

**Daniel Papla**

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

---

## **ANALIZA ZMIAN ZALEŻNOŚCI MIĘDZY NOTOWANIAMISPÓLEK NA GPW W WARSZAWIE**

---

**Streszczenie:** W warunkach dużej zmienności sytuacji na rynkach finansowych ważne jest, zdaniem autora, zbadanie, jak zmienia się w czasie zależność między instrumentami. Analiza tych zmian jest głównym celem artykułu. Drugim celem jest zbadanie różnic i podobieństw wyników otrzymanych za pomocą dwóch różnych metod zastosowanych w artykule. Instrumentami analizowanymi w artykule są akcje spółek notowanych na naszej giełdzie.

Pierwsza część artykułu zawiera wprowadzenie w temat, w drugiej opisano dwie metody wykorzystane przez autora do mierzenia zmian zależności w czasie: model dynamicznego współczynnika korelacji (*Dynamic Correlation Coefficient* – DCC) oraz funkcję powiązań ze zmiennym w czasie współczynnikiem (współczynnikami). Trzecia część zawiera prezentację wyników badań empirycznych z wykorzystaniem danych z polskiej giełdy wraz z ich omówieniem.

### **1. Wstęp**

W warunkach dużej zmienności sytuacji na rynkach finansowych ważne jest, zdaniem autora, zbadanie, jak zmienia się w czasie zależność między instrumentami finansowymi. Analiza tych zmian jest głównym celem artykułu. Drugim celem jest zbadanie różnic i podobieństw wyników otrzymanych za pomocą dwóch różnych metod zastosowanych w artykule. Instrumentami analizowanymi w artykule są akcje spółek notowanych na polskiej giełdzie.

Artykuł składa się z trzech części. Pierwsza zawiera wprowadzenie w temat, w drugiej opisano dwie metody wykorzystane przez autora do mierzenia zmian zależności w czasie: model dynamicznego współczynnika korelacji (*Dynamic Correlation Coefficient* – DCC) oraz funkcję powiązań ze zmiennym w czasie współczynnikiem (współczynnikami). Trzecia część zawiera prezentację wyników badań empirycznych z wykorzystaniem danych z polskiej giełdy wraz z ich omówieniem.

## 2. Badanie zależności

Jednym ze zjawisk związanych z dynamiką zależności jest tzw. zarażanie rynków finansowych. Jak na razie brak jest ogólnie przyjętej definicji „zarażania” rynków finansowych (*contagion in financial markets*), najczęściej jednak przyjmuje się, że „zarażanie” występuje wtedy, kiedy podczas kryzysu obserwuje się znacznie zwiększoną zależność między ruchami cen na różnych rynkach finansowych [Bae, Karolyi, Stulz 2003].

Badania „zarażania” są obecnie bardzo popularne ze względu na obserwowany obecnie kryzys finansowy. Najczęściej bada się zarażanie między rynkami finansowymi w różnych krajach, w tym artykule autor badał również zarażanie między notowaniami różnych akcji na polskiej giełdzie.

W przypadku dwuwymiarowym w literaturze występuje bardzo wiele funkcji powiązań (por. np. funkcje przedstawione w pracach [Nelsen 1999; Armstrong 2003; Bouyé i. in. 2007; Embrechts, Lindskog, McNeil 2003; Genest, Rivest 1993; Rokita 2006]).

Przedstawione w tym artykule wyniki badań polskiej giełdy z wykorzystaniem funkcji powiązań nie są jedynymi występującymi w literaturze przedmiotu. Według wiedzy autora, większość tych badań została przeprowadzona przez pracowników ośrodka wrocławskiego. Gros jednak dotyczy przypadków dwuwymiarowych. Należy tu wymienić takie prace, jak: [Jajuga, Kuziak 2003; Jajuga, Papla 2005; 2006; Rokita 2006; Papla, Piontek 2009; Papla 2005a; 2005b; 2006]. W większości z tych prac analiza rynków kapitałowych (zwłaszcza polskiej giełdy) za pomocą funkcji powiązań pozwoliła wykazać takie ich zalety, jak:

- uwzględnianie innej struktury zależności niż liniowa, w tym uwzględnianie zależności w ogonach rozkładu,
- uwzględnianie grubych ogonów rozkładów brzegowych,
- uchwycenie pełnej struktury zależności między badanymi zmiennymi – postać funkcji powiązań w pełni oddaje zależność między zmiennymi,
- zastosowanie funkcji powiązań pozwala „ominać” problem nieznanomości postaci analitycznej rozkładu łącznego.

W artykule wykorzystano trzy modele zależności: DCC-GARCH oraz dwie funkcje powiązań: Gaussa i symetryczną Joego-Claytona. Model DCC-GARCH został wprowadzony na początku wieku XXI przez Engle’a [Engle 2002; Engle, Sheppard 2001]. Jego omówienie zawarte jest m.in. w pracy [Papla, Piontek 2009]. Umożliwia on zbadanie, jak zmieniały się w czasie współczynniki korelacji między wybranymi szeregami czasowymi.

### Funkcja powiązań Gaussa

Jest to uogólnienie rozkładu normalnego. W szczególnym przypadku, jeśli rozkłady brzegowe są określonymi rozkładami normalnymi, funkcja ta daje wielowymiarowy rozkład normalny. Wyraża się ona następującym wzorem:

$$C(u, v | \rho_G) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_G^2}} \exp\left\{\frac{-(r^2 - 2\rho rs + s^2)}{2(1-\rho_G^2)}\right\} dr ds,$$

gdzie:  $u, v$  – wartości dystrybuant dla rozkładów brzegowych,  
 $\rho_G$  – współczynnik mierzący siłę zależności.

Uzmiennienie współczynnika  $\rho_G$  – uzależnienie wartości współczynnika od czasu [Patton 2006] – uzyskuje się za pomocą następującego przekształcenia:

$$\rho_i^G = \tilde{\Lambda}\left(\omega_\rho + \beta_\rho \rho_{i-1}^G + \alpha_\rho \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} \Phi^{-1}(u_{t-j}) \Phi^{-1}(v_{t-j})\right)$$

$$\tilde{\Lambda}(x) = (1 + e^{-x})(1 + e^{-x})^{-1} = \tanh\left(\frac{x}{2}\right),$$

gdzie:  $\tilde{\Lambda}$  – zmodyfikowana transformacja logistyczna, sprawiająca, że wartość  $\rho_i^G$  będzie zawsze zawierała się w przedziale  $(-1, 1)$ .

### Symetryczna (symetryzowana) funkcja powiązań Joego-Claytona

Wyraża się ona następującym wzorem [Patton 2006]:

$$C_{SJC}(u, v | \tau^U, \tau^L) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (C_{JC}(u, v | \tau^U, \tau^L) + C_{JC}(1-u, 1-v | \tau^U, \tau^L) + u + v + 1),$$

gdzie:  $C_{JC}$  to funkcja powiązań Joego-Claytona [Joe 1997]:

$$C_{JC}(u, v | \tau^U, \tau^L) = 1 - \left(1 - \left\{ \left[1 - (1-u)^\kappa\right]^{-\gamma} + \left[1 - (1-v)^\kappa\right]^{-\gamma} - 1 \right\}^{-\frac{1}{\gamma}}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

$$\kappa = \frac{1}{\log_2(2 - \tau^U)}, \gamma = -\frac{1}{\log_2(\tau^L)}.$$

Parametr  $\tau^U$  mierzy zależność w górnym ogonie, a  $\tau^L$  – w dolnym ogonie. Obydwa parametry przyjmują wartości z przedziału  $(0, 1)$ .

Współczynniki funkcji powiązań SJC można uzależnić od czasu w następujący sposób [Patton 2006]:

$$\tau_t^U = \Lambda \left( \omega_U + \beta_U \tau_{t-1}^U + \alpha_U \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} |u_{t-j} - v_{t-j}| \right)$$

$$\tau_t^L = \Lambda \left( \omega_L + \beta_L \tau_{t-1}^L + \alpha_L \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} |u_{t-j} - v_{t-j}| \right)$$

$$\Lambda(x) = (1 + e^{-x})^{-1},$$

gdzie:  $\Lambda$  – transformacja logistyczna, sprawiająca, że wartości współczynników zawsze będą się zawierały w przedziale (0, 1).

### Estymacja parametrów

Estymacja parametrów modelu DCC-GARCH przebiega w dwóch etapach:

- w pierwszym etapie dla każdego z szeregow estymujemy model GARCH (w naszym przypadku GARCH(1, 1)),
- wyznaczone w ten sposób współczynniki jednowymiarowych modeli GARCH wykorzystuje się następnie w estymacji metodą największej wiarygodności parametrów modelu DCC,
- estymacja parametrów funkcji powiązań przebiega również dwuetapowo:
  - w pierwszym etapie wyznaczamy wartości dystrybuant rozkładów brzegowych, korzystając z dystrybuanty empirycznej,
  - wyznaczone w ten sposób wartości dystrybuant wykorzystuje się następnie w estymacji metodą największej wiarygodności parametrów funkcji powiązań.

### Algorytm obliczeń

Algorytm zastosowany w badaniach empirycznych składał się z następujących etapów:

1. Z danych wybierano wszelkie możliwe dwuelementowe zbiory szeregów czasowych.
2. Dla każdego szeregu czasowego wchodzącego w skład danego zbioru estymowano model VAR z opóźnieniem równym 1.
3. Dla reszt modelu VAR otrzymanego w poprzednim etapie estymowano model DCC(1, 1) GARCH.
4. Również dla reszt modelu VAR otrzymanego w etapie 2 estymowano parametry funkcji powiązań Gaussa oraz SJC za pomocą dwuetapowej procedury opisanej powyżej.

## 3. Wyniki badań empirycznych

W badaniach empirycznych wykorzystanoienne kursy akcji notowanych na GPW w Warszawie (Dębica, Forte, Jutrzenka, Kęty, KGHM, Millennium, Mostostal Export, Optimus, PGF, Próchnik, Stalexport, Swarzędz, TP SA i Żywiec) oraz indeks WIG20.

Okres badań obejmował notowania od 18.11.1998 r. do 06.07.2009 r., łącznie wykorzystano 2495 dziennych stóp zwrotu.

Dla całego badanego okresu dynamika zmian powiązania mierzona każdą z analizowanych miar nie wykazuje wyraźnych tendencji, nie widać okresów o zwiększonej lub zmniejszonej zależności, co można uznać za argument przeciwko wspomnianemu wcześniej zarządzeniu<sup>1</sup>.

**Tabela 1.** Wyniki dla okresu 2006.10.23-2007.10.29

	$\rho$	$\rho_G$	$\tau^U$	$\tau^L$	Korelacja $\rho_i^G \rho_i^{DCC}$
$\rho$					
'kghm-tpsa'	0,4401	0,4563	0,2979	0,2210	-0,5046
'kety-optimus'	0,0003	0,0958	0,0000	0,0712	-0,2898
$\rho_G$					
'kghm-mostalexp'	0,3558	0,3784	0,0434	0,3404	-0,7594
'debica-zywiec'	0,0653	0,0438	0,0001	0,0000	-0,2167
$\tau^L$					
'mostalexp-stalexp'	0,4887	0,5412	0,2417	0,4679	0,8327
'kghm-pgf'	0,1579	0,1098	0,0746	0,0000	-0,6276
Korelacja $\rho_i^G \rho_i^{DCC}$					
'forte-millennium'	0,2746	0,2305	0,0692	0,1099	0,9054
'stalexp-tpsa'	0,2780	0,3057	0,0205	0,2334	-0,8168

Źródło: opracowanie własne.

**Tabela 2.** Wyniki dla okresu 2007.10.30-2008.11.20

	$\rho$	$\rho_G$	$\tau^U$	$\tau^L$	Korelacja $\rho_i^G \rho_i^{DCC}$
$\rho$					
'prochnik-stalexp'	0,5742	0,5793	0,4147	0,4069	0,5987
'tpsa-zywiec'	0,0682	0,1125	0,0000	0,0637	0,1179
$\rho_G$					
'mostalexp-stalexp'	0,5017	0,5906	0,2903	0,4852	-0,0819
'jutrozenka-zywiec'	0,0808	0,0345	0,0000	0,0129	0,0702
$\tau^L$					
'mostalexp-stalexp'	0,5017	0,5906	0,2903	0,4852	-0,0819
'jutrozenka-pgf'	0,1821	0,2013	0,2048	0,0000	0,1986
Korelacja $\rho_i^G \rho_i^{DCC}$					
'optimus-tpsa'	0,2564	0,3440	0,0067	0,2957	0,9362
'pgf-tpsa'	0,2795	0,2719	0,0925	0,1701	-0,8337

Źródło: opracowanie własne.

<sup>1</sup> Wyniki dostępne na życzenie u autora.

Aby dokładniej przyjrzeć się kształtowaniu zależności na polskiej giełdzie, wyróżniono dwa okresy: wzrostu notowań, okres od 2006.10.23 do 2007.10.29, oraz spadku notowań, okres od 2007.10.30 do 2008.11.20. Okresy zostały wyznaczone na podstawie notowań indeksu WIG20.

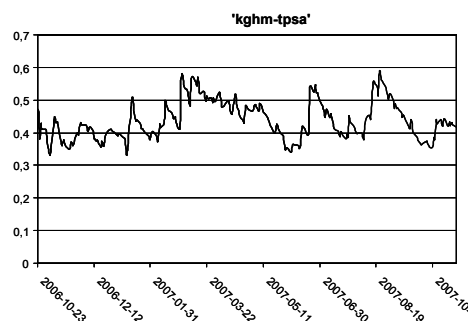
W tabelach 1 i 2 zaprezentowano wyniki estymacji bezwarunkowych funkcji powiązań dla całego badanego okresu. Ze względu na dużą liczbę par akcji w tabelach zaprezentowano jedynie te o najwyższej i najniższej wartości danego współczynnika, jeśli zaś pary się powtarzały, prezentowano wyniki dla kolejnych par.  $\rho$  oznacza wartość współczynnika korelacji liniowej. Jak widać, pary najsilniej ze sobą powiązane według jednego z kryterium są również silnie powiązane według pozostałych kryteriów. Jednakże w ujęciu dynamicznym taka zależność nie zawsze występuje, na co wskazuje podana w ostatniej kolumnie wartość korelacji między współczynnikami uzyskanymi za pomocą modelu DCC i funkcji powiązań Gaussa.

**Tabela 3.** Procent współczynników wyższych w okresie bessy niż w okresie hossy

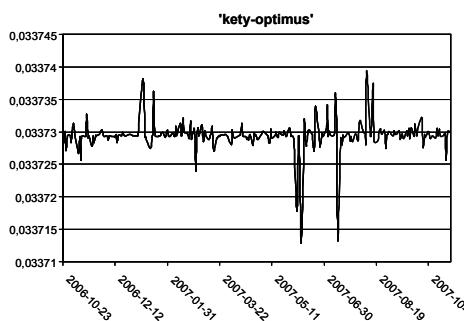
$\rho$	77,14%
$\rho_G$	87,62%
$\tau^U$	79,05%
$\tau^L$	69,52%

Źródło: opracowanie własne.

Porównując tab. 1 i 2, można stwierdzić, że zależność mierzona każdym ze współczynników jest nieco większa w okresie bessy (tab. 2) niż w okresie hossy (tab. 1). Podobną zależność można odczytać z porównania rys. 1-3 i 4-6. Potwierdzają to wyniki zawarte w tab. 3. Dla wszystkich badanych bezwarunkowych współczynników zależności powiązanie w okresie hossy jest w większości przypadków niższe niż w okresie bessy. Zdaje się to potwierdzać istnienie zarażania na polskim rynku kapitałowym, a dla inwestorów może oznaczać, że w okresach gwałtownych spadków nawet zdywersyfikowane inwestycje w akcje mogą być narażone na straty ze względu na zwiększoną w takim okresie zależność.



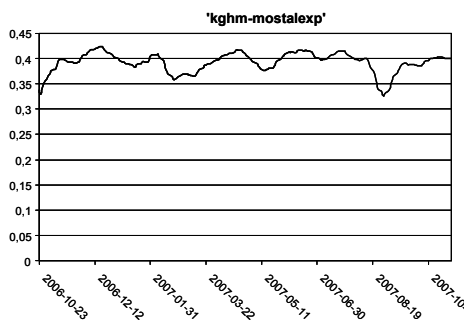
a)



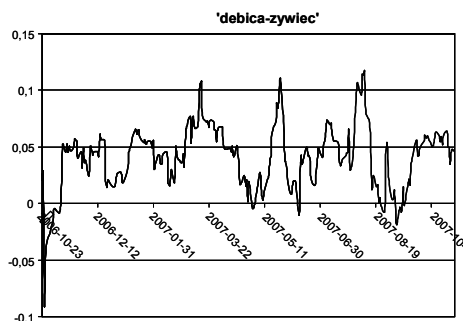
b)

**Rys. 1.** Zmiany współczynnika modelu DCC w czasie dla par spółek powiązanych a) najsilniej, b) najsłabiej

Źródło: opracowanie własne.



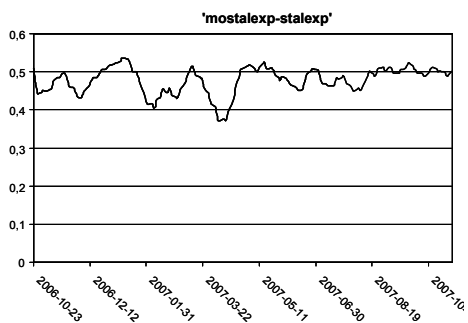
a)



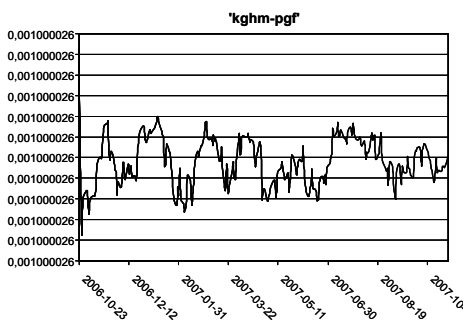
b)

**Rys. 2.** Zmiany współczynnika  $f$ . powiązań Gaussa w czasie dla par spółek powiązanych a) najsilniej, b) najsłabiej

Źródło: opracowanie własne.



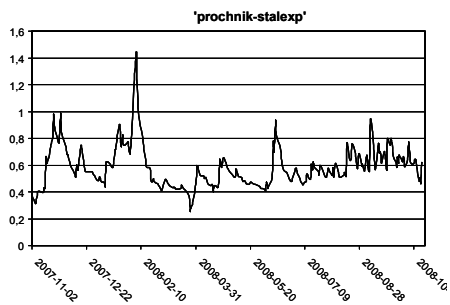
a)



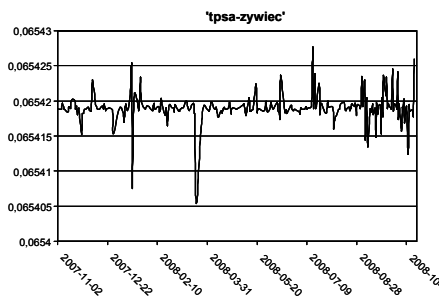
b)

**Rys. 3.** Zmiany współczynnika  $f$ . powiązań SJC w dolnym ogonie w czasie dla par spółek powiązanych a) najsilniej, b) najsłabiej

Źródło: opracowanie własne.



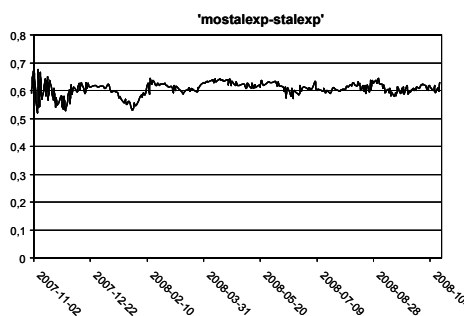
a)



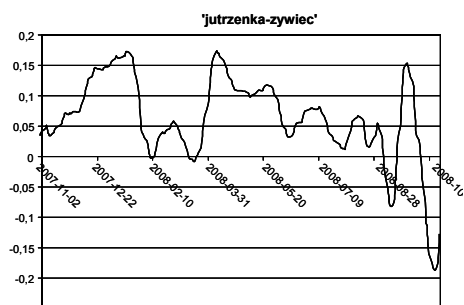
b)

**Rys. 4.** Zmiany współczynnika modelu DCC w czasie dla par spółek powiązanych a) najsilniej, b) najsłabiej

Źródło: opracowanie własne.



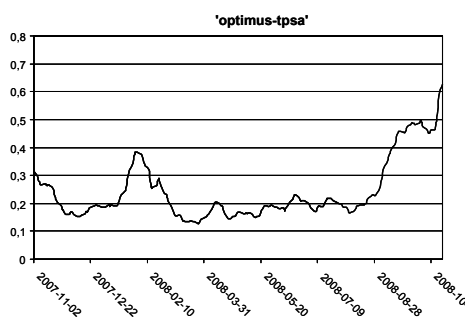
a)



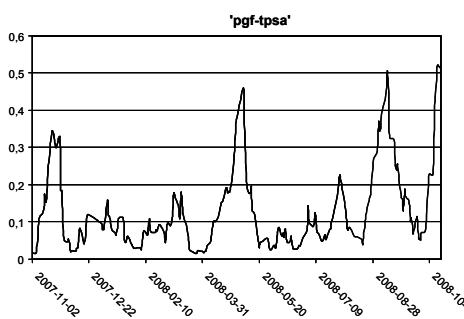
b)

**Rys. 5.** Zmiany współczynnika  $f.$  powiązań Gaussa w czasie dla par spółek powiązanych a) najsilniej, b) najslabiej

Źródło: opracowanie własne.



a)



b)

**Rys. 6.** Zmiany współczynnika  $f.$  powiązań SJC w dolnym ogonie w czasie dla par spółek powiązanych a) najsilniej, b) najslabiej

Źródło: opracowanie własne.

Analizując rys. 4-9, można stwierdzić, że w krótszych okresach zmienność zależności jest mniejsza dla spółek silniej ze sobą powiązanych, a dużo większa w przypadku spółek powiązanych słabiej. Oznacza to, że inwestor, znajdując dwie spółki mocno ze sobą powiązane w danej chwili, może liczyć na to, że powiązanie nie zmieni się zbytnio w najbliższej przyszłości. Dla dłuższego okresu taka zależność nie zachodzi.

Powyższe wnioski oczywiście nie mają charakteru ostatecznego ze względu na ograniczoną próbę wykorzystaną w badaniach. Jednakże zdaniem autora wskazują one na kierunki przyszłych badań. Ciekawy zwłaszcza wydaje się fakt zwiększonej zależności w okresach spadków. Aby sprawdzić, czy nie jest to jedynie artefakt związany z wybraną próbką, należałoby zwiększyć zakres badań, jeśli chodzi zarówno o liczbę spółek, jak i o okres badań.



## Literatura

- Armstrong M., *Copula Catalogue. Part 1: Bivariate Archimedean Copulas*, maszynopis, CERNA, Paryż 2003, <http://www.cerna.ensmp.fr>.
- Bae K.-H., Karolyi G.A., Stulz R.M., *A new approach to measuring financial contagion*, „The Review of Financial Studies” vol. 16, no 3 (Autumn 2003), s. 717-763.
- Bouyé E., Durrleman V., Nikeghbali A., Riboulet G., Roncalli T., *Copulas for Finance – A Reading Guide and Some Applications*, Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1032533>, 2007.
- Embrechts P., Lindskog F., McNeil A., *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*, [w:] *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*, red. S.T. Rachev, Elsevier/North-Holland, Amsterdam 2003.
- Engle R.F., *Dynamic conditional correlation – a simple class of multivariate GARCH models*, „Journal of Business and Economic Statistics” 2002, 20(3), s. 339-50.
- Engle R.F., Sheppard K., *Theoretical and Empirical Properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH*, Working Paper 8554, NBER 2001.
- Genest C., Rivest L.P., *Statistical inference procedures for bivariate archimedean copulas*, „Journal of the American Statistical Association” 1993 nr 88, s. 1034-1043.
- Jajuga K., Kuziak K., *Modeling Relationships in Multivariate Data*, [w:] *Klasyfikacja i analiza danych. Teoria i zastosowania*, Taksonomia 10, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 988, AE, Wrocław 2003, s. 461-471.
- Jajuga K., Papla D., *Copula Functions in Model Based Clustering*, [w:] *From Data and Information Analysis to Knowledge Engineering*, M. Spiliopoulou i in. (red.), Springer Verlag, Berlin 2006, s. 606-613.
- Jajuga K., Papla D., *Extreme Value Analysis and Copulas*, [w:] *Statistical Tools in Finance and Insurance*, P. Cizek, W. Härdle, R. Weron (red.), Springer, Berlin 2005, s. 45-64.
- Joe H., *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman & Hall, Boca Raton 1997.
- Nelsen R.B., *An Introduction to Copulas*, Springer Verlag, New York 1999.
- Papla D., *Analiza notowań na giełdach w Polsce i na świecie z wykorzystaniem warunkowego rozkładu alfa-stabilnego i funkcji copula*, [w:] *Klasyfikacja i analiza danych. Teoria i zastosowania*, Taksonomia 12, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1076, AE, Wrocław 2005a, s. 423-433.
- Papla D., *Klasyfikacja spółek notowanych na GPW w Warszawie z wykorzystaniem funkcji powiązań (copula functions)*, [w:] *Klasyfikacja i analiza danych. Teoria i zastosowania*, Taksonomia 13, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1126, AE, Wrocław 2006, s. 271-279.
- Papla D., *Wykorzystanie funkcji copula w budowie optymalnego portfela na przykładzie wybranych spółek notowanych na GPW w Warszawie*, [w:] *Dynamiczne modele ekonometryczne – materiały konferencyjne*, UMK, Toruń 2005b, s. 101-110.
- Papla D., *Zastosowanie modelu DCC-MGARCH oraz wybranych funkcji powiązań jako narzędzia analizy ryzyka za pomocą CVAR na przykładzie GPW w Warszawie*, Konferencja Katedr Finansów, Stan i perspektywy rozwoju rynków finansowych, UMK, Toruń 2008, s. 299-310.
- Papla D., Piontek K., *Zastosowanie rozkładów  $\alpha$ -stabilnych i funkcji powiązań (copula) w obliczaniu wartości zagrożonej (VaR)*, [w:] *Wyzwania współczesnych finansów*, red. K. Jajuga, UE, Wrocław 2009, s. 123-131.
- Patton A.J., *Modelling asymmetric exchange rate dependence*, „International Economic Review” 2006, 47(2).
- Rokita P., *Zastosowanie archimedesowskich funkcji powiązań (Archimedean copulas) o liczbie wymiarów większej niż 2 w analizie ryzyka portfela na rynku polskim*, [w:] *Klasyfikacja i analiza danych. Teoria i zastosowania*, Taksonomia 13, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1126, AE, Wrocław 2006, s. 280-288.

## THE ANALYSIS OF CHANGES OF DEPENDENCE BETWEEN STOCK MARKET RETURNS ON THE WARSAW STOCK EXCHANGE

**Summary:** In a highly volatile environment of financial markets it is very important, in author's opinion, to investigate changes of dependence between financial instruments in time. The main goal of this paper is to analyze those changes. The secondary goal is to investigate dissimilarities and similarities of results obtained by two different methods used in this paper. Returns of stocks from the Polish stock market were taken as financial instruments.

The paper consists of three parts. The first part contains introduction, the second one contains presentation of two methods used to measure changes of dependence in time: *dynamic correlation coefficient* – DCC and copula functions with time variant coefficient (coefficients). Research results and their interpretation are presented in the third part.