

Daniel Papla

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

STRUKTURA ZALEŻNOŚCI A MIARY RYZYKA NA PRZYKŁADZIE INDEKSÓW GIEŁD ŚWIATOWYCH I GPW W WARSZAWIE

1. Wstęp

Ryzyko jest jednym z podstawowych kryteriów podejmowania decyzji finansowych. Jeśli decyzje te dotyczą więcej niż jednego instrumentu finansowego, to zależność między badanymi instrumentami staje się równie ważnym kryterium. Na przykład w klasycznej teorii portfela i stopa zwrotu, i ryzyko portfela papierów wartościowych zależą nie tylko od stóp zwrotu i ryzyka poszczególnych składników, ale również od korelacji liniowej pomiędzy tymi składnikami.

Celem artykułu jest zbadanie wpływu sposobu modelowania zależności na ocenę ryzyka portfela instrumentów finansowych. Ze względu na ograniczenia metodologii wykorzystanej w artykule autor ograniczył się jedynie do portfeli dwuskładnikowych. Hipoteza badawcza artykułu brzmi następująco: źle wyspecyfikowany model zależności między składnikami portfela aktywów finansowych może doprowadzić do błędnej oceny ryzyka tego portfela.

Dane wykorzystane w analizie to szeregi czasowe indeksów największych giełd światowych i naszej giełdy. Weryfikacji hipotezy badawczej dokonano za pomocą symulacji Monte Carlo wartości narażonej na ryzyko (VaR) i warunkowej wartości narażonej na ryzyko (CVaR) wykorzystującej współczynniki funkcji powiązań wystymowane dla par indeksów. Jako modeli struktury zależności użyto następujących funkcji powiązań: Gaussa, Franka, Gumbela i Cooka-Johnsona (Claytona). Gęstość brzegowa została wyznaczona za pomocą jądrowej estymacji funkcji gęstości.

Oczywiście podstawowym problemem jest znalezienie „dobrze wyspecyfikowanego” modelu. Dlatego wyboru najlepiej dopasowanej funkcji powiązań dokonano za pomocą testu Andersona-Darlinga i testu entropii (wykorzystując empiryczną funkcję powiązań).

W pierwszej części artykułu w zwięzły sposób omówiono metodologię w nim wykorzystaną oraz przedstawiono wyniki badań rynków finansowych z wykorzystaniem modeli zależności. Druga część zawiera omówienie miar ryzyka, a w ostatniej zamieszczono wyniki badań wraz z ich interpretacją.

2. Wykorzystanie funkcji powiązań w analizie polskiego rynku kapitałowego

Jeden z pełniejszych przeglądów funkcji powiązań można znaleźć w pracy Nelsena [1999]. Tu przedstawione zostaną jedynie funkcje wykorzystane w badaniach empirycznych, które należą do rodziny tzw. funkcji archimedesowskich. Funkcje te można przedstawić za pomocą ogólnego wzoru:

$$C(u, v) = \psi^{-1}(\psi(u) + \psi(v)),$$

$$\psi: [0; 1] \rightarrow [0; \infty), \psi(1) = 0.$$

W badaniach empirycznych, których wyniki zamieszczono w dalszej części artykułu, wykorzystano następujące funkcje powiązań: funkcję powiązań Claytona, Gumbela, Franka oraz funkcję powiązań Gaussa. Do estymacji rozkładów brzegowych wykorzystano jądro estymator gęstości [Silverman 1986].

Aby wybrać najlepiej dopasowaną funkcję powiązań, w artykule zastosowano trzy kryteria:

a) test Andersona-Darlinga:

$$AD = \max_{1 \leq t_1 \leq T, 1 \leq t_2 \leq T} \frac{\left| \hat{C}\left(\frac{t_1}{T}, \frac{t_2}{T}\right) - C_\theta\left(\frac{t_1}{T}, \frac{t_2}{T}\right) \right|}{\sqrt{C_\theta\left(\frac{t_1}{T}, \frac{t_2}{T}\right)\left(1 - C_\theta\left(\frac{t_1}{T}, \frac{t_2}{T}\right)\right)}}$$

gdzie: $\hat{C}\left(\frac{t_1}{T}, \frac{t_2}{T}\right)$ – empiryczna funkcja powiązań Deheuvela [1979]:

$$\hat{C}\left(\frac{t_1}{T}, \frac{t_2}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T I(r_1^i \leq t_1) I(r_2^i \leq t_2), \quad t_1 = 1, 2, \dots, T, \quad t_2 = 1, 2, \dots, T,$$

$$I(a) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } a - \text{prawda} \\ 2 & \text{gdy } a - \text{fałsz} \end{cases},$$

r_1^i – statystyka rangowa 1-go szeregu czasowego,

C_θ – parametryczna funkcja powiązań.

b) zintegrowany test Andersona-Darlinga:

$$IAD = \frac{\sum_{t_1}^T \sum_{t_2}^T \left[\hat{C} \left(\frac{t_1}{T}, \frac{t_2}{T} \right) - C_{\theta} \left(\frac{t_1}{T}, \frac{t_2}{T} \right) \right]^2}{C_{\theta} \left(\frac{t_1}{T}, \frac{t_2}{T} \right) \left(1 - C_{\theta} \left(\frac{t_1}{T}, \frac{t_2}{T} \right) \right)},$$

c) entropię:

$$en = \sum_{t_1}^T \sum_{t_2}^T c \left(\frac{t_1}{T}, \frac{t_2}{T} \right) \ln \left(c \left(\frac{t_1}{T}, \frac{t_2}{T} \right) \right).$$

gdzie: c – gęstość parametrycznej funkcji powiązań.

Najlepiej dopasowaną funkcją powiązań jest ta funkcja, która wykazuje najmniejszą wartość statystyk Andersona-Darlinga oraz najmniejszą wartość entropii.

Przedstawione w prezentowanym tekście wyniki badań rynków finansowych z wykorzystaniem funkcji powiązań nie są jedynymi opisanymi w polskiej literaturze przedmiotu. Według wiedzy autora większość tych badań została przeprowadzona przez pracowników ośrodka wrocławskiego. Należy tu wymienić prace takich autorów, jak: Jajuga, Kuziak, Papla, Piontek, Rokita¹. W większości z tych prac analiza rynków kapitałowych (zwłaszcza polskiej giełdy) za pomocą funkcji powiązań pozwoliła wykazać takie ich zalety, jak:

- uwzględnianie innej struktury zależności niż liniowa, w tym uwzględnianie zależności w ogonach rozkładu,
- uwzględnianie grubych ogonów rozkładów brzegowych,
- uchwycenie pełnej struktury zależności między badanymi zmiennymi – postać funkcji powiązań w pełni oddaje zależność między zmiennymi,
- zastosowanie funkcji powiązań pozwala „ominać” problem nieznajomości postaci analitycznej rozkładu łącznego.

W pracy Rokity [Rokita 2006] przedstawiono próbę zastosowania funkcji powiązań dla liczby wymiarów większej niż dwa, jednakże nie zakończyła się ona sukcesem ze względu na wady funkcji archimedesowskich w przypadku wielowymiarowym.

3. CVaR jako miara ryzyka

Jedną z miar wywodzących się z VaR posiadających cechy potrzebne w optymalizacji jest warunkowa wartość zagrożona (*conditional value-at-risk* – CVaR), którą można zdefiniować jako warunkową wartość oczekiwaną stóp zwrotu z portfela (lub pojedynczego instrumentu), pod warunkiem że stopy te są mniejsze od β -tego kwantyla rozkładu stóp zwrotu. Ponieważ kwantyl ten to VaR na poziomie β , CVaR można przedstawić wzorem jako:

¹ Por. spis literatury.

$$CVaR_\beta = E[R_p | R_p \leq -VaR_p].$$

gdzie: R_p – stopa zwrotu z portfela, VaR_β – VaR portfela na poziomie β ,

$$VaR_\beta = -\min\{u \in R_p : F(\mathbf{x}, u) \geq \beta\} = -F^{-1}(\mathbf{x}, \beta),$$

gdzie: \mathbf{x} – wektor udziału poszczególnych składników w portfelu,
 $F(\mathbf{x}, u) = P\{R_p \leq u\}$ – dystrybuanta rozkładu stóp zwrotu z portfela.

Ponieważ rozpatrujemy z reguły lewy ogon rozkładu stóp zwrotu, minus we wzorze na VaR oznacza, że uzyskujemy wartość dodatnią. Oczywiście większa wartość VaR oznacza większe ryzyko.

$CVaR$ jest miarą koherentną w sensie Artznera i in., co oznacza, że jest również subaddytywna. Minimalizacja tej miary prowadząca do uzyskania optymalnego portfela opisana jest w pracach Rockafellara i Uryaseva oraz Di Clemente i Romano [Di Clemente, Romano 2003; Rockafellar, Uryasev 2002].

4. Dane i wyniki

Do obliczeń wykorzystano dzienne stopy zwrotu 6 indeksów: BUX, DAX, FT_SE100, NIKKEI, 'SP500, WIG20 z okresu 9 września 2007 r.-28 października 2008 r. (250 stóp zwrotu). Dane obejmowały gwałtowne załamanie się rynków finansowych, co teoretycznie powinno faworyzować funkcje powiązań.

Z analizy tab. 1 wynika, że w badanym okresie najsilniej ze sobą powiązane były indeksy BUX i DAX, DAX i FT-SE100, najsłabiej – NIKKEI i SP500. Wartość współczynnika θ (lub σ w przypadku gaussowskiej funkcji powiązań) jest dla poszczególnych funkcji powiązań mocno skorelowana – np. wartość współczynnika korelacji między wynikami dla funkcji powiązań Gumbela i Franka wynosi 0,997, a korelacja między wynikami dla funkcji powiązań Cooka-Johnsona i Gaussa wynosi 0,854.

Badając dopasowanie poszczególnych funkcji powiązań za pomocą kryteriów przedstawionych w punkcie 3 (w tab. 1 zaprezentowano jedynie wartości zintegrowanego testu Andersona-Darlinga – pogrubiono wartość minimalną dla każdego portfela), zauważamy, że najlepiej dopasowane są funkcje powiązań Cooka-Johnsona (20 minimalnych wartości dla trzech kryteriów) i Gumbela (13 minimalnych wartości). Funkcja Gaussa uzyskała 8, a Franka – jedynie 4. Wyniki te są o wiele mniej jednoznaczne niż wyniki, które uzyskali Ane i Kharoubi [Ane, Kharoubi 2003]. Ich wyniki zdecydowanie preferowały funkcję Cooka-Johnsona, jedynie w dwóch przypadkach minimalną wartość jednego z kryteriów uzyskali dla funkcji powiązań Gumbela, a w jednym – funkcji Franka. Rozbieżność wyników, zdaniem autora, wynika z różnych okresów badań; okres uwzględniony w niniejszym badaniu obejmował kryzys finansowy, co pogorszyło dopasowanie wszyst-

kich funkcji powiązań. Nadal jednak funkcja Cooka-Johnsona jest najlepiej dopasowana.

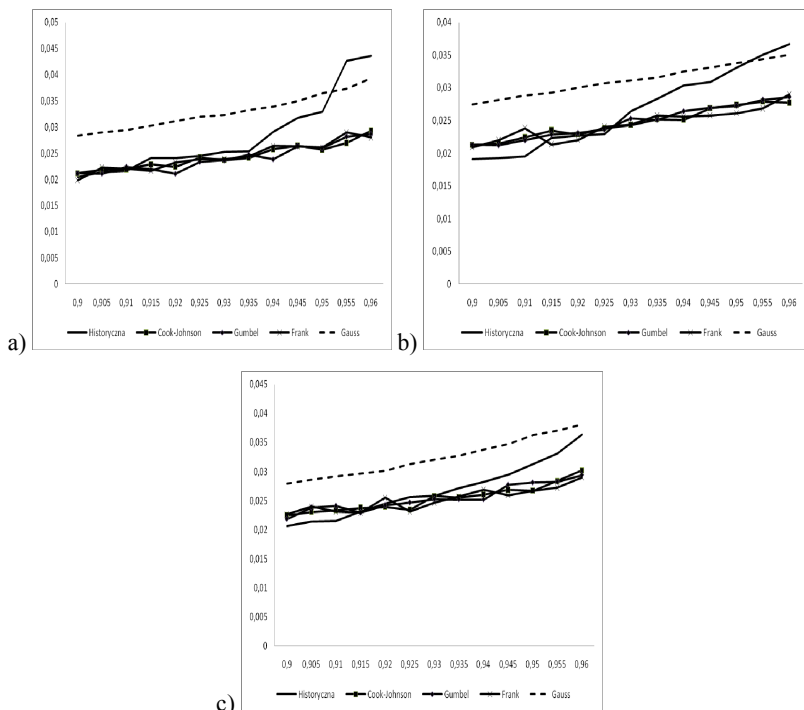
Tabela 1. Wyniki estymacji funkcji powiązań

Wyszczególnienie	Cook-Johnson			Frank		
	θ	błąd st.	IAD	θ	błąd st.	IAD
BUX-DAX	1,475	0,13866	308,62	6,183	0,45406	447,78
BUX-FT_SE100	1,3563	0,13474	269,56	5,6642	0,45903	377,85
BUX-NIKKEI	0,78965	0,10084	102,48	2,594	0,40478	55,656
BUX-SP500	0,79805	0,10976	104,21	3,2406	0,38388	82,701
BUX-WIG20	1,1906	0,11862	215,3	5,622	0,42963	372,07
DAX-FT_SE100	3,7136	0,19965	841,01	12,962	0,77215	1030,4
DAX-NIKKEI	0,84414	0,11554	114,46	3,0346	0,40823	69,469
DAX-SP500	1,0059	0,10893	157,8	4,5305	0,4149	223,21
DAX-WIG20	1,371	0,12811	274,42	5,5038	0,44233	355,85
FT_SE100-NIKKEI	0,82842	0,12306	110,83	3,2186	0,41971	81,11
FT_SE100-SP500	0,91191	0,11038	131,44	4,1254	0,41589	171,79
FT_SE100-WIG20	1,4684	0,13799	306,44	5,4223	0,43657	344,63
NIKKEI-SP500	0,27236	0,084245	191,3	1,3438	0,37238	186,92
NIKKEI-WIG20	0,70625	0,10975	87,954	2,5283	0,39144	55,612
SP500-WIG20	0,60996	0,10534	79,071	2,9607	0,41074	65,679
	Gumbel			Gauss		
	θ	błąd st.	IAD	σ	błąd st.	IAD
BUX-DAX	2,0906	0,095441	361,97	0,73135	0,017348	400,74
BUX-FT_SE100	1,9441	0,088737	277,03	0,70225	0,018726	335,93
BUX-NIKKEI	1,3564	0,065163	40,542	0,45898	0,04169	39,69
BUX-SP500	1,4787	0,066111	44,145	0,49893	0,031903	59,454
BUX-WIG20	2,0184	0,098957	320,48	0,70469	0,021547	341,11
DAX-FT_SE100	3,5546	0,16172	926,9	0,91436	0,006308	997,54
DAX-NIKKEI	1,4288	0,071606	36,291	0,50449	0,040606	63,108
DAX-SP500	1,7049	0,077199	139,03	0,60391	0,026094	165,08
DAX-WIG20	1,9569	0,096375	284,53	0,7002	0,01739	331,62
FT_SE100-NIKKEI	1,468	0,076583	41,865	0,5373	0,040255	89,077
FT_SE100-SP500	1,6078	0,076343	90,176	0,58145	0,028706	135,95
FT_SE100-WIG20	1,9526	0,089943	281,99	0,69893	0,016499	328,97
NIKKEI-SP500	1,196	0,0514	164,86	0,24746	0,047385	137,72
NIKKEI-WIG20	1,3416	0,066054	44,363	0,44639	0,043037	35,826
SP500-WIG20	1,4172	0,077117	35,58	0,49072	0,041812	54,47

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 1 przedstawiono profile ryzyka dla trzech wybranych portfeli (najmocniej powiązanego – BUX-DAX, najslabiej powiązanego – Nikkei-SP500, i zawierającego indeks polskiej giełdy – SP500-WIG20). Profile te otrzymano metodą symulacji Monte-Carlo, wykorzystując wartości wcześniej wyestymowanych współczynników θ (lub σ dla funkcji powiązań Gaussa) oraz metodą historyczną dla VaR empirycznego. Jak widać, funkcja gaussowska dla wartości progu 0,9-0,96 mocno przeszacowuje poziom VaR w stosunku do VaR empirycznego (historycznego). Średnie odchyleni pomiędzy warto-

ścią VaR dla danej funkcji powiązań a wartością VaR historycznego dla poszczególnych portfeli wynosi 0,00398 dla copula Cooka-Johnsona, 0,00401 dla copula Gumbela, 0,003967 dla copula Franka i 0,006001 dla copula Gaussa.



Rys. 1. Profil ryzyka dla: a) portfela BUX-DAX, b) portfela Nikkei-SP500, c) portfela SP500-WIG20, na osi poziomej znajduje się wartość progu β , zaś na osi pionowej – wartość VaR
Źródło: opracowanie własne.

Z przedstawionych wyników można wyciągnąć następujące wyniki:

- wyniki wszystkich badanych funkcji powiązań są do siebie bardzo zbliżone, najbardziej od pozostałych odbiegają wyniki uzyskane dla funkcji powiązań Gaussa,
- z wybranych funkcji powiązań do danych najlepiej dopasowana jest funkcja powiązań Cooka-Johnsona, a najgorzej – funkcja powiązań Gaussa, która wraz z normalnymi rozkładami brzegowymi tworzy (pod pewnymi warunkami) wielowymiarowy rozkład normalny,
- z wyników estymacji wartości VaR metodą Monte-Carlo wynika, że wyniki otrzymanymi za pomocą funkcji powiązań Cooka-Johnsona, Gumbela i Franka są mniej więcej o 20% lepiej dopasowane do VaR empirycznego niż wyniki otrzymane za pomocą funkcji powiązań Gaussa, co potwierdza wyniki otrzymane w artykule [Ane, Kharoubi 2003].

Zdaniem autora wyniki badań, choć nie są na pewno wyczerpujące, przemawiają za tezą, że nieliniowa struktura zależności określona za pomocą takich funkcji powiązań, jak copula Cooka-Johnsona, Gumbela lub Franka, pozwala na lepszą estymację ryzyka portfeli, przynajmniej w przypadku portfeli dwuskładnikowych. Dalsze badania autora będą szły w kierunku zarówno zwiększenia liczby składników portfela, jak i zbadania innych funkcji powiązań.

Literatura

- Ane T., Kharoubi C. (2003), *Dependence structure and risk measure*, „Journal of Business”, vol. 76, no 3.
- Armstrong M. (2003), *Copula catalogue. Part 1: bivariate Archimedean copulas*, maszynopis, CERNA, Paryż, <http://www.cerna.ensmp.fr>.
- Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D (1999)., *Coherent measures of risk*, „Mathematical Finance” no 9(3).
- Deheuvels P. (1979), *La fonction de dépendance empirique et ses propriétés – un test non paramétrique d’indépendance*, Académie Royale de Belgique – Bulletin de la Classe des Sciences, 5th ser., 65, s. 274-292.
- Di Clemente A., Romano C. (2003), *Beyond Markovitz: building optimal portfolio using non-elliptical asset return distribution*, Research Paper, University of Rome.
- Durrleman V., Nikeghbali A., Roncalli T. (2000), *Which copula is the right one?* Working paper, Credit Lyonnais, Groupe de Recherche Opérationnelle, Paris.
- Embrechts P., Lindskog F., McNeil A. (2001), *Modelling dependence with copulas and applications to risk management*, maszynopis, ETH, Zürich.
- Jajuga K., Kuziak K. (2003), *Modeling relationships in multivariate data*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 988, Taksonomia 10, *Klasyfikacja i analiza danych. Teoria i zastosowania*, AE, Wrocław, s. 461-471.
- Jajuga K., Papla D. (2006), *Copula functions in model based clustering*, [w:] *From data and information analysis to knowledge engineering*, red. M. Spiliopoulou, Springer Verlag, Berlin, s. 606-613.
- Jajuga K., Papla D. (2005), *Extreme value analysis and copulas*, [w:] *Statistical tools in finance and insurance*, red. P. Cizek, W. Härdle, R. Weron, Springer Verlag, Berlin.
- Joe H. (1997), *Multivariate models and dependence concepts*, Chapman & Hall, London.
- Lee J. (2004), *The comovement between output and prices: evidence from Canada*, Texas A&M University-Corpus Christi, Corpus Christi.
- Mittnik S., Rachev S.T. (2000), *Stable paretian models in finance*, John Wiley & Sons, New York.
- Nelsen R.B. (1999), *An introduction to copulas*, Springer Verlag, New York.
- Papla D. (2006), *Klasyfikacja spółek notowanych na GPW w Warszawie z wykorzystaniem funkcji powiązań (copula functions)*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1126, Taksonomia 13, *Klasyfikacja i analiza danych. Teoria i zastosowania*, AE, Wrocław, s. 271-279.
- Rockafellar R.T., Uryasev S. (1999), *Optimization and conditional value-at-risk*, research report 99-4, Center for Applied Optimization, University of Florida.
- Rockafellar R.T., Uryasev S. (2002), *Optimization and conditional value-at-risk for general distributions*, „Journal of Banking and Finance”, no 26(7).
- Rokita P. (2006), *Zastosowanie archimedesowskich funkcji powiązań (Archimedean copulas) o liczbie wymiarów większej niż 2 w analizie ryzyka portfela na rynku polskim*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1126, Taksonomia 13, *Klasyfikacja i analiza danych. Teoria i zastosowania*, AE, Wrocław, s. 280-288.
- Schweizer B., Sklar A. (1974), *Operations on distributions functions not derivable from operations on random variables*, *Studia Mathematica*, 52, s. 43-52.

-
- Silverman B.W. (1986), *Density estimation for statistics and data analysis*, Chapman & Hall, London.
- Sklar A. (1959), *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*, Publications de l'Institut Statistique de l'Université de Paris, 8, s. 229-231.

DEPENDENCE STRUCTURE AND RISK MEASURES ON THE EXAMPLE OF INDEXES OF WORLD STOCK MARKETS AND WARSAW STOCK EXCHANGE

Summary

Research hypothesis of this paper is as follows: misspecified model of dependency between elements of financial assets portfolio may lead to errors in risk evaluation measured by such measures like Value at Risk (VaR) or Conditional Value at Risk (CVaR).

In the case of research included in this paper several copula functions were used to verify research hypothesis as a model of dependence structure. Goodness of fit obtained with each parametric copula was measured with Anderson-Darling, Integrated Anderson-Darling and entropy test (with use of empirical copula).

The research hypothesis was verified by Monte-Carlo simulation of Value at Risk using copula function parameter estimation for each pair of stock market indexes.