PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU
Nr 1 (1201) 2008
Statystyka aktuarialna – teoria i praktyka

Maria Podgórska

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

SYSTEM *BONUS-MALUS* SPRAWIEDLIWY W SENSIE PRZEJŚĆ MIĘDZY KLASAMI

1. Wstęp

Proponowane w literaturze definicje systemu *bonus-malus* (SBM) są na tyle ogólne, że obejmują także systemy o konstrukcji nie przystającej do rzeczywistości i nie mające szans funkcjonowania na konkurencyjnym rynku ubezpieczeń komunikacyjnych. Przedmiotem artykułu jest system *bonus-malus* sprawiedliwy w sensie przejść między klasami ($SBMS_{KL}$), którego definicja eliminuje z rozważań wymienione, nierealistyczne SBM.

W punktach 2-4 artykułu przedstawiona jest konstrukcja $SBMS_{KL}$ oraz ergodyczny łańcuch Markowa, będący modelem tego systemu. W punkcie 5 ukazano własności oczekiwanej składki w zależności od cech charakteryzujących ubezpieczonego, tzn. częstości szkód, klasy z roku początkowego i czasu trwania ubezpieczenia, a także od parametrów charakteryzujących system. W punkcie 6 przedstawione są cztery „skrajne" przypadki $SBMS_{KL}$, w których obowiązują „skrajne" reguły przejść, a mianowicie reguły maksymalnego/minimalnego awansu oraz maksymalnego/minimalnego spadku. Te cztery systemy umożliwiają określenie najniższej i najwyższej oczekiwanej składki w dowolnym roku ubezpieczenia w dowolnym systemie typu $SBMS_{KL}$ oraz przedstawienie dowolnego systemu typu $SBMS_{KL}$ jako modyfikacji przynajmniej jednego z owych czterech systemów – wyniki te są zawarte w punkcie 7. Artykuł kończy podsumowanie przeprowadzonych rozważań na temat systemów typu $SBMS_{KL}$.

2. SBM – definicja, oznaczenia, model

Definicja 1. Systemem *bonus-malus* (SBM) nazywa się system przyporządkowania składki każdemu ubezpieczonemu z portfela, w którym:

1) ustalone są klasy takie, że w każdym okresie ubezpieczenia każdy ubezpieczony należy do jednej z klas,

2) ustalona jest klasa początkowa, do której ubezpieczony należy w pierwszym okresie ubezpieczenia,

3) począwszy od drugiego okresu ubezpieczenia w każdym okresie przynależność ubezpieczonego do określonej klasy zależy jedynie od tego, do której klasy należał i ile szkód zgłosił w okresie poprzednim,

4) ustalona jest liczba szkód taka, że zgłoszenie przez ubezpieczonego w okresie poprzednim większej liczby szkód nie zmieni jego przynależności do określonej klasy w okresie następnym,

5) dla każdej klasy ustalona jest składka ubezpieczeniowa o dodatniej wartości.

Nie zmniejszając ogólności rozważań, można przyjąć, że okresem ubezpieczenia jest rok, a składka dla każdej klasy jest wyrażona w określonych jednostkach pieniężnych lub jako współczynnik, przez który mnożona jest składka podstawowa ustalona dla portfela.

W modelu SBM użyte są następujące oznaczenia związane z powyższą definicją[1]:

- $S = \{1, 2, \ldots, s\}$ – zbiór numerów klas,
- i_0 – numer klasy początkowej,
- $\mathbf{T}_k = \left[t_{ij}^{(k)}\right]$, $k \in \mathcal{N}_0$ – macierz reguł przejścia z klasy do klasy po zgłoszeniu

k szkód w ciągu roku[2], gdzie

$$t_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli zgłoszenie } k \text{ szkód w klasie } i \text{ w roku } n \\ & \text{powoduje przejście do klasy } j \text{ w roku } n+1, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

$$i, j \in S,\ n \in \mathcal{N}_1,$$

- q – maksymalna liczba szkód wyróżnianych w systemie,

$$q = \max\{k \in \mathcal{N}_1 : \mathbf{T}_k \neq \mathbf{T}_{k-1}\},$$

- b_i – składka w klasie $i \in S$,
- $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_S)$ – kolumnowy wektor składek.

---

[1] Wykaz wszystkich oznaczeń znajduje się w załączniku 1.

[2] Przyjęto oznaczenie $\mathcal{N}_0 = \{0\} \cup \mathcal{N}_1$, gdzie $\mathcal{N}_1 = \{1, 2, \ldots\}$.

Założenia modelu SBM

1. Liczba klas SBM jest skończona, czyli $s < \infty$.
2. Klasy SBM są uporządkowane tak, że jeśli $i < j$, to $b_i \geq b_j$, $i, j \in S$.
3. Dla każdego ubezpieczonego z portfela reguły przejścia z klasy do klasy w dowolnym roku $n \in \mathcal{N}_1$ są identyczne i dane macierzami $\mathbf{T}_k$, $k \in \mathcal{N}_0$.
4. Każdy ubezpieczony z portfela charakteryzuje się częstością szkód $\lambda > 0$, identyczną w dowolnym roku $n \in \mathcal{N}_1$. Wartości λ charakteryzujące poszczególnych ubezpieczonych są realizacjami zmiennej losowej Λ o rozkładzie identycznym dla każdego roku $n \in \mathcal{N}_1$.
5. Liczba szkód zgłoszonych[3] w dowolnym roku $n \in \mathcal{N}_1$ przez ubezpieczonego, charakteryzującego się częstością szkód λ, jest zmienną losową $N(\lambda)$ o rozkładzie Poissona z parametrem λ, danym prawdopodobieństwami

$$P(N(\lambda) = k) = p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \; k \in \mathcal{N}_0.$$

Bez trudu można sprawdzić, że macierz $\mathbf{M}(\lambda) = \left[p_{ij}(\lambda)\right]$, której elementy dane są wzorem

$$p_{ij}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) t_{ij}^{(k)}, \; i, j \in S, \tag{1}$$

jest macierzą stochastyczną. Używając macierzy reguł przejścia $\mathbf{T}_k$, macierz tę można zapisać wzorem

$$\mathbf{M}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) \mathbf{T}_k, \tag{2}$$

a ponieważ $\mathbf{T}_k = \mathbf{T}_q$ dla $k \geq q$, a także $p_{q+}(\lambda) = \sum_{k=q}^{\infty} p_k(\lambda)$, więc

$$\mathbf{M}(\lambda) = \sum_{k=0}^{q-1} p_k(\lambda) \mathbf{T}_k + p_{q+}(\lambda) \mathbf{T}_q. \tag{3}$$

Wobec założeń 1-5 modelem SBM dla ubezpieczonego charakteryzującego się częstością szkód λ jest skończony jednorodny łańcuch Markowa $\{K_n(\lambda), n \in \mathcal{N}_0\}$ o przestrzeni stanów S i macierzy przejścia $\mathbf{M}(\lambda)$. Dla ustalonego n zmienna

[3] Pomija się występowanie zjawiska łaknienia zniżek, przyjmując, że wszystkie spowodowane szkody są zgłaszane do ubezpieczyciela.

losowa $K_n(\lambda)$ oznacza więc numer klasy, do której ubezpieczony należy w roku n. Rozkład zmiennej $K_n(\lambda)$ zapisuje się w postaci wierszowego wektora

$$\mathbf{d}_n(\lambda)=\left[d_{ni}(\lambda)\right],\ i\in S,\ n\in\mathcal{N}_0. \tag{4}$$

Gdy model dotyczy ubezpieczonego, który w roku początkowym $n=0$ był w klasie j, wówczas początkowy rozkład łańcucha ma postać

$$\mathbf{d}_0=\left[d_{0i}\right],\ i\in S,$$

gdzie

$$d_{0i}=\begin{cases}1,\ i=j,\\ 0,\ i\neq j.\end{cases} \tag{5}$$

Wartość oczekiwanej składki (w skrócie: oczekiwana składka) w roku $n\in\mathcal{N}_1$ ubezpieczonego o częstości szkód λ, który w roku 0 był w klasie i, jest oznaczona przez $P_i(\lambda,n)$. Jej wartość jest dana wzorem

$$P_i(\lambda,n)=\mathbf{d}_0\mathbf{M}^n(\lambda)b,\ i\in S,\ n\in\mathcal{N}_1. \tag{6}$$

Kolumnowym wektorem utworzonym z oczekiwanych składek $P_i(\lambda,n)$, $i\in S$, jest

$$\mathbf{P}(\lambda,n)=\left[P_i(\lambda,n)\right],\ i\in S,\ n\in\mathcal{N}_1. \tag{7}$$

Przyjmuje się ponadto, że określenia *awans* oraz *spadek* oznaczają przejście ubezpieczonego w następnym roku do klasy o numerze, odpowiednio, wyższym lub niższym.

3. Dlaczego SBMS$_{KL}$?

Analiza konstrukcji rzeczywistych SBM (por. [1; 3]) prowadzi do wniosku, że ich modelami są łańcuchy ergodyczne – w tych systemach nie ma bowiem ani klas powiązanych cyklicznie, pochłaniających, ani takich podzbiorów klas, że przejście z jednego podzbioru do innego byłoby niemożliwe. Ponadto, konstrukcja rzeczywistych SBM wyklucza takie przejścia ubezpieczonego, jak np. spadek po roku bezszkodowym czy awans po spowodowaniu szkody. Wprawdzie takie systemy spełniają warunki definicji 1, ale nie miałyby szans funkcjonowania na konkurencyjnym rynku ubezpieczeń komunikacyjnych.

Pierwszą propozycją eliminującą z rozważań systemy o wymienionych, nierealistycznych cechach był *sprawiedliwy system bonus-malus* (SSBM) [2]. O ile definicja SSBM opierała się na postulatach dotyczących składek, to podana niżej definicja systemu sprawiedliwego w sensie przejść między klasami (SBMS$_{KL}$) – na specyfice reguł przejścia ubezpieczonego z klasy do klasy. Jak można wykazać, każdy system typu $SBMS_{KL}$ jest systemem typu SSBM, a ponadto modelem każdego $SBMS_{KL}$ jest łańcuch ergodyczny [5].

4. Jak rozpoznać $SBMS_{KL}$?

Podstawą definicji $SBMS_{KL}$ są następujące postulaty dotyczące reguł przejścia ubezpieczonego z klasy do klasy.

1. Po zgłoszeniu 0 szkód ubezpieczony z klasy $i = 1, 2, \dots, s-1$ awansuje do klasy $j > i$, a ubezpieczony z klasy s pozostaje w klasie s.

2. Po zgłoszeniu $k \geq 1$ szkód ubezpieczony z klasy $i = 2, 3, \dots, s$ spada do klasy $j < i$, a ubezpieczony z klasy 1 pozostaje w klasie 1.

3. Jeśli ubezpieczony z klasy $i \in S$ spada do klasy j_1 po zgłoszeniu $k_1 \geq 1$ szkód, to po zgłoszeniu $k_2 > k_1$ szkód spada do klasy $j_2 \leq j_1$.

4. Jeśli po zgłoszeniu $k \geq 0$ szkód ubezpieczeni z klas $i_1 \in S$ oraz $i_2 \in S$, $i_1 < i_2$, przechodzą, odpowiednio, do klasy j_1 oraz j_2, to $j_1 \leq j_2$.

Postulaty 1 i 2 wyrażają ideę SBM, to znaczy nagradzanie tych ubezpieczonych, którzy nie zgłaszają szkód, i karanie tych, którzy je zgłaszają. Z postulatu 1 wynika, że jedynym niezerowym diagonalnym elementem macierzy $\mathbf{T}_0$ jest $t_{ss}^{(0)}$, a z postulatu 2, że jedynym niezerowym diagonalnym elementem macierzy $\mathbf{T}_k$, $k \geq 1$, jest $t_{11}^{(k)}$. Gdyby którykolwiek inny diagonalny element macierzy $\mathbf{T}_0$ był równy 1, to ubezpieczony nie zgłaszający szkód przez dowolnie wiele lat znajdowałby się wciąż w tej samej klasie, nie mając szansy na osiągnięcie kiedykolwiek klasy s. Analogicznie, gdyby na przekątnej macierzy $\mathbf{T}_k$, $k \geq 1$, występował element $t_{jj}^{(k)} = 1$, $j \neq 1$, to ubezpieczony z klasy j, mimo zgłaszania przez dowolnie wiele lat k szkód rocznie, wciąż nie spadałby do gorszej klasy i nie byłby karany podwyższoną składką. Postulat 3 oznacza, że po zgłoszeniu większej liczby szkód ubezpieczonego czeka spadek do klasy nie lepszej niż ta, do której spadłby, zgłaszając mniej szkód. Postulat 4 po pierwsze oznacza, że jeśli dwaj ubezpieczeni z różnych klas nie zgłoszą żadnej szkody, to ubezpieczony z lepszej klasy awansuje do klasy nie gorszej niż ta klasa, do której awansuje ubezpieczony z gorszej klasy, a po drugie, że jeśli ci ubezpieczeni zgłoszą identyczną liczbę szkód, to ubezpieczony z lepszej klasy spadnie do klasy nie gorszej niż ta klasa, do której spadnie ubezpieczony z gorszej klasy.

Definicja 2. Systemem typu $SBMS_{KL}$ (*SBM sprawiedliwy w sensie przejść między klasami*) nazywa się taki SBM, że dla $i, i_1, i_2, j, j_1, j_2, \in S$ oraz $k, k_1, k_2, \in \mathcal{N}_0$ spełnione są następujące warunki:

1. $\left(t_{ij}^{(0)}=1\right) \Rightarrow (j>i),\ i \neq s,$

2. $t_{ss}^{(0)}=1,$

3. $\left(t_{ij}^{(k)}=1\right) \Rightarrow (j<i),\ i \neq 1,\ k \neq 0,$

4. $t_{11}^{(k)}=1,\ k \neq 0,$

5. $\left(t_{ij_1}^{(k_1)}=t_{ij_2}^{(k_2)}=1\right) \Rightarrow (j_2 \leq j_1),\ 0<k_1<k_2,$

6. $\left(t_{i_1 j_1}^{(k)}=t_{i_1 j_2}^{(k)}=1\right) \Rightarrow (j_1 \leq j_2),\ i_1<i_2.$

Z definicji 2 wynikają dwa wnioski, które umożliwiają szybkie sprawdzenie, czy określony SBM jest $\mathrm{SBMS_{KL}}$.

Wniosek 1. Macierz $\mathbf{T}_0$ jest macierzą reguł awansowania w systemie typu $\mathrm{SBMS_{KL}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

1) jest macierzą trójkątną górną,

2) elementy diagonalne są równe $t_{ss}^{(0)}=1$ oraz $t_{jj}^{(0)}=0$ dla $j \neq s$,

3) gdy rozważa się dowolne dwa sąsiednie wiersze tej macierzy, to element o wartości 1 z górnego wiersza znajduje się w kolumnie o numerze nie większym niż numer kolumny, w której znajduje się element o wartości 1 z dolnego wiersza.

Wniosek 2. Macierze $\mathbf{T}_k$, $k \in \mathcal{N}_1$, są macierzami reguł spadku po k szkodach w ustalonym systemie typu $\mathrm{SBMS_{KL}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

1) każda z nich jest macierzą trójkątną dolną,

2) elementy diagonalne każdej z tych macierzy mają wartości $t_{11}^{(k)}=1$ oraz $t_{jj}^{(k)}=0$ dla $j \neq 1$,

3) gdy rozważa się dowolne dwa sąsiednie wiersze każdej z tych macierzy, to element o wartości 1 z górnego wiersza znajduje się w kolumnie o numerze nie większym niż numer kolumny, w której znajduje się element o wartości 1 z dolnego wiersza,

4) gdy rozważa się macierze $\mathbf{T}_{k_1}$ oraz $\mathbf{T}_{k_2}$ takie, że $k_1<k_2$, to element o wartości 1 z dowolnego wiersza macierzy $\mathbf{T}_{k_1}$ znajduje się w kolumnie o numerze nie mniejszym niż numer kolumny, w której znajduje się element o wartości 1 z tego samego wiersza macierzy $\mathbf{T}_{k_2}$.

5. Model SBMS$_{KL}$ – własności oczekiwanej składki

Niech $P_i(\lambda, n, q, s, \mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_q, \mathbf{b})$ oznacza oczekiwaną składkę ubezpieczonego

– o częstości szkód λ,
– w roku n,
– który w roku 0 był w klasie i,

w modelu SBMS$_{KL}$

– o maksymalnej liczbie wyróżnianych szkód q,
– o s klasach,
– opisanego macierzami reguł przejścia $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{T}_1$, ..., $\mathbf{T}_q$,
– o wektorze składek $\mathbf{b}$.

Do badania własności oczekiwanej składki zastosowano zasadę *ceteris paribus*. O ile nie prowadzi to do nieporozumień, w celu uproszczenia zapisu pominięto te argumenty funkcji P, które w określonym kontekście są ustalone. W szczególności, oczekiwana składka dla ustalonego SBMS$_{KL}$ jest oznaczona przez $P_i(\lambda, n)$.

5.1. Klasa w roku $n = 0$

Twierdzenie 1. Oczekiwana składka $P_i(\lambda, n)$ w roku $n \in \mathcal{N}_1$ ubezpieczonego o częstości szkód λ jest nierosnącą funkcją numeru klasy, w której ten ubezpieczony był w roku 0, czyli

$$P_{i_1}(\lambda, n) \geq P_{i_2}(\lambda, n), \text{jeśli } i_1 < i_2;\ i_1, i_2 \in S.$$

Dowód:

Oczekiwaną składkę w roku $n = 1$ można zapisać według wzoru (6) jako

$$P_i(\lambda, 1) = \mathbf{d}_0 \mathbf{M}(\lambda) \mathbf{b},$$

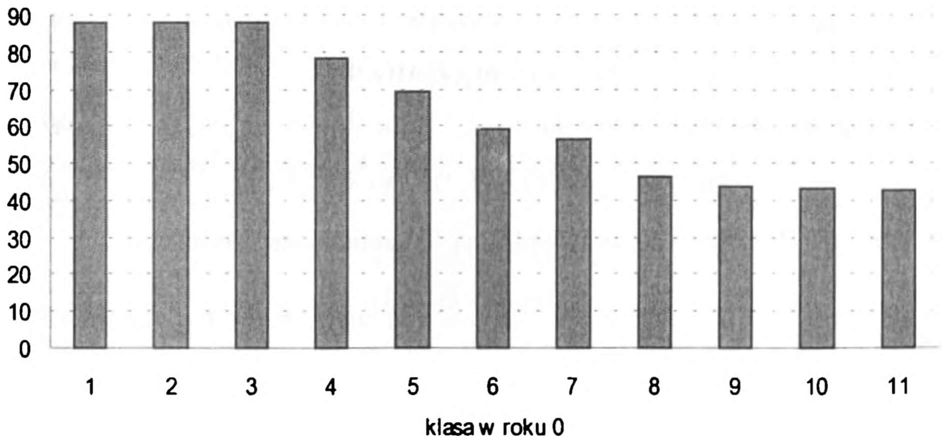
przy czym, zgodnie z wzorem (2), zachodzi równość

$$\mathbf{M}(\lambda)\mathbf{b} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) \mathbf{T}_k \mathbf{b}.$$

Z założenia 5 modelu SBM wynika, że $p_k(\lambda) > 0$ dla $k \in \mathcal{N}_0$. Ponadto, z lematu[4] 1 wynika, że dla $k \in \mathcal{N}_0$ elementy wektora $\mathbf{T}_k\mathbf{b}$ są dodatnie i tworzą ciąg nierosnący. Zatem, elementy wektora $\mathbf{M}(\lambda)\mathbf{b}$ są dodatnie i tworzą ciąg nierosnący, a to oznacza, że wektor $\mathbf{M}(\lambda)\mathbf{b}$ spełnia założenie 2 dotyczące wektora składek.

[4] Lematy są zamieszczone w Załączniku 2.

Przypuśćmy, że w rozpatrywanym systemie $SBMS_{KL}$ dotychczasowy wektor składek b zostanie zastąpiony przez wektor $\mathbf{M}(\lambda)\mathbf{b}$, a macierze reguł przejścia $\mathbf{T}_k$, $k \in \mathcal{N}_0$, pozostaną nie zmienione. Otrzymany w ten sposób nowy system nadal spełnia warunki definicji 2, czyli nadal jest systemem typu $SBMS_{KL}$. Bez trudu można zauważyć, że przeprowadzenie dowodu indukcyjnego (którego opis jest pominięty) prowadzi do wniosku, iż wektor $\mathbf{M}^n(\lambda)\mathbf{b}$ jest dodatni, a jego elementy stanowią ciąg nierosnący. Skoro, zgodnie ze wzorem (6) oczekiwana składka w roku n ubezpieczonego, który w roku 0 był w klasie i, jest równa i-temu elementowi wektora $\mathbf{M}^n(\lambda)\mathbf{b}$, więc teza twierdzenia jest prawdziwa.



Rys. 1. Oczekiwana składka w roku $n = 3$ w zależności od klasy w roku 0, $\lambda = 0{,}1011$

Źródło: opracowanie własne.

Przykład 1. Przedmiotem tego i następnych przykładów jest $SBMS_{KL}$ ubezpieczenia autocasco TUiR Warta SA z 2000 r., o $s = 11$ klasach, klasie startowej $i_0 = 4$ oraz wektorze składek $\mathbf{b} = (200, 150, 125, 90, 80, 70, 60, 50, 50, 40)$. Zastosowane w przykładach częstości szkód, często przywoływane w literaturze przedmiotu, pochodzą z rynku belgijskiego w latach siedemdziesiątych: średnia częstość szkód $\lambda = 0{,}1011$, częstość szkód „dobrego" kierowcy $\lambda = 0{,}0762$ i „złego" kierowcy $\lambda = 0{,}3567$ [3].

5.2. Rok ubezpieczenia

Twierdzenie 2. Oczekiwana składka $P_i(\lambda, n)$ ubezpieczonego o częstości szkód λ, który w roku 0 był w klasie $i = 1$ jest nierosnącą funkcją czasu $n \in \mathcal{N}_1$.

Dowód:

Pierwszy wiersz macierzy $\mathbf{M}(\lambda)$ oznaczono chwilowo przez $\mathbf{m}_1(\lambda)$. Ma on postać

$$\mathbf{m}_1(\lambda) = [p_{1+}(\lambda)\ 0\ \ldots\ 0\ p_0(\lambda)\ 0\ \ldots\ 0],$$

przy czym element $p_0(\lambda)$ znajduje się w kolumnie $j_1 \geq 2$. Oczekiwana składka w roku 1 ubezpieczonego, który w roku 0 był w klasie 1, wynika ze wzoru (6), czyli

$$p_1(\lambda, 1) = \mathbf{m}_1(\lambda)\mathbf{b} = p_{1+}(\lambda)b_1 + p_0(\lambda)b_{j_1}.$$

Ze względu na nierosnące elementy wektora składek $\mathbf{b}$ spełniona jest nierówność $P_1(\lambda, 1) \leq b_1$. Oczekiwana składka omawianego ubezpieczonego w roku 2 jest dana wzorem

$$P_1(\lambda, 2) = \mathbf{m}_1(\lambda)\mathbf{M}(\lambda)\mathbf{b},$$

a ponieważ $\mathbf{M}(\lambda)\mathbf{b} = P(\lambda, 1)$, zatem

$$P_1(\lambda, 2) = p_{1+}(\lambda)P_1(\lambda, 1) + p_0(\lambda)P_{j_1}(\lambda, 1).$$

Skoro $j_1 \geq 2$, więc na mocy twierdzenia 1 spełniona jest nierówność

$$P_{j_1}(\lambda, 1) \leq P_1(\lambda, 1).$$

Zatem

$$P_1(\lambda, 2) = p_{1+}(\lambda)P_1(\lambda, 1) + p_0(\lambda)P_{j_1}(\lambda, 1) \leq P_1(\lambda, 1),$$

skąd, po uwzględnieniu nierówności $P_1(\lambda, 1) \leq b_1$, wynika, że

$$P_1(\lambda, 2) \leq P_1(\lambda, 1) \leq b_1.$$

Przeprowadzenie dowodu indukcyjnego (którego opis pominięto) prowadzi do wniosku, że teza twierdzenia jest prawdziwa.

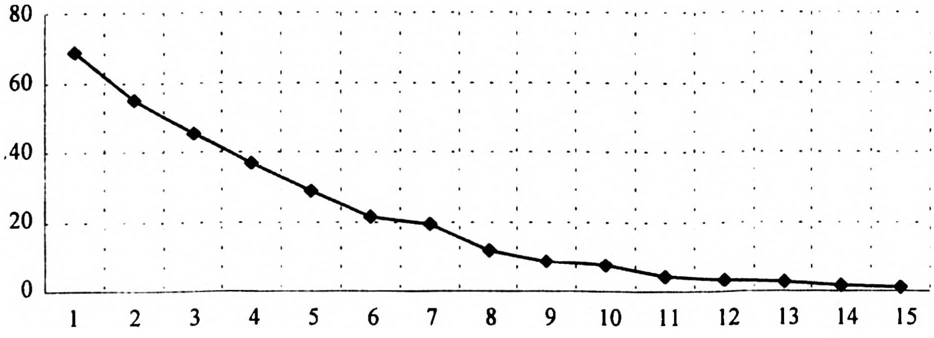
Twierdzenie 3. Oczekiwana składka $P_i(\lambda, n)$ ubezpieczonego o częstości szkód λ, który w roku 0 był w klasie $i = s$, jest niemalejącą funkcją czasu $n \in \mathcal{N}_1$.

Dowód twierdzenia 3 jest analogiczny do dowodu twierdzenia 2.

Wniosek 3. Różnica między największą i najmniejszą oczekiwaną składką ubezpieczonego o częstości szkód λ w roku n jest nierosnącą funkcją czasu $n \in \mathcal{N}_1$.

Przykład 2. SBMS$_{KL}$ Warty, $\lambda = 0{,}1011$.

Na rysunku 2 pokazane są oczekiwane składki ubezpieczonego w systemach typu SBMS$_{KL}$, który w roku 0 był w klasie różnej od 1 i s. Jak widać, wartości tych składek mogą być niemonotoniczne względem czasu.



Rys. 2. Różnica między największą i najmniejszą oczekiwaną składką w latach 1, 2, ..., 15

Źródło: opracowanie własne.

Wniosek 4. Oczekiwana składka $P_i(\lambda, n)$ ubezpieczonego o częstości szkód λ, który w roku 0 był w klasie $i \notin \{1, s\}$ w ogólnym przypadku jest niemonotoniczną funkcją czasu $n \in \mathcal{N}_1$.

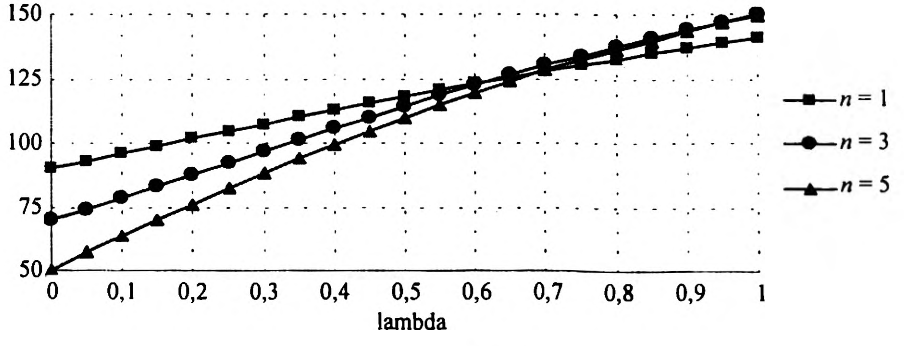
5.3. Częstość szkód

Twierdzenie 4. Oczekiwana składka $P_i(\lambda, n)$ w roku $n \in \mathcal{N}_1$ ubezpieczonego, który w roku 0 był w klasie $i \in S$, jest niemalejącą funkcją jego częstości szkód λ, a ponadto

$$b_S \leq P_i(\lambda, n) \leq b_1.$$

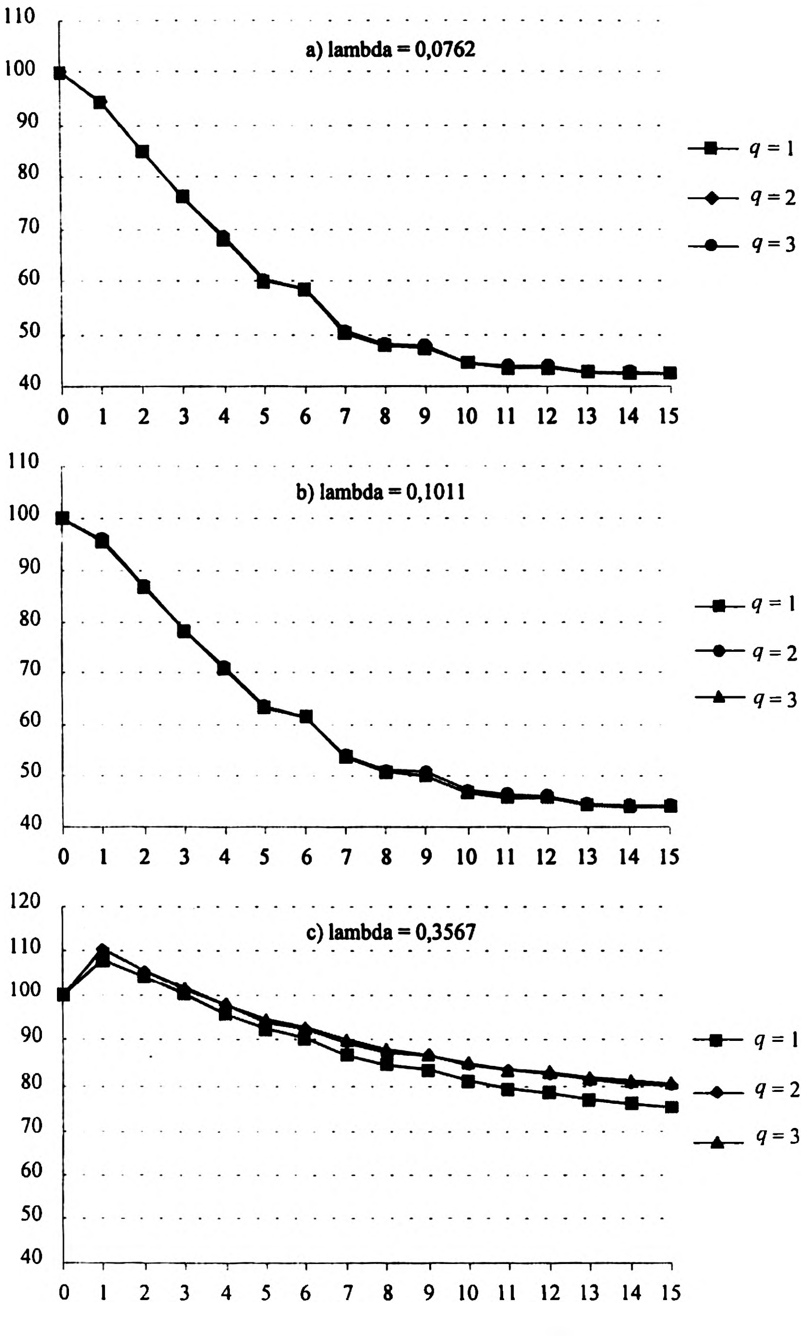
Dla dowodu wystarczy wykazać, że $SBMS_{KL}$ jest szczególnym przypadkiem SSBM [5], ponieważ dla SSBM twierdzenie to jest prawdziwe [2].

Przykład 3. $SBMS_{KL}$ Warty, w roku 0 klasa 4.



Rys. 3. Oczekiwana składka jako niemalejąca funkcja częstości szkód w latach 1, 3, 5

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 4. Oczekiwana składka w latach $n = 0, 1, ..., 15$ dla $q = 1, 2, 3$

Źródło: opracowanie własne.

5.4. Maksymalna liczba wyróżnianych szkód

Twierdzenie 5. Niech $P_i(\lambda, n, q_1)$ oraz $P_i(\lambda, n, q_2)$ oznacza oczekiwaną składkę w roku n ubezpieczonego o częstości szkód λ, który w roku 0 był w klasie i systemu $SBMS_{KL}$ o maksymalnej liczbie wyróżnianych szkód odpowiednio równej q_1 lub q_2, przy czym $1 \leq q_1 \leq q_2$, $i \in S$, $n \in \mathcal{N}_1$. Jeśli w obu systemach wektor składek b jest identyczny, reguły przejścia pierwszego systemu są opisane macierzami

$$\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_{q_1},$$

a reguły przejścia drugiego systemu opisują macierze

$$\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_{q_1}, \mathbf{T}_{q_1+1}, \ldots, \mathbf{T}_{q_2},$$

to

$$P_i(\lambda, n, q_1) \leq P_i(\lambda, n, q_2).$$

Dowód twierdzenia można znaleźć w pracy [5].

Przykład 4. $SBMS_{KL}$ Warty, maksymalna liczba wyróżnianych szkód $q = 1, 2, 3$, w roku 0 klasa 4.

Rysunki 4 oraz tab. 1 pozwalają stwierdzić, jak znikomy wpływ na oczekiwaną składkę ma zwiększenie parametru q w przypadku „dobrego" lub przeciętnego kierowcy i niewiele większy – w przypadku „złego" kierowcy.

Tabela 1. Oczekiwana składka w latach $n = 0, 1, \ldots, 15$ dla $q = 1, 2, 3$, $\lambda = 0{,}0762$

Rok	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$q = 1$	100	94,40	85,07	76,29	68,22	60,19	58,52	50,20	47,79	47,37	44,42	43,69	43,57	42,66	42,44	42,41
$q = 2$	100	94,54	85,13	76,36	68,35	60,33	58,70	50,43	48,05	47,59	44,69	43,99	43,80	42,91	42,70	42,62
$q = 3$	100	94,54	85,13	76,36	68,35	60,33	58,70	50,43	48,05	47,59	44,70	44,00	43,80	42,92	42,71	42,63

Źródło: opracowanie własne.

5.5. Liczba klas, reguły przejścia, składki

Nie jest możliwa analiza własności oczekiwanej składki w modelu $SBMS_{KL}$ w zależności od liczby klas bez jednoczesnego uwzględnienia reguł przejścia w systemie. W przypadku usunięcia jednej z dotychczasowych klas konieczna jest zmiana przynajmniej niektórych reguł przejścia, a wprowadzenie nowej klasy wymaga ustalenia dla niej nowych reguł przejścia oraz odpowiedniej wartości składki. Badanie zależności oczekiwanej składki od reguł przejścia jest w ogólnym przypadku bardzo skomplikowane. W następnym rozdziale proponuje się wyróżnienie pewnych „wzorcowych" przypadków $SBMS_{KL}$, których własności pozwolą wnioskować o oczekiwanej składce pozostałych systemów tego typu.

6. Klasyfikacja $SBMS_{KL}$ na podstawie reguł przejścia

W przypadku systemów typu $SBMS_{KL}$ łacińskim określeniom *bonus* oraz *malus* odpowiadają polskie terminy *awans* oraz *spadek*. W związku z tym proponuje się wyróżnienie czterech „skrajnych" systemów typu $SBMS_{KL}$, które charakteryzują się regułami maksymalnego/minimalnego awansu oraz maksymalnego/minimalnego spadku w każdej klasie. W oznaczeniach tych systemów na pierwszej pozycji zapisana jest reguła awansu, a na drugiej reguła spadku. Schematyczna postać macierzy przejścia dla tych systemów przedstawiają się następująco:

A. MAX/MIN

$$\begin{matrix} p_{1+} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 \\ p_{1+} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 \\ 0 & p_{1+} & 0 & 0 & 0 & p_0 \\ 0 & 0 & p_{1+} & 0 & 0 & p_0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{1+} & 0 & p_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{1+} & p_0 \end{matrix}$$

B. MAX/MAX

$$\begin{matrix} p_{1+} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 \\ p_{1+} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 \\ p_{1+} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 \\ p_{1+} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 \\ p_{1+} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 \\ p_{1+} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 \end{matrix}$$

C. MIN/MIN

$$\begin{matrix} p_{1+} & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{1+} & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{1+} & 0 & p_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1+} & 0 & p_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{1+} & 0 & p_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{1+} & p_0 \end{matrix}$$

D. MIN/MAX

$$\begin{matrix} p_{1+} & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{1+} & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{1+} & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 \\ p_{1+} & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 \\ p_{1+} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 \\ p_{1+} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 \end{matrix}$$

Bez trudu można zauważyć, że:

- system A. MAX/MIN jest najłagodniejszym systemem typu $SBMS_{KL}$ w tym sensie, że wśród wszystkich $SBMS_{KL}$ o ustalonej liczbie klas, w takim systemie ubezpieczony zawsze jest nagradzany największym możliwym awansem i karany najmniejszym możliwym spadkiem;
- system D. MIN/MAX jest najsurowszym systemem typu $SBMS_{KL}$ w tym sensie, że wśród wszystkich $SBMS_{KL}$ o ustalonej liczbie klas, w takim systemie ubezpieczony zawsze jest nagradzany najmniejszym możliwym awansem i karany największym możliwym spadkiem;
- każdy z czterech powyższych systemów wyróżnia maksymalnie jedną szkodę, czyli dla każdego z nich $q = 1$.

Ponadto, dowolny system typu $SBMS_{KL}$ można otrzymać przez modyfikację powyższych systemów, przy czym:

- systemy A oraz B można modyfikować przez zmniejszanie, a systemy C oraz D przez zwiększanie awansu w ustalonych klasach,
- systemy A oraz C można modyfikować przez zwiększanie, a systemy B oraz D przez zmniejszanie spadku w ustalonych klasach,
- systemy A oraz C można modyfikować przez zwiększanie q, a w systemach B oraz D zwiększenie q jest niemożliwe,
- dowolnie zmodyfikowany system B można otrzymać jako modyfikację przynajmniej jednego z systemów A, C lub D.

Łatwo można też zauważyć, że skoro macierz przejścia systemu B jest ergodyczna i niezerowe są tylko pierwsza i ostatnia kolumna tej macierzy, prawdziwy jest następujący wniosek.

Wniosek 5. W modelu systemu B oczekiwana składka dla dowolnego roku $n \in \mathcal{N}_1$ oraz dowolnej klasy $i \in S$ w roku 0 ma stałą wartość, równą

$$\beta_*(\lambda) = p_{1+}(\lambda)b_1 + p_0(\lambda)b_2.$$

W dalszej części artykułu stosowane są następujące oznaczenia macierzy przejścia oraz oczekiwanych składek systemów A-D:

	A. MAX/MIN	B. MAX/MAX	C. MIN/MIN	D. MIN/MAX
$\mathbf{M}(\lambda)$	$\mathbf{A}(\lambda)$	$\mathbf{B}(\lambda)$	$\mathbf{C}(\lambda)$	$\mathbf{D}(\lambda)$
$P_i(\lambda, n)$	$\alpha_i(\lambda, n)$	$\beta_*(\lambda)$	$\gamma_i(\lambda, n)$	$\delta_i(\lambda, n)$
$P(\lambda, n)$	$\alpha(\lambda, n)$	$\beta(\lambda)$	$\gamma(\lambda, n)$	$\delta(\lambda, n)$

7. Zakres zmienności oczekiwanej składki w SBMS$_{KL}$

Pierwsze z dwóch twierdzeń przedstawionych w tym punkcie jest podstawą wnioskowania o relacjach oczekiwanych składek w systemach A-D, drugie zaś pozwala na przedziałowe określenie wartości oczekiwanych składek dla innych systemów SBMS$_{KL}$ W dowodzeniu tych twierdzeń posłużono się następującymi macierzami (przez $\mathbf{e}_j$ oznaczono wersor z jedynką na j-tej pozycji, zaś przez $\mathbf{J}$ kolumnowy wektor jedynek):

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{J}\mathbf{e}_1^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{E}_S = \mathbf{J}\mathbf{e}_S^{\mathrm{T}},$$

$$\widetilde{\mathbf{T}}_0 = \sum_{k=1}^{S-1} \mathbf{e}_k\mathbf{e}_{k+1}^{\mathrm{T}} + \mathbf{e}_S\mathbf{e}_S^{\mathrm{T}},$$

$$\widetilde{\mathbf{T}}_1 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^{\mathrm{T}} + \sum_{k=2}^{S} \mathbf{e}_k\mathbf{e}_{k-1}^{\mathrm{T}}.$$

Powyższe macierze umożliwiły zapisanie macierzy przejścia rozpatrywanych modeli w następującej postaci:

$$\mathbf{A}(\lambda) = p_0(\lambda)\mathbf{E}_S + p_{1+}(\lambda)\widetilde{\mathbf{T}}_1, \tag{8}$$

$$\mathbf{B}(\lambda) = p_0(\lambda)\mathbf{E}_S + p_{1+}(\lambda)\mathbf{E}_1, \tag{9}$$

$$\mathbf{C}(\lambda) = p_0(\lambda)\widetilde{\mathbf{T}}_0 + p_{1+}(\lambda)\widetilde{\mathbf{T}}_1, \tag{10}$$

$$\mathbf{D}(\lambda) = p_0(\lambda)\widetilde{\mathbf{T}}_0 + p_{1+}(\lambda)\mathbf{E}_1. \tag{11}$$

Twierdzenie 6. Dla wektorów oczekiwanej składki w modelach systemów A-D o identycznej liczbie klas s oraz identycznym wektorze składek **b** spełnione są następujące nierówności:

$$(1)\ \alpha(\lambda, n) \le \beta(\lambda) \le \delta(\lambda, n),\ n \in \mathcal{N}_1,$$

$$(2)\ \alpha(\lambda, n) \le \gamma(\lambda) \le \delta(\lambda, n),\ n \in \mathcal{N}_1.$$

Dowód:

W celu sprawdzenia każdej tezy przeprowadzono dowód indukcyjny. Postać[5] wektorów oczekiwanych składek w roku $n = 1$ dla systemów A-D otrzymano na podstawie wniosku 5, wzorów (8)-(11) oraz wzorów 8, 9 i 13 z załącznika 3.

$$\alpha(1) = \mathbf{Ab} = \left(p_0\mathbf{E}_S + p_{1+}\widetilde{\mathbf{T}}_1\right)\mathbf{b} = p_0\mathbf{b}_S\mathbf{J} + p_{1+}\lambda\widetilde{\mathbf{T}}_1\mathbf{b} =$$

$$= p_0\mathbf{b}_S\mathbf{J} + p_{1+}\left(\mathbf{b}_1\mathbf{e}_1 + \sum_{k=2}^{S}\mathbf{b}_{k-1}\mathbf{e}_k\right),$$

$$\beta(1) = \beta = p_0\mathbf{b}_S\mathbf{J} + p_{1+}\mathbf{b}_1\mathbf{J},$$

$$\gamma(1) = \mathbf{Cb} = \left(p_0\widetilde{\mathbf{T}}_0 + p_{1+}\widetilde{\mathbf{T}}_1\right)\mathbf{b} = p_0\widetilde{\mathbf{T}}_0\mathbf{b} + p_{1+}\widetilde{\mathbf{T}}_1\mathbf{b} =$$

$$= p_0\left(\mathbf{b}_1\mathbf{e}_1 + \sum_{k=1}^{S-1}\mathbf{b}_{k+1}\mathbf{e}_k + \mathbf{b}_S\mathbf{e}_S\right) + p_{1+}\left(\mathbf{b}_1\mathbf{e}_1 + \sum_{k=2}^{S}\mathbf{b}_{k-1}\mathbf{e}_k\right),$$

$$\delta(1) = \mathbf{Db} = \left(p_0\widetilde{\mathbf{T}}_0 + p_{1+}\mathbf{E}_1\right)\mathbf{b} = p_0\widetilde{\mathbf{T}}_0\mathbf{b} + p_{1+}\mathbf{b}_1\mathbf{J} =$$

$$= p_0\left(\sum_{k=1}^{S-1}\mathbf{b}_{k+1}\mathbf{e}_k + \mathbf{b}_S\mathbf{e}_S\right) + p_{1+}\mathbf{b}_1\mathbf{J}.$$

W celu sprawdzenia nierówności (1) dla $n = 1$ można zauważyć, że skoro elementy wektora składek **b** stanowią ciąg nierosnący, więc z powyższego wynika, iż

$$\alpha(1) = p_0\mathbf{b}_S\mathbf{J} + p_{1+}\left(\mathbf{b}_1\mathbf{e}_1 + \sum_{k=2}^{S}\mathbf{b}_{k-1}\mathbf{e}_k\right) \le p_0\mathbf{b}_S\mathbf{J} + p_{1+}\left(\mathbf{b}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{b}_1\sum_{k=2}^{S}\mathbf{e}_k\right) =$$
$$= p_0\mathbf{b}_S\mathbf{J} + p_{1+}\mathbf{b}_1\mathbf{J} = \beta$$

[5] W celu uproszczenia zapisu pominięto argument λ w oznaczeniach: $\mathbf{A}(\lambda)$, $\mathbf{B}(\lambda)$, $\mathbf{C}(\lambda)$, $\mathbf{D}(\lambda)$, $\alpha(\lambda, n)$, $\beta(\lambda)$, $\gamma(\lambda, n)$, $\delta(\lambda, n)$ oraz $p_0(\lambda)$ i $p_{1+}(\lambda)$.

oraz

$$\delta(1) = p_0\left(\sum_{k=1}^{S-1}\mathbf{b}_{k+1}\mathbf{e}_k + \mathbf{b}_S\mathbf{e}_S\right) + p_{1+}\mathbf{b}_1\mathbf{J} \geq p_0\left(\mathbf{b}_S\sum_{k=1}^{S-1}\mathbf{e}_k + \mathbf{b}_S\mathbf{e}_S\right) + p_{1+}\mathbf{b}_1\mathbf{J} =$$

$$= p_0\mathbf{b}_S\mathbf{J} + p_{1+}\mathbf{b}_1\mathbf{J} = \beta.$$

Zatem

$$\alpha(1) \leq \beta \leq \delta(1), \tag{12}$$

co znaczy, że dla $n = 1$ nierówność (12) jest prawdziwa. Nierówność tę warto jeszcze zapisać w postaci

$$\mathbf{Ab} \leq \mathbf{Bb} \leq \mathbf{Db}. \tag{13}$$

Założenie indukcyjne

$$\alpha(m) \leq \beta \leq \delta(m),$$

czyli

$$\mathbf{A}^m\mathbf{b} \leq \boldsymbol{\beta} \leq \mathbf{D}^m\mathbf{b}.$$

można zapisać przy użyciu oznaczeń $\mathbf{b}' = \mathbf{A}^m\mathbf{b}$, $\mathbf{b}'' = \mathbf{D}^m\mathbf{b}$ jako

$$\mathbf{b}' \leq \boldsymbol{\beta} \leq \mathbf{b}''. \tag{14}$$

Na mocy twierdzenia 2 elementy wektorów $\mathbf{b}'$ oraz $\mathbf{b}''$ są dodatnie i tworzą ciąg nierosnący, więc każdy z nich można traktować jako wektor składek. Wobec tego, dodatkowe uwzględnienie nierówności (13) prowadzi do

$$\mathbf{Ab}' \leq \mathbf{Bb}' \leq \mathbf{B}\boldsymbol{\beta} \leq \mathbf{Bb}'' \leq \mathbf{Db}'',$$

a ponieważ $\mathbf{Ab}' = \mathbf{A}^{m+1}\mathbf{b} = \alpha(m+1)$, $\mathbf{B}\beta = \boldsymbol{\beta}$ oraz $\mathbf{Db}'' = \mathbf{D}^{m+1}\mathbf{b} = \delta(m+1)$, więc

$$\alpha(m+1) \leq \beta \leq \delta(m+1),$$

co kończy dowód indukcyjny tezy (1).

Sprawdzenie tezy (2) dla $n = 1$ można zacząć od przypomnienia, że elementy wektora składek $\mathbf{b}$ stanowią ciąg nierosnący, zatem

$$\gamma(1) = p_0\left(\sum_{k=1}^{S-1}\mathbf{b}_{k+1}\mathbf{e}_k + \mathbf{b}_S\mathbf{e}_S\right) + p_{1+}\widetilde{\mathbf{T}}_1\mathbf{b} \geq p_0\left(\mathbf{b}_S\sum_{k=1}^{S-1}\mathbf{e}_k + \mathbf{b}_S\mathbf{e}_S\right) + p_{1+}\widetilde{\mathbf{T}}_1\mathbf{b} =$$

$$= p_0\mathbf{b}_S\mathbf{J} + p_{1+}\widetilde{\mathbf{T}}_1\mathbf{b} = \alpha(1)$$

oraz

$$\gamma(1)=p_0\widetilde{\mathbf{T}}_0\mathbf{b}+p_{1+}\left(\mathbf{b}_1\mathbf{e}_1+\sum_{k=2}^{s}\mathbf{b}_{k-1}\mathbf{e}_k\right)\le p_0\widetilde{\mathbf{T}}_0\mathbf{b}+p_{1+}\left(\mathbf{b}_1\mathbf{e}_1+\mathbf{b}_1\sum_{k=2}^{s}\mathbf{e}_k\right)=,$$

$$=p_0\widetilde{\mathbf{T}}_0\mathbf{b}+p_{1+}\mathbf{b}_1\mathbf{J}=\delta(1),$$

skąd wynika, że

$$\alpha(1)\le\gamma(1)\le\delta(1),$$

czyli

$$\mathbf{Ab}\le\mathbf{CB}\le\mathbf{Db}. \tag{15}$$

Założenie indukcyjne

$$\mathbf{A}^m\mathbf{b}\le\mathbf{C}^m\mathbf{b}\le\mathbf{D}^m\mathbf{b},$$

po przyjęciu oznaczeń $\mathbf{b}'=\mathbf{A}^m\mathbf{b}$, $\mathbf{b}''=\mathbf{C}^m\mathbf{b}$, $\mathbf{b}'''=\mathbf{D}^m\mathbf{b}$, ma postać

$$\mathbf{b}'\le\mathbf{b}''\le\mathbf{b}'''. \tag{16}$$

Na mocy twierdzenia 2 elementy każdego z wektorów $\mathbf{b}'$, $\mathbf{b}''$, $\mathbf{b}'''$ są dodatnie i tworzą ciąg nierosnący, więc każdy z nich można traktować jako wektor składek. Z nierówności (15) i (16) wynika więc, że

$$\mathbf{Ab}'\le\mathbf{Cb}'\le\mathbf{Cb}''\le\mathbf{Db}''\le\mathbf{Db}''',$$

a skoro $\mathbf{Ab}'=\mathbf{A}^{m+1}\mathbf{b}=\alpha(m+1)$, $\mathbf{Cb}''=\mathbf{C}^{m+1}\mathbf{b}=\gamma(m+1)$ oraz $\mathbf{Db}'''=\mathbf{D}^{m+1}\mathbf{b}=$ $=\delta(m+1)$, więc

$$\alpha(m+1)\le\gamma(m+1)\le\delta(m+1),$$

co kończy dowód tezy (2).

Wniosek 6. Oczekiwane składki w roku n ubezpieczonych, którzy w roku 0 byli w klasie i systemów A-D o identycznej liczbie klas oraz identycznym wektorze składek, spełniają następujące nierówności:

(1) $\qquad \alpha_i(\lambda,n)\le\beta_*(\lambda)\le\delta_i(\lambda,n)$, dla $i\in S$, $n\in\mathcal{N}_1$,

(2) $\qquad \alpha_i(\lambda,n)\le\gamma_i(\lambda,n)\le\delta_i(\lambda,n)$, dla $i\in S$, $n\in\mathcal{N}_1$.

Wniosek 7. Zakresem zmienności oczekiwanej składki w roku $n\in\mathcal{N}_1$ ubezpieczonego o częstości szkód λ, który w roku 0 był w klasie $i\in S$ dowolnego SBMS$_{KL}$ o liczbie klas s oraz wektorze składek $\mathbf{b}$ jest przedział $\langle\alpha_i(\lambda,n),\delta_i(\lambda,n)\rangle$, przy czym $\alpha_i(\lambda,n)$ oraz $\delta_i(\lambda,n)$ są dane następującymi wzorami[6]:

[6] Wyprowadzenie tych wzorów można znaleźć w pracy [5].

• dla $n < s - 1$

$$\alpha_i(\lambda, n) = \begin{cases} p_0(\lambda) \sum_{k=s-n+1}^{S} p_{1+}(\lambda)^{s-k} b_k + p_{1+}(\lambda)^{s-k} b_1, & i = 1, 2, \ldots, n+1, \\ p_0(\lambda) \sum_{k=s-n+1}^{S} p_{1+}(\lambda)^{s-k} b_k + p_{1+}(\lambda)^{s-k} b_{i-n}, & i = n+2, \ldots, s, \end{cases}$$

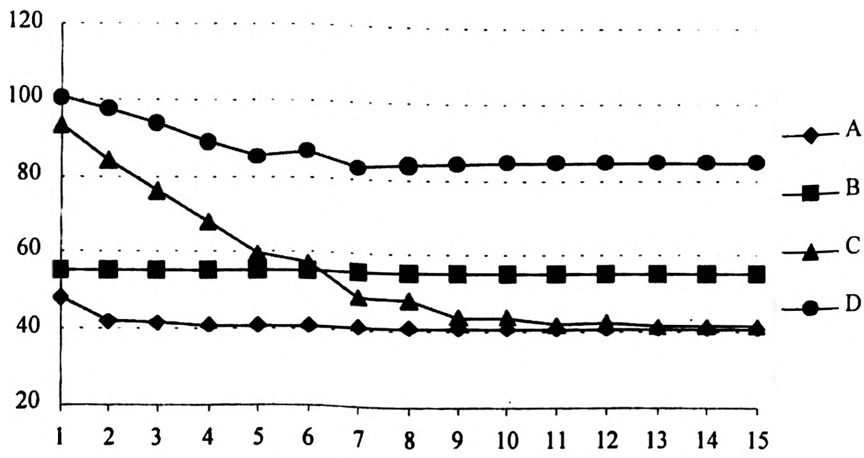
$$\delta_i(\lambda, n) = \begin{cases} p_{1+}(\lambda) \sum_{k=1}^{n} p_0(\lambda)^{k-1} b_k + p_0(\lambda)^n b_{i+n}, & i = 1, 2, \ldots, s-n-1, \\ p_{1+}(\lambda) \sum_{k=1}^{n} p_0(\lambda)^{k-1} b_k + p_0(\lambda)^n b_S, & i = s-n, \ldots, s, \end{cases}$$

• dla $n \geq s - 1$, $i \in S$

$$\alpha_i(\lambda, n) = p_0(\lambda) \sum_{k=1}^{S} p_{1+}(\lambda)^{s-k} b_k + p_{1+}(\lambda)^s b_1,$$

$$\delta_i(\lambda, n) = p_{1+}(\lambda) \sum_{k=1}^{S} p_0(\lambda)^{k-1} b_k + p_0(\lambda)^s b_S.$$

Przykład 5. Systemy A-D, $s = 11$, $\mathbf{b} = (200, 150, 125, 100, 90, 80, 70, 60, 50, 50, 40)$, $\lambda = 0{,}1011$.



Rys. 5. Oczekiwana składka w latach $n = 1, 2, \ldots, 15$ ubezpieczonego w systemie A-D, który w roku 0 był w klasie 4

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2. Zakres zmienności oczekiwanej składki ubezpieczonego o częstości szkód $\lambda = 0{,}1011$, który w roku 0 był w klasie 4 dowolnego $SBMS_{KL}$ o 11 klasach i wektorze składek $\mathbf{b} = (200, 150, 125, 100, 90, 80, 70, 60, 50, 50, 40)$

n	Zakres zmienności		D – A
	A	D	
1	48,1740	100,5781	**52,4041**
2	41,8864	97,6240	**55,7376**
3	41,0950	93,7756	**52,6805**
4	40,9825	89,2321	**48,2496**
5	40,9725	85,1256	**44,1532**
6	40,9716	86,8658	**45,8942**
7	40,9715	82,9868	**42,0153**
8	40,9715	83,9345	**42,9630**
9	40,9715	84,3628	**43,3913**
10	40,9715	84,7499	**43,7784**

Źródło: opracowanie własne.

Systemy A-D są „skrajnymi" wariantami $SBMS_{KL}$ i trudno byłoby je znaleźć na rynku ubezpieczeń komunikacyjnych. Można jednak traktować je jako punkt odniesienia w analizie oczekiwanych składek rzeczywistych $SBMS_{KL}$, rozpatrywanych jako modyfikacje odpowiednich systemów A-D.

Oznaczając oczekiwane składki zmodyfikowanych systemów A-D, przyjęto następujące zasady:

- przy modyfikacji polegającej na zmniejszeniu awansu przynajmniej w jednej klasie do oznaczenia wpisuje się *awanse*, a przy zwiększeniu awansu – *AWANSE*,
- szczególnym przypadkiem modyfikacji *AWANSE* jest krótka pamięć o zwyżce (po jednym roku bez szkody awans z klasy zwyżkowej do klasy startowej) – *KPZ*,
- przy modyfikacji polegającej na zmniejszeniu spadku przynajmniej w jednej klasie do oznaczenia wpisuje się *spadki*, a przy zwiększeniu spadku – *SPADKI*,
- przy modyfikacji polegającej na zwiększeniu parametru q (jest to możliwe tylko w przypadku systemów A oraz C) do oznaczenia wpisuje się *SPADKI*[7].

Przykład 6. Pod trzema przykładowymi macierzami przejścia systemu $SBMS_{KL}$ o klasie startowej 2 oraz maksymalnej wyróżnianej liczbie szkód odpowiednio równej 1, 1 i 3 podane są wybrane modyfikacje systemów A-D, za pomocą których można rozpatrywać odpowiedni $SBMS_{KL}$.

[7] W przypadku $q > 1$ określenie *SPADKI* jest uzasadnione tym, że przynajmniej w jednej klasie ubezpieczony zgłaszający q lub więcej szkód jest karany większym spadkiem niż gdyby zgłosił liczbę szkód mniejszą od q.

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} p_{1+} & 0 & p_0 & 0 & 0 \\ p_{1+} & 0 & p_0 & 0 & 0 \\ p_{1+} & 0 & 0 & p_0 & 0 \\ p_{1+} & 0 & 0 & 0 & p_0 \\ p_{1+} & 0 & 0 & 0 & p_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} p_{1+} & p_0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{1+} & 0 & p_0 & 0 & 0 \\ p_{1+} & 0 & 0 & p_0 & 0 \\ 0 & p_{1+} & 0 & 0 & p_0 \\ 0 & 0 & p_{1+} & 0 & p_0 \end{bmatrix},$$

A(*awanse*, *SPADKI*) *B*(*awanse*) *D*(*KPZ*)

A(*awanse*, *SPADKI*) *B*(*awanse*, *SPADKI*) *C*(*SPADKI*)

$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} p_{1+} & 0 & p_0 & 0 & 0 \\ p_{1+} & 0 & p_0 & 0 & 0 \\ p_{2+} & p_1 & 0 & p_0 & 0 \\ p_{3+} & p_2 & p_1 & 0 & p_0 \\ 0 & p_{3+} & p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix}.$$

B(*awanse*, *SPADKI*)
C(*AWANSE*, *SPADKI*)
C(*KPZ*, *SPADKI*)

Poniższe twierdzenia 7 i 8 podane są bez dowodów – można je znaleźć w pracy [5].

Twierdzenie 7. Dla oczekiwanych składek zmodyfikowanych systemów A, B oraz D o identycznej liczbie klas s oraz identycznym wektorze składek **b** spełnione są następujące nierówności, $i \in S$, $n \in \mathcal{N}_1$:

(1) $\alpha_i(\lambda, n) \le \alpha_i(\lambda, n; SPADKI) \le \beta(\lambda) \le \beta_i(\lambda, n; awanse) \le \delta_i(\lambda, n)$,

(2) $\alpha_i(\lambda, n) \le \alpha_i(\lambda, n; SPADKI) \le \beta(\lambda) \le \delta_i(\lambda, n; AWANSE) \le \delta_i(\lambda, n)$,

(3) $\alpha_i(\lambda, n) \le \beta_i(\lambda, n; spadki) \le \beta(\lambda) \le \beta_i(\lambda, n; awanse) \le \delta_i(\lambda, n)$,

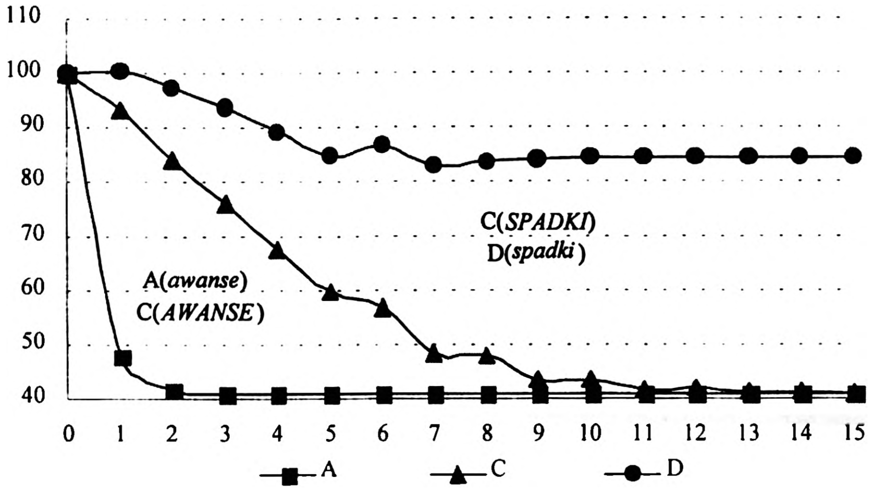
(4) $\alpha_i(\lambda, n) \le \beta_i(\lambda, n; spadki) \le \beta(\lambda) \le \delta_i(\lambda, n; AWANSE) \le \delta_i(\lambda, n)$.

Twierdzenie 8. Dla oczekiwanych składek zmodyfikowanych systemów A, C i D o identycznej liczbie klas s oraz identycznym wektorze składek b spełnione są następujące nierówności, $i \in S$, $n \in \mathcal{N}_1$:

(1) $\alpha_i(\lambda, n) \le \alpha_i(\lambda, n; awanse) \le \gamma_i(\lambda, n) \le \gamma_i(\lambda, n; SPADKI) \le \delta_i(\lambda, n)$,
(2) $\alpha_i(\lambda, n) \le \alpha_i(\lambda, n; awanse) \le \gamma_i(\lambda, n) \le \delta_i(\lambda, n; spadki) \le \delta_i(\lambda, n)$,
(3) $\alpha_i(\lambda, n) \le \gamma_i(\lambda, n; AWANSE) \le \gamma_i(\lambda, n) \le \gamma_i(\lambda, n; SPADKI) \le \delta_i(\lambda, n)$,
(4) $\alpha_i(\lambda, n) \le \gamma_i(\lambda, n; AWANSE) \le \gamma_i(\lambda, n) \le \delta_i(\lambda, n; spadki) \le \delta_i(\lambda, n)$.

Przykład 7. Systemy A, C i D oraz zmodyfikowane systemy A, C i D; $s = 11$, $b = (200, 150, 125, 100, 90, 80, 70, 60, 50, 50, 40)$; $\lambda = 0{,}1011$; w roku 0 klasa 4.

Rysunek 6 pokazuje, że wartości oczekiwanych składek systemów A(*awanse*) i C(*AWANSE*) znajdują się w obszarze ograniczonym krzywymi oczekiwanych składek systemów A i C, natomiast wartości oczekiwanych składek systemów C(*SPADKI*) i D(*spadki*) znajdują się w obszarze wyznaczonym przez krzywe oczekiwanych składek systemów C i D.



Rys. 6. Oczekiwana składka w systemach A, C i D oraz A(*awanse*), C(*AWANSE*), C(*SPADKI*) i D(*spadki*) w latach $n = 1, 2, ..., 15$

Źródło: opracowanie własne.

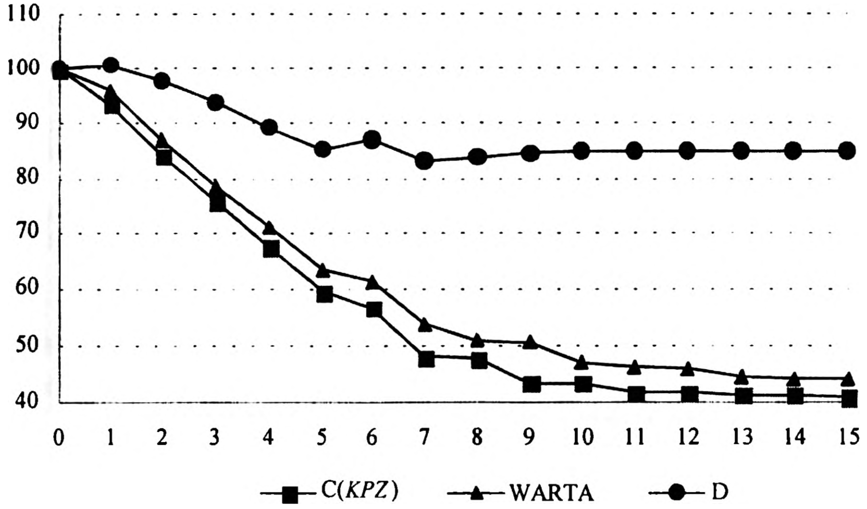
Wniosek 8. Dla oczekiwanych składek zmodyfikowanych systemów C i D o identycznej liczbie klas s oraz identycznym wektorze składek b spełnione są nierówności

$$\gamma_i(\lambda, n; KPZ) \le \gamma_i(\lambda, n; KPZ, SPADKI) \le \delta_i(\lambda, n),\ i \in S,\ n \in \mathcal{N}_1.$$

Przykład 8. Bez trudu można zauważyć, że rozpatrywany w poprzednich przykładach $SBMS_{KL}$ Warty można traktować jako zmodyfikowany system typu C(*KPZ, SPADKI*). Wobec tego dla oczekiwanych składek systemu Warty spełniona jest nierówność

$$\gamma_i(\lambda, n; KPZ) \le P_i^{WARTA}(\lambda, n) \le \delta_i(\lambda, n),\ i \in S,\ n \in \mathcal{N}_1.$$

Na rysunku 7 przedstawiono oczekiwaną składkę systemów C(KPZ) i D, a także systemu Warty dla ubezpieczonego o częstości szkód $\lambda = 0{,}1011$, który w roku 0 był w klasie 4.



Rys. 7. Oczekiwana składka w systemach Warty, C(KPZ) oraz D

Źródło: opracowanie własne.

8. Zakończenie

Z użyciem modelu Markowa w artykule zbadano własności oczekiwanych składek w zaproponowanym systemie ubezpieczeń komunikacyjnych typu $SBMS_{KL}$. Pokazano m.in., jak zmienia się oczekiwana składka w zależności od częstości szkód ubezpieczonego, czasu trwania ubezpieczenia, klasy, w której ubezpieczony był w roku 0, oraz maksymalnej liczby szkód wyróżnianych przez system. Wprowadzenie i szczegółowa analiza zależności oczekiwanych składek w czterech „skrajnych" wariantach $SBMS_{KL}$, charakteryzujących się regułami maksymalnego/minimalnego awansu oraz maksymalnego/minimalnego spadku, umożliwiło określenie minimalnej i maksymalnej oczekiwanej składki w dowolnym $SBMS_{KL}$ o ustalonej liczbie klas i wektorze składek, a także zakresu zmienności oczekiwanych składek w rzeczywistych systemach typu $SBMS_{KL}$, będących odpowiednimi modyfikacjami systemów „skrajnych". Rozważania teoretyczne ilustrowano przykładami dotyczącymi $SBMS_{KL}$ ubezpieczenia autocasco TUiR Warta SA z 2000 r.

Literatura

[1] Cieślik B., *Analiza porównawcza systemów bonus-malus w Polsce*, Instytut Ekonometrii SGH, Warszawa 2003.

[2] Kryszeń B., *Oczekiwana składka ubezpieczeniowa w systemie bonus-malus jako niemalejąca funkcja częstości szkód*, Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych SGH 2005, z. 14, s. 45-57.

[3] Lemaire J., *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer Academic Publishers, Boston 1995.

[4] Podgórska M., *Przedziałowe określenie wartości oczekiwanej składki*, [w:] M. Podgórska, B. Cieślik, B. Kryszeń, M. Topolewski, *Modelowanie i analiza ubezpieczeń komunikacyjnych*, Polska Izba Ubezpieczeń, Instytut Ekonometrii SGH, Warszawa 2006.

[5] Podgórska M., Cieślik B., Kryszeń B., Niemiec M., Topolewski M., *System bonus-malus sprawiedliwy w sensie przejść między klasami*, Instytut Ekonometrii SGH, Warszawa 2006.

Załącznik 1. Wykaz oznaczeń

$S = \{1, 2, ..., s\}$, $s < \infty$ – zbiór numerów klas,

i_0 – numer klasy początkowej,

$\mathcal{N}_0 = \{0\} \cup \mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_1 = \{1, 2, \ldots\}$,

$\mathbf{T}_k = \left[t_{ij}^{(k)}\right]$, $k \in \mathcal{N}_0$ – macierz reguł przejścia z klasy do klasy po k szkodach w ciągu roku, gdzie

$$t_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli zgłoszenie } k \text{ szkód w klasie } i \text{ w roku } n \text{ powoduje przejście do klasy } j \\ & \text{w roku } n+1, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

$i, j \in S$, $n \in \mathcal{N}_1$,

q – maksymalna liczba szkód wyróżnianych, $q = \max\{k \in \mathcal{N}_1 : \mathbf{T}_k \neq \mathbf{T}_{k-1}\}$,

b_i – składka w klasie i, przy czym jeśli $i < j$, to $b_i \geq b_j$,

$\lambda > 0$ – częstość szkód, parametr rozkładu Poissona,

$p_{ij}(\lambda)$ – prawdopodobieństwo przejścia ubezpieczonego o częstości szkód λ z klasy i w roku $n-1$ do klasy j w roku n,

$\mathbf{M}(\lambda) = \left[p_{ij}(\lambda)\right]$ – macierz prawdopodobieństw przejścia,

$\mathbf{d}_n(\lambda)$ – wierszowy wektor bezwarunkowego rozkładu łańcucha w roku n,

$P_i(\lambda, n)$ – oczekiwana składka w roku n ubezpieczonego o częstości szkód λ, który w roku 0 był w klasie i,

$\mathbf{P}(\lambda, n) = \left[P_i(\lambda, n)\right]$ – kolumnowy wektor oczekiwanych składek,

A. MAX/MIN – SBMS_{KL} o maksymalnych awansach i minimalnych spadkach,

B. MAX/MAX – SBMS_{KL} o maksymalnych awansach i maksymalnych spadkach,

C. MIN/MIN – SBMS_{KL} o minimalnych awansach i minimalnych spadkach,

D. MIN/MAX – $SBMS_{KL}$ o minimalnych awansach i maksymalnych spadkach,
$\mathbf{A}(\lambda)$, $\mathbf{B}(\lambda)$, $\mathbf{C}(\lambda)$, $\mathbf{D}(\lambda)$ – macierz prawdopodobieństw przejścia systemu, odpowiednio, A, B, C, D,
$\alpha_i(\lambda,n)$, $\beta_*(\lambda)$, $\gamma_i(\lambda,n)$, $\delta_i(\lambda,n)$ – oczekiwana składka w roku n ubezpieczonego o częstości szkód λ, który w roku 0 był w klasie i, systemu, odpowiednio, A, B, C, D,
$\mathbf{e}_j$ – wersor z jedynką na j-tej pozycji,
$\mathbf{J}$ – kolumnowy wektor jedynek.

Załącznik 2. Lematy

Lemat 1. Niech $\mathbf{T}_{k_1}$, $\mathbf{T}_{k_2}$, ..., $\mathbf{T}_{k_n}$, gdzie $k_1,k_2,\ldots,k_n \in \mathcal{N}_0$, $n \in \mathcal{N}_1$, będą macierzami reguł przejścia w systemie typu $SBMS_{KL}$, $\mathbf{b}$ zaś wektorem składek.
(a) $\mathbf{T}_{k_1},\mathbf{T}_{k_2},\ldots,\mathbf{T}_{k_n},\mathbf{b} > \mathbf{0}$.
(b) Elementy wektora $(\mathbf{T}_{k_1}\mathbf{T}_{k_2}\ldots\mathbf{T}_{k_n}\mathbf{b})$ stanowią ciąg nierosnący.

Dowód:

Skoro wiersze macierzy $\mathbf{T}_k$ są wektorami jednostkowymi, a na mocy definicji 1 wektor składek $\mathbf{b}$ jest dodatni, spełniona jest nierówność $\mathbf{T}_k\mathbf{b} > \mathbf{0}$. Z założenia 2 modelu SBM wynika, że elementy wektora b tworzą ciąg nierosnący, co po uwzględnieniu warunku 6 definicji 2 prowadzi do wniosku, że elementy każdego z wektorów $\mathbf{T}_k\mathbf{b}$, gdzie $k \in \mathcal{N}_0$, także tworzą ciąg nierosnący.

Skoro dowolny wektor $\mathbf{T}_k\mathbf{b}$, $k \in \mathcal{N}_0$, jest dodatni, a jego elementy stanowią ciąg nierosnący, zatem spełnia on warunki nakładane na wektor składek. Przypuśćmy, że w rozpatrywanym systemie $SBMS_{KL}$ dotychczasowy wektor składek $\mathbf{b}$ będzie zastąpiony przez którykolwiek z wektorów $\mathbf{T}_k\mathbf{b}$, a macierze reguł przejścia $\mathbf{T}_k$, $k \in \mathcal{N}_0$, pozostaną nie zmienione. Otrzymany w ten sposób „nowy" system nadal spełnia warunki definicji 2, zatem nadal jest systemem typu $SBMS_{KL}$. Bez trudu można zauważyć, że przeprowadzenie dowodu indukcyjnego (którego opis pominięto) prowadzi do wniosku, iż wektor $\mathbf{T}_{k_1}\mathbf{T}_{k_2}\ldots\mathbf{T}_{k_n}\mathbf{b}$ jest dodatni, a jego elementy stanowią ciąg nierosnący.

Lemat 2. Niech $\mathbf{T}_{k_1}$, $\mathbf{T}_{k_2}$, ..., $\mathbf{T}_{k_n}$, $\mathbf{T}_{l_1}$, $\mathbf{T}_{l_2}$, gdzie $l_1 < l_2$, $k_1,k_2,\ldots,k_n,l_1$, $l_2 \in \mathcal{N}_0$, $n \in \mathcal{N}_1$, będą macierzami reguł przejścia w systemie typu $SBMS_{KL}$. Spełniona jest nierówność

$$\mathbf{T}_{k_1}\mathbf{T}_{k_2}\ldots\mathbf{T}_{k_n}\left(\mathbf{T}_{l_2}-\mathbf{T}_{l_1}\right)\mathbf{b} \geq \mathbf{0}.$$

Dowód:

Elementy wektora składek **b** tworzą ciąg nierosnący, a dla systemu typu SBMS$_{\mathrm{KL}}$ spełniony jest warunek 5 definicji 2. Wobec tego dla $l_1 < l_2$, $l_1, l_2 \in \mathcal{N}_0$ prawdziwa jest nierówność

$$\mathbf{T}_{l_1}\mathbf{b} \le \mathbf{T}_{l_2}\mathbf{b},$$

a w konsekwencji dla $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathcal{N}_0$ nierówność

$$\mathbf{T}_{k_1}\mathbf{T}_{k_2}\ldots\mathbf{T}_{k_n}\left(\mathbf{T}_{l_2} \le \mathbf{T}_{l_1}\right)\mathbf{b} \ge \mathbf{0}.$$

Załącznik 3. Wybrane własności macierzy $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_S$, $\widetilde{\mathbf{T}}_0$, $\widetilde{\mathbf{T}}_1$

1. $\mathbf{E}_1 = \mathbf{J}\mathbf{e}_1^{\mathrm{T}}$.
2. $\mathbf{E}_s = \mathbf{J}\mathbf{e}_s^{\mathrm{T}}$.
3. $\widetilde{\mathbf{T}}_0 = \sum_{k=1}^{S-1} \mathbf{e}_k\mathbf{e}_{k+1}^{\mathrm{T}} + \mathbf{e}_s\mathbf{e}_s^{\mathrm{T}}$.
4. $\widetilde{\mathbf{T}}_1 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^{\mathrm{T}} + \sum_{k=2}^{s} \mathbf{e}_k\mathbf{e}_{k-1}^{\mathrm{T}}$.
5. $\mathbf{E}_1^n = \mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_s^n = \mathbf{E}_s$, $n \in \mathcal{N}_1$.
6. $\mathbf{P}\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1$, $\mathbf{P}\mathbf{E}_S = \mathbf{E}_S$ (**P** – dowolna macierz stochastyczna).
7. $\mathbf{E}_s\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_s$.
8. $\mathbf{E}_1^n\mathbf{b} = \mathbf{b}_1\mathbf{J}$, $\mathbf{E}_s^n\mathbf{b} = \mathbf{b}_s\mathbf{J}$, $n \in \mathcal{N}_1$.
9. $\widetilde{\mathbf{T}}_0\mathbf{b} = \sum_{k=1}^{s-1} \mathbf{b}_{k+1}\mathbf{e}_k + \mathbf{b}_s\mathbf{e}_s$.
10. $\widetilde{\mathbf{T}}_0^n = \begin{cases} \sum_{k=1}^{s-n-1} \mathbf{e}_k\mathbf{e}_{k+n}^{\mathrm{T}} + \sum_{k=s-n}^{s} \mathbf{e}_k\mathbf{e}_s^{\mathrm{T}}, & n < s-1, \\ \sum_{k=1}^{s} \mathbf{e}_k\mathbf{e}_s^{\mathrm{T}} = \mathbf{J}\mathbf{e}_s^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}_s, & n \ge s-1. \end{cases}$
11. $\widetilde{\mathbf{T}}_0^n\mathbf{b} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{s-n-1} \mathbf{b}_{k+n}\mathbf{e}_k + \mathbf{b}_s \sum_{k=s-n}^{s} \mathbf{e}_k, & n < s-1, \\ \mathbf{b}_s\mathbf{J}, & n \ge s-1. \end{cases}$
12. $\mathbf{E}_s\widetilde{\mathbf{T}}_0^n = \mathbf{E}_s$, $n \in \mathcal{N}_1$.

13. $\widetilde{\mathbf{T}}_1^n\mathbf{b} = \mathbf{b}_1\mathbf{e}_1 + \sum_{k=2}^{s}\mathbf{b}_{k-1}\mathbf{e}_k$.

14. $$\widetilde{\mathbf{T}}_1^n = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n+1}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_1^{\mathrm{T}} + \sum_{k=n+2}^{s}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_{k-n}^{\mathrm{T}}, & n < s-1, \\ \sum_{k=1}^{s}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_1^{\mathrm{T}} = \mathbf{J}\mathbf{e}_1^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}_1, & n \geq s-1. \end{cases}$$

15. $$\widetilde{\mathbf{T}}_1^n\mathbf{b} = \begin{cases} \mathbf{b}_1\sum_{k=1}^{n+1}\mathbf{e}_k + \sum_{k=n+2}^{s}\mathbf{b}_{k-n}\mathbf{e}_k, & n < s-1, \\ \mathbf{b}_1\mathbf{J}, & n \geq s-1. \end{cases}$$

16. $\mathbf{E}_1\widetilde{\mathbf{T}}_1^n = \mathbf{E}_1$, $n \in \mathcal{N}_1$.

BONUS-MALUS SYSTEM FAIR IN THE SENSE OF TRANSITIONS BETWEEN CLASSES

Summary

Definitions of *bonus-malus* system (BMS) proposed in literature are so extensive that they include also systems whose construction is not applicable in reality and which have no chances in competitive market of automobile insurance. The subject of this paper is *bonus-malus* system fair in the sense of transitions between classes ($BMSF_{CL}$), of whose definition excludes unrealistic BMS mentioned above.

The paper presents an ergodic Markov chain which is a $BMSF_{CL}$ model and which allows to analyze the properties of expected value of insurance premium according to the features characterizing an insured i.e. claims frequency, class in the initial year and insurance duration, and besides, parameters characterizing the system.

Furthermore, in the paper four „extreme" cases of $BMSF_{CL}$ are presented, in which „extreme" transition rules are valid, i.e. rules of maximum/minimum advance and maximum/minimum drop. These four systems allow to determine lowest and highest expected premium in any insurance year in any $BMSF_{CL}$ and an interval of expected values of premiums in real $BMSF_{CL}$, treated as a modification of those four systems.