

**Monika Papież, Sławomir Śmiech**

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

---

## **KLASYFIKACJA OFE Z WYKORZYSTANIEM DYSTANSU GARCH**

---

**Streszczenie:** W artykule dokonano oceny ryzyka rynkowego OFE, które w prowadzonych analizach utożsamiono z warunkową wariancją stóp zwrotu poszczególnych OFE. Aby ocenić, czy dwa szeregi charakteryzują się identycznym ryzykiem sprawdzono, czy procesy generujące zmienność mają identyczne parametry (jeśli założymy, że są takiej samej klasy, np. GARCH (1, 1)). Do weryfikacji hipotezy o identyczności parametrów wykorzystano statystykę Walda. Następnie dokonano pogrupowania szeregów (OFE) ze względu na podobieństwo dynamiki zmienności (wzorców zmienności) stóp zwrotu. W tym celu wykorzystano dystans pomiędzy modelami charakteryzującymi stopy zwrotu poszczególnych funduszy OFE. Na tej podstawie wskazano grupy funduszy, które charakteryzują się podobną dynamiką zmienności (podobnym ryzykiem). Analizę przeprowadzono dla lat 2001–2008.

### **1. Wstęp**

Podstawowym celem Otwartych Funduszy Emerytalnych (OFE) działających na polskim rynku jest gromadzenie i pomnażanie środków zabezpieczających przed ryzykiem starości. W celu kontroli działalności OFE w ustawie o organizacji i funkcjonowaniu funduszy emerytalnych została zdefiniowana przeciętna stopa zwrotu grupy OFE, na podstawie której wyznacza się tzw. minimalny zwrot dla funduszy. Wprowadzenie w ustawie minimalnej stopy zwrotu ma chronić członków OFE przed konsekwencjami negatywnych decyzji zarządzających. Natomiast przeciętna stopa zwrotu danego OFE ma za zadanie służyć do oceny efektywności inwestycyjnej funduszu emerytalnego. Członkowie funduszy na jej podstawie mogą dokonywać wyboru funduszu, monitorować poziom przeciętnej stopy zwrotu oraz stopień realizacji założonej polityki inwestycyjnej, a także decydować o wysokości swoich dodatkowych oszczędności emerytalnych.

Ponadto przeciętna stopa zwrotu zawiera tylko informacje z rynku OFE, nie uwzględnia ona elementów zewnętrznych, takich jak inflacja, sytuacja na rynku finansowym. Powoduje to ocenę danego funduszu w odniesieniu do innych funduszy, przy braku możliwości porównania z innymi podmiotami zarządzającymi ka-

pitałem oraz braku odniesienia do sytuacji na rynku finansowym. Dlatego część prac z zakresu problematyki OFE podejmuje ocenę efektywności stóp zwrotu w kontekście ich ryzyka (miary Treynora, Jensena czy Sharpe'a).

Natomiast w artykule zostanie dokonana ocena ryzyka rynkowego OFE, które w prowadzonych analizach będzie utożsamiane z warunkową wariancją stóp zwrotu. Zakładamy, że dwa szeregi charakteryzują się identycznym ryzykiem, jeśli procesy generujące ich warunkową zmienność są tego samego typu np. klasy GARCH (1, 1) i mają takie same parametry. Do weryfikacji hipotez o identyczności parametrów zostanie w artykule wykorzystana statystyka Walda. Następnie szeregi stóp zwrotu (OFE) zostaną pogrupowane ze względu na ryzyko. W tym celu zostanie wykorzystany dystans pomiędzy modelami charakteryzującymi stopy zwrotu poszczególnych funduszy OFE. Przy założeniu, że warunkowa wariancja stóp zwrotu może być właściwie opisywana za pomocą modeli typu GARCH, porównaniu podlegać będą podobieństwo dynamiki zmienności (wzorców zmienności) poszczególnych szeregów stóp zwrotu oraz ich zmienność. Punktem odniesienia dla porównań będą ryzykowne instrumenty finansowe, takie jak indeksy giełdowe. Na tej podstawie zostanie wskazana grupa funduszy, które charakteryzują się podobną dynamiką zmienności (podobnym ryzykiem). Analiza OFE zostanie przeprowadzona dla lat 2001–2008.

## 2. Dystans między procesami GARCH (1, 1)

Niniejsza część artykułu będzie poświęcona przedstawieniu koncepcji odległości pomiędzy najczęściej wykorzystywanymi (najpopularniejszymi) modelami charakteryzującymi zmienność instrumentów finansowych – modelami GARCH. Odległość mierzona pomiędzy modelami procesów stochastycznych wprowadził do literatury ekonometrycznej [Piccolo 1990], który zaproponował odległość między procesami typu ARMA. Uogólnienie zaproponowanej miary odległości na klasę procesów typu GARCH wynika z faktu, że (przy pewnych założeniach) kwadraty błędów w tych procesach mogą być przedstawione w postaci modeli ARMA. Szczegóły rozważań na ten temat, a także przegląd metod dla uogólnionych procesów GARCH (np. *igarch*, *threshold garch*) można znaleźć w pracach [Otranto, Trudda, 2007; Otranto 2008].

W związku z tym, że obszar rozważanych w empirycznej części modeli zmienności ogranicza się do modeli typu GARCH (1, 1)<sup>1</sup>, poniżej znajdą się wzory prowadzące do wyznaczenia dystansu pomiędzy dwoma tego typu procesami. Załóżmy, że dysponujemy realizacjami dwóch procesów:

$$y_{1,t} = \mu_1 + \varepsilon_{1,t}, \quad (1)$$

---

<sup>1</sup> Typ modeli został wybrany na podstawie kryteriów informacyjnych AIC i BIC.

$$y_{2,t} = \mu_2 + \varepsilon_{2,t},$$

gdzie:  $\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t}$  są niezależnymi, heteroskedastycznymi procesami o zerowej średniej. Zakładamy dalej, że warunkowa wariancja procesów  $h_{1,t}, h_{2,t}$  jest modelowana przez dwa niezależne procesy GARCH (1, 1), tj.:

$$\text{Var}(y_{1,t} | I_{1,t-1}) = h_{1,t} = \gamma_1 + \alpha_1 \varepsilon_{1,t-1}^2 + \beta_1 h_{1,t-1}^2, \quad (2)$$

$$\text{Var}(y_{2,t} | I_{2,t-1}) = h_{2,t} = \gamma_2 + \alpha_2 \varepsilon_{2,t-1}^2 + \beta_2 h_{2,t-1}^2,$$

gdzie:  $I_{i,t-1}$  (dla  $i = 1, 2$ ) oznacza informację dostępną w chwili  $t-1$ . Dalej zakładamy, że:  $\gamma_i > 0, 0 < \alpha_i < 1, 0 < \beta_i < 1, (\alpha_i + \beta_i) < 1$  ( $i = 1, 2$ ).

Dodając do obu stron równań (2) kwadrat błędu  $\varepsilon_{i,t}^2$  i dokonując stosownych przekształceń, otrzymujemy zależność charakterystyczną dla procesu ARMA (1, 1), która przyjmuje postać:

$$\varepsilon_{i,t}^2 = \gamma_i + (\alpha_i + \beta_i) \varepsilon_{i,t-1}^2 - \beta_i (\varepsilon_{i,t-1}^2 - h_{i,t-1}) + (\varepsilon_{i,t}^2 - h_{i,t}) \quad (i = 1, 2). \quad (3)$$

Zaburzeniem losowym w równaniu (3) jest proces  $\varepsilon_{i,t}^2 - h_{i,t}$ , który ma zerową średnią i nie jest skorelowany ze swoją przeszłością [Otranto 2004]. W celu porównania pary procesów zapisuje się je w postaci<sup>2</sup>  $AR(\infty)$ :

$$\varepsilon_{i,t}^2 = \frac{\gamma_i}{1 - \beta_i} + \alpha_i \sum_{j=1}^{\infty} \beta_i^{j-1} \varepsilon_{i,t-j}^2 + (\varepsilon_{i,t}^2 - h_{i,t}) \quad (4)$$

i wyznacza odległość euklidesową  $d$  pomiędzy parametrami procesów dla kolejnych opóźnień:

$$d = \left[ \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_1 \beta_1^j - \alpha_2 \beta_2^j)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Po podniesieniu do kwadratu i zastosowaniu wzoru na sumę szeregu geometrycznego odległość  $d$  można zapisać następująco:

$$d = \left[ \frac{\alpha_1^2}{1 - \beta_1^2} + \frac{2\alpha_1\alpha_2}{1 - \beta_1\beta_2} - \frac{\alpha_2^2}{1 - \beta_2^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

W zaprezentowanym podejściu nie brano pod uwagę wyrazu wolnego występującego we wzorze 4. W konsekwencji takiego podejścia podobieństwo dwóch

<sup>2</sup> Wymagana jest odwracalność procesów.

procesów (mała wartość odległości  $d$ ) oznacza, że mają one zbliżoną dynamikę zmienności. W podobny sposób zależą od swojej przeszłości, ich predykcja przebiega analogicznie. Sam poziom zmienności (ryzyko), który od dołu jest ograniczony dodatnią wartością  $\frac{\gamma_i}{1-\beta_i}$ , nie jest tutaj brany pod uwagę.

Wyznaczenie odległości pomiędzy parami procesów może być wykorzystywane do grupowania ich w jednorodne, ze względu na dynamikę, zmienności klasy. Powiemy, że dwa szeregi są generowane przez procesy z tej samej klasy, jeśli spełniona jest następująca hipoteza zerowa:

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2.$$

Przy powyższych oznaczeniach rozważa się statystykę  $W$  (statystyka Walda):

$$W = \left( A \hat{\Theta} \right)^T \left( A \hat{\Lambda} A \right)^{-1} \left( A \hat{\Theta} \right),$$

gdzie:  $\hat{\Theta}$  to estymator największej wiarygodności wektora  $\Theta = (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ ,  $A$  jest macierzą wymiaru  $2 \times 4$ , składającą się z dwóch macierzy jednostkowych  $I_2$  wymiaru  $2 \times 2$  zapisanych następująco  $A = [I_2, -I_2]$ , zaś  $\hat{\Lambda}$  – blokową odporną macierzą wariancji-kowariancji ( $4 \times 4$ ). Jeśli hipoteza zerowa jest prawdziwa, wówczas statystyka  $W$  podlega rozkładowi  $\chi^2$  z dwoma stopniami swobody.

Procedura grupowania procesów może przebiegać według przedstawionego w pracy [Otranto, Trudda 2007, s. 193] planu:

1. Wybór szeregu benchmarkowego<sup>3</sup>.
2. Wybór szeregów, które mają zerową odległość od benchmarku. Tworzą one pierwszą grupę i nie biorą udziału w dalszym grupowaniu.
3. Z pozostałych szeregów wybiera się ten, którego odległość od benchmarku jest minimalna. Powyższy szereg stanowi nowy benchmark.
4. Badając odległość od nowego benchmarku, ustala się, które szeregi są nieistotnie od niego odległe. Wybrane szeregi tworzą drugie skupisko.
5. Do pozostałych szeregów stosuje się ponownie krok 3 i 4 tak długo, aż wyczerpie się zbiór analizowanych szeregów.

Zaproponowana procedura grupowania nie wymaga określenia *a priori* liczby grup. Liczba skupisk i ich skład są tworzone automatycznie.

<sup>3</sup> Można proponować różne procesy odniesienia, aby ocenić, jak ewentualnie zmienia się skład poszczególnych grup.

### 3. Klasyfikacja OFE – wyniki badań

Do badania wybrano wszystkie działające na polskim rynku Otwarte Fundusze Emerytalne: AEGON OFE, AIG OFE, Allianz Polska OFE, Aviva OFE, AXA OFE, Bankowy OFE, Generali OFE, ING OFE, Nordea OFE, Pekao OFE, OFE Pocztylion,

**Tabela 1.** Wartości statystyki Walda wraz z wartością *p-value* dla oszacowanych parametrów modeli GRACH (1, 1) w latach 2001–2008 oraz podokresach 2001–2005, 2002–2006, 2003–2007, 2004–2008

Lata	OFE, dla których weryfikowano hipotezę o identyczności parametrów modeli GARCH (1, 1)	Wartość statystyki Walda W wraz z wartością <i>p value</i>
2001–2008	WIG = AIG WIG = Polsat WIG = Warta	W = 6,50 (p = 0,0387) W = 10,67 (p = 0,0048) W = 6,17 (p = 0,0458)
2001–2005	Bankowy = AEGON Bankowy = AIG Bankowy = Allianz Bankowy = Aviva Bankowy = Axa Bankowy = Generali Bankowy = ING Bankowy = Nordea Bankowy = Pekao Bankowy = Pocztylion Bankowy = Polsat Bankowy = PZU Bankowy = Warta Bankowy = WIG  Polsat = ING Polsat = Pekao Polsat = Pocztylion Polsat = WIG  WIG = AIG WIG = Allianz	W = 16,78 (p = 0,0002) W = 23,71 (p = 0,0000) W = 20,53 (p = 0,0000) W = 13,47 (p = 0,0012) W = 16,35 (p = 0,0003) W = 9,71 (p = 0,0078) W = 14,70 (p = 0,0006) W = 15,85 (p = 0,0004) W = 15,22 (p = 0,0005) W = 10,87 (p = 0,0044) W = 29,18 (p = 0,0000) W = 10,18 (p = 0,0061) W = 10,45 (p = 0,0054) W = 6,12 (p = 0,0470)  W = 6,72 (p = 0,0348) W = 6,99 (p = 0,0304) W = 6,60 (p = 0,0368) W = 13,45 (p = 0,0012)  W = 6,17 (p = 0,0457) W = 6,88 (p = 0,0321)
2002–2006	WIG = Allianz WIG = Polsat	W = 7,51 (p = 0,0234) W = 7,93 (p = 0,0190)
2003–2007	WIG = Polsat	W = 8,11 (p = 0,0173)
2004–2008	WIG = Pekao WIG = Polsat WIG = Warta	W = 7,84 (p = 0,0199) W = 6,81 (p = 0,0332) W = 5,52 (p = 0,0632)

Źródło: obliczenia własne.

OFE Polsat, OFE PZU „Złota Jesień”, OFE WARTA<sup>4</sup>. Jako punkt odniesienia do porównań wybrano WIG, który ma reprezentować ryzykowne instrumenty finansowe. Analizę przeprowadzono dla stóp zwrotu na danych dziennych w latach 2001–2008 oraz dla poszczególnych podokresów: 2001–2005, 2002–2006, 2003–2007, 2004–2008. Podokresy zostały tak dobrane, aby można było ocenić czy występowały różnice w zmienności dynamiki, a tym samym ocenić, czy grupowanie było odporne na wybór okresu. (Lata 1999–2000 nie zostały wzięte pod uwagę ze względu na to, że fundusze dopiero wchodziły na rynek oraz posiadały bardzo mało aktywów).

Dla wyznaczonych szeregów czasowych stóp zwrotu wyestymowano wartości parametrów modelu GARCH (1, 1) danego wzorem (2) przy użyciu programu GRETL. Następnie zbadano, czy dwa szeregi charakteryzują się identycznym ryzykiem, czyli czy procesy generujące zmienność mają identyczne parametry. Do weryfikacji hipotezy o identyczności parametrów wykorzystano statystykę Walda daną wzorem (7). Tabela 1 przedstawia tylko istotne statystycznie ( $\alpha = 0,05$ ) wartości statystyki Walda dla oszacowanych parametrów modeli GRACH (1, 1) w latach 2001–2008 oraz podokresach 2001–2005, 2002–2006, 2003–2007, 2004–2008.

**Tabela 2.** Klasyfikacja OFE ze względu na podobieństwo dynamiki zmienności (wzorców zmienności) poszczególnych szeregów stóp zwrotu w latach 2001–2008 oraz w podokresach 2001–2005, 2002–2006, 2003–2007, 2004–2008

Grupy	2001–2008	2001–2005	2002–2006	2003–2007	2004–2008
G1	AIG, Polsat, WARTA,	AIG, Allianz, Polsat	Allianz, Polsat	Polsat	Pekao, Polsat
G2	WIG, AEGON, Allianz, Aviva, AXA, Bankowy, Generali, ING, Nordea, Pekao, Pocztylion, PZU Złota Jesień	WIG, AEGON, Aviva, AXA, Generali, ING, Nordea, Pekao, Pocztylion, PZU Złota Jesień, WARTA	WIG, AEGON, AIG, Aviva, AXA, Bankowy, Generali, ING, Nordea, Pekao, Pocztylion, PZU Złota Jesień, WARTA	WIG, AEGON, AIG, Allianz, Aviva, AXA, Bankowy, Generali, ING, Nordea, Pekao, Pocztylion, PZU Złota Jesień, WARTA	WIG, AEGON, AIG, Allianz, Aviva, AXA, Bankowy, Generali, ING, Nordea, Pocztylion, PZU Złota Jesień, WARTA
G3		Bankowy			

Źródło: opracowanie własne.

Wykorzystując miarę odległości zdefiniowaną wzorem (6), wyznaczono dystans pomiędzy modelami charakteryzującymi stopy zwrotu poszczególnych funduszy OFE. Stosując przedstawioną w artykule procedurę, dokonano pogrupowania

<sup>4</sup> W 1999 r. zostało utworzonych 21 Otwartych Funduszy Emerytalnych. Od 1999 r. w wyniku przejścia zarządzania otwartym funduszem lub połączenia powszechnych towarzystw 7 z nich uległo likwidacji. Cztery procesy konsolidacyjne nastąpiły w 2001 r., po jednym w 2002, 2004 i 2008 r. W ich wyniku rynek funduszy emerytalnych ukształtował się na obecnym poziomie 14 podmiotów.

OFE ze względu na podobieństwo dynamiki zmienności (wzorców zmienności) poszczególnych szeregów stóp zwrotu oraz ich zmienność. Jako szereg benchmarkowy wybrano WIG. Tabela 2 przedstawia grupy Otwartych Funduszy Emerytalnych, które charakteryzują się podobną dynamiką zmienności (podobnym ryzykiem) w analizowanych okresach.

#### 4. Podsumowanie

Przeprowadzona analiza OFE pod względem dynamiki zmienności w latach 2001–2008 oraz podokresach 2001–2005, 2002–2006, 2003–2007, 2004–2008 wskazuje, że praktycznie dla wszystkich objętych badaniem okresów można wyróżnić po dwie grupy (oprócz lat 2001–2005, dla których istnieją 3 grupy). Jedną grupę tworzą fundusze emerytalne, które charakteryzują się podobną dynamiką zmienności co WIG. W skład tej grupy we wszystkich okresach wchodzi takie fundusze, jak: AEGON, Aviva, AXA, Generali, ING, Nordea, Pocztylion, PZU „Złota Jesień”. Skład drugiej grupy ulegał zmianie w zależności od badanego okresu. Wyjątkiem jest OFE Polsat<sup>5</sup>.

Na podstawie wyników badań można wyciągnąć wniosek, że fundusze charakteryzują się podobną dynamiką zmienności. Można przypuszczać, że jest to związane z prowadzoną podobną strategią inwestycyjną, która częściowo jest determinowana limitami inwestycyjnymi. Jedynie dość odmienną strategią inwestycyjną ma OFE Polsat. Na koniec 2008 r. w skład portfela inwestycyjnego wchodziło 37,7% akcji (przy 21,4% średniej dla wszystkich OFE) oraz 58,7% obligacji (przy 75,1% średniej dla wszystkich OFE).

Wyniki badań potwierdzają potrzebę wprowadzenia funduszy o zróżnicowanym profilu ryzyka, który jest jak najbardziej pożądaną zmianą z punktu widzenia członków funduszy emerytalnych. Jednakże sama możliwość zróżnicowania profilu ryzyka funduszy bez dodatkowych zmian limitów inwestycyjnych oraz dodania nowych instrumentów nie wystarczy do istotnego zdywersyfikowania portfela inwestycyjnego w zależności od profilu ryzyka klientów.

Propozycja wprowadzenia funduszy o zróżnicowanym profilu ryzyka, czyli nowelizacji ustawy o organizacji i funkcjonowaniu funduszy emerytalnych, została pod koniec sierpnia 2009 r. wysłana do konsultacji przez Ministerstwo Pracy i Polityki Społecznej. Po wejściu w życie nowych przepisów towarzystwa emerytalne mają zarządzać funduszem emerytalnym o dwóch subfunduszach A i B. Subfundusz A będzie działał tak, jak funkcjonują obecnie OFE. Natomiast subfundusz B będzie bezpiecznie inwestował pieniądze osób, którym niewiele czasu zostało do zakończenia kariery zawodowej (proponowane jest przeniesienie w całości

---

<sup>5</sup> Na koniec 2008 r. OFE Polsat posiadał 2,37% ogółu wszystkich członków Otwartych Funduszy Emerytalnych. Jego wielkość aktywów stanowiła 0,9% wszystkich aktywów OFE.

oszczędności na pięć lat przed osiągnięciem wieku emerytalnego. Dla subfunduszu B będą istnieć inne niż dla subfunduszu A limity inwestycyjne i inny benchmark (proponowana jest ubiegłoroczna inflacja).

## Literatura

- Haugen R.A., *Teoria nowoczesnego inwestowania*, WIG-Press, Warszawa 1996.
- Jajuga K., Jajuga T., *Inwestycje. Instrumenty finansowe, aktywa niefinansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.
- Luenberger D.G., *Teoria inwestycji finansowych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003.
- Otranto E., *Classifying the markets volatility with ARMA distance measures*, „Quaderni di Statistica” 2004, no. 6, s. 1–19.
- Otranto E., *Clustering heteroskedastic time series by model-based procedures*, Elsevier, „Computational Statistics and Data Analysis” 2008, vol. 52, no. 10, s. 4685–4698.
- Otranto E., Triacca U., *Testing for equal predictability of stationary ARMA models*, „Journal of Applied Statistics, Taylor and Francis Journals” 2007, vol. 34, no. 9, s. 1091–1108.
- Otranto E., Trudda A., *Classifying the Italian pension funds via GARCH distance*, w: *Mathematical and statistical methods for insurance and finance 2007*, red. C. Perna, M. Sibillo, Springer, s. 189–197.
- Otranto E., Trudda A., *Evaluating the risk of pension funds by statistical procedures*, w: *Transition economies: 21<sup>st</sup> century issues and challenges 2008*, red. G.M. Lakatos, Ch. 7, Nova Science Publisher, Hauppauge, NY, s. 189–204.
- Piccolo, D., *A distance measure for classifying ARIMA models*, „Journal of Time Series Analysis” 1990, no. 11, s. 153–164.

## CLASSIFICATION OF OFE USING GARCH DISTANCE

**Summary:** The article assesses a market risk of OFE, which were defined as a series of rates of return volatility of individual OFE's. To assess whether the two series are characterized by identical risk it was examined whether the processes, which generate variation have the same parameters (with the assumption that they are the same class, such as GARCH 1.1). To verify the hypothesis about the identity of the parameters Wald statistics was used. Then the series characterized by similar dynamics of volatility were clustered using the distance between the models of particular return volatility of individual OFEs, which allowed to point at the groups of funds of similar dynamics of changes (similar risk). The analysis was conducted for the years 2001–2008.