PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU
Nr 60 — 2009
Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek

**Grażyna Trzpiot**

Akademia Ekonomiczna w Katowicach

# MODEL REGRESJI KWANTYLOWEJ A ESTYMACJA MODELU CZYNNIKOWEGO[1]

## 1. Wstęp

W niniejszym artykule przedstawiona zostanie aplikacja modelu regresji kwantylowej do estymacji modelu czynnikowego. Klasyczne metody estymacji były wcześniej przedmiotem badań w ujęciu makroekonomicznym. Metoda estymacji, która ma charakter odporny, pozwala na innowacyjną estymację modelu arbitrażu cenowego. W prezentowanym tekście przeanalizowane będą również możliwości implementacji metodologii rozkładów warunkowych kwantyli dla różnych benchmarków – indeksów sektorowych z GPW w Warszawie.

## 2. Regresja kwantylowa

Regresja kwantylowa jest metodą estymacji zależności między wartościami badanych zmiennych w odniesieniu do całego rozkładu prawdopodobieństwa [Koenker, Bassett 1978]. Zmienna objaśniana jest pewną funkcją zmiennej objaśniającej. Klasyczna regresja wykorzystuje jako funkcję zmiany wartości średnich zmiennej objaśniającej. Funkcja ta jest definiowana jako warunkowa wartość oczekiwana zmiennej $Y$ względem $X$: $E(Y|X)$. Analiza regresji daje niepełny obraz zależności między zmiennymi, zwłaszcza w sytuacjach, kiedy model jest heteroscedastyczny. Regresja kwantylowa pozwala na rozszerzenie liniowej estymacji zmian wartości dystrybuanty zmiennej objaśnianej. Estymacja ma semiparametryczny charakter, co oznacza, że nie przyjmujemy założeń o typie rozkładu dla losowego wektora reszt w modelu, przyjmowana jest jedynie parametryczna postać modelu w deterministycznej części modelowania.

Warunkowy kwantyl zapisany jako $Q_y(\tau|X)$ jest odwrotnością warunkowej dystrybuanty zmiennej objaśnianej $F_y^{-1}(\tau|X)$, gdzie $\tau \in [0, 1]$ oznacza kwantyl.

$$Q(\tau|x) = \alpha(\tau) + x\beta(\tau),\ 0 < \tau < 1. \tag{1}$$

[1] Praca zrealizowana w ramach grantu nr N111 003 32/0262.

Jeżeli $\beta(\tau)$ jest stałą $\beta$, to model kwantylowy redukuje się do modelu warunkowej średniej ze stałą wariancją błędu dopasowania:

$$E(Y|x) = \alpha + x\beta. \tag{2}$$

Jeżeli $\beta(\tau)$ zależy od $\tau$, to model opisuje zależności zmiennej $Y$ od $X$ dla różnych podzbiorów wartości rozkładu $X$. Klasyczny liniowy model można widzieć w tym kontekście jako

$$\int Q(\tau|x)d\tau = E(Y|x)\,. \tag{3}$$

Przy takiej interpretacji klasyczna regresja, dokonując powyższej agregacji, gubi informacje związane z wartościami kwantyli. Wiele różnych rozkładów kwantyli może być obserwowanych, np. dla $\beta_k = 0$. Z jednej strony $\beta_k = 0$ oznacza, że $x_k$ nie ma wpływu na rozkład $Y$, ale z drugiej strony to może też oznaczać, że ma istotny wpływ, kompensujący na wartości kwantyli $Y$ względem $X$.

## 3. Model regresji kwantylowej

Ogólny model regresji kwantylowej zapisujemy jako[2],

$$Q(\tau| x) = x^T\beta(\tau). \tag{4}$$

Ten model może być reprezentowany przez liniową hipotezę

$$\beta(\tau) = \alpha + \gamma F^{-1}{}_0(\tau), \tag{5}$$

dla $\alpha$ i $\gamma$ w $R^n$ oraz $F^{-1}{}_0$ jest jednowymiarową funkcją kwantyli, wszystkie współrzędne wektora współczynników regresji kwantylowej powinny być afiniczną funkcją tej samej jednowymiarowej funkcji kwantyli $F^{-1}{}_0$. Taki model można odnieść do liniowego heteroscedastycznego modelu

$$y_i = x_i^T\alpha + (x_i^T\gamma)u_i, \tag{6}$$

z resztami $\{u_i\}$ niezależnymi i zgodnymi z rozkładem $F_0$.

Parametry estymujemy dla ustalonego kwantyla $\tau \in [0, 1]$. Parametry zmieniają się zgodnie z przyjętymi wartościami $\tau$ wskazując na efekt wpływu danego kwantyla rzędu $\tau$- nieznanego rozkładu błędu modelu. Parametry estymowanego liniowego modelu regresji kwantylowej mają interpretację analogiczną do klasycznej regresji. Wyrażają poziom warunkowych zmian efektu wpływu kwantyla na pozostałe zmienne w modelu.

Najprostsza droga od estymacji regresji kwantylowej pozwala na obserwację zmian zmiennej objaśniającej ($X$) na poziom tendencji centralnej, wariancji oraz kształtu dystrybuanty rozkładu zmiennej objaśnianej ($Y$) [Koenker, Machado 1999]. Jeżeli estymujemy jedynie zmiany poziomu średniego rozkładu zmiennej

[2] Przyjmujemy liniową funkcję $X$ względem parametrów $Q_y(\tau|X) = \beta_0(\tau)X_0 + \beta_1(\tau)X_1 + \ldots + \beta_n(\tau)X_n$.

objaśnianej ($Y$), to mamy homoscedastyczny model regresji związany z modelem w metodzie najmniejszych kwadratów. Każda zmiana wartości estymatorów regresji kwantylowej wynika z wariancji w próbie. Estymacja poziomu zmian średniej w metodzie najmniejszych kwadratów jest również estymacją parametrów, tak jak w regresji kwantylowej. Estymacja wyrazu wolnego $b_0(\tau)$ w modelu regresji kwantylowej jest dla parametrycznego kwantyla $\beta_0(\tau)$ z $Y$, kiedy $X_1, X_2,\ldots,X_n = 0$, i zmienia się zgodnie z rzędem kwantyla oraz ze średnią.

Podstawowym założeniem modelu liniowej regresji kwantylowej przeniesionej do opisu rynku jest zależność $r_t = x_t^{'}\beta_\alpha + \mu_{t,\alpha}$. Zauważmy, że rozkład błędu nie jest wyspecyfikowany. Jedynym założeniem modelu jest postać warunkowej funkcji rozkładu kwantyla zapisana następująco $Q_\alpha(r_t|x_t) = x_t^{'}\beta_\alpha$ (czyli kwantyl stopy zwrotu portfela $r_t$ jest liniową funkcją ekspozycji stylu) oraz $Q_\alpha(\mu_{t,\alpha}|x_t) = 0$ [Engle, Manganelli 2004].

## 4. Model czynnikowy

Model czynnikowy jest rozszerzonym modelem równowagi rynkowej, może stanowić alternatywne podejście do analizy stopy zwrotu i ryzyka oraz charakteryzuje się mniej zobowiązującymi założeniami niż model CAPM.

Bazowym równaniem teorii arbitrażu cenowego jest model wieloindeksowy. Model wieloindeksowy, będący rozszerzeniem modelu jednowskaźnikowego, uwzględnia również wpływ czynników pozagiełdowych. Model wielowskaźnikowy ma postać liniową i określa zależność między stopą zysku danej akcji a zmiennymi ją objaśniającymi w następujący sposób:

$$R_i = \alpha_i + \beta_{i1}X_1 + \beta_{i2}X_2 + \ldots + \beta_{ik}X_k + \xi_i\,, \tag{7}$$

gdzie: $R_i$ – stopa zwrotu $i$-tej akcji;
$X_j$ – $j$-ty czynnik wpływający na stopę zysku $i$-tej akcji ($j$ = 1, 2,..., k);
$\beta_{ij}$ – parametr równania opisujący stopień reagowania stopy zysku $i$-tej akcji na zmiany $j$-tego czynnika;
$\alpha_i$ – wyraz wolny (stały czynnik) równania;
$\xi_i$ – składnik losowy równania.

Jest to model regresji wielorakiej opisujący zależność stopy zwrotu akcji lub portfela od czynników makroekonomicznych. Można stwierdzić, że zmienność składnika losowego odzwierciedla ryzyko specyficzne związane z danym papierem wartościowym. W modelu nie precyzuje się liczby czynników mających wpływ na stopę zwrotu z papieru wartościowego, teoretycznie liczba tych czynników jest nieograniczona.

W równaniu modelu indeksowego ważną rolę odgrywają współczynniki wrażliwości, których interpretacja jest podobna jak interpretacja współczynnika beta.

Współczynniki wrażliwości określają, jak zareaguje stopa zwrotu akcji na jednostkową zmianę czynnika, gdy pozostałe czynniki nie zmieniają się. Współczynniki wrażliwości wyznacza się również dla portfela.

## 5. Implementacja modelu regresji kwantylowej w estymacji modelu czynnikowego

Przedstawimy implementację modelu regresji kwantylowej w estymacji modelu czynnikowego dla dwóch benchmarków: mWIG40 oraz WIG20. Wskazanie źródeł ryzyka systematycznego jest punktem wyjścia do budowy i empirycznej weryfikacji modelu arbitrażu cenowego na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Procedura doboru zmiennych objaśniających do modelu jest zadaniem dwuetapowym. W pierwszym etapie wybieramy takie czynniki, które istotnie wpływają na kształtowanie się zmiennej objaśnianej. W drugim etapie przeprowadzamy się redukcję zbioru pierwotnych zmiennych objaśniających, biorąc pod uwagę kryteria formalno-statystyczne.

## 6. Estymacja modelu dla mWIG40

Przedmiotem analizy jest szereg czasowy dziennych stóp zwrotu indeksu mWIG40 z okresu lipiec 2006 r.-czerwiec 2007 r. Indeks mWIG40 opisuje stan koniunktury średnich spółek. W skład portfela tego indeksu wchodzą akcje 40 spółek, przy czym nie uczestniczą w nim fundusze inwestycyjne i spółki zagraniczne. W badanym okresie na giełdzie obserwowany był prawie systematyczny wzrost wartości indeksu.

Najistotniejszą branżą indeksu mWIG40 są banki. Ponadto indeks ten charakteryzuje silna dywersyfikacja sektorowa przy dużym udziale sektora budowlanego. Spory jest również udział spółek surowcowych. Rynek akcji zależy od cen surowców i jest szczególnie powiązany z cenami złota i ropy. Dla polskiej gospodarki surowcem strategicznym jest także miedź. Znaczący udział we wzrostach indeksów warszawskiej giełdy mają zwyżki kursów spółek działających w sektorze surowców. Dużą korelację z cenami na rynku surowców wykazują również spółki zajmujące się handlem produktami wykonanymi z tych materiałów. Zaproponowano następujący zbiór zmiennych objaśniających:

1. Indeks PX [pkt].
2. Indeks BUX [pkt].
3. Indeks Stockholm Genral [pkt].
4. Indeks RTS [pkt].
5. Indeks FTSE-100 [pkt].
6. Indeks WIG20 [pkt].
7. Kurs euro [EUR/PLN].
8. Kurs franka szwajcarskiego [CHF/PLN].
9. Stopa procentowa WIBID [%].
10. Stopa procentowa WIBOR [%].

11. Cena złota [USD/uncja].
12. Cena miedzi [USD/tona].
13. Indeks produkcji przemysłowej [%].
14. Wskaźnik koniunktury w budownictwie [pkt]. Przyjmuje wartości od –100 do 100 pkt.

Brakujące obserwacje w szeregach czasowych zostały zastąpione oszacowaniami uzyskanymi za pomocą interpolacji liniowej. Szeregi czasowe analizowanych zmiennych zostały przekształcone w szeregi przyrostów względnych łańcuchowych.

W celu zredukowania liczby badanych zmiennych wykorzystano analizę czynnikową. Po zweryfikowaniu założeń liczbę czynników głównych wyodrębniono, stosując kryterium osypiska i wyszczególniono pięć czynników. W tabeli 1 przedstawiono macierz ładunków czynnikowych uzyskaną za pomocą metody głównych składowych po rotacji *varimax*. Otrzymano pięć czynników. Zaproponowane zmienne objaśniające można zatem podzielić na pięć grup. Pierwszą z nich tworzą krajowe i zagraniczne indeksy giełdowe. Drugi zbiór stanowią stopy procentowe. Trzecia grupa to kursy walutowe. Czwarty zbiór tworzą surowce. Piątym agregatem są wskaźniki makroekonomiczne. Przechodząc do drugiego kroku estymacji modelu dla zmiennej objaśnianej, którą będą warunkowe kwantyle indeksu mWIG40, jako zmienne regresyjne wybrano te zmienne, które miały największe ładunki przy odpowiednich czynnikach: indeks FTSE-100, stopa WIBID, kurs euro, cena złota i indeks produkcji przemysłowej.

Tabela 1. Macierz rotowanych składowych

| Wyszczególnienie | Składowa | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *FTSE100* | **0,859** | -0,030 | -0,081 | -0,036 | -0,023 |
| *Stockholm* | **0,825** | -0,049 | -0,081 | -0,092 | 0,043 |
| *PX* | **0,766** | -0,113 | -0,174 | 0,091 | -0,059 |
| *WIG20* | **0,727** | -0,037 | -0,107 | 0,293 | 0,039 |
| *BUX* | **0,705** | 0,118 | -0,056 | 0,101 | 0,025 |
| *RTS* | **0,633** | -0,051 | -0,195 | 0,398 | 0,125 |
| *WIBID* | -0,025 | **0,942** | 0,142 | 0,021 | 0,015 |
| *WIBOR* | -0,046 | **0,940** | 0,138 | 0,014 | 0,005 |
| *EUR* | -0,173 | 0,166 | **0,933** | -0,121 | 0,034 |
| *CHF* | -0,246 | 0,108 | **0,927** | -0,093 | 0,009 |
| *Złoto* | 0,150 | -0,075 | -0,037 | **0,845** | 0,024 |
| *Miedź* | 0,067 | 0,107 | -0,123 | **0,782** | -0,124 |
| *P_przem* | 0,038 | 0,287 | -0,101 | -0,131 | **0,759** |
| *Kon_bud* | -0,021 | 0,371 | -0,173 | -0,049 | **-0,672** |

Źródło: opracowanie własne.

Model wyjściowy ma postać:

$$mWIG40 = \beta_0 + \beta_1 FTSE100 + \beta_2 WIBID + \beta_3 EUR + \beta_4 Zloto + \beta_5 P\_przem + \xi. \quad (8)$$

Procedura szacowania nieznanych parametrów strukturalnych modelu została przeprowadzona za pomocą regresji kwantylowej dla wybranych poziomów kwantyli 0,01; 0,02 oraz 0,05 (typowych poziomów tolerancji w szacowaniu VaR) (tab. 2).

Tabela 2. Parametry strukturalne modelu regresji kwantylowej dla 0,01

| $N = 258$ | Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: mWIG40_01 <br> $R$ = 0,93020303 $R$^2 = 0,86527768 Skorygowane $R$2 = 0,86260461 <br> $F$(5,252) = 323,70 $p$ < 0,0000 Błąd standardowy estymacji: 0,00281 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | BETA | błąd standardowy | B | błąd standardowy | $t$(252) | poziom $p$ |
| Wyraz wolny | | | **0,023747** | **0,006632** | **3,58077** | **0,000411** |
| *FTSE100* | **0,545314** | **0,026594** | **2,439894** | **0,118989** | **20,50517** | **0,000000** |
| *WIBID* | 0,010792 | 0,060046 | 0,141245 | 0,785874 | 0,17973 | 0,857510 |
| *EUR* | -0,024995 | 0,072697 | -0,126668 | 0,368407 | -0,34383 | 0,731264 |
| *Złoto* | -0,028984 | 0,030653 | -0,033762 | 0,035706 | -0,94554 | 0,345291 |
| *P_przem* | **0,614302** | **0,045800** | **0,290035** | **0,021624** | **13,41261** | **0,000000** |

Źródło: opracowanie własne.

Istotny wpływ na zmienną objaśnianą mWIG40$_{0,01}$wywierają zmienne: *FTSE100* i *P_przem*. Parametry strukturalne występujące przy pozostałych zmiennych objaśniających są statystycznie nieistotnie. Oszacowany model APT będzie miał postać:

$$mWIG40_{0,01} = 0{,}024 + \underset{(0{,}112)}{2{,}44}FTSE100 - \underset{(0{,}022)}{0{,}290}\,P\_przem + e_t.$$

Kwantyl stopy zwrotu indeksu mWIG40 był kształtowany przez zmiany poziomów światowych indeksów zagranicznych. Ponadto dochodowość z inwestycji w akcje średnich spółek giełdowych jest ściśle związana z aktywnością gospodarczą. Interpretując współczynniki beta, można więc sądzić, że zmienna *P_przem* w największym stopniu wpływa na kształtowanie się zmiennej zależnej. Przechodząc do oceny statystycznej istotności rezultatów analizy regresji oraz stopnia dopasowania modelu do danych empirycznych, można stwierdzić, że dany model wyjaśnia 86,53% zmienności zmiennej zależnej. Weryfikacje hipotezy o istotności regresji jako całości przeprowadza się za pomocą testu *F*. Ponieważ należy odrzucić hipotezę zerową na rzecz hipotezy alternatywnej, stwierdzamy, że przynajmniej jeden z parametrów modelu jest istotny.

Oszacowany model będzie miał postać dla 0,02 (tab. 3):

$$mWIG40_{0,02} = 0{,}009 + \underset{(0{,}107)}{1{,}888}FTSE100 - \underset{(0{,}166)}{0{,}907}EUR + \underset{(0{,}028)}{0{,}136}Złoto - \underset{(0{,}013)}{0{,}239}P\_przem + e_t.$$

Zmienna *P_przem* w największym stopniu wpływa na kształtowanie się zmiennej zależnej. Współczynnik determinacji informuje, że dany model wyjaśnia 87,21% zmienności zmiennej zależnej. Istotność regresji jako całości potwierdzono za pomocą testu *F*.

Tabela 3. Parametry strukturalne modelu regresji kwantylowej dla 0,02

| $N$ = 258 | Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: mWIG40_02<br>$R$ = 0,93386945 $R$^2 = 0,87211215 Skorygowane $R$2 = 0,86957469<br>$F$(5,252) = 343,70 $p$ < 0,0000 Błąd standardowy estymacji: 0,00195 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | BETA | błąd standardowy | B | błąd standardowy | $t$(252) | poziom $p$ |
| Wyraz wolny | | | **0,008858** | **0,002332** | **3,79769** | **0,000183** |
| *FTSE100* | **0,568737** | **0,032384** | **1,888203** | **0,107515** | **17,56218** | **0,000000** |
| *WIBID* | -0,014635 | 0,046188 | -0,049841 | 0,157303 | -0,31684 | 0,751624 |
| *EUR* | **-0,244212** | **0,044681** | **-0,906897** | **0,165925** | **-5,46569** | **0,000000** |
| *Złoto* | **0,136282** | **0,027656** | **0,135817** | **0,027562** | **4,92775** | **0,000002** |
| *P_przem* | **0,654322** | **0,036455** | **0,238948** | **0,013313** | **17,94889** | **0,000000** |

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4. Parametry strukturalne modelu regresji kwantylowej dla 0,05

| $N$ = 258 | Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: mWIG40_05<br>$R$ = 0,87930550 $R$^2 = 0,77317817 Skorygowane $R$2 = 0,76867773<br>$F$(5,252) = 171,80 $p$<0,0000 Błąd standardowy estymacji: 0,00172 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | BETA | błąd standardowy | B | błąd standardowy | $t$(252) | poziom $p$ |
| Wyraz wolny | | | **0,004957** | **0,001853** | **2,67489** | **0,007965** |
| *FTSE100* | **0,503519** | **0,037163** | **1,824001** | **0,134624** | **13,54883** | **0,000000** |
| *WIBID* | **-0,491159** | **0,126542** | **-0,622692** | **0,160430** | **-3,88139** | **0,000133** |
| *EUR* | **-0,187093** | **0,092543** | **-0,422150** | **0,208812** | **-2,02167** | **0,044267** |
| *Złoto* | **0,105937** | **0,033108** | **0,101581** | **0,031746** | **3,19978** | **0,001552** |
| *P_przem* | **0,371988** | **0,077985** | **0,111197** | **0,023312** | **4,77001** | **0,000003** |

Źródło: opracowanie własne.

Przechodząc do wyższego rzędu kwantyla, uzyskujemy oszacowanie:

$$mWIG40_{0,05} = 0,005 + \underset{(0,134)}{1,824}FTSE100 - \underset{(0,160)}{0,623}WIBID - \underset{(0,208)}{0,422}EUR + \underset{(0,032)}{0,102}Złoto - \underset{(0,023)}{0,111}P\_przem + e_t$$

Model dla kwantyla rzędu 0,05 jako zmienną o największej sile wpływu ma zmienną *FTSE100* wyjaśnia 77,31% zmienności zmiennej zależnej. Istotność regresji jako całości potwierdza test *F*. Przedstawione modele mają wysoki stopień dopasowania do danych empirycznych.

## 7. Estymacja modelu dla mWIG40

Analizie został poddany szereg czasowy stóp zwrotu indeksu WIG 20 notowanego na warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych. Przedmiotem analizy są dzienne obserwacje z okresu lipiec 2006-czerwiec 2007. Pierwszą grupę analizowanych czynników stanowią zmienne opisujące klimat inwestycyjny. W skład drugiej grupy zmiennych, kształtujących stopy zwrotu WIG 20 wchodzą kursy walut. Jest to grupa zamiennych wpływająca na wartość fundamentalną spółek wchodzących w skład analizowanego indeksu. Na kształtowanie się kosztów działalności operacyjnej przedsiębiorstw znaczny wpływ mają ceny surowców, których wzrost powoduje zwiększenie takich kosztów. Zbiór potencjalnych zmiennych objaśniających tworzą następujące zmienne: *S&P 500, FTSE 100, CAC 40, DAX Xetra, PX, BUX, OMX S30, dolar amerykański* (*USD*)*, euro* (*EUR*)*, funt brytyjski* (*GBP*)*, frank szwajcarski* (*CHF*)*, miedź, złoto, ropa naftowa* (*R_Brent*) oraz *energia elektryczna* (*IRDN*).

W celu zredukowania liczby badanych zmiennych wykorzystano analizę czynnikową. Po zweryfikowaniu założeń liczbę czynników głównych wyodrębniono, stosując kryterium osypiska i wyodrębniono cztery czynniki. W tabeli 5 przedstawiono macierz ładunków czynnikowych uzyskaną za pomocą metody głównych składowych po rotacji *varimax*. Otrzymano cztery czynniki. Przechodząc do drugiego kroku estymacji modelu dla zmiennej objaśnianej, którą będą warunkowe kwantyle indeksu mWIG40, jako zmienne regresyjne wybrano zmienne, które miały największe ładunki przy odpowiednich czynnikach: *DAX, EUR, Złoto i IRDN.*

Model wyjściowy ma postać:

$$WIG20 = \beta_0 + \beta_1 DAX + \beta_2 EUR + \beta_3 Zloto + \beta_4 IRDN + \xi \,. \tag{9}$$

Tabela 5. Macierz rotowanych składowych

| Zmienna | Składowa | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *DAX* | **0,937** | -0,115 | -0,011 | -0,023 |
| *CAC40* | **0,932** | -0,115 | -0,002 | -0,014 |
| *FTSE100* | **0,912** | -0,090 | 0,082 | 0,000 |
| *OMXS30* | **0,875** | -0,075 | 0,003 | -0,061 |
| *PX* | **0,660** | -0,211 | 0,255 | 0,061 |
| *SP500* | **0,635** | 0,026 | -0,223 | 0,067 |
| *BUX* | **0,548** | -0,124 | 0,295 | 0,098 |
| *EUR* | -0,146 | **0,943** | -0,079 | 0,015 |
| *GBP* | -0,024 | **0,889** | -0,033 | 0,025 |
| *CHF* | -0,252 | **0,888** | -0,051 | -0,003 |
| *USD* | -0,069 | **0,829** | -0,242 | -0,081 |
| *Złoto* | 0,084 | -0,134 | **0,802** | -0,078 |
| *Miedź* | 0,001 | -0,118 | **0,774** | 0,081 |
| *IRDN* | 0,049 | -0,125 | -0,219 | **0,749** |
| *R_Brent* | -0,002 | 0,089 | 0,218 | **0,665** |

Źródło: opracowanie własne.

Procedura szacowania nieznanych parametrów strukturalnych modelu została, jak poprzednio, przeprowadzona za pomocą regresji kwantylowej dla wybranych poziomów kwantyli 0,01; 0,02 oraz 0,05 (typowych poziomów tolerancji w szacowaniu VaR); zob. tab. 6-8.

Tabela 6. Parametry strukturalne modelu regresji kwantylowej dla 0,01

| $N = 256$ | Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: WIG20_01<br>$R$ = 0,77179914 $R$^2 = 0,59567392 Skorygowane $R2$ = 0,58923047<br>$F$(4,251) = 92,447 $p$ <0,0000 Błąd standardowy estymacji: 0,00232 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | BETA | błąd standardowy | B | błąd standardowy | t(251) | poziom p |
| Wyraz wolny | | | **-0,010825** | **0,003368** | **-3,21412** | **0,001480** |
| DAX | **0,194789** | **0,041687** | **0,813022** | **0,173996** | **4,67265** | **0,000005** |
| EUR | **0,690021** | **0,073568** | **1,220866** | **0,130166** | **9,37933** | **0,000000** |
| Złoto | 0,005799 | 0,076688 | 0,003286 | 0,043460 | 0,07562 | 0,939782 |
| IRDN | **-0,247348** | **0,052036** | **-0,036857** | **0,007754** | **-4,75343** | **0,000003** |

Źródło: opracowanie własne.

Istotny wpływ na zmienną objaśnianą wywierają trzy zmienne. Oszacowany model będzie miał postać:

$$WIG20_{0,01} = -\,0{,}012 + \underset{(0{,}174)}{0{,}813}DAX + \underset{(0{,}13)}{1{,}221}\,EUR - \underset{(0{,}008)}{0{,}037}IRDN + e_t .$$

Kwantyl stopy zwrotu indeksu mWIG40 są kształtowany jest przez zmiany poziomów światowych indeksów zagranicznych, poziom kursu euro oraz cen energii. Zmienna *EUR* w największym stopniu wpływa na kształtowanie się zmiennej zależnej. Przechodząc do oceny statystycznej istotności rezultatów analizy regresji oraz stopnia dopasowania modelu do danych empirycznych, można stwierdzić, że dany model wyjaśnia 59,56% zmienności zmiennej zależnej. Weryfikacje hipotezy o istotności regresji jako całości przeprowadza się za pomocą testu *F*. Można zatem twierdzić, że przynajmniej jeden z parametrów zbudowanego modelu jest istotny.

Tabela 7. Parametry strukturalne modelu regresji kwantylowej dla 0,02

| $N = 256$ | Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: WIG20_02<br>$R$ = 0,91248199 R^2 = 0,83262337 Skorygowane $R2$ = 0,82995602<br>$F$(4,251) = 312,15 $p$ < 0,0000 Błąd standardowy estymacji: 0,00139 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | BETA | błąd standardowy | B | błąd standardowy | $t$(251) | poziom $p$ |
| Wyraz wolny | | | **0,071127** | **0,004094** | **17,37188** | **0,000000** |
| *DAX* | **0,867302** | **0,036644** | **5,315665** | **0,224591** | **23,66824** | **0,000000** |
| *EUR* | **0,249688** | **0,039271** | **0,492450** | **0,077452** | **6,35814** | **0,000000** |
| *Złoto* | **-0,226126** | **0,043711** | **-0,143808** | **0,027799** | **-5,17321** | **0,000000** |
| *IRDN* | **0,225625** | **0,039448** | **0,048246** | **0,008435** | **5,71962** | **0,000000** |

Źródło: opracowanie własne .

Wszystkie zmienne okazały się statystycznie istotne. Oszacowany model dla 0,02, będzie miał postać:

$$WIG20_{0,02} = 0{,}0711 + \underset{(0{,}225)}{5{,}316}DAX + \underset{(0{,}077)}{0{,}494}EUR - \underset{(0{,}028)}{0{,}144}Złoto + \underset{(0{,}008)}{0{,}048}IRDN + e_t .$$

Zmienna *DAX* w największym stopniu wpływa na kształtowanie kwantyla rzędu 0,02 WIG20. Współczynnik determinacji informuje, że dany model wyjaśnia 83,26% zmienności zmiennej zależnej. Istotność regresji jako całości potwierdzono za pomocą testu *F*.

Tabela 8. Parametry strukturalne modelu regresji kwantylowej dla 0,05

| $N = 256$ | Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: WIG20_05<br>$R = 0{,}81950978$ $R$^2 = 0,67159628 Skorygowane $R2 = 0{,}66636275$<br>$F(4{,}251) = 128{,}33$ $p<0{,}0000$ Błąd standardowy estymacji: 0,00206 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | BETA | błąd standardowy | B | błąd standardowy | $t(251)$ | poziom $p$ |
| Wyraz wolny | | | 0,001401 | 0,002467 | 0,56812 | 0,570464 |
| *DAX* | **0,598419** | **0,063657** | **1,239912** | **0,131896** | **9,40067** | **0,000000** |
| *EUR* | **0,366384** | **0,052127** | **0,913804** | **0,130010** | **7,02870** | **0,000000** |
| *Złoto* | **-0,317065** | **0,043833** | **-0,303952** | **0,042020** | **-7,23354** | **0,000000** |
| *IRDN* | **0,236993** | **0,055311** | **0,078552** | **0,018333** | **4,28473** | **0,000026** |

Źródło: opracowanie własne.

W kolejnym modelu dla kwantyla rzędu 0,05 również zmienne okazały się statystycznie istotne. Oszacowany model dla 0,02 będzie miał postać:

$$\underset{}{WIG20_{0,05}} = 0{,}001 + \underset{(0,131)}{1{,}24DAX} + \underset{(0,13)}{0{,}914EUR} - \underset{(0,042)}{0{,}303Złoto} + \underset{(0,018)}{0{,}078IRDN} + e_t$$

Zmienna *DAX* w największym stopniu wpływa na kształtowanie kwantyla rzędu 0,02 WIG20. Mamy słabszą weryfikację empiryczną; dany model wyjaśnia 67,16% zmienności zmiennej zależnej oraz mniejsze błędy szacunku wartości parametrów niż w poprzednim modelu. Test *F* weryfikuje pozytywnie łączny wpływ badanych zmiennych na kwantyl indeksu $WIG20_{0,05}$.

## 8. Podsumowanie

Proponowana metoda estymacji opisana szczegółowo w pracach [13; 15] nie pozwala na bezpośrednie porównanie z klasycznymi etapami szacowania modeli ekonometrycznych. W pracy pojęto implementację nowej metody estymacji odnoszącej się do warunkowych rozkładów statystyk pozycyjnych stopy zwrotu oraz wybranych czynników makroekonomicznych. Metoda ta zyskuje na znaczeniu w badaniach światowych oraz pojawiają się jej kolejne modyfikacje [8]. Praca nie ma charakteru badań porównawczych, celem artykułu było wskazanie odmiennej metodologii oraz jej przydatności w kształtowaniu ocen parametrów modeli odmiennych od uśrednianych w odniesieniu do różnych ocen ryzyka wyrażanych poziomem istotności przenoszonych na wartość warunkowego wielowymiarowego kwantyla.

# Literatura

[1] Engle R., Manganelli F.S., *CAViaR: conditional autoregressive value at risk by regression quantiles*, "Journal of Business and Economic Statistics" 2004, 22, 367-381.
[2] Łuniewska M., Tarczyński W., *Metody analizy porównawczej na rynku kapitałowym*, PWN, Warszawa 2006.
[3] Koenker, R., Bassett G., *Regression quantiles,* "Econometrica" 1978 no 46, 33-50.
[4] Koenker R., Hallok K.F., *Quantile regression*, "Journal of Economic Perspective" 2001 no 15, 4, 143-156.
[5] Koenker, R. Portnoy S., *Quantile regression*, Working Paper 97-0100, University of Illinois at Urbana-Champaign 1997.
[6] Koenker R., Machado G., *Goodness of fit and related inference processes for quantile regression*, "Journal of American Statistical Association" 1999 no 94, 1296-1310.
[7] Tarczyński W., Łuniewska M., *Dywersyfikacja ryzyka na polskim rynku kapitałowym*, Placet, Warszawa 2004.
[8] Taylor J.W., *Using exponentially weighted quantile regression to estimate value at risk and expected shortfall,* "Journal of Financial Econometrics", advance access doi:10.1093/jjfinec/ nbn007, 2008.
[9] Trzpiot G., *Analiza portfelowa z wykorzystaniem metody momentów i dominacji stochastycznych – podejście kwantylowe*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 990, AE, Wrocław 2003, 216-224.
[10] Trzpiot G., *Kwantylowe miary ryzyka*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1022, AE, Wrocław 2004, 420-430.
[11] Trzpiot G., *O nieparametrycznych metodach estymacji VaR i ETL*, [w:] *Modelowanie preferencji a ryzyko'05*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach, AE, Katowice 2006, 229-238.
[12] Trzpiot G., Jaguś F., *Koncepcja PCVaR w analizie ryzyka inwestycji portfelowej na GPW w Warszawie*, [w:] *Modelowanie preferencji a ryzyko'05*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach, AE, Katowice 2006, 239-250.
[13] Trzpiot G., *Regresja kwantylowa a estymacja VaR*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1176, AE, Wrocław 2007, 465- 471.
[14] Trzpiot G., *Implementacja metodologii regresji kwantylowej w estymacji VaR*, Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania nr 9, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 2008, 316-323.
[15] Trzpiot G., *Estimation method for quantile regression,* Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach, AE, Katowice 2009 (w druku).

## QUANTILE REGRESSION MODEL AND THE ESTIMATION OF MULTIFACTOR MODEL

### Summary

In this paper the author presents an application of quantile regression model in the estimation of multifactor model. Classical regression models from the macroeconomic perspective were considered in our research in the past. The estimation method which is robust allows to estimate the APT model which is well known. In empirical analysis we try to implement the quantile regression for different benchmark from the Warsaw Stock Exchange.