PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 65
Ekonometria 25 2009

Magdalena Homa
Uniwersytet Wrocławski

WPŁYW BAZOWEJ STOPY PROCENTOWEJ NA ROZKŁAD PROCESU ZAGREGOWANEJ WYPŁATY W UBEZPIECZENIACH NA ŻYCIE

Streszczenie: Działalność ubezpieczeniowa związana jest z występowaniem ryzyka i obejmuje m.in. wycenę portfela i analizę jego szkodowości. Firma ubezpieczeniowa dokonuje wyceny ubezpieczeń przy tzw. bazowej stopie oprocentowania. Podstawą prawidłowej wyceny jest zbadanie procesu zagregowanej wypłaty, który obejmuje wszystkie świadczenia wynikające z zawartych umów. W pracy zbadano wpływ stopy procentowej na rozkład procesu wypłat. Aby ten cel osiągnąć, w artykule określono rozkład skumulowanych świadczeń w indywidualnym ubezpieczeniu i przedstawiono postać rekurencyjną dystrybuanty procesu skumulowanych świadczeń (zagregowanej wypłaty). Znajomość rozkładu zagregowanej wypłaty z portfela pozwala ubezpieczycielowi dokonać poprawnej wyceny ubezpieczenia i oceny jego ryzykowności w zależności od przyjętej stopy procentowej.

Słowa kluczowe: ubezpieczenia na życie, wycena ubezpieczeń, rozkład skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu indywidualnym.

1. Wstęp

Działalność ubezpieczeniowa jest związana z występowaniem ryzyka i obejmuje m.in. wycenę portfela i analizę jego szkodowości. Firma ubezpieczeniowa dokonuje wyceny ubezpieczeń przy tak zwanej bazowej stopie oprocentowania. Podstawą prawidłowej wyceny jest zbadanie procesu zagregowanej wypłaty (skumulowanych roszczeń) obejmującego wszystkie świadczenia wynikające z zawartych umów. Istotny krok w kierunku urealniania modeli stanowi analiza procesów, w których uwzględnia się również oddziaływanie czynników makroekonomicznych, takich jak np. stopy procentowe. W pracy określono dystrybuantę zagregowanej wypłaty oraz zbadano wpływ stopy procentowej na rozkład procesu zagregowanej wypłaty. Znajomość rozkładu zagregowanej wypłaty z portfela pozwoli ubezpieczycielowi dokonać poprawnej wyceny ubezpieczenia i oceny jego „ryzykowności" w zależności od przyjętej stopy procentowej.

2. Rozkład procesu skumulowanej wypłaty w indywidualnym ubezpieczeniu

W pracy analizą objęto ubezpieczenia na życie z wykupionymi opcjami dodatkowymi, tzw. ubezpieczenia wieloopcyjne. Do opisu tego typu ubezpieczeń wykorzystano model opisujący dynamiczny charakter aktywizacji możliwych opcji polisy oparty na procesach Markowa (por. [Bowers i in. 1986; Habermann, Pitaco 1999; Hoem 1972]). Zatem do opisu zmian aktywnych opcji ubezpieczenia (stanów) wykorzystywany jest proces stochastyczny $\{X(t); t \in \mathrm{T}\}$ będący procesem Markowa i przyjmujący wartości ze skończonej przestrzeni stanów S.

Procesy reprezentujące wielkości wypłaconych świadczeń w tego typu ubezpieczeniu oznaczono jako: $\{C_j(t)\}$, $\{D_j(t)\}$ oraz $\{C_{jk}(t)\}$. Są to odpowiednio: $C_j(T)$ − wypłacane w okresie T renty, $D_j(T)$ − jednorazowe świadczenia wypłacane z tytułu dożycia określonego wieku, $C_{jk}(T)$ − jednorazowe świadczenia wypłacane przez ubezpieczyciela z tytułu zajścia określonego zdarzenia losowego w okresie czasu T.

Wyceny strumienia finansowego $B(T)$, czyli funkcja zaktualizowanych (na moment t) wartości strumienia płatności dokonanych w okresie T, określona jest następującym wzorem (por. [Hoem, Aalen 1978]):

$$ZB_t(T) = \frac{1}{\upsilon(t)} \int \upsilon(\tau) dB(\tau). \tag{1}$$

Według wzoru (1) wycenia się poszczególne strumienie finansowe związane z ubezpieczeniem. Innymi słowy, wyznacza się zaktualizowaną wartość wypłacanych rent $C_j(T)$, a także jednorazowych świadczeń wypłacanych z tytułu dożycia określonego wieku $D_j(T)$ i z tytułu zajścia określonego zdarzenia losowego $C_{jk}(T)$. Stanowią one podstawę wyceny strumienia finansowego skumulowanych świadczeń $W_t(T)$.

Zaktualizowana wartość skumulowanych świadczeń zgodnie ze wzorem (1) jest procesem losowym o następującej postaci:

$$\begin{aligned} ZW_t(T) &= \int_T \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(t)} dW(\tau) = \\ &= \sum_j \int_T \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(t)} I_j(\tau) d\big(C_j(\tau) + D_j(\tau)\big) + \sum_j \sum_{k \neq j} \int_T \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(t)} c_{jk}(\tau) dN_{jk}(\tau) = \\ &= \underbrace{\sum_j \int_T \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(t)} I_j(\tau) dW_j(\tau)}_{\text{świadczenia związane ze stanem } j} + \underbrace{\sum_j \sum_{k \neq j} \int_T \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(t)} c_{jk}(\tau) dN_{jk}(\tau)}_{\text{świadczenia związane z przejściem ze stanu } j \text{ do } k} \end{aligned} \tag{3}$$

gdzie $I_j(t) = I_{\{X(t)=j\}}$.

Problem rozkładu przepływów pieniężnych w ubezpieczeniach podejmowało wielu autorów (por. [Hoem, Aalen 1978; Norberg 1996; Norberg 1995]). Adaptując uzyskane przez nich wyniki, w pracy określono rozkład skumulowanych świadczeń w indywidualnym ubezpieczeniu i przedstawiono postać rekurencyjną dystrybuanty procesu skumulowanych świadczeń. Dystrybuanta rozkładu przyszłych skumulowanych świadczeń w indywidualnym ubezpieczeniu zdefiniowana jest następująco:

$$F_{W,t}(u) = P_j^W(t,u) = P\left[ZW_t\ (t,n) \le u \mid X(t) = j\right] = \\ = P\left[\int_t^n \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(t)} dW(\tau) \le u \mid X(t) = j\right]. \tag{4}$$

Jeśli przedstawia się zaktualizowaną wartość skumulowanych świadczeń określoną wzorem (3), to wzór (4) przyjmuje postać:

$$P_j^W(t,u) = \\ = P\left[\left(\sum_j \int_t^n \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(t)} I_j(\tau) dW_j(\tau) + \sum_j \sum_{k \ne j} \int_t^n \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(t)} c_{jk}(\tau) dN_{jk}(\tau)\right) \le u \mid X(t) = j\right]. \tag{5}$$

To, jakie świadczenia ubezpieczyciel wypłaci w przyszłości, determinuje określona realizacja procesu $\{X(t), t \ge 0\}$. Wiadomo, że mogą wystąpić dwie sytuacje: w dowolnym momencie $s > t$ nastąpi przejście procesu $\{X(t), t \ge 0\}$ do innego stanu, wówczas przyszłe przepływy pieniężne do chwili *s* związane są ze stanem *j* i w chwili *s* wypłacane jest jednorazowe świadczenie w wysokości $c_{jk}(s)$ lub proces pozostanie w stanie *j* do końca trwania ubezpieczenia i wówczas przyszłe świadczenia związane są tylko z aktywną *j*-tą opcją ubezpieczenia. Po wykorzystaniu wzoru na prawdopodobieństwo całkowite dystrybuanta określona wzorem (5) przyjmuje postać:

$$P_j^W(t,u) = \underbrace{\sum_{k \ne j} \int_t^n {}_{s-t}p_{x+t}^{jj} \cdot \mu_{jk}(s) ds \cdot}_{\substack{\text{prawdopodobieństwo przejścia} \\ \text{ze stanu } j \text{ do stanu } k}} \\ \cdot P\left[\left(\int_t^s \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(t)} dW_j(\tau) + \frac{\upsilon(s)}{\upsilon(t)} c_{jk}(s) + \int_s^n \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(t)} dW(\tau)\right) \le u \mid X(s) = k\right] + \\ + \underbrace{{}_{n-t}p_{x+t}^{jj}}_{\substack{\text{prawdopodobieństwo pozostania} \\ \text{w stanie } j \text{ do końca ubezpieczenia}}} \cdot \mathbf{I}\left[\int_t^n \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(t)} dW_j(\tau) \le u\right]. \tag{6}$$

Po dokonaniu przekształceń algebraicznych pierwszego czynnika we wzorze (6) otrzymuje się:

$$P\left[\left(\int_t^s \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(t)} dW_j(\tau) + \frac{\upsilon(s)}{\upsilon(t)} c_{jk}(s) + \int_s^n \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(t)} dW(\tau)\right) \le u \mid X(s) = k\right] =$$

$$= P\left[\int_s^n \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(s)} dW(\tau) \le \frac{\upsilon(t)}{\upsilon(s)} u - \int_t^s \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(s)} dW_j(\tau) - c_{jk}(s) \mid X(s) = k\right] =$$

$$= P_k^W\left(s, \frac{\upsilon(t)}{\upsilon(s)} u - \int_t^s \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(s)} dW_j(\tau) - c_{jk}(s)\right).$$

Wówczas wzór (6) wyrażający dystrybuantę skumulowanych przyszłych świadczeń w indywidualnym ubezpieczeniu przyjmuje następującą rekurencyjną postać (por. [Norberg 1996]):

$$P_j^W(t,u) = \sum_{k \ne j} \int_t^n {}_{s-t}p_{x+t}^{jj} \cdot \mu_{jk}(s) \cdot P_k^W\left(s, \frac{\upsilon(t)}{\upsilon(s)} u - \int_t^s \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(s)} dW_j(\tau) - c_{jk}(s)\right) ds + \\ + {}_{n-t}p_{x+t}^{jj} \cdot \mathbf{I}\left[\int_t^n \frac{\upsilon(\tau)}{\upsilon(s)} dW_j(\tau) \le u\right]. \tag{7}$$

Na podstawie wzoru (7) wyznaczono dokładną postać dystrybuanty skumulowanych świadczeń w indywidualnym ubezpieczeniu składającym się na portfel przy różnej bazowej stopie procentowej przyjętej przez ubezpieczyciela do wyceny danego ubezpieczenia.

3. Przykład − indywidualne ubezpieczenie na życie

Najprostszym przykładem ubezpieczeń z grupy ubezpieczeń na życie są tradycyjne ubezpieczenia na życie. Ubezpieczenia te obejmują **ubezpieczenie na życie (UŻ), czyste ubezpieczenie na dożycie (UD) oraz ubezpieczenie na życie i dożycie (UŻD)**. Przedmiotem takich ubezpieczeń jest życie ubezpieczonego.

Procesami reprezentującymi wielkości roszczeń w tego typu ubezpieczeniu wieloopcyjnym są $\{D_j(T)\}$ oraz $\{C_{jk}(t)\}$. Rodzaj świadczenia zależy od zawartej umowy ubezpieczenia. W ubezpieczeniu na życie (UŻ) wypłata sumy ubezpieczenia w wysokości c jednostek pieniężnych następuje w przypadku zgonu ubezpieczonego w okresie trwania ubezpieczenia. W ubezpieczeniu na dożycie (UD) świadczenie w wysokości d jednostek pieniężnych wypłacane jest wówczas, gdy ubezpieczony dożył końca okresu ubezpieczenia. Natomiast ubezpieczenie na życie i dożycie (UŻD) obejmuje obie te sytuacje. Dla tych ubezpieczeń występują następujące strumienie płatności:

$$c_{HD}(t) = \begin{cases} c & dla \quad 0 < t \le n \\ 0 & dla \quad t > n \end{cases}, \quad d_H(t) = \begin{cases} d & dla \ t = n \\ 0 & dla \ t \ne n \ \ poza \ \ tym \end{cases}.$$

Rozpatrując model kapitalizacji ciągłej, zauważa się, że dystrybuanta całkowitych skumulowanych świadczeń w przypadku takiego ubezpieczenia zgodnie z (7) określona jest następująco:

$$P_H^W(0,u) = \int_0^n {}_s p_x^{HH} \cdot \mu_{HD}(s) \cdot P_D^W\left(s, e^{\delta \cdot s}u - \int_0^s e^{-\delta\cdot(\tau - s)} dW_H(\tau) - c_{HD}(s)\right) ds +$$
$$+ {}_n p_x^{HH} \cdot \mathbf{1}\left[\int_0^n e^{-\delta\cdot\tau} dW_H(\tau) \le u\right].$$

Jeśli się uwzględni strumienie płatności charakterystyczne dla ubezpieczenia UŻ, to wzór ten przyjmuje postać:

$$P_H^W(0,u) = \int_0^n {}_s p_x^{HH} \cdot \mu_{HD}(s) \cdot P_D^W\left(s, e^{\delta \cdot s}u - c_{HD}(s)\right) ds + \\ + {}_n p_x^{HH} \cdot \mathbf{1}[u \ge 0]. \tag{8}$$

Prawdopodobieństwo $P_D^W\left(s, e^{\delta \cdot s}u - c_{HD}(s)\right)$ występujące w pierwszym składniku sumy można zapisać następująco:

$$P_D^W\left(s, e^{\delta \cdot s}u - c_{HD}(s)\right) = P\left(\int_s^n e^{-\delta\cdot(\tau - s)} dW(\tau) \le e^{\delta \cdot s}u - c_{HD}(s) \mid X(s) = D\right).$$

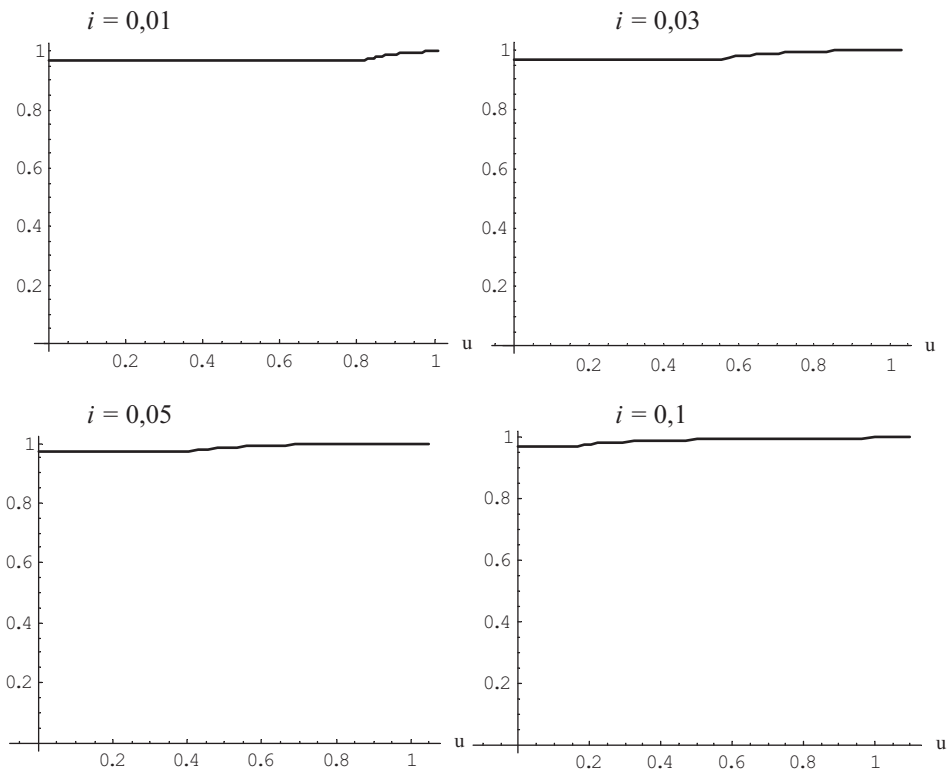
Oznacza to, że momentem śmieci ubezpieczonego jest chwila *s* zdefiniowana jako zmienna losowa. Niech więc Tx oznacza przyszły czas życia osoby w wieku *x* lat, wówczas dystrybuanta całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UŻ dana jest wzorem:

$$F_W^H(u) = P_H^W(0,u) = \begin{cases} 0 & dla \quad u < 0 \\ P(T_x > n) = {}_n p_x^{HH} & dla \quad 0 \le u < c \cdot e^{-\delta n} \\ P\left(T_x > \underbrace{\frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{c}{u}\right)}_{t_1}\right) = {}_{t_1} p_x^{HH} & dla \quad c \cdot e^{-\delta n} \le u < c \\ 1 & dla \quad u \ge c \end{cases}. \tag{9}$$

Dystrybuanta dana wzorem (9) zależy od dwóch parametrów związanych z zwieranym ubezpieczeniem: od wieku ubezpieczonego (*x*) i od okresu trwania ubezpieczenia (*n*), dlatego też przyjęto oznaczenie dla ubezpieczenia UŻ(*x*, *n*). Na rys. 1-3

przedstawiono wykresy dystrybuant skumulowanych świadczeń dla 20-letniego ubezpieczenia UŻ zawartego z ubezpieczonymi odpowiednio w wieku 30, 40 i 50 lat przy różnych stopach procentowych. Jako intensywność zgonu przyjęto funkcję stosowaną przez duńskie towarzystwa ubezpieczeniowe[1] o postaci (por. [Hoem, Aalen 1978]): $\mu_{HD}(t) = \mu(x+t) = 0,0004 + 0,0000034674 \cdot 10^{0,06(x+t)}$.

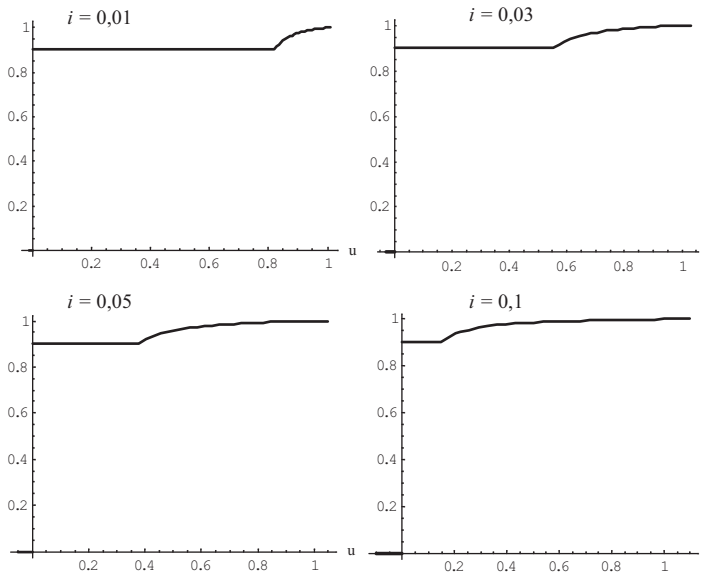
Wykresy na rys. 1-3 są graficzną prezentacją dystrybuant całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UŻ, których postać analityczna określona jest wzorem (9). Na podstawie przedstawionych dystrybuant można zaobserwować, że przyjęta przez ubezpieczyciela bazowa stopa procentowa wpływa na asymetrię rozkładu skumulowanych świadczeń. We wszystkich przypadkach obserwuje się takie same tendencje wskazujące na coraz silniejszą asymetrię rozkładu. W związku z tym ubezpieczyciel, ustalając bazową stopę procentową stanowiącą dla niego pod-



Rys. 1. Dystrybuanta całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UŻ(30,20)

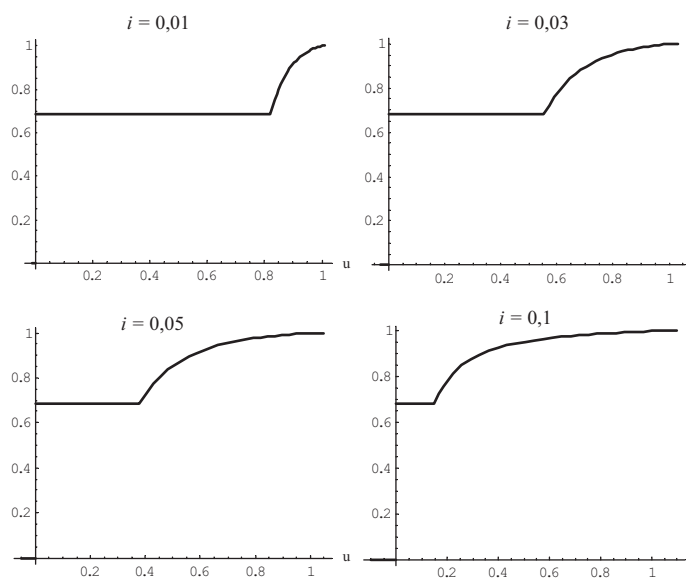
Źródło: opracowanie własne.

[1] Polskie firmy ubezpieczeniowe nie udostępniają informacji dotyczących stosowanych funkcji intensywności, nie udostępniają również danych umożliwiających ich aproksymację.



Rys. 2. Dystrybuanta całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UŻ(40,20)

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 3. Dystrybuanta całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UŻ(50,20)

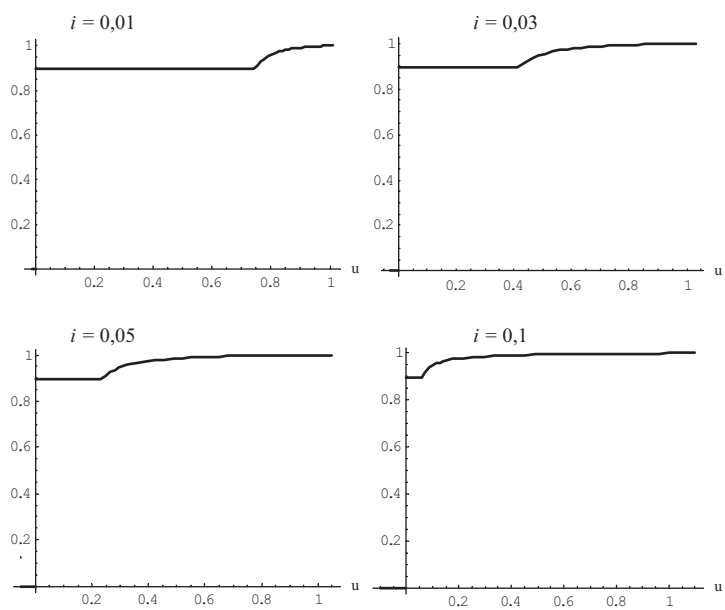
Źródło: opracowanie własne.

stawę wyceny przepływów pieniężnych związanych z ubezpieczeniem, powinien uwzględniać zmiany asymetrii rozkładu wynikające z przyjętej stałej stopy procentowej. Tym samym minimalizowałby ryzyko finansowe wynikające ze zmiany stopy procentowej w okresie trwania ubezpieczenia.

Następnie zbadano zmiany asymetrii rozkładu zagregowanej wypłaty w przypadku ubezpieczeń o różnym okresie ubezpieczenia. Na rysunkach 4-6 przedstawiono wykresy dystrybuanty zagregowanej wypłaty dla ubezpieczenia UŻ zawartego z 30-latkiem.

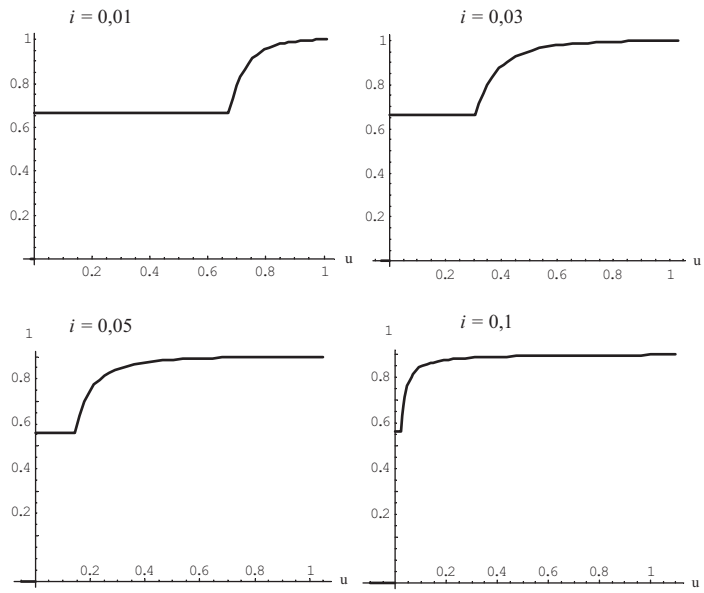
Wykresy na rys. 4-6 potwierdzają wpływ przyjętej przez ubezpieczyciela stopy bazowej na rozkład zagregowanej wypłaty. Ponadto potwierdzają, że wzrasta kurtoza (współczynnik skupienia), co oznacza, że charakteryzuje się większą koncentracją wokół wartości oczekiwanej. Dlatego też, aby zminimalizować ryzyko związane z prawidłową wyceną, ubezpieczyciel, ustalając bazową stopę procentową, powinien uwzględniać jej wpływ na rozkład.

W analogiczny sposób wyznacza się dystrybuantę rozkładu skumulowanych całkowitych świadczeń w ubezpieczeniu na dożycie (UD), a także na życie i dożycie (UŻD), uwzględniając charakterystyczne dla tych ubezpieczeń strumienie płatności.



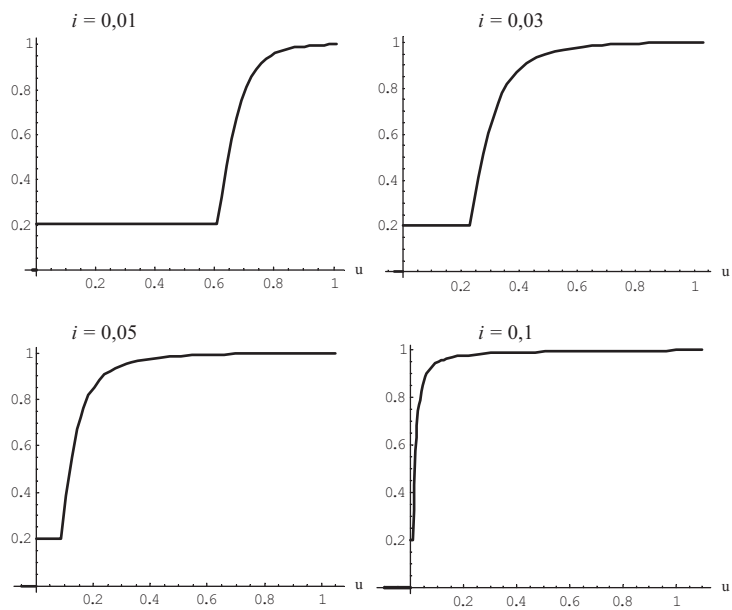
Rys. 4. Dystrybuanta całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UŻ(30,30)

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 5. Dystrybuanta całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UŻ(30,40)

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 6. Dystrybuanta całkowitych skumulowanych świadczeń w ubezpieczeniu UŻ(30,50)

Źródło: opracowanie własne.

4. Wnioski

Procesami losowymi badanymi w ubezpieczeniach tradycyjnych są m.in. wielkość roszczeń i strata ubezpieczyciela. Aspekt finansowy ryzyka związanego z działalnością ubezpieczyciela dotyczy kalkulacji składek ubezpieczeniowych, tworzenia rezerw matematycznych czy analizy zagregowanej wypłaty i procesu ryzyka. W modelach aktuarialnych klasyczny proces ryzyka (por. [Bowers i in. 1986]) generowany jest przez kapitał początkowy, intensywność napływu składki oraz proces skumulowanych roszczeń (zagregowanej wypłaty). W literaturze formułowanych jest wiele dodatkowych założeń dotyczących procesu napływu składki i skumulowanych roszczeń. Osłabienie nie zawsze zgodnych z rzeczywistością założeń dotyczących klasycznego modelu ryzyka prowadzi do jego uogólnień. Ponadto w klasycznym modelu ryzyka zaniedbane są kwestie zmienności wartości pieniądza w czasie, jakie należy uwzględnić przy badaniu procesu ryzyka, w szczególności dla ubezpieczeń na życie. Istotny krok w kierunku urealniania modeli ryzyka stanowi analiza procesów, w których uwzględnia się również oddziaływanie czynników makroekonomicznych, takich jak np. stopy procentowe.

W pracy określono proces zagregowanej wypłaty z uwzględnieniem czynników makroekonomicznych, a zastosowanie procesów Markowa do aktywizacji opcji pozwoliło uniknąć dodatkowych założeń. Następnie wyznaczono rozkład procesu skumulowanych zaktualizowanych świadczeń stanowiący istotny miernik działalności finansowej ubezpieczyciela. Przedstawienie dokładnej analitycznej postaci dystrybuanty pozwoliło zbadać wpływ bazowej stopy procentowej (przyjmowanej przez ubezpieczyciela) na rozkład skumulowanej wypłaty. Przedstawione wyniki wskazują, że niezależnie od wieku ubezpieczonego czy okresu trwania ubezpieczenia obserwuje się takie same tendencje wskazujące na coraz silniejszą asymetrię rozkładu. W związku z tym ubezpieczyciel, ustalając bazową stopę procentową, przy której dokonuje wyceny przepływów pieniężnych związanych z ubezpieczeniem i ustala wysokość należnej składki netto, powinien uwzględniać zmiany asymetrii rozkładu wynikające z przyjętej stałej stopy procentowej. W ten sposób minimalizuje ryzyko finansowe wynikające ze zmiany stopy procentowej w okresie trwania ubezpieczenia.

Do głównych walorów proponowanej analizy należy względna prostota i możliwość łatwego przeniesienia osiągniętych wyników w inne sfery zastosowań.

Literatura

Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J., *Actuarial mathematics*, Society of Actuaries, Schamburg 1986.

Habermann S., Pitaco E., *Actuarial models for disability insurance,* Chapman&Hall/CRC, London 1999.

Hoem J.M., *Markov chain models in life insurance*, „Blätter der deutschen gesellschaft für versicherungsmathematik" 1972, 9, s. 91-107.

Hoem J.M., Aalen O.O., *Actuarial values of payment streams,* „Scandinavian Actuarial Journal" 1978, s. 38-47.

Homa M., *Rozkład procesu skumulowanych świadczeń w indywidualnym wieloopcyjnym ubezpieczeniu na życie,* [w:] W. Ostasiewicz (red.), *Statystyka aktuarialna − stan i perspektywy rozwoju w Polsce*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1108, AE, Wrocław 2006, s. 352-368.

Norberg R., *On probability distributions of present values in life insurance*, „Insurance: Mathematics&Economics" 1996, 18, s. 35-42.

Norberg R., *A time-continuous Markov chain interest model with applications to insurance*, „Applied Stochastic Models and Data Analysis" 1995, 11, s. 245-256.

DISTRIBUTION FUNCTION OF TOTAL ACCUMULATED PAYMENTS IN LIFE INSURANCE DEPENDING ON INTEREST RATE

Summary: Insurance activity are connected with finance risk including among other things: valuation of payments stream and analysis of "riskness". Insurer assumes some interest rate and must to value total payments stream and accumulated expenses connected with insurance and calculate the net insurance premium. Therefore the essence of my work is the discussion on distribution of total accumulated payments and depending on interest rate. Knowledge of this permits to describe and estimate the "riskness" of insurance contract and minimize financial risk connected with change of interest rate. This is also the basis for further analysis of the insurance portfolio.