jest r -wymiarową algebrą diagonalną dla pewnego $r \geq 2$. Oznaczmy ją przez $\mathcal{D}$ i rozważmy dekompozycję diagonalną $\mathcal{C}_V$ ze względu na $\mathcal{D}$, przyjmując oznaczenia wprowadzone w §2.5.

DEFINICJA. Niech m będzie najmniejszą liczbą naturalną taką, że istnieje $i = 1, 2, \dots, r$ oraz istotnie m -arna funkcja $g_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \in A_i/F$.

Liczba taka istnieje na mocy założenia $\mu(\mathcal{C}_V) \neq \infty$. Co więcej, ponieważ w $\mathcal{C}_V$ nie ma niediagonalnej istotnie binarnej operacji algebraicznej, więc wobec /i/, /v/ Lematu 1, $m \geq 3$, a ponadto $\mu(\mathcal{C}_V) \geq m-1$ (w ostatniej z tych nierówności zachodzi w istocie równość; por. Twierdzenie 3).

A zatem, mamy dowiesć nierówności /1/ dla $n \geq m-1$. Przyjmując, że m, i oraz g_i ustalone są przez wyżej podaną definicję, formułujemy tezy, które stanowią kolejne kroki dowodu:

/i/ Jeśli $m = 3$, to albo jedna z operacji $g_1(x, y, y)$, $g_1(y, x, y)$, $g_1(y, y, x)$ równa jest $h_1(x)$ albo wszystkie równe są $h_1(y)$.

/ii/ Jeśli $m > 3$, to istnieje $s \in \{1, 2, \dots, m\}$ takie, że $g_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = h_1(x_s)$ gdy elementy $x_1, x_2, \dots, x_m$ nie są wszystkie różne.

/iii/ Jeśli dla operacji algebraicznej $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($n \geq m-1$) funkcja $f^1 = f^1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nie zależy od x_k ($1 \leq k \leq n$), to istnieje funkcja $f^{1k} = f^{1k}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in A_1/F/$ taka, że zależy od zmiennych x_k, x_{n+1} , a po podstawieniu $x_k = x_{n+1}$ równa jest funkcji f^1 .

/iv/ Wybierzmy $j \leq r, j \neq 1$. Niech dla $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle f^1, f^2, \dots, f^r \rangle \in P_n$ ($n \geq m-1$), $k = k(f)$ będzie najmniejszą liczbą taką, że f^j zależy od x_k , a f_k^1 funkcją zdefiniowaną następująco: $f_k^1 = f^1(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{n+1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$. Kładziemy

$$fL = \begin{cases} \langle f^1, \dots, f^{j-1}, f_k^1, f^{j+1}, \dots, f^r \rangle & \text{jeśli } f^j \text{ zależy od } x_k \\ \langle f^1, \dots, f^{j-1}, f^{jk}, f^{j+1}, \dots, f^r \rangle & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

gdzie f^{jk} wyznaczone jest przez /iii/.

Wtedy L jest różnowartościowym odwzorowaniem P_n w P_{n+1} .

/v/ Niech dla $h \in P_n$ ($n \geq m-1$), h^* oznacza operację hL , w której zostały zamienione miejscami zmienne x_{n+1} i x_k ($k = k(h)$). Wtedy dla każdego $f \in P_n$, $fL \neq h^*$.

Teraz, na mocy definicji liczby $m, p_m > 0$. Jeśli więc, $p_{m-1} = 0$, to nierówność /1/ dla $n = m-1$ jest oczywista. Zauważmy z kolei, że jeśli $p_s > 0$, gdzie $s \geq m-1$, to na mocy /iv/ i /v/ nierówność /1/ zachodzi dla każdego $n \geq s$. Łącząc oba fakty otrzymujemy wniosek, że nierówność /1/ zachodzi dla każdego $n \geq m-1$. c.b.d.o.

Dowód /i/. Ponieważ każda operacja binarna w $\mathcal{C}$ jest diagonalna, więc wobec Lematu 1, dla każdego $f(x,y) \in A_1/F$ zachodzi $f(x,y) = h_1(x)$ lub $h_1(y)$. Przez proste rozważenie przypadków stwierdzamy, że musi zachodzić jedna z możliwości przedstawionych w /i/.

Dowód /ii/. Dowód ten wzorowany jest na dowodzie K. Urbaniaka Lematu 15 z [16]. Żeby uprościć zapis przyjmijmy $h_i = h$ oraz $g_i = g$. Niech dla $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$

$$g_{ij} = g(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_m)$$

Wystarczy oczywiście pokazać, że istnieje $s \in \{1, 2, \dots, m\}$ takie, że dla każdych i, j , $g_{ij} = h(x_s)$, jeśli $i \neq s$ oraz $g_{sj} = h(x_j)$.

Na mocy definicji liczby m i Lematu 1 mamy $g_{ij} = h(x_{k(i,j)})$, gdzie $k(i,j) \in \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, m\}$. Załóżmy, że $k(i,j) = j$ dla każdych i, j . Na mocy tego, że $m \geq 3$ mamy wtedy dla $g^* = g(x_2, x_2, x_4, x_4, x_5, \dots, x_m)$, $g^* = h(x_2)$, jako że $g_{12} = h(x_2)$ oraz $g^* = h(x_4)$, jako że $g_{34} = h(x_4)$; a więc sprzeczność.

A zatem istnieją i, j takie, że $k(i,j) \neq j$. Bez szkody dla ogólności rozważań możemy założyć, że $k(1,2) = 3$. Podstawiając teraz x_2 zamiast x_1 w $g_{ij} = h(x_{k(i,j)})$ oraz x_j zamiast x_1 w $g_{12} = h(x_3)$ otrzymujemy oczywiście po lewej stronie równe funkcje. Porównując więc prawe strony, wnosimy, że $k(i,j) = 3$ dla $i \neq 3$ oraz $k(3,j) = j$, skąd wynika, że $s = 3$ spełnia tezę.

Dowód /iii/. Wobec /i/ i /ii/ mamy dwa przypadki: albo $m = 3$ i $g_1(x,y,y) = g_1(y,x,y) = g_1(y,y,x) = h_1(y)$ albo $m \geq 3$ i $g_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = h_1(x_1)$ jeśli tylko za $x_2, x_3, \dots, x_m$ podstawimy mniej niż $m-1$ elementów (dla uproszczenia przyjęliśmy tu $s = 1$).

W pierwszym przypadku funkcję f^{ik} konstruujemy następująco. Wybieramy $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, takie, że f^i zależy od x_j . Wtedy z założenia $j \neq k$. Przez f_{jk} , jak poprzednio oznaczamy funkcję f , gdzie zmienna x_j zastąpiona jest przez x_k . Wtedy kładziemy:

$$f^{ik} = g_i(f_{jk}, f_{j(n+1)}, f)$$

Ponieważ $f_{jk}, f_j(n+1), f$ są operacjami algebraicznymi $\mathcal{O}_V$, więc na mocy Lematu 1, $f^{ik} \in A_i/F$. Jeśli w f^{ik} podstawimy $x_k = x_{n+1}$, to na mocy zakładanej w tym przypadku własności g_i otrzymamy $h_i(f) = f^i$ (por. /iv/ Lemat 1), a więc jak wymagane.

Z kolei podstawienia $x_k = x_j$ oraz $x_{n+j} = x_j$ dają, odpowiednio, $f_j^i(n+1)$ oraz f_{jk}^i , które zależą odpowiednio od x_{n+1} oraz od x_k , z uwagi na to, że f^i z założenia zależy od x_j . Stąd wynika że f^{ik} zależy od obu zmiennych x_k, x_{n+1} , co było do pokazania.

W drugim przypadku konstrukcja jest nieco bardziej skomplikowana. Na mocy definicji liczby m mamy równość

$$f^i(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_{m-1}, \dots, x_{m-1}) = h(x_t)$$

gdzie $t \in \{1, 2, \dots, m-1\}$. Zauważmy, że ponieważ z założenia f^i nie zależy od x_k , więc jeśli $k \leq m-1$, to $t \neq k$, jeśli zaś $k \geq m-1$, to w powyższej równości możemy w odpowiednim miejscu z powrotem napisać x_k i równość nadal będzie zachodzić. Niech

$$f^* = \langle h_1(x_t), \dots, h_{i-1}(x_t), f^i, h_{i+1}(x_t), \dots, h_r(x_t) \rangle$$

Teraz f^{ik} definiujemy jak następuje:

$$f^{ik} = g_i(f^*, x_k, x_{n+1}, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{m-3}})$$

gdzie indeksy $i_1, i_2, \dots, i_{m-3} \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, wszystkie są różne i różne od t oraz k .

Na mocy Lematu 1, $f^{ik} \in A_i/F$. Jeśli w f^{ik} podstawimy $x_k = x_{n+1}$, to na mocy zakładanej własności g_i w tym przypadku, otrzymujemy $h_i(f^*) = f^i$, a więc jak wymagane. Jeśli z kolei, w f^{ik} podstawimy $x_{m-1} = x_m = \dots = x_n$, wyłączając z tego x_k , jeśli ewentualnie $k \geq m-1$, to na mocy definicji t , otrzymamy $g_i(x_t, x_k, x_{n+1}, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{m-3}})$ zależne na mocy definicji liczby m od każdej zmiennej, a więc w szczególności od x_k i x_{n+1} . Stąd wynika, że f^{ik} również zależy od x_k i x_{n+1} , co kończy dowód /iii/.

Dowód /iv/. Ponieważ wobec /iii/ $f^{ik} \in A_i/F$, więc na mocy Lematu 1, f_L jest operacją algebraiczną $\mathcal{O}_V$. Wobec definicji f^i oraz /iii/, f_L zależy od x_{n+1} . Ponieważ f^j z założenia zale-

ży od x_k , a $j \neq i$, więc fL zależy także od x_k . Podstawienie $x_k = x_{n+1}$ w fL , na mocy /iii/ i definicji f_k^i daje f , co oznacza, że fL zależy również od każdej z pozostałych zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$. L jest zatem odwzorowaniem P_n w P_{n+1} . Pokażemy, że jest ono różnowartościowe. Istotnie, jeśli dla $f, g \in P_n$, $fL = gL$, to na mocy definicji L i tego, że $i \neq j$, $f^j = g^j$. A zatem $k(f) = k(g) = k$. Podstawiając w zakładanej równości $x_k = x_{n+1}$, otrzymujemy $f = g$; c.b.d.o.

Dowód /v/. Teza jest oczywista, jeśli tylko zauważymy, że na mocy definicji L , dla $f \in P_n$, $(fL)^j$ nie zależy od x_{n+1} (tylko $(fL)^i$ zależy od x_{n+1}), podczas gdy $(h^*)^j$ zależy od x_{n+1} , jako że h^j zależy od x_k .

Tak więc, żeby zakończyć dowód Twierdzenia 1, pozostaje nam rozważyć przypadek $p_2(\mathcal{O}) \geq \aleph_0$. Zauważmy, że wtedy, na mocy Wniosku 3 i Twierdzenia 4, $p_n(\mathcal{O}) \geq \aleph_0$ dla każdego $n \geq 2$, jako że $\mathcal{O}$ ma redukt diagonalny nie będący r -wymiarową algebrą diagonalną. Wystarczy zatem dowieść nierówności $p_{n+1} \geq p_n$.

W tym przypadku nie możemy przeprowadzić dekompozycji diagonalnej względem pełnego reduktu diagonalnego, bowiem dla takich algebr diagonalnych nie ma analogonu twierdzenia R3 (por. [8]). Zastosujemy więc nieco inne podejście.

Założmy dla ustalonego $n \geq 2$, $p_n = \aleph \geq \aleph_0$.

Niech $d = d(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in P_{n+1}$ będzie operacją diagonalną (taka istnieje ze względu na założenie $p_2 \geq \aleph_0$). Rozważmy dekompozycję diagonalną ze względu na redukt diagonalny $\langle A; d \rangle$.

Ponieważ $p_n = \aleph$, więc liczba operacji postaci

$$\langle f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle$$

gdzie $f_i \in A_1/F$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, jest nie mniejsza niż $\aleph$.

Ponieważ $\aleph \geq \aleph_0$, więc istnieje indeks i taki, że liczba fun-

kcji $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A_1/F$ jest nie mniejsza niż $\aleph$.

Niech dla prostoty $i = 1$. Wtedy liczba operacji postaci

$g(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \langle f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), h_2(x_{i_1}), \dots, h_{n+1}(x_{i_n}) \rangle$
gdzie $f_1 \in A_1/F$, a $i_1, i_2, \dots, i_n$ są tak dobrane, że zdefiniowana operacja jest istotnie $n+1$ -arna, jest również nie mniejsza niż M , co dowodzi nierówności $p_{n+1} \geq p_n$ i kończy dowód Twierdzenia 1.

§2.7. Dowody twierdzeń 2 i 3

Dowody twierdzeń 2 i 3, które podajemy w tym rozdziale, oparte są na następującym lemacie:

LEMAT 2. Niech $\mathcal{U} = \langle A; F \rangle$ będzie algebrą idempotentną, dla której $p_2(\mathcal{U}) > 0$. Jeśli k jest najmniejszą liczbą taką, że istnieje nediagonalna operacja $f \in P_k$, to $\mu(\mathcal{U}) = k - 1$.

Dowód. Dla $k = 2$ teza wynika bezpośrednio z R4 i R3.

Istotnie, nietrudno zauważyć, że operacje zdefiniowane w R4 są wszystkie nediagonalne, jako że dla każdej z nich istnieje identyfikacja zmiennych dająca w rezultacie operację $x_1 \cdot x_n$, podczas gdy na mocy R3 jakakolwiek identyfikacja w operacji diagonalnej daje w wyniku operację diagonalną. Tak więc, jeśli algebra ma nediagonalną operację należącą do P_2 , to $\mu(\mathcal{U}) = 1$.

Założmy więc, że $k > 2$ i $f(x_1, x_2, \dots, x_k) \in P_k$ jest operacją nediagonalną. Ponieważ przy tym założeniu $\mathcal{U}$ nie jest algebrą diagonalną, więc na mocy klasyfikacji R5, warunek p_2 pociąga $p_n > 0$ dla każdego $n \geq 2$. Założmy a contrario, że dla pewnego $m > k$, każda operacja istotnie m -arna jest diagonalna i niech $d = d(x_1, x_2, \dots, x_m)$ będzie jedną z tych operacji.

Biorąc pod uwagę dekompozycję diagonalną $\mathcal{U}$ ze względu na redukt $\langle A; d \rangle$, rozważmy dla $s = 1, 2, \dots, n$ następujące operacje $f_s = \langle h_1(x_{i_1}), \dots, h_{s-1}(x_{i_{s-1}}), f^s, h_{s+1}(x_{i_{s+1}}), \dots, h_m(x_{i_m}) \rangle$ gdzie f^s wyznaczone są przez $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ (por. def./i/, §2.5) a $i_1, i_2, \dots, i_n$ są tak dobrane, osobno dla każdego f_s , że $f_s \in P_m$ (to jest możliwe, ponieważ na mocy Lematu 1, f^s zależy co najmniej od jednej zmiennej). Wobec Lematu 1 są to operacje algeb-

raiczne w $\mathcal{O}_V$, a więc wobec naszego założenia, diagonalne. Stąd na mocy Twierdzenia 4, wobec $k > 2$, wynika, że redukt

$\mathcal{O}_V^* = \langle A; d, f_1, f_2, \dots, f_m \rangle$ jest algebrą diagonalną. A ponieważ $d = \langle h_1(x_1), h_2(x_2), \dots, h_m(x_m) \rangle$, więc mamy $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = d(f_1, f_2, \dots, f_m)$, co oznacza, że $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ jest operacją algebraiczną $\mathcal{O}_V^*$, przecząc temu, że z założenia jest nie-diagonalna i tym samym kończąc dowód.

Dowód Twierdzenia 2. Niech $\mu(\mathcal{O}_V) = \infty$. Jeśli $p_2 > 0$, to wobec Lematu 2, wszystkie operacje algebraiczne są diagonalne, a więc $\mathcal{O}_V$ jest algebrą diagonalną. Jeśli $p_2 = 0$, to wobec R3, w $\mathcal{O}_V$ nie ma nietrywialnych operacji diagonalnych, a zatem, wobec klasyfikacji R5, $S(\mathcal{O}_V) = B$ i $\mathcal{O}_V$ jest idempotentnym reduktom grupy Boolea. To dowodzi twierdzenia w jedną stronę. W drugą stronę jest ono oczywiste (por. P2).

Dowód Twierdzenia 3. Dowodzimy pierwszej części. Jeśli $p_2 > 0$, to na mocy Twierdzenia 4, wobec tego, że $\mu(\mathcal{O}_V) > 1$, redukt generowany przez operacje diagonalne jest algebrą diagonalną. Oznaczając ją przez $\mathcal{D}$, widzimy, że wobec Lematu 2,

$\mathcal{O}_V$ spełnia /i/ w Twierdzeniu 3. Jeśli $p_2 = 0$, to wobec R5, $S(\mathcal{O}_V) = A_n \cup B$, gdzie $n \geq 4$. Ponieważ w $\mathcal{O}_V$ nie ma wtedy nietrywialnych operacji diagonalnych, więc łatwo widać, że m jest parzyste. Jeśli $n = 4$, t.j. $S(\mathcal{O}_V) = A_3$, to $\mathcal{O}_V$ trywialnie spełnia /ii/ w Twierdzeniu 3, jeśli $n \geq 5$, to $\mathcal{O}_V$ spełnia /ii/ na mocy R5. Rozważenie przykładów P4 i P5 podanych w §1.2 dowodzi drugiej części twierdzenia.

BIBLIOGRAFIA:

- [1] J.Dudek, Number of algebraic operations in idempotent groupoids, Colloq.Math.,21/1970/, 169-177.
- [2] G.Grätzer, Universal Algebra, The University Series in Higher Math.,D.Van Nostr.Co.Inc.,Princeton,N.J.1968.
- [3] G.Grätzer,J.Płonka, A characterization of semilattices, Colloq.Math.,22/1970/, 21-24.
- [4] G.Grätzer,J.Płonka, On the number of polynomials of an idempotent algebra I,Pac.J.Math.,32/1970/,697-709.
- [5] G.Grätzer,J.Płonka, On the number of polynomials of an idempotent algebra II,Pac.J.Math.,47/1973/,99-113.
- [6] G.Grätzer,J.Płonka, On the number of polynomials of a universal algebra, Colloq.Math.,22/1970/,13-19.
- [7] G.Grätzer,J.Płonka,A.Sekanina, On the number of polynomials of a universal algebra,Colloq.Math.,22/1970/,9-11.
- [8] A.Kisielewicz, A remark on diagonal algebras,Alg.Univers., /w przygotowaniu/
- [9] A.Kisielewicz, On idempotent algebras with $p_n(OV) = 2n(n > 1)$ Alg.Univers.,/w przygotowaniu/
- [10] A.Kisielewicz, On the number of polynomials of idempotent algebras, Alg.Univers. /w druku/.
- [11] J.Płonka, Diagonal Algebras, Fund.Math.,58/1966/,309-322.
- [12] J.Płonka, On algebras with n distinct essentially n -ary operations, Alg.Univers.,1/1971/, 73-79.
- [13] J.Płonka, On binary reducts of idempotent algebras, Alg.Univers.,3/1973/, 330-334.
- [14] J.Płonka, On the number of polynomials of a universal algebra III, Colloq.Math., 22/1971/, 177-180.
- [15] J.Płonka, On the number of polynomials of a universal algebra IV, Colloq.Math., 25/1972/, 11-14.
- [16] K.Urbaniak, On algebraic operations in idempotent algebras, Colloq.Math.,13/1965/, 129-157.