PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU
Nr 47 — 2009
TAKSONOMIA 16
Klasyfikacja i analiza danych – teoria i zastosowania

Bartosz Kaszuba

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

ODPORNE METODY W KONSTRUKCJI PORTFELA WIELOSKŁADNIKOWEGO

1. Wstęp

Odpowiedni dobór składników portfela oraz wyznaczenie ich udziałów ma istotny wpływ na późniejsze wyniki osiągane przez inwestora. Klasyczna metoda wyliczania udziałów poszczególnych składników w portfelu oparta jest na teorii portfela wielu spółek, której autorem jest Harry Markowitz. Metoda ta bazuje na nieobciążonych estymatorach wariancji i średniej. W przypadku odstępstw od rozkładu normalnego ocena estymatora wariancji może przyjmować dowolne wartości, co w konsekwencji może prowadzić do podjęcia decyzji niekorzystnych dla inwestora.

W praktyce założenie normalności rozkładów stop zwrotu często nie jest spełnione [Jajuga 2000]. W finansowych szeregach czasowych stóp zwrotu obserwuje się efekt grubych ogonów rozkładu, co oznacza, że prawdopodobieństwo wystąpienia wielu nietypowych obserwacji jest większe niż w przypadku rozkładu normalnego. Gdy inwestor tworzy portfel dynamiczny, wtedy wystąpienie jednej dużej obserwacji nietypowej zmusi go do zmiany udziałów w portfelu, co wpłynie na dodatkowe koszty transakcji. Zatem pożądane jest, aby metodę wyliczania udziałów poszczególnych składników portfela oprzeć na bardziej odpornych estymatorach.

Użycie metod odpornych w konstrukcji portfela pozwala na zwiększenie jego stabilności oraz zmniejszenie wpływu obserwacji nietypowych na wyznaczenie udziałów poszczególnych akcji. Dobrze skonstruowane portfele odporne nie narażają inwestora na poniesienie dodatkowych kosztów transakcyjnych w takim stopniu jak portfele konstruowane na podstawie estymatorów wariancji i średniej.

W artykule porównano portfele o minimalnej wariancji (MVP) wyznaczone przy użyciu klasycznej macierzy kowariancji z portfelami wyznaczonymi z zastosowaniem odpornych macierzy kowariancji. Cele pracy to: porównanie ryzyka omówionych portfeli oraz użycie wybranych odpornych macierzy kowariancji do wyznaczenia portfeli o minimalnej wariancji. Wszystkie tworzone portfele są portfelami zmieniającymi się w czasie. Badania oparto na danych rzeczywistych pochodzących z Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie.

2. Portfele o minimalnym ryzyku z klasycznymi estymatorami

W teorii portfela wielu spółek [Markowitz 1952] wyliczenie optymalnych udziałów w portfelu sprowadza się do odpowiedniego wyestymowania parametrów średniej i kowariancji. W przypadku portfela o minimalnym ryzyku (*minimum variance portfolio*) wyznaczenie udziałów opiera się na rozwiązaniu następującego zagadnienia:

$$\min_{w} w'\Sigma w, \text{ przy ograniczeniach: } w'\mathbf{1} = 1,$$

gdzie: $\mathbf{\Sigma}$ – klasyczny estymator macierzy kowariancji, w – wektor udziałów.

Wykorzystanie klasycznego estymatora macierzy kowariancji (który obarczony jest błędem estymacji) w odniesieniu do powyższego zagadnienia może prowadzić do błędnego wyznaczenia wag portfela. Ponadto w razie częstego przebudowywania składu portfela bardzo niska stabilność estymatora [DeMiguel, Nogales 2007] może spowodować dużą fluktuację wag, czego konsekwencją będzie drastyczne zwiększenie kosztów transakcyjnych.

Duża wrażliwość estymatora macierzy kowariancji wynika z tego, że jest on estymatorem największej wiarygodności (NW) dla prób pochodzących z rozkładu normalnego. Ponadto estymatory NW dla prób pochodzących z rozkładu normalnego mają najmniejszą asymptotyczną wariancję [Kaszuba 2008], stąd dla tych prób są one najbardziej efektywnymi estymatorami. Bardzo wysoka efektywność estymatorów NW skutkuje jednakże dużą wrażliwością na niewielkie odchylenia od założonego rozkładu normalnego. Reasumując, estymatory o wysokiej efektywności dla prób pochodzących z rozkładu normalnego niekoniecznie są estymatorami o wysokiej efektywności dla prób pochodzących z rozkładów bliskich rozkładowi normalnemu [Huber 2004].

Ponieważ w praktyce dzienne stopy zwrotu nie są zgodne z rozkładem normalnym [Jajuga 2000], taki wniosek powinien być brany pod uwagę przy wyznaczaniu portfeli na podstawie teorii Markowitza. Aby zmniejszyć ryzyko błędu estymacji oraz zwiększyć odporność na obserwacje odstające, niezbędne jest poszukiwanie nowych metod pozwalających na konstrukcję efektywniejszych i bardziej stabilnych portfeli.

W dalszej części pracy zaprezentowano alternatywne metody wyznaczania macierzy kowariancji, które nie są oparte na tak mocnych założeniach o normalności, jak estymatory NW. Ponadto wymienione estymatory nie wymagają dużych prób, co w konsekwencji może pozwolić na lepsze dopasowanie portfela do sytuacji na rynku.

3. Metody odpornej estymacji macierzy kowariancji

W tym punkcie przedstawione zostaną dwie metody wyznaczania macierzy kowariancji. Pierwszą jest metoda minimalnego wyznacznika macierzy kowariancji (*Minimum Covariance Determinant* − MCD) zaproponowana przez Rousseeuwa [Rousseeuw 1984, s. 877], cechująca się dużą odpornością, wysokim punktem załamania [Ostasiewicz 1998] oraz niską efektywnością. Punkt załamania (*breakdown point*) można interpretować jako najmniejszy udział danych zakłócających, dla których estymator może przyjmować dowolnie duże wartości.

Algorytm wykrywania obserwacji odstających za pomocą estymatora MCD składa się z kilku etapów. W pierwszym etapie w zbiorze wszystkich N obserwacji (n-wymiarowych) wyznaczany jest podzbiór $h > N/2$ obserwacji, dla których wyznacznik klasycznego estymatora kowariancji jest najmniejszy. Szczegółowy algorytm wykrywania tych obserwacji opisany został w pracach: [Maronna 2006; Rousseeuw, van Driessen 1999]. Kolejnym krokiem prowadzącym do wyliczenia estymatora MCD jest wyliczenie klasycznych estymatorów średniej i kowariancji $(\hat{\mu},\hat{\Sigma})$ dla wybranego podzbioru danych. Na podstawie wyliczonych estymatorów dla zbioru obserwacji nietypowych szacowane są odległości odporne (*robust distance*): $d_i = (x_i - \hat{\mu})'\hat{\Sigma}^{-1}(x_i - \hat{\mu})$.

Odporne odległości są zmodyfikowanymi odległościami Mahalanobisa, w których macierz kowariancji całego podzbioru danych zastąpiono macierzą kowariancji zbioru h danych (macierz $\hat{\Sigma}$). Za pomocą odległości d_i identyfikuje się dane odstające przez przyrównanie do wartości krytycznych rozkładu chi-kwadrat o n stopniach swobody [Rousseeuw, van Driessen 1999; Orwat 2007]. Po odrzuceniu obserwacji odstających z pozostałych obserwacji wyliczana jest ocena klasycznego estymatora kowariancji.

Największą odporność (najniższy punkt załamania) estymatora MCD można uzyskać dla $h = [(N + n + 1)/2]$. Punkt załamania estymatora MCD wynosi $(N–h)/N$. Pomimo wysokiej odporności w swojej klasie estymatorów estymator MCD ma relatywnie dużą efektywność, co wynika z jego asymptotycznej normalności [Butler, Davies, Jhun 1993]. Jednak w klasie wszystkich estymatorów odpornych efektywność tego estymatora może być zbyt niska, gdy dane nie mają znacznych odstępstw od rozkładu normalnego.

Inną metodą estymacji macierzy kowariancji jest estymacja zwężająca (*shrinkage estimators*). Cechą szczególną estymatorów zwężających jest minimalizacja błędu średniokwadratowego kosztem obciążenia estymatora [Schäfer, Strimmer 2005]. Mimo zwiększenia obciążenia (klasyczny estymator kowariancji jest nieobciążony) estymatory zwężające minimalizują wariancję, co w konsekwencji pozwala na dokładniejsze oszacowanie kowariancji dla małej liczby obserwacji n-wymiarowych, gdzie n jest duże.

Kolejną cechą omawianych estymatorów jest brak założeń dotyczących rozkładu rozważanych zmiennych. Jedynym założeniem jest istnienie kolejnych momentów tych zmiennych losowych [Schäfer, Strimmer 2005].

Estymatory zwężające wykorzystywane są w biologii do badania zależności między genami, gdy badana jest mała liczba obserwacji wielowymiarowych. Zatem próba zastosowania takich estymatorów w analizie portfelowej jest pożądana, ponieważ częste zmiany na rynku wymuszają na inwestorach analizę coraz mniejszych szeregów czasowych, natomiast potrzeba dywersyfikacji wymusza konstruowanie portfela z wielu udziałów. Ponadto wyniki stosowania estymatorów zwężających do konstrukcji portfela wieloskładnikowego (badania np. w [Ledoit, Wolf 2003]) mogą skłaniać do dalszego rozwoju tych estymatorów w tym obszarze.

W pracy przedstawiono nowy estymator zwężający z klasy estymatorów zwężających podany przez Schäffera i Strimmera [2005], wykorzystujący lemat Ledoita i Wolfa [2003], mówiący o wyborze parametru λ, który gwarantuje minimalny błąd średniokwadrtowy estymatora zwężającego bez założenia o rozkładzie zmiennych losowych. Zaprezentowany estymator kowariancji minimalizuje błąd średniokwadratowy. Metoda wyznaczania omawianego zwężającego estymatora macierzy kowariancji $S^* = (s_{ij}^*)$ jest następująca: niech x_{ki} będzie k-tą obserwacją zmiennej losowej X_i oraz $w_{kij} = (x_{ki} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_j)$ i $\bar{w}_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_{kij}$. Wtedy:

$$s_{ij}^* = \begin{cases} s_{ii}, & \text{gdy } i = j, \\ r_{ij}^* \sqrt{s_{ii} s_{jj}}, & \text{gdy } i \neq j, \end{cases}$$

oraz

$$r_{ij}^* = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i = j, \\ r_{ij} \min(1, \max(0, 1 - \hat{\lambda}^*)), & \text{gdy } i \neq j, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie: $\hat{\lambda}^* = \frac{\sum_{i \neq j} Var(r_{ij})}{\sum_{i \neq j} r_{ij}^2}$, oraz $Var(r_{ij}) = \frac{n}{(n-1)^3} \frac{\sum_{k=1}^{n} (w_{kij} - \bar{w}_{ij})^2}{s_{ii} s_{jj}}$.

s_{ii} – wariancja próbkowa zmiennej losowej X_i, r_{ij} – współczynnik korelacji próbkowej.

Ze wzoru (1) wynika, że estymator zwężający macierzy kowariancji nie powoduje zmiany wariancji próbkowej rozważanych składników, natomiast powoduje zmniejszenie wartości kowariancji próbkowej. Gdy współczynnik $\hat{\lambda}^*$ wynosi 1, wtedy rozważany estymator jest estymatorem największej wiarygodności.

4. Badania empiryczne

Wszystkie badania opierały się na notowaniach spółek pochodzących z Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie. W pracy analizowano dzienne stopy zwrotu dla cen zamknięcia z okresu od 3.07.2000 do 16.08.2008, co daje 2038 stóp zwrotu, rozpatrywano więc tylko spółki notowane w wymienionym okresie. Do analizy wybrano spółki wchodzące w skład segmentów 50 PLUS (spółki, których kapitalizacja wynosi od 50 do 250 mln euro) i 250 PLUS (spółki, których kapitalizacja przekracza 250 mln euro).

Na potrzeby estymatora MCD usunięto spółki, dla których ośmiotygodniowe szeregi czasowe, począwszy od 3.07.2008, posiadały rozstęp międzykwartylowy równy 0.

Po uwzględnieniu omówionych ograniczeń analizie poddano 18 spółek z segmentu 50 PLUS: 04PRO, 14ZACH,ABG, ALMA, BBICAPNFI, BBIDEVNFI, CENSTALGD, COMARCH, FORTE, IGROUP, JUTRZENKA, LENTEX, MNI, MOSTALEXP, NAFTA, STALEXP, SYGNITY, WAWEL, oraz 25 spółek z segmentu 250 PLUS: AGORA, ASSECOPOL, BANKBPH, BRE, BUDIMEX, BZWBK, CERSANIT, ELBUDOWA, FARMACOL, HANDLOWY, INGBSK, KETY, KGHM, KOPEX, KREDYTB, KRUSZWICA, MENNICA, MILLENNIUM, MOSTALWAR, MOSTALZAB, PEKAO, PGF, PKNORLEN, SWIECIE, TPSA.

Stacjonarność wszystkich wymienionych szeregów czasowych zbadano za pomocą testu Dickeya-Fullera. Wszystkie wyniki były statystycznie istotne, zatem na poziomie istotności 0,01 analizowane szeregi są stacjonarne. Zbadano również normalność badanych spółek testem Shapiro-Wilka. Na poziomie istotności 0,01 odrzucono hipotezę o normalności stóp zwrotu dla wszystkich badanych spółek.

Dla każdego z analizowanych portfeli wyliczano (wcześniej omówionymi metodami) macierz kowariancji (klasyczną macierz kowariancji, macierz MCD, macierz zwężającą), a następnie wyznaczano skład portfela efektywnego o minimalnej wariancji. Portfele były wybierane w następujący sposób: z każdego segmentu wybierano losowo 5 spółek, które wchodziły w skład portfela, w każdym segmencie analizowano 102 losowo wybrane portfele. Dla każdego z portfeli stosowano następujący algorytm: co 2 tygodnie przebudowywano skład portfela na podstawie danych z ostatnich ośmiu tygodni. Dla każdego przebudowanego portfela wyliczano jego dwutygodniową stopę zwrotu na podstawie danych z najbliższych dwóch tygodni. Z otrzymanych dwutygodniowych stóp zwrotu z całego okresu dla danego portfela wyliczono odchylenie standardowe dwutygodniowych stóp zwrotu dla całego badanego okresu. Ponadto wyliczono odchylenie standardowe dwutygodniowych stóp zwrotu po uwzględnieniu kosztów prowizji w wysokości 0,2% [1]. Zatem dla każdego z segmentów otrzymano 3 wektory odchyleń standardowych składające się ze 102 obserwacji:

[1] Koszty transakcyjne według tabeli opłat i prowizji Banku Ochrony Środowiska – www.bossa.pl.

1) $\underline{x}^{i}_{MVP}$ – wektor odchyleń standardowych portfeli składających się ze spółek z i-tego segmentu, z klasycznym estymatorem macierzy kowariancji,

2) $\underline{x}^{i}_{MCD}$ – wektor odchyleń standardowych portfeli składających się ze spółek z i-tego segmentu, z estymatorem macierzy kowariancji wyliczonym metodą MCD,

3) $\underline{x}^{i}_{SH}$ – wektor odchyleń standardowych portfeli składających się ze spółek z i-tego segmentu, z estymatorem „zwężającym” macierzy kowariancji,

4) i – segment (dla i = 1, 50 PLUS, dla i = 2, 250 PLUS).

Następnie zbadano normalność rozpatrywanych wektorów testem Shapiro-Wilka. Na poziomie istotności α = 0,01 odrzucono hipotezę o normalności badanych prób.

Kolejnym krokiem była ocena wpływu wybranej metody (użyto testu analizy wariancji rang Friedmana) na ryzyko portfela mierzone odchyleniem standardowym. Test Friedmana jest nieparametrycznym odpowiednikiem jednoczynnikowej analizy wariancji dla pomiarów powtarzanych.

Dodatkowo przeanalizowano wpływ kosztów transakcyjnych na wyniki inwestora. Różnice między stopami zwrotu bez uwzględniania prowizji a stopami zwrotu po uwzględnieniu prowizji zbadano testem Shapiro-Wilka. Dodatkowo przy użyciu testu t-Studenta zbadano, czy dana metoda wpływa na obniżenie kosztów transakcyjnych.

5. Wyniki empiryczne

Wyniki badań przedstawiono osobno dla dwóch segmentów. Dla segmentu 250 PLUS wyniki testu ANOVA Friedmana zamieszczono w tab. 1.

Tabela 1. Wyniki testu ANOVA Friedmana dla segmentu 250 PLUS

Zmienna	Średnia ranga	Suma rang	Średnia	Odch. std.
MVP	1,9510	199,0000	0,0242	0,0026
MCD	2,9412	300,0000	0,0263	0,0030
SH	1,1078	113,0000	0,0238	0,0024

Źródło: opracowanie własne.

Dla powyższych danych wartość testu χ^2 ANOVA wyniosła 171,78, a poziom istotności był równy p = 0,0000, co pozwala odrzucić hipotezę zerową. Zatem na poziomie istotności α = 0,01 można wyciągnąć wniosek, że istnieje statystyczna różnica pomiędzy odchyleniami standardowymi w zależności od wybranej metody. Na podstawie otrzymanych wyników można wnioskować, że estymatory zwężające pozwalają na uzyskanie niższego ryzyka niż pozostałe badane estymatory.

Przeanalizowano również wpływ kosztów transakcyjnych dla portfeli MVP i SH. Badane różnice średnich zbadano testem Shapiro-Wilka. Otrzymane wyniki nie były istotne na poziomie istotności α = 0,05, zatem przeanalizowane zmienne miały rozkład normalny. Za pomocą testu F nie odrzucono hipotezy o jednorodności wariancji na poziomie istotności α = 0,05. Następnie różnice średnich zbadano testem t-Studenta z ustalonym poziomem istotności α = 0,01. Wynik testu pozwala wyciągnąć wniosek, że estymator zwężający może powodować istotne obniżenie kosztów transakcyjnych.

W odniesieniu do segmentu 50 PLUS wyniki testu ANOVA Friedmana zamieszczono w tab. 2.

Tabela 2. Wyniki testu ANOVA Friedmana dla segmentu 50 PLUS

Zmienna	Średnia ranga	Suma rang	Średnia	Odch. std.
MVP	1,8040	184,0000	0,0312	0,0028
MCD	2,9607	302,0000	0,0351	0,0033
SH	1,2353	126,0000	0,0309	0,0028

Źródło: opracowanie własne.

Dla danych z segmentu 50 PLUS wartość testu χ^2 ANOVA zmalała w porównaniu z segmentem 250 PLUS i wyniosła 157,73, jednak poziom istotności znów wyniósł p = 0,0000, zatem można odrzucić hipotezę zerową. Na poziomie istotności α = 0,01 można również w odniesieniu do tego segmentu wyciągnąć wniosek, że istnieje statystyczna różnica pomiędzy odchyleniami standardowymi w zależności od wybranej metody. Z otrzymanych wyników można wywnioskować, że estymatory zwężające pozwalają na uzyskanie niższego ryzyka niż pozostałe badane estymatory, jednak w tym przypadku różnice między wartościami statystyk były mniejsze.

Przeanalizowano również wpływ kosztów transakcji. Różnice średnich zbadano testem Shapiro-Wilka. Otrzymane wyniki nie były istotne na poziomie istotności α = 0,05, zatem przeanalizowane zmienne miały rozkład normalny. Za pomocą testu F nie odrzucono hipotezy o jednorodności wariancji na poziomie istotności α = 0,05. Następnie różnice średnich zbadano testem t-Studenta z ustalonym poziomem istotności α = 0,01. Wynik testu pozwala wyciągnąć wniosek, że estymator zwężający może powodować istotne obniżenie kosztów transakcyjnych.

6. Podsumowanie

Przeprowadzone badania dotyczące notowań spółek z giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie dały wynik skłaniający do wykorzystywania nowych modeli opartych na estymatorach zwężających. Ponadto badania wykazały, że w przypadku portfeli z minimalną wariancją odrzucenie zbyt wielu obserwacji (i uznanie ich za nietypowe) może powodować efekt odwrotny od zamierzonego. Zatem stosowanie estymatorów odpornych o wysokim punkcie załamania w tym przypadku nie jest pożądane. Wynik badań dla estymatorów zwężających skłania jednak do dalszych rozważań nad estymatorami odpornymi mającymi niski punkt załamania i wysoką efektywność. W artykule wykazano również, że portfele konstruowane na podstawie estymatorów minimalizujących błąd średniokwadratowy pozwalają na większą stabilność udziałów w portfelu, co w konsekwencji powoduje obniżenie kosztów transakcyjnych.

Literatura

Butler R.W., Davies P.L., Jhun M. (1993), *Asymptotics for the minimum covariance determinant estimator,* "The Annals of Statistics", vol. 21, no 3, s. 1385-1400.
DeMiguel V., Nogales F.J. (2007), *Portfolio selection with robust estimation*, working paper, SSRN, http://ssrn.com/abstract=911596.
Huber P.J. (2004), *Robust statistics*, John Wiley & Sons, New York.
Jajuga K. (2000), *Metody ekonometryczne i statystyczne w analizie rynku kapitałowego*, AE, Wrocław, s. 70-91.
Kaszuba B. (2008), *Odporne metody estymacji współczynnika beta na przykładzie polskiego rynku akcji*, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu nr 18, UE, Wrocław, s. 38-48.
Ledoit O., Wolf M. (2003), *Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection*, "J. Empir. Finance" 10, s. 603-621.
Markowitz H.M. (1952), *Mean-variance analysis in portfolio choice and capital markets*, "Journal of Finance" 7, s. 77-91.
Maronna R.A., Martin R.D., Yohai V.J. (2006), *Robust statistics theory and methods*, John Wiley & Sons Ltd.
Orwat A. (2007), *Metody odporne SAW w estymacji ryzyka portfela aktywów długoterminowych na przykładzie polskiego rynku funduszy inwestycyjnych,* Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1176, AE, Wrocław, s. 288-297.
Ostasiewicz W. (1998), *Statystyczne metody analizy danych*, AE, Wrocław.
Rousseeuw P.J. (1984), *Least median of squares regression*, "Journal of the American Statistical Association", 79, 871-880.
Rousseeuw P.J., van Driessen K. (1999), *A fast algorithm for the minimum covariance determinant estimator,* "Technometrics", vol. 41, no 3, s. 212-223.
Schäfer J., Strimmer K. (2005), *A shrinkage approach to large-scale covariance matrix estimation and implications for functional genomics*, "Statist. Appl. Genet. Mol. Biol" 4: 32.

ROBUST STATISTICAL METHODS FOR PORTFOLIO CONSTRUCTION

Summary

The article presents a comparison of minimum variance portfolios, determined using the maximum likelihood estimators of the covariance matrix, with portfolios determined using robust estimators of the covariance matrix. The aim of the dissertation is to compare the risks of the discussed portfolios, and to designate the minimum variance portfolios by applying select robust estimators of the covariance matrix. All the created portfolios are portfolios which change with time. The research is based on real data, coming from the Warsaw Stock Exchange. The article demonstrates usefulness of methods which apply shrinkage estimators.