

Aleksandra Łuczak, Feliks Wysocki

Akademia Rolnicza w Poznaniu

WYKORZYSTANIE ROZMYTEJ METODY TOPSIS OPARTEJ NA ZBIORACH α -POZIOMÓW DO PORZĄDKOWANIA LINIOWEGO OBIEKTÓW

1. Wstęp

Istnieje wiele klasycznych metod porządkowania liniowego obiektów wielocechowych, wśród nich metoda TOPSIS (*Technique for Order Preference by Similarity to an Ideal Solution*) zaproponowana przez Hwanga i Yoona [1981]. Pozwala ona na porządkowanie liniowe obiektów opisywanych przez cechy ilościowe. Jej rozszerzeniem jest rozmyta metoda TOPSIS, która umożliwiła agregowanie cech wśród których występują zarówno cechy ilościowe, jak i jakościowe (porządkowe) (zob. [Łuczak, Wysocki 2006, s. 148-158]). Polega ona na wykorzystaniu zmienionych lingwistycznych do wyrażenia wariantów (poziomów) cech jakościowych, ich przekształceniu na trójkątne liczby rozmyte, zastąpieniu wartości cech ilościowych trójkątnymi liczbami rozmytymi, znormalizowaniu cech, wyznaczeniu rozmytego wzorca i antywzorca rozwoju, zagregowaniu rozmytych ocen w każdym obiekcie. W przypadku metody rozmytej nie uwzględnia się jednak „kształtu” liczby rozmytej, tylko jej podstawowe parametry (np. trójkątna liczba rozmyta jest reprezentowana przez trzy oceny (a , b , c): pesymistyczną, najbardziej prawdopodobną i optymistyczną [Łuczak, Wysocki 2006, s. 148-158]). Proponowana metoda pozwala – dokładniej aniżeli w podejściu klasycznym – uwzględnić rozkłady wartości cech poprzez dekompozycję liczb rozmytych na α -poziomy oraz zastosować do opisu badanych obiektów różne typy danych: ilościowe (punktowe i przedziałowe) oraz jakościowe [Wang, Elhag 2006, s. 309-319].

Celem pracy jest przedstawienie możliwości wykorzystania rozmytej metody TOPSIS opartej na zbiorach α -poziomów do porządkowania liniowego obiektów. Proponowane podejście zostało zilustrowane przykładem dotyczącym oceny poziomu życia ludności w wybranych powiatach województwa wielkopolskiego.

2. Metodyka badań

W procesie tworzenia cechy syntetycznej za pomocą rozmytej metody TOPSIS opartej na α -poziomach¹ można wyróżnić dziewięć etapów postępowania (por. [Łuczak, Wysocki 2006, s. 148-158]):

Etap 1. Utworzenie struktury hierarchicznej problemu oceny obiektów. Struktura jest tworzona poprzez rozłożenie rozważanego problemu na elementy składowe: główne kryterium oceny (np. poziom życia ludności), kryteria podrzędne, cechy proste oraz oceniane obiekty.

Etap 2. Określenie ważności kryteriów i cech prostych poprzez przyporządkowanie im współczynników wagowych $\mathbf{W} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, $\mathbf{W}_j = (w_{j1}, w_{j2}, \dots, w_{jk}, \dots, w_{jp_j})$ ($j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, p_j$, $p_1 + p_2 + \dots + p_n = P$ – łączna liczba cech). Do określenia relatywnej ważności kryteriów i cech wykorzystuje się zmienne lingwistyczne, których poziomy przekształca się na liczby rozmyte, np. trójkątne (tab. 1).

Tabela 1. Poziomy zmiennej lingwistycznej i odpowiadające im liczby rozmyte do określania relatywnej ważności cech (kryteriów)

Poziomy zmiennej lingwistycznej	Trójkątna liczba rozmyta
Bardzo niski (BN)	(0; 0; 0,1)
Niski (N)	(0; 0,1; 0,3)
Średni-niższy (SN)	(0,1; 0,3; 0,5)
Średni (S)	(0,3; 0,5; 0,7)
Średni-wyższy (SW)	(0,5; 0,7; 0,9)
Wysoki (W)	(0,7; 0,9; 1,0)
Bardzo wysoki (BW)	(0,9; 1,0; 1,0)

Źródło: opracowanie własne na podstawie [Wang, Elhag 2006].

Etap 3. Wyrażenie wartości punktowych i przedziałowych cech ilościowych oraz poziomów cech jakościowych (porządkowych) za pomocą liczb rozmytych (np. trójkątnych):

a) *cechy ilościowe*

- dane punktowe (x_{ik} , $i = 1, 2, \dots, m$ – liczba obiektów, $k = 1, 2, \dots, P$) sprowadza się do liczb rozmytych, przyjmując $\tilde{x}_{ik} = (x_{ik}, x_{ik}, x_{ik}) = (b, b, b)$,
- dane przedziałowe ($x_{ik} \in [(x_{ik})^L; (x_{ik})^U]$) sprowadza się do liczb rozmytych, przyjmując $\tilde{x}_{ik} = (a, b, c)$, gdzie $a = (x_{ik})^L$, b = wartość średnia, $c = (x_{ik})^U$,

¹ α -poziom definiuje się jako: $A_\alpha = \{x : x \in X; \mu_A(x) \geq \alpha\}$, gdzie $0 \leq \alpha \leq 1$. W praktycznych zastosowaniach wykorzystuje się symetryczne i niesymetryczne funkcje przynależności $\mu_A(x)$ o dziedzinie określonej w zbiorze liczb rzeczywistych R .

b) *cechy jakościowe* – warianty cech mogą być wyrażone za pomocą poziomów zmiennej lingwistycznej, którym odpowiadają trójkątne liczby rozmyte $\tilde{x}_{ik} = (a, b, c)$, reprezentowane przez trzy oceny: pesymistyczną, najbardziej prawdopodobną i optymistyczną (tab. 2).

Tabela 2. Zmienna lingwistyczna – jej poziomy i odpowiadające im liczby rozmyte wykorzystywane do opisu cech jakościowych – porządkowych

Poziomy zmiennej lingwistycznej	Bardzo niski	Niski	Średni	Wysoki	Bardzo wysoki
Trójkątne liczby rozmyte (a, b, c)	(0, 0, 20)	(20, 30, 40)	(40, 50, 60)	(60, 70, 80)	(80, 100, 100)

Źródło: [Chang, Yeh 2004].

Etap 4. Normalizacja trójkątnych liczb rozmytych. Ma ona na celu ujednoczenie charakteru cech i sprowadzenie ich wartości do porównywalności. W pracy zastosowano unitaryzację zerowaną wykonywaną na liczbach rozmytych [Łuczak, Wysocki 2006, s. 148-158]. Po normalizacji mamy: $\tilde{z}_{ik} = (a'_{ik}, b'_{ik}, c'_{ik})$.

Etap 5. Określenie współrzędnych wzorca:

$$\tilde{A}^+ = \left(\max_i (c'_{i1}), \max_i (c'_{i2}), \dots, \max_i (c'_{iP}) \right) = (c_1^+, c_2^+, \dots, c_P^+)$$

i antywzorca rozwoju:

$$\tilde{A}^- = \left(\min_i (a'_{i1}), \min_i (a'_{i2}), \dots, \min_i (a'_{iP}) \right) = (a_1^-, a_2^-, \dots, a_P^-).$$

Etap 6. Określenie zbioru różnych α -poziomów i przeprowadzenie dekompozycji znormalizowanych wartości cech dla α -poziomów:

$$(z_{ik})_{\alpha}^L = b'_{ik} - (b'_{ik} - a'_{ik}) \cdot (1 - \alpha); (z_{ik})_{\alpha}^U = b'_{ik} + (c'_{ik} - b'_{ik}) \cdot (1 - \alpha) \quad (i=1, \dots, m; k=1, \dots, P)$$

oraz wag

$$(w_k)_{\alpha}^L = b_k - (b_k - a_k) \cdot (1 - \alpha); (w_k)_{\alpha}^U = b_k + (c_k - b_k) \cdot (1 - \alpha) \quad (k=1, \dots, P).$$

Etap 7. Obliczenie dla każdego α -poziomu ($\alpha_1 = 0 < \alpha_2 < \dots < \alpha_N = 1$; N – liczba α -poziomów) ważonych rozmytych odległości euklidesowych ocenianych obiektów od wzorca:

$$(d_i^+)_{\alpha} = \sqrt{\sum_{k=1}^P (w_k \left((z_{ik})_{\alpha}^L - (c_k)^+ \right))^2}, \quad (d_i^+)_{\alpha}^U = \sqrt{\sum_{k=1}^P (w_k \left((z_{ik})_{\alpha}^U - (c_k)^+ \right))^2}$$

i antywzorca rozwoju:

$$(d_i^-)_{\alpha} = \sqrt{\sum_{k=1}^P (w_k \left((z_{ik})_{\alpha}^L - (a_k)^- \right))^2}, \quad (d_i^-)_{\alpha}^U = \sqrt{\sum_{k=1}^P (w_k \left((z_{ik})_{\alpha}^U - (a_k)^- \right))^2}.$$

Etap 8. Obliczenie rozmytych wartości cechy syntetycznej poprzez rozwiązanie par modeli programowania nieliniowego dla każdego obiektu i α -poziomu:

Zadanie I:

Zadanie II:

$$(RC_i)_\alpha^L = \frac{(d_i^-)^L}{(d_i^+)^L + (d_i^-)^L} = \min, \quad (RC_i)_\alpha^U = \frac{(d_i^-)^U}{(d_i^+)^U + (d_i^-)^U} = \max \quad i=1, \dots, m$$

$$(w_k)_\alpha^L \leq w_k \leq (w_k)_\alpha^U \quad (w_k)_\alpha^L \leq w_k \leq (w_k)_\alpha^U \quad k=1, \dots, P$$

Etap 9. Uporządkowanie liniowe obiektów według wartości uśrednionych syntetycznego miernika rozwoju:

$$RC_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{(RC_i)_\alpha^L + (RC_i)_\alpha^U}{2} \right) \quad i=1, \dots, m, \quad \alpha_1 = 0 < \alpha_2 < \dots < \alpha_N = 1,$$

gdzie: RC_i – wartość syntetycznego miernika rozwoju dla i -obiektu ($i = 1, 2, \dots, m$).

Im wyższa wartość (RC_i), tym wyższy poziom rozwoju i -tego obiektu.

3. Ocena poziomu życia ludności w wybranych powiatach województwa wielkopolskiego

Proponowana rozmyta metoda TOPSIS oparta na α -poziomach została wykorzystana do oceny poziomu życia ludności w trzech wybranych powiatach województwa wielkopolskiego – poznańskim, tureckim, złotowskim. W pierwszym etapie utworzono strukturę hierarchiczną problemu oceny poziomu życia ludności w powiatach (etap 1, rys. 1).

Tabela 3. Współczynniki wagowe w odniesieniu do kryteriów podrzędnych przy ocenie poziomu życia ludności powiatów województwa wielkopolskiego

Kryterium (sytuacja)	Poziom zmiennej lingwistycznej	Trójkątne liczby rozmyte
Sytuacja w zakresie ochrony środowiska	średni-niższy	(0,1; 0,3; 0,5)
Sytuacja demograficzna	średni-wyższy	(0,5; 0,7; 0,9)
Sytuacja ekonomiczno-społeczna	wysoki	(0,7; 0,9; 1,0)

Źródło: opracowanie własne.

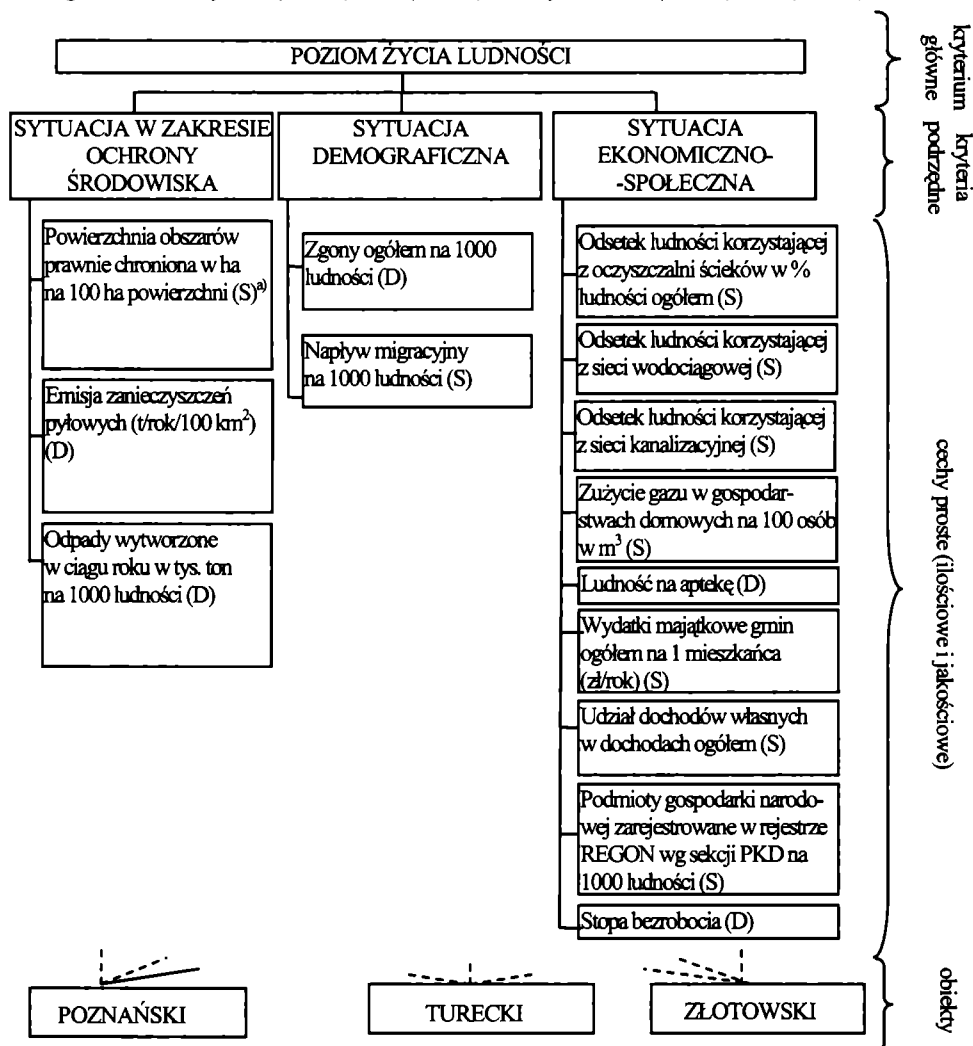
Tabela 4. Rozmyte wartości cech charakteryzujących poziom życia ludności powiatów województwa wielkopolskiego w 2005 r.

Lp.	Powiat	Powierzchnia obszarów prawnie chroniona w ha na 100 ha powierzchni gmin	...	Podmioty gospodarki narodowej zarejestrowane w rejestrze REGON wg sekcji PKD na 1000 ludności
1	poznański	(0,00; 27,85; 77,20) ^{a)}	...	(75,58; 127,11; 169,38)
2	turecki	(0,00; 36,51; 100,00)	...	(37,40; 59,12; 86,03)
3	złotowski	(0,00; 32,24; 59,44)	...	(34,54; 61,25; 82,37)
	w_k	(0,1; 0,3; 0,5)	...	(0,7; 0,9; 1,0)

^{a)} Pierwszy parametr liczby rozmytej jest minimalną wartością cechy w zbiorze gmin danego powiatu, środkowy – wartością średnią, ostatni – wartością maksymalną.

Źródło: opracowanie własne na podstawie niepublikowanych danych Urzędu Statystycznego w Poznaniu oraz *Banku Danych Regionalnych* [2005].

Następnie, biorąc pod uwagę poziomy zmiennej lingwistycznej podane w tab. 1, określono metodą ekspercką współczynniki wagowe w postaci trójkątnych liczb rozmytych (etap 2, tab. 3). Wartości wszystkich cech zostały przedstawione jako liczby rozmyte (etap 3, tab. 4). Kolejnym etapem było znormalizowanie rozmytych wartości cech i wyznaczenie wzorca i antywzorca rozwoju (etap 4-5, tab. 5). Zastosowano podejście unitaryzacji zerowanej, dla którego wzorzec wynosi $(1, 1, 1), \dots, (1, 1, 1)$, a antywzorzec $(0, 0, 0), \dots, (0, 0, 0)$.



^{a)} (S) – stymulanta, (D) – destymulanta. Cechy proste zostały wybrane na podstawie analizy merytorycznej i statystycznej (analizy macierzy odwrotnej do macierzy korelacji pomiędzy cechami).

Rys. 1. Struktura hierarchiczna problemu oceny poziomu życia ludności w powiatach województwa wielkopolskiego

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 5. Znormalizowane rozmyte wartości cech oraz wzorce i antywzorce rozwoju w ocenie poziomu życia ludności powiatów województwa wielkopolskiego w 2005 r.

Lp.	Powiat	Powierzchnia obszarów prawnie chroniona w ha na 100 ha powierzchni gmin	...	Podmioty gospodarki narodowej zarejestrowane w rejestrze REGON według sekcji PKD na 1000 ludności
1	poznański	(0,00; 0,28; 0,77)	...	(0,45; 0,75; 1,00)
2	turecki	(0,00; 0,37; 1,00)	...	(0,22; 0,35; 0,51)
3	złotowski	(0,00; 0,32; 0,59)	...	(0,20; 0,36; 0,49)
	Wzorzec rozwoju	(1, 1, 1)	...	(1, 1, 1)
	Antywzorzec rozwoju	(0, 0, 0)	...	(0, 0, 0)

Źródło: obliczenia własne na podstawie tab. 4.

Następnie przeprowadza się dekompozycję znormalizowanych wartości cech. Dokonano jej przy uwzględnieniu 11 α -poziomów, dla których obliczono przedziały liczbowe dla każdej wartości cechy (etap 6, tab. 6).

Tabela 6. Dekompozycja wartości cech opisujących poziom życia ludności według wybranych α -poziomów i powiatów województwa wielkopolskiego w 2005 r.

Powiaty/ wagi	α -poziomy	Powierzchnia obszarów prawnie chroniona w ha na 100 ha powierzchni gmin	...	Podmioty gospodarki narodowej zarejestrowane w rejestrze REGON według sekcji PKD na 1000 ludności
		$((z_k)_\omega^L; (z_k)_\omega^U)$...	$((z_k)_\omega^L; (z_k)_\omega^U)$
Poznański	0	(0,00; 0,77)	...	(0,45; 1,00)

	0,5	(0,15; 0,53)	...	(0,60; 0,88)

Turecki	1	(0,28; 0,28)	...	(0,75; 0,75)
	0	(0,00; 1,00)	...	(0,22; 0,51)

	0,5	(0,18; 0,68)	...	(0,28; 0,43)
Złotowski
	1	(0,37; 0,37)	...	(0,35; 0,35)
	0	(0,00; 0,59)	...	(0,20; 0,49)

$((w_k)_\alpha^L; (w_k)_\alpha^U)$	0,5	(0,16; 0,46)	...	(0,28; 0,42)

	1	(0,32; 0,32)	...	(0,36; 0,36)
	0	(0,10; 0,50)	...	(0,70; 1,00)
$((w_k)_\alpha^L; (w_k)_\alpha^U)$
	0,5	(0,20; 0,40)	...	(0,80; 0,95)

	1	(0,30; 0,30)	...	(0,90; 0,90)

Źródło: obliczenia własne na podstawie tab. 5.

W etapie 7 utworzono formuły dla ważonych rozmytych odległości euklidesowych ocenianych powiatów od wzorca i antywzorca rozwoju dla każdego powiatu i poziomu α . Na przykład dla powiatu złotowskiego i $\alpha = 0$ odległość od wzorca

$\left((d_3^+)_0^L, (d_3^+)_0^U \right)$ wynosi:

$$\begin{aligned} (d_3^+)_0^L &= \sqrt{(w_1(0-1))^2 + \dots + (w_{14}(0,2-1))^2} \\ (d_3^+)_0^U &= \sqrt{(w_1(0,59-1))^2 + \dots + (w_{14}(0,49-1))^2}, \end{aligned}$$

a od antywzorca $\left((d_3^-)_0^L, (d_3^-)_0^U \right)$ wynosi:

$$\begin{aligned} (d_3^-)_0^L &= \sqrt{(w_1(0-0))^2 + \dots + (w_{14}(0,2-0))^2} \\ (d_3^-)_0^U &= \sqrt{(w_1(0,59-0))^2 + \dots + (w_{14}(0,49-0))^2}. \end{aligned}$$

Następnie sformułowano modele programowania nieliniowego dla każdego powiatu i poziomu α . Dla powiatu złotowskiego i $\alpha = 0$ otrzymano następujące modele nieliniowe (etap 8):

Zadanie I:

$$(RC_3)_0^L = \frac{\sqrt{(w_1(0,0-0))^2 + \dots + (w_{14}(0,2-0))^2}}{\sqrt{(w_1(0,0-1))^2 + \dots + (w_{14}(0,2-1))^2} + \sqrt{(w_1(0,0-0))^2 + \dots + (w_{14}(0,2-0))^2}} = \min$$

$$0,1 \leq w_1 \leq 0,5; \dots, 0,7 \leq w_{14} \leq 1,0.$$

Zadanie II:

$$(RC_3)_0^U = \frac{\sqrt{(w_1(0,59-0))^2 + \dots + (w_{14}(0,49-0))^2}}{\sqrt{(w_1(0,59-1))^2 + \dots + (w_{14}(0,49-1))^2} + \sqrt{(w_1(0,59-0))^2 + \dots + (w_{14}(0,49-0))^2}} = \max$$

$$0,1 \leq w_1 \leq 0,5; \dots; 0,7 \leq w_{14} \leq 1,0.$$

Wartości funkcji celu rozwiązania optymalnego powyższych modeli uzyskane za pomocą *Excel Solver* są następujące: $(RC_3)_0^L = 0,211$ i $(RC_3)_0^U = 0,678$.

Tabela 7 przedstawia wartości syntetycznego miernika poziomu życia ludności uzyskane rozmytą metodą TOPSIS dla wybranych α -poziomów i powiatów. Dla porównania podano również wartości syntetycznego miernika rozwoju uzyskane klasyczną metodą TOPSIS. Należy zauważyć, że proponowana metoda dostarczyła mniejszego, aniżeli metoda klasyczna, zakresu zmienności syntetycznego miernika poziomu życia ludności. Świadczyć to może o występowaniu w poszczególnych powiatach gmin o skrajnych wartościach cech (taką wartością jest np. bardzo wyso-

ka emisja zanieczyszczeń pyłowych w gminie Turek w powiecie tureckim wynosząca 7268,8 ton/rok/100 km, przy średniej dla powiatu – 125,2), które mają wpływ na kształtowanie się wartości średniej arytmetycznej dla powiatu. Wówczas średnie arytmetyczne obliczone dla powiatów nie dają prawdziwej charakterystyki gmin. Proponowana metoda pozwala, poprzez zastosowanie α -poziomów, właściwiej, w porównaniu z metodą klasyczną, scharakteryzować daną zbiorowość gmin ze względu na badane cechy (w przypadku metody klasycznej tylko średnia arytmetyczna służy do sumarycznej charakterystyki gmin wchodzących w skład powiatu).

Tabela 7. Wartości syntetycznego miernika poziomu życia ludności uzyskane rozmytą metodą TOPSIS dla wybranych α -poziomów i powiatów

α -poziomy		Powiaty					
		poznajski		turecki		złotowski	
		$(RC_1)_\alpha^L$	$(RC_1)_\alpha^U$	$(RC_2)_\alpha^L$	$(RC_2)_\alpha^U$	$(RC_3)_\alpha^L$	$(RC_3)_\alpha^U$
0		0,266	0,917	0,187	0,677	0,211	0,678
0,1		0,289	0,887	0,201	0,650	0,228	0,654
0,2		0,313	0,850	0,216	0,619	0,245	0,626
0,3		0,337	0,811	0,232	0,586	0,263	0,596
0,4		0,362	0,769	0,250	0,552	0,281	0,566
0,5		0,388	0,726	0,267	0,517	0,300	0,537
0,6		0,413	0,682	0,286	0,485	0,318	0,509
0,7		0,439	0,639	0,304	0,452	0,337	0,480
0,8		0,464	0,596	0,323	0,421	0,357	0,452
0,9		0,489	0,554	0,342	0,390	0,377	0,424
1		0,515	0,515	0,361	0,361	0,397	0,397
Wartości uśrednione	Proponowana metoda	0,555		0,395		0,420	
	Klasyczna metoda TOPSIS	0,716		0,233		0,344	
Ranga		1		3		2	

Źródło: obliczenia własne.

4. Podsumowanie

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń i analiz można sformułować następujące stwierdzenia i wnioski:

1. Zaproponowana rozmyta metoda porządkowania liniowego TOPSIS może być zastosowana do wyznaczenia syntetycznego miernika rozwoju dla różnych typów danych: ilościowych (punktowych i przedziałowych) oraz jakościowych. Ma przewagę nad klasyczną metodą zwłaszcza wtedy, gdy w zbiorze cech występują takie, których wartości są określone nieprecyzyjnie lub zbiorowość badanych obiektów jest niejednorodna – czyli skrajne wartości cech.

2. Proponowane podejście pozwala dokładniej aniżeli podejście klasyczne uwzględnić rozkłady wartości cech w badanych obiektach. W przypadku podejścia klasycznego rozkład reprezentuje jeden parametr (np. średnia arytmetyczna z war-

tości cechy w podobiektach – gminach), natomiast w proponowanej metodzie wykorzystuje się dekompozycję wartości cechy na α -poziomy (oznacza to, że liczba parametrów uwzględnionych w konstrukcji miernika dla jednego obiektu – powiatu wynosi $2 \times$ liczba α -poziomów, w naszym przypadku $2 \times 11 = 22$).

3. Wyznaczenie wartości syntetycznego miernika rozwoju za pomocą proponowanej rozmytej metody TOPSIS opartej na zbiorach α -poziomów jest dosyć pracochłonną i numerycznie skomplikowaną procedurą, która wymaga rozwiązania dużej liczby zadań programowania nieliniowego (np. jeżeli liczba badanych obiektów wynosi 3, α -poziomów – 11, to należy rozwiązać $3 \times 11 \times 2 = 66$ zadań).

Literatura

- Bank Danych Regionalnych* (2005), GUS, Warszawa.
- Chang Y.-H., Yeh C.-H. (2004), *A New Airline Safety Index*, „Transportation Research Part B”, tom 38 (4), s. 369-383.
- Hwang C.L., Yoon K. (1981), *Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*, Springer, Berlin.
- Łuczak A., Wysocki F. (2006), *Rozmyta wielokryterialna metoda porządkowania liniowego obiektów*, [w:] Taksonomia 13, red. K. Jajuga, M. Walesiak, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1126, AE, Wrocław, s. 148-158.
- Wang Y.-M., Elhag T.M.S. (2006), *Fuzzy TOPSIS Method Based on Alpha Level Sets with an Application to Bridge Risk Assessment*, „Expert Systems with Applications”, tom 31 (2), s. 309-319.
- Województwo wielkopolskie. Podregiony – powiaty – gminy 2005* (2006), WUS, Poznań.

APPLICATION OF FUZZY TOPSIS METHOD BASED ON α -LEVEL SETS TO LINEAR ORDERING OF OBJECTS

Summary

The aim of this paper is to investigate the applicability of fuzzy TOPSIS method based on α -level sets to the construction of synthetic characteristics. The proposed method bases on two types of characteristic: qualitative and quantitative. The proposed procedure was employed to assess the level of people life in chosen countries in Wielkopolska province.