

Aleksandra Anusik

Uniwersytet Łódzki

**WPLYW STOCHASTYCZNYCH
STÓP PROCENTOWYCH NA WYCENĘ
FINANSOWYCH KONTRAKTÓW *FUTURES***

Streszczenie: W ramach finansowych kontraktów terminowych *futures* istotnym zagadnieniem jest ich rzetelna wycena. W tym celu wykorzystuje się różnego rodzaju modele. W artykule zbadano, jaki wpływ na poprawność wyceny kontraktów *futures* mają stochastyczne stopy procentowe. Dokonano w nim również analizy wrażliwości wartości wybranych kontraktów kupna i sprzedaży na wprowadzane do modeli zakłócenia. Badania przeprowadzono na podstawie danych zaczerpniętych z giełdy terminowej Eurex

Słowa kluczowe: kontrakty terminowe *futures*, stochastyczne stopy procentowe, giełda Eurex

1. Wstęp

W odniesieniu do finansowych kontraktów terminowych *futures* istotnym zagadnieniem jest ich rzetelna wycena. Wykorzystywane są do tego różnego rodzaju modele. W artykule podjęto próbę zbadania, czy i ewentualnie jaki wpływ na poprawność wyceny kontraktów *futures* mają stochastyczne stopy procentowe. Zostanie w nim dokonana analiza wrażliwości wartości wybranych kontraktów kupna i sprzedaży na wprowadzane do modeli zakłócenia. Badania wykonano na podstawie danych zaczerpniętych z giełdy terminowej Eurex.

2. Cena i wartość kontraktu *futures*

Futures to kontrakty, w których kontrahenci w dniu realizacji transakcji muszą bezwarunkowo wywiązać się z zawartej umowy. Są one instrumentami o symetrycznym ryzyku (grą o sumie zerowej), w których obie strony kontraktu przyjmują na siebie konkretne zobowiązania [Ladko 1994, s. 92].

Mówi się, że *futures* to legalnie zawarte kontrakty na dostawę lub przyjęcie dostawy produktu o wystandardyzowanej jakości i ilości, w ściśle określonym czasie i po z góry ustalonej cenie. W ich ramach standaryzacji podlegają takie parametry, jak:

- 1) dokładne określenie przedmiotu kontraktu wraz z jego skrótem literowym;
- 2) wielkość kontraktu;
- 3) termin, na jaki został on zawarty;
- 4) dopuszczalna minimalna oraz maksymalna dzienna zmiana ceny;
- 5) baza ceny lub waluta notowania kontraktu;
- 6) godziny handlu, w których można zawierać transakcje dotyczące danego kontraktu, oraz określenie ostatniego dnia i godziny handlu tym kontraktem w określonym dniu [Ratajczak 1999, s. 21-23].

Jedyną zmienną w ramach *futures* jest cena, ustalana na parkiecie giełdy poprzez równoważenie się popytu i podaży. Z kontraktem *futures* wiążą się trzy ceny:

- 1) ustalona w dniu zawarcia kontraktu terminowa cena *futures* (*futures price*);
- 2) zmienna cena kontraktu *futures* na rynku;
- 3) cena bieżąca (bazowa, gotówkowa) (*spot/basic price*) instrumentu podstawowego, który jest przedmiotem kontraktu na rynku kasowym [Jajuga, Jajuga 2004, s. 207].

Cena kontraktu *futures* to ustalona w dniu dzisiejszym cena przyszłej realizacji transakcji na rynku gotówkowym. Cena bazowa jest to bieżąca cena *spot*, za którą można obecnie kupić dane walory. Cena bieżąca jest taka sama dla wszystkich kontraktów na dany walor, niezależnie od ich zapadalności, i ma w *futures* właściwie tylko walor informacyjny. Można przyjmować za nią m.in. cenę zamknięcia na rynku kasowym lub też wartości z ruchu ciągłego. Z kolei różnica pomiędzy ceną gotówkową a ceną *futures* to tzw. baza (*basis*). Co istotne, tylko w terminach wygaśnięcia ceny kontraktów *futures* są równe bądź prawie równe cenom na rynku gotówkowym [Mishkin 2002, s. 455; Ratajczak 1999, s. 76; Sopoćko 2003, s. 224-226; Tarczyński 2003, s. 38-39].

Podczas wyceny kontraktów terminowych *futures* przyjmuje się najczęściej, iż w momencie zawarcia kontrakt ma wartość zerową, gdyż cena jego rozliczenia (*settlement price*) ustalana jest w taki sposób, by wartość kontraktu wynosiła zero. Strony wnoszą, co prawda, depozyty zabezpieczające, ale nie mogą one być utożsamiane z zapłatą za kontrakt¹.

¹ W tym miejscu warto zauważyć, iż w odniesieniu do kontraktów *futures* cena i wartość są odrębnymi pojęciami.

3. Model wyceny *futures* na akcje nie wypłacające dywidendy

Problem wyceny kontraktów terminowych *futures* sprowadza się do ustalenia ich sprawiedliwej ceny rozliczenia (wykonania). U podstaw takiej wyceny leży zasada arbitrażu, sprawiająca, iż w określonym czasie każde dwa instrumenty charakteryzujące się identycznymi funkcjami wypłaty będą tak samo wyceniane.

Ponadto, by sformułować model wyceny finansowych kontraktów *futures*, należy przyjąć pewne założenia dotyczące rynku, na którym kontrakty te funkcjonują. Do podstawowych założeń należą:

1. Brak możliwości prowadzenia arbitrażu zarówno dla kontraktów *futures*, jak i ich instrumentów bazowych.

2. Brak kosztów transakcyjnych.

3. Istnienie możliwości przeprowadzenia tzw. krótkiej sprzedaży (*short sell*), rozumianej jako pożyczanie akcji, ich sprzedaż i odkupienie oraz oddanie według wolnej od ryzyka stopy procentowej.

4. Istnienie jednakowego i stałego w czasie trwania kontraktu oprocentowania kredytów i depozytów bankowych [Dębski 2002, s. 322-323].

Przy założeniu, że wolna od ryzyka stopa procentowa jest stała, cenę kontraktu *futures* na aktywa nie przynoszące dywidendy w terminie do wygaśnięcia można wyrazić jako:

$$X = S_0 \cdot e^{r \cdot T} \quad (1)$$

gdzie: X – cena kontraktu *futures*;

S_0 – bieżąca cena instrumentu bazowego;

r – wolna od ryzyka stopa procentowa;

T – czas do terminu wygaśnięcia kontraktu *futures*;

e – podstawa logarytmu naturalnego.

Z kolei wartość kontraktu kupna w dowolnym momencie t można wyrazić jako:

$$f_{t,k} = S - K \cdot e^{-r \cdot T} \quad (2)$$

gdzie: $f_{t,k}$ – wartość kontraktu terminowego kupna w momencie bieżącym t ;

K – cena wykonania kontraktu *futures*;

S – cena instrumentu bazowego na rynku kasowym w momencie zawierania kontraktu; pozostałe oznaczenia jak wyżej.

Ponieważ wartość kontraktu terminowego sprzedaży jest równa ujemnej wartości takiego samego kontraktu kupna, zapisać ją możemy jako:

$$f_{t,s} = K \cdot e^{-r \cdot T} - S \quad (3)$$

gdzie: $f_{t,s}$ – wartość kontraktu terminowego sprzedaży w momencie bieżącym t ; pozostałe oznaczenia jak wyżej [Wilmott, Howison, Dewynne 1999, s. 99-100].

4. Opis doświadczenia

W niniejszym artykule przedstawiono przypadek wyceny kontraktów terminowych *futures* na akcje trzech wybranych spółek notowanych na frankfurckiej giełdzie Eurex². Na potrzeby doświadczenia ustalono, iż wszystkie kontrakty miały pięciomiesięczny termin wykonania, a wolna od ryzyka stopa procentowa wynosiła $r = 0,0388$.

Postępowanie rozpoczęto od wyliczenia niezaburzonych wartości poszczególnych kontraktów dla różnych cen wykonania *futures* (K) i/lub różnych aktualnych cen rozpatrywanych walorów bazowych (S). Następnie sprawdzono, jak wyliczone wartości kontraktów kupna i sprzedaży ($f_{t,k}$ oraz $f_{t,s}$) reagowały na wprowadzane do modeli wyceny zakłócenia w postaci stochastycznych stóp procentowych (r_s). Dokonano tego przy wykorzystaniu symulacji stochastycznej. Stopę procentową (r) zaburzono, przyjmując założenie, że wprowadzane do niej zakłócenia (ζ) mają rozkład normalny. Dopiero na podstawie zaburzonej wartości r_s wyznaczono kolejne zakłócone wartości $f_{t,kj}$ oraz $f_{t,sj}$, gdzie $j = 1, \dots, 5000$.

5. Prezentacja i interpretacja otrzymanych wyników

W poniższych tabelach zademonstrowano, jak kształtowały się niezakłócone oraz zaburzone wartości finansowych kontraktów *futures* na akcje wybranych trzech spółek notowanych na terminowej giełdzie Eurex. W tabelach 1, 2 i 3 przedstawiono przypadki dla różnych cen akcji (S) i stałych cen wykonania (K). Z kolei w tab. 4, 5 oraz 6 zaprezentowano wartości akcyjnych *futures* zakupowych i sprzedaży dla różnych cen wykonania (K) i stałych cen akcji (S).

Tabela 1. Wartości *futures* zakupowych i sprzedaży na akcje Banco Bilbao dla różnych cen akcji (S) i ceny wykonania $K = 13,53$

Cena instrumentu bazowego (S)	Typ <i>futures</i>	Wartość niezakłócona	Wartości zakłócone	
13,53	$f_{t,k}$	0,2200	0,2104	0,2306
	$f_{t,s}$	-0,2200	-0,2104	-0,2306
15,00	$f_{t,k}$	1,6870	1,6773	1,6975
	$f_{t,s}$	-1,6870	-1,6773	-1,6975
10,00	$f_{t,k}$	-3,3130	-3,3227	-3,3025
	$f_{t,s}$	3,3130	3,3227	3,3025

Źródło: opracowanie własne.

² Rozpatrywano tu *futures* na akcje Banco Bilbao (BB), Repsol (R) oraz SAP (SAP). Przyjęto jednocześnie upraszczające założenie, iż akcje te nie przynoszą dywidendy.

Z analizy powyższych danych wynika, iż dla stałej ceny wykonania (K) i zmieniającej się ceny akcji (S) największe odchylenia w wartościach *futures* następowały, gdy $K = S$.

Interesujący inwestora poziom wartości *futures* kupna zmieniał się wtedy w następujących granicach:

- 1) dla akcji Banco Bilbao $\langle 0,2104; 0,2306 \rangle$;
- 2) dla akcji Repsol $\langle 0,3924; 0,4202 \rangle$;
- 3) dla akcji SAP $\langle 0,5529; 0,5892 \rangle$.

Tabela 2. Wartości *futures* zakupowych i sprzedaży na akcje Repsol dla różnych cen akcji (S) i ceny wykonania $K = 25,48$

Cena instrumentu bazowego (S)	Typ <i>futures</i>	Wartość niezakłócona	Wartości zakłócone	
25,48	$f_{t,k}$	0,4070	0,3924	0,4202
	$f_{t,s}$	-0,4070	-0,3924	-0,4202
28,00	$f_{t,k}$	2,9286	2,9141	2,9419
	$f_{t,s}$	-2,9286	-2,9141	-2,9419
20,00	$f_{t,k}$	-5,0714	-5,0859	-5,0581
	$f_{t,s}$	5,0714	5,0859	5,0581

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3. Wartości *futures* zakupowych i sprzedaży na akcje SAP dla różnych cen akcji (S) i ceny wykonania $K = 35,67$

Cena instrumentu bazowego (S)	Typ <i>futures</i>	Wartość niezakłócona	Wartości zakłócone	
35,67	$f_{t,k}$	0,5703	0,5529	0,5892
	$f_{t,s}$	-0,5703	-0,5529	-0,5892
38,00	$f_{t,k}$	2,9020	2,8846	2,9210
	$f_{t,s}$	-2,9020	-2,8846	-2,9210
33,00	$f_{t,k}$	-2,0980	-2,1154	-2,0790
	$f_{t,s}$	2,0980	2,1154	2,0790

Źródło: opracowanie własne.

Najmniejsze rozpiętości przedziałów występowały natomiast dla *futures* na akcje Banco Bilbao i Repsol, gdy $K > S$, oraz dla kontraktów na akcje SAP, gdy $K < S$. Przedziały zmian zaburzonych wartości *futures* wynosiły wtedy odpowiednio:

- 1) dla akcji Banco Bilbao $\langle -3,3227; -3,3025 \rangle$;
- 2) dla akcji Repsol $\langle -5,0859; -5,0581 \rangle$;
- 3) dla akcji SAP $\langle 2,8846; 2,9210 \rangle$.

W tych przedziałach zwiększała się jednocześnie niepewność inwestora co do ewentualnej wielkości przewidywanych w przyszłości zysków bądź strat.

Tabela 4. Wartości *futures* zakupowych i sprzedaży na akcje Banco Bilbao dla różnych cen wykonania (K) i ceny akcji $S = 13,53$

Cena wykonania (K)	Typ <i>futures</i>	Wartość niezakłócona	Wartości zakłócone	
15,00	$f_{t,k}$	-1,2264	-1,2371	-1,2147
	$f_{t,s}$	1,2264	1,2371	1,2147
10,00	$f_{t,k}$	3,6934	3,6863	3,7012
	$f_{t,s}$	-3,6934	-3,6863	-3,7012

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 5. Wartości *futures* zakupowych i sprzedaży na akcje Repsol dla różnych cen wykonania (K) i ceny akcji $S = 25,48$

Cena wykonania (K)	Typ <i>futures</i>	Wartość niezakłócona	Wartości zakłócone	
28,00	$f_{t,k}$	-2,0726	-2,0886	-2,0580
	$f_{t,s}$	2,0726	2,0886	2,0580
20,00	$f_{t,k}$	5,7991	5,7877	5,8095
	$f_{t,s}$	-5,7991	-5,7877	-5,8095

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 6. Wartości *futures* zakupowych i sprzedaży na akcje SAP dla różnych cen wykonania (K) i ceny akcji $S = 35,67$

Cena wykonania (K)	Typ <i>futures</i>	Wartość niezakłócona	Wartości zakłócone	
38,00	$f_{t,k}$	-1,7224	-1,7409	-1,7022
	$f_{t,s}$	1,7224	1,7409	1,7022
33,00	$f_{t,k}$	3,1974	3,1814	3,2149
	$f_{t,s}$	-3,1974	-3,1814	-3,2149

Źródło: opracowanie własne.

Jak wynika z kolei z powyższych danych (tab. 4, 5 oraz 6), dla stałej ceny akcji (S) oraz zmieniającej się ceny wykonania (K) niepewność inwestora co do trafności oceny, czy dany kontrakt będzie przewartościowany, czy niedowartościowany była najmniejsza w sytuacji, gdy $K < S$.

Rozpiętości przedziałów zmian zaburzonych wartości *futures* zakupowych kształtowały się wtedy następująco:

1) Banco Bilbao $\langle 3,6863; 3,7012 \rangle$;

2) Repsol $\langle 5,1877; 5,8095 \rangle$;

3) SAP $\langle 3,1814; 3,2149 \rangle$.

Analogiczne przedziały dla *futures* sprzedażowych wyglądały zaś następująco:

1) Banco Bilbao $\langle -3,6863; -3,7012 \rangle$;

2) Repsol $\langle -5,1877; -5,8095 \rangle$;

3) SAP $\langle -3,1814; -3,2149 \rangle$.

Na koniec prezentowanych rozważań w tab. 7, 8 i 9 zestawiono informacje o tym, o ile procent odchylają się zaburzone wartości kontraktów *futures* od swoich wartości niezakłóconych. Wydaje się bowiem, iż właśnie na tego typu danych najlepiej widać, jaki wpływ na wartość *futures* miało wprowadzenie do modeli wyceny stochastycznych stóp procentowych.

Dane z tab. 7, 8 oraz 9 potwierdzają wcześniej wyciągnięte wnioski. Ponadto na ich podstawie można zauważyć, że:

1. Największe wahania wartości kontraktu *futures* (rzędu $\pm 4,5\%$) zachodziły, gdy stochastyczne stopy procentowe wprowadzano do modelu wyceny *futures* na akcje Banco Bilbao. Miało to miejsce wtedy, gdy zmieniająca się cena akcji (S) była równa stałej cenie wykonania kontraktu (K).

2. Wartość zakupowego kontraktu *futures* zmieniała się w najmniejszym zakresie dla *futures* na akcje Repsol w przypadku zmieniającej się ceny wykonania K i $K < S$. Wielkość odchylen wynosiła wtedy ok. 0,19%.

Tabela 7. Wielkość procentowych odchylen od niezakłóconych wartości kontraktów *futures* na akcje Banco Bilbao

Cena S lub K	Typ <i>futures</i>	Wartość niezakłócona	Odchylenia od wartości niezakłóconej (%)	
$S = 13,53$	$f_{i,k}$	0,2200	4,4053	4,5662
	$f_{i,s}$	-0,2200	4,4053	4,5662
$S = 15,00$	$f_{i,k}$	1,6870	0,5746	0,6202
	$f_{i,s}$	-1,6870	0,5746	0,6202
$S = 10,00$	$f_{i,k}$	-3,3130	0,2917	0,3178
	$f_{i,s}$	3,3130	0,2917	0,3178
$K = 15,00$	$f_{i,k}$	-1,2264	0,8687	0,9518
	$f_{i,s}$	1,2264	0,8687	0,9518
$K = 10,00$	$f_{i,k}$	3,6934	0,1940	0,2102
	$f_{i,s}$	-3,6934	0,1940	0,2102

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 8. Wielkość procentowych odchyień od niezakłóconych wartości kontraktów *futures* na akcje Repsol

Cena S lub K	Typ <i>futures</i>	Wartość niezakłócona	Odchylenia od wartości niezakłóconej (%)	
$S = 25,48$	$f_{t,k}$	0,4070	3,1568	3,5721
	$f_{t,s}$	-0,4070	3,1568	3,5721
$S = 28,00$	$f_{t,k}$	2,9286	0,4509	0,4964
	$f_{t,s}$	-2,9286	0,4509	0,4964
$S = 20,00$	$f_{t,k}$	-5,0714	0,2616	0,2858
	$f_{t,s}$	5,0714	0,2616	0,2858
$K = 28,00$	$f_{t,k}$	-2,0726	0,7034	0,7649
	$f_{t,s}$	2,0726	0,7034	0,7649
$K = 20,00$	$f_{t,k}$	5,7991	0,1792	0,1968
	$f_{t,s}$	-5,7991	0,1792	0,1968

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 9. Wielkość procentowych odchyień od niezakłóconych wartości kontraktów *futures* na akcje SAP

Cena S lub K	Typ <i>futures</i>	Wartość niezakłócona	Odchylenia od wartości niezakłóconej (%)	
$S = 35,67$	$f_{t,k}$	0,5703	3,0486	3,2131
	$f_{t,s}$	-0,5703	3,0486	3,2131
$S = 38,00$	$f_{t,k}$	2,9020	0,5991	0,6481
	$f_{t,s}$	-2,9020	0,5991	0,6481
$S = 33,00$	$f_{t,k}$	-2,0980	0,8218	0,9024
	$f_{t,s}$	2,0980	0,8218	0,9024
$K = 38,00$	$f_{t,k}$	-1,7224	1,0639	1,1709
	$f_{t,s}$	1,7224	1,0639	1,1709
$K = 33,00$	$f_{t,k}$	3,1974	0,5030	0,5448
	$f_{t,s}$	-3,1974	0,5030	0,5448

Źródło: opracowanie własne.

6. Uwagi końcowe

Zgodnie z tym, co zasygnalizowano na samym początku niniejszego artykułu, podjęto w nim próbę odpowiedzi na pytanie, czy i jaki wpływ na poprawność wyceny

zakupowych i sprzedażowych kontraktów *futures* na akcje nie wypłacające dywidendy mają stochastyczne stopy procentowe.

Wyniki doświadczeń pozwoliły na wyciągnięcie wniosku, iż wprowadzenie zakłóceń w postaci stochastycznych stóp procentowych do tego rodzaju modeli wyceny jest dla badanych przypadków z ekonomicznego punktu widzenia nieistotne. Odchylenia zaburzonych wartości kontraktów *futures* od ich wartości niezakłóconych nie przekraczały bowiem w żadnym z badanych przypadków $\pm 5\%$. Ponadto badania wykazały, że szerokości przedziału wartości kontraktu *futures*, w którym inwestor powinien zastanowić się co do dalszych kroków, jakie należy podjąć w celu osiągnięcia profitów, były nieznaczne.

Pozostaje to jednocześnie w zgodzie z wnioskami innych autorów zainteresowanych podobną tematyką. Wpływ stochastycznych stóp procentowych na wartość kontraktów *futures* badali bowiem m.in. Rendelman i Carabini; Cornell i Reinganum oraz Elton, Gruber i Rentzler. Wykazali oni w swoich badaniach, że stochastyczne stopy procentowe nie wywierają znaczącego wpływu na wartość *futures* na waluty, bony skarbowe oraz indeksy niektórych giełd [Cakici, Chatterjee 1991, s. 441-443].

Literatura

- Cakici N., Chatterjee S., *Pricing Stock Index Futures with stochastic interest rates*, "Journal of Futures Markets" 1991 (August) vol. 11, Issue 4.
- Dębski W., *Rynek finansowy i jego mechanizmy*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.
- Jajuga K., Jajuga T., *Inwestycje. Instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004.
- Krawiec B., Krawiec M., *Opcje na giełdach towarowych w Polsce*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.
- Ladko A., *Wybrane instrumenty rynku pieniężnego i kapitałowego – kalkulacja i stosowanie*, Biblioteka Menedżera i Bankowca, Warszawa 1994.
- Mishkin F.S., *Ekonomika pieniądza, bankowości i rynków finansowych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.
- Ratajczak L.A., *Wprowadzenie do transakcji terminowych i opcyjnych*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Bankowej, Poznań 1999.
- Sopoćko A., *Rynkowe instrumenty finansowe*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Przedsiębiorczości i Zarządzania im. Leona Koźmińskiego, Warszawa 2003.
- Tarczyński W., *Instrumenty pochodne na rynku kapitałowym*, PWE, Warszawa 2003.
- Wilmott P., Howison S., Dewynne J., *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge 1999.

THE INFLUENCE OF STOCHASTIC INTEREST RATES ON PRICING FINANCIAL FUTURES

Summary: Futures pricing is one of the most important issues while dealing with these terminal assets. Various pricing models are used to estimate value of futures contracts. In the very article, pricing models for futures on stocks not paying dividends are discussed. Then the impact of stochastic interest rates on futures value is investigated. Whole research is done for the data taken from Eurex stock exchange.