

Dr hab. inż. Zdzisław Śloderbach, prof. PO

Wydział Mechaniczny

Katedra Pojazdów Drogowych i Rolniczych

45-036 Opole, ul. Luboszycka 7

tel. 077/4538-447 w.142

e-mail: z.sloderbach@po.opole.pl

WARUNKI NIESTATECZNOŚCI

W ANALIZIE ODKSZTAŁCEŃ PLASTYCZNYCH

SPIS TREŚCI

Przedmowa	7
Rozdział I. Warunki jednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego w uogólnionej termoplastyczności	11
1. Wstęp	13
2. Warunki jednoznaczności i kryteria bifurkacyjne	14
2.1. Uwagi wstępne	14
2.2. Warunki konieczne jednoznaczności	15
2.3. Sformułowanie przyrostowego problemu brzegowego	16
2.4. Omówienie warunków i kryteriów	18
2.4.1. Globalny warunek jednoznaczności i kryterium bifurkacji	18
2.4.2. Warunek lokalny jednoznaczności i kryterium lokalne	26
2.5. Przypadki szczególne lokalnego warunku jednoznaczności	28
3. Uwagi końcowe i wnioski	30
Dodatek A	34
Rozdział II. Krytyczne wartości funkcji i modułów wzmocnienia dla wybranych materiałów	37
1. Wstęp	37
2. Równania konstytutywne i opis wybranych materiałów	39
2.1. Równania uwzględniające niestowarzyszone prawa plastycznego płynięcia	39
2.1.1. Równania elipsoidalne	39
2.1.2. Równania Druckera-Pragera	42
2.1.3. Równania Jenike-Shielda	45
2.1.4. Równania Rice'a-Rudnickiego	47
2.2. Równania uwzględniające stowarzyszone prawa plastycznego płynięcia	52
2.2.1. Warunek plastyczności Misesa-Schleichera	52
2.2.2. Warunek plastyczności Misesa-Hilla	54
2.2.3. Warunek plastyczności Druckera	56
2.2.4. Warunek plastyczności Coulomba-Mohra	56
3. Uwagi i wnioski	57

Rozdział III. Szacowanie stanów lokalizacji odkształceń plastycznych	61
1. Wstęp	61
2. Porównanie lokalnego warunku jednoznaczności z warunkiem lokalizacji odkształceń (R-R)	61
2.1. Omówienie warunku na lokalizację odkształceń (R-R)	61
2.2. Postać lokalnego warunku jednoznaczności dla przypadku równań konstytutywnych Rice'a-Rudnickiego (R-R)	65
2.3. Porównanie dwóch lokalnych warunków	66
3. Rozszerzone uwagi o lokalnym warunku jednoznaczności i warunku lokalizacji odkształceń plastycznych (R-R)	72
4. Uwagi końcowe i wnioski	74
Rozdział IV. Stany krytyczne w adiabatycznym procesie sprężysto-plastycznego odkształcania	77
1. Wstęp	77
2. Model ciała sprężysto-plastycznego z izotropowym wzmocnieniem	77
3. Uproszczony lokalny warunek jednoznaczności	79
4. Nieizotermiczne – adiabatyczne skręcanie metalowych grubo- i cienkościennych rurek	86
4.1. Rurka grubościenna	87
4.2. Rurka cienkościenna	95
5. Uwagi końcowe i wnioski	96
Rozdział V. Dopuszczalne wartości odkształceń i naprężeń oraz kąta gięcia podczas gięcia rur	99
1. Wstęp	99
2. Podstawowe założenia i zależności	102
3. Analizowane przypadki utraty stateczności	105
4. Krytyczne odkształcenia i naprężenia – inicjacja (PSO)	115
5. Analiza otrzymanych rezultatów	117
6. Proste przykłady obliczeniowe stanów krytycznych	122
7. Uwagi i wnioski	128
Rozdział VI. Warunki utraty stateczności w próbie hydraulicznego wybrzuszania wytłoczek	131
1. Wstęp	131
2. Cel i podstawowe założenia	134
3. Określenie stanów utraty stateczności	137

3.1. Podstawowe równania i zależności	137
3.2. Odształcenia graniczne wynikające z warunków utraty stateczności	139
4. Omówienie otrzymanych wyników	144
5. Uwagi końcowe i wnioski	151
Rozdział VII. Przewężanie oraz kruszenie bloków materiału przez dwa przeciwbieżne płaskie stemple	153
1. Wstęp	153
2. Naciski podczas przewężania i przecinania bloków wykonanych z materiałów metalicznych	154
2.1. Zastosowane metody obliczeń	155
2.1.1. Metoda charakterystyk	155
2.1.2. Metoda kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości odształceń	156
2.1.3 Metoda statycznie dopuszczalnych pól naprężeń	156
2.2. Omówienie i analiza otrzymanych wyników	161
2.3. Uwagi i wnioski	163
3. Ściskanie i rozdzielanie bloków wykonanych z gruntów lub materiałów kruchych i półkruchych	164
3.1. Podstawowe założenia wyjściowe	165
3.2. Zastosowane metody obliczeń	166
3.2.1. Metoda charakterystyk	166
3.2.2. Metody nośności granicznej – oszacowania górne i dolne	167
3.3. Omówienie i analiza otrzymanych wyników	170
3.4. Uwagi końcowe	172
Literatura	175
Streszczenie	187
Summary	188

PRZEDMOWA

Książka poświęcona jest analizie i zastosowaniu wybranych nieizotermicznych i izotermicznych warunków niestateczności podczas odkształceń plastycznych. Analiza i zastosowania dotyczą metod określania (wyznaczania) niektórych stanów niestateczności odkształceń plastycznych dla wybranych rodzajów materiałów i elementów konstrukcji. Analizowane stany niestateczności mogą powstać zarówno w procesach quasi-statycznych obciążeń mechanicznych jak i cieplno-mechanicznych. Najczęściej stany takie mogą wystąpić w technologicznych procesach wytwarzania wyrobów metodami plastycznego kształtowania, podczas obciążania statycznego i quasi-statycznego elementów konstrukcyjnych wykonanych z materiałów plastycznych, półkruchych i kruchych, podczas rozdrabniania materiałów kruchych itp. Stany takie wystąpić mogą również podczas eksploatacji wielu elementów maszyn i urządzeń, podczas której występują plastyczne deformacje. Pod ogólnym pojęciem niestateczności odkształceń plastycznych rozumie się: stany niejednoznaczności rozwiązań problemu brzegowego termo-sprężysto-plastyczności, bifurkacje stanów równowagi, lokalizacje odkształceń plastycznych w postaci np. szyjki, bruzdy, płaszczyzny lokalizacji, pasma i płaszczyzny ścinania, stany lokalizacji odkształceń podczas procesów ściskania, stany lokalizacji ścinania w procesach lokalnie adiabatycznych odkształceń podczas np. obróbki skrawaniem z dużymi prędkościami czy też stany zarodkowania i inicjacji mikro- i makropęknięć podczas obciążeń mechanicznych i cieplno-mechanicznych, a także inne.

Analiza wybranych stanów niestateczności odkształceń plastycznych przeprowadzona została dla modelu sprzężonej termo-sprężysto-plastyczności na poziomie opisu makroskopowego w ramach mechaniki ośrodków ciągłych

Jako wyroby i elementy konstrukcyjne rozpatrywano kolejno: skręcane grubo- i cienkościenne rury, kolana instalacji rurowych, powłoki (czasze) kuliste, bloki metalowe w stanie gorącym, bloki z materiałów typu grunty, skały itp.

Do parametrów określających krytyczne stany niestateczności odkształceń plastycznych w procesach termo-sprężysto-plastycznych odkształceń możemy zaliczyć: wartości krytyczne funkcji wzmocnienia i stycznych modułów wzmocnienia, wartości krytyczne obciążeń i naprężeń, odkształceń plastycznych i odpowiadające im wartości pracy odkształcenia plastycznego, temperaturę, wartości krytyczne kąta skręcenia podczas skręcania cienko- i grubościennych rurek lub prętów, strzałki ugięcia powłok lub głębokości tłoczenia i inne.

Książka składa się z siedmiu powiązanych ze sobą tematycznie rozdziałów w taki sposób, że każdy z nich stanowi także odrębny problem naukowo-badawczy z zakresu teoretycznej i stosowanej mechaniki oraz techniki.

W rozdziale I przedstawiono równania pola sprzężonej uogólnionej termoplastyczności dla ciał o niestowarzyszonych i stowarzyszonych prawach plastycznego płynięcia, uwzględniając także duże odkształcenia (duże gradienty

przemieszczeń i ich prędkości). Dla tych ciał wyprowadzono odpowiednie ciała porównawcze. Wyprowadzono dla tych ciał kolejno: konieczne i dostateczne globalne oraz lokalne warunki jednoznaczności rozwiązania sformułowanego przyrostowego problemu brzegowego termo-sprężysto-plastyczności, a także wyprowadzono odpowiednie kryteria bifurkacyjne. Warunki i kryteria wyprowadzono, analizując problem jednoznaczności rozwiązania sformułowanego podstawowego przyrostowego (prędkościowego) problemu brzegowego sprzężonej uogólnionej termo-sprężysto-plastyczności. Niniejszy rozdział jest dalszym rozwinięciem wcześniejszych prac autora, por. np. [142-144]. Oryginalnym elementem jest wyprowadzenie globalnego i lokalnego kryterium wykluczającego możliwość wystąpienia stanu bifurkacji (rozdwojenia) stanu równowagi dla „ciała porównawczego” zależnego od statycznie dopuszczalnych pól prędkości naprężeń oraz uwzględnienie dużych odkształceń (duże gradienty przemieszczeń i ich prędkości). Podobnie jak w poprzednich pracach autora, do analizy przyjęto w ogólności niestowarzyszone prawa plastycznego płynięcia oraz ogólny warunek dla ewolucji parametrów wewnętrznych. Uwzględniono wpływ odkształceń plastycznych na własności termosprężyste ciała, a także uwzględniono wszystkie sprzężenia termomechaniczne analizowane w cytowanych pracach. Z powodu takiego przyjęcia, rozpatrywany tutaj problem matematyczny nie jest problemem samosprężonym, por. np. [27-36], [142, 144]. Na końcu rozdziału zamieszczony jest Dodatek A, w którym zamieszczono wyprowadzenie podstawowego dowodu twierdzenia tak, aby ułatwić analizę fizycznych aspektów uzyskanych wyników w podstawowym tekście pracy.

W rozdziale II wyspecyfikowano szczególne przypadki równań konstytutywnych oraz lokalnego warunku jednoznaczności dla szeregu wybranych ciał z grupy materiałów porowatych, proszków spiekanych, skał, gruntów i betonu oraz dla mniej plastycznych (półkruchych) metali i ich stopów eksploatowanych np. przez długi czas w warunkach obciążeń cieplno-mechanicznych, a także dla materiałów metalicznych. Materiały takie są opisywane następującymi równaniami konstytutywnymi: elipsoidalnymi, Druckera-Pragera, Jenike-Shilda, Rice'a-Rudnickiego, Hubera-Misesa-Hencky'ego, Coulomba-Mohra itp. Materiały opisywane tymi równaniami konstytutywnymi są stosowane w wielu gałęziach przemysłu, w tym i w energetyce. W przypadku mniej ogólnych modeli ciał funkcje konstytutywne występujące w lokalnym warunku jednoznaczności będą przyjmować bardziej prostą postać. Dla tych wybranych rodzajów materiałów wyprowadzone zostały także konieczne lokalne warunki możliwego wystąpienia stanu lokalizacji odkształceń plastycznych w postaci płaszczyzny lokalizacji Rice'a-Rudnickiego (R-R) [127, 128]. Wykazano, że lokalny dostateczny warunek jednoznaczności rozwiązania sformułowanego przyrostowego (prędkościowego) problemu brzegowego sprzężysto-plastyczności ze znakiem (\leq) po prawej stronie staje się lokalnym koniecznym warunkiem możliwego wystąpienia rozdwojenia (bifurkacji) w postaci niestateczności odkształceń plastycz-

nych. Wyprowadzone lokalne dostateczne warunki jednoznaczności dla przedstawionych 9 modeli ciał sprężysto-plastycznych o niestowarzyszonych i stowarzyszonych prawach plastycznego płynięcia są najczęściej wykorzystywane i cytowane w rozpoznanej literaturze.

W rozdziale III porównano lokalny warunek jednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego sprężysto-plastyczności z lokalnym warunkiem lokalizacji odkształceń (R-R). Ten rozdział pracy jest kontynuacją wcześniejszych prac autora [142, 145], w których wykorzystywano dostateczny lokalny warunek wykluczający stan rozdwojenia równowagi (bifurkacja) celem porównania go z warunkiem koniecznym lokalizacji odkształceń plastycznych (w postaci płaszczyzny lokalizacji) Rice'a-Rudnickiego. Obecnie porównano wyniki obliczeniowe ograniczeń nakładanych na izotermiczną funkcję wzmocnienia przez wyprowadzony w pracach autora [142, 144] lokalny warunek wykluczający możliwość wystąpienia stanu rozdwojenia z warunkiem na lokalizację odkształceń plastycznych Rice'a-Rudnickiego. Porównano więc de facto dwa konieczne warunki, ponieważ warunek wykluczający stan rozdwojenia równowagi ze znakiem (\leq) po prawej stronie staje się formalnie warunkiem koniecznym wystąpienia stanu rozdwojenia równowagi. Wykazano więc, że lokalny warunek jednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego sprężysto-plastyczności jest warunkiem bezpieczniejszym z punktu widzenia obciążeń, tzn. dopuszcza mniejsze ich wartości aniżeli lokalny warunek lokalizacji odkształceń (R-R). Dokonana została pogłębiona analiza porównawcza tych warunków i sformułowane zostały zalecenia co do kierunku przyszłych badań.

W rozdziale IV przedstawiono problem czystego adiabatycznego ścinania dla szeregu wybranych materiałów metalicznych o określonych parametrach materiałowych, takich jak: parametr wrażliwości granicy plastyczności z temperaturą i parametrem wzmocnienia. Określono wartość krytyczną adiabatycznej funkcji wzmocnienia, wartość krytyczną pochodnej dla adiabatycznej krzywej umocnienia, krytyczne wartości odkształceń plastycznych, naprężeń i temperatury. Analizowano także proces skręcania grubo i cienkościennych metalowych rurek. Otrzymane rezultaty obliczeniowe przedstawiono w postaci odpowiednich wykresów, które mają charakter użytecznych nomogramów.

W rozdziale V zbadano wpływ parametrów wzmocnienia materiału i anizotropii normalnej na dopuszczalne i krytyczne wartości kąta gięcia oraz wielkości odkształcenia (z uwzględnieniem i bez uwzględnienia przesunięcia osi obojętnej), podczas gięcia na zimno metalowych cienko i grubościennych rur na giętarzach dla kątów gięcia $\langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$. Jako kryteria przyjęto warunki rozproszonej i zlokalizowanej utraty stateczności giętej rury oraz kryterium pęknięcia w oparciu o technologiczny wskaźnik A_5 . Oryginalnym wkładem pracy jest rozszerzenie kryterium lokalizacji odkształceń w postaci możliwej inicjacji bruzdy, (które wyprowadzone zostało przez Marciniaka dla blach [73]), na przypadek gięcia cienko- a nawet quasi-grubościennych metalowych rur na giętarzach.

Pojawianie się podczas gięcia rur stanów utraty stateczności (szczególnie tych w postaci zlokalizowanej) jeszcze bardziej i znacząco trwałość eksploatacyjną skróci. Dlatego zaleca się, aby w technologii gięcia rur na kolana rurociągów lub instalacji rurowych nie dopuszczać do pojawiania się tych stanów.

W rozdziale VI omówiono problemy utraty stateczności podczas hydraulicznego wybrzuszania (wytlaczania) okrągłych metalicznych wytłoczek za pomocą ciśnienia cieczy. Celem analizy jest zbadanie tłoczności blach poprzez oszacowanie dopuszczalnych wartości odkształceń plastycznych i odpowiadających im wysokości czaszy (powłoki) kulistej w próbie hydraulicznego wybrzuszania dla niektórych wybranych - inżynierskich warunków utraty stateczności. Zbadano wpływ współczynnika umocnienia materiału wytłoczki, współczynnika anizotropii normalnej i współczynników anizotropii płaskiej na dopuszczalne wartości odkształceń plastycznych i wysokości wybruszanych wytłoczek odpowiadające danemu warunkowi utraty stateczności.

W ostatnim rozdziale VII wykorzystane zostały metody rozwiązywania zagadnień z technologicznej teorii plastyczności za pomocą charakterystyk oraz metodami nośności granicznej jak metoda kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości odkształcenia i metoda statycznie dopuszczalnych pól naprężeń. Wymienione metody obliczeń wykorzystano do oszacowania nacisku w procesach ściskania, przewężania i przecinania oraz kruszenia bloków materiału przez dwa przeciwbieżne płaskie stemple. Idee metod szacowania wielkości dopuszczalnych sił i nacisków wywodzą się z ogólnych twierdzeń teorii plastyczności, jak twierdzenia o nośności granicznej (oszacowania górne i dolne), por. np. [41, 47, 104, 115, 135, 136, 138, 139, 140]. Metodami nośności granicznej oszacowano rezultaty obliczeń otrzymane z metod rozwiązań opartych na rozwiązaniach równań różniczkowych cząstkowych za pomocą charakterystyk (w tym i rozwiązań ścisłych – rozwiązania zupełne). Przekroczenie wartości określonego nacisku lub siły może powodować, że np. plastyczne materiały metaliczne będące w stanie gorącym będą ulegać przewężaniu lub przecięciu (ścięciu) wzdłuż płaszczyzn ścinania. Bloki z materiałów typu grunty będą ulegać odkształceniu plastycznemu i np. osunięciu (skarpy), a półkruchych i kruchych rozdzieleniu wzdłuż płaszczyzn pęknięcia (płaszczyzny kruchego rozdziału, płaszczyzny kruchego przełomu). Metody szacowania mają duże zastosowania w analizie wielu rodzajów obróbki plastycznej metali [138, 139], w projektowaniu elementów maszyn metodami nośności granicznej oraz w określaniu nośności granicznej np. podłoża lub fundamentów wykonanych z materiałów typu grunty lub sypkich, materiałów kruchych, półkruchych [41, 136, 140]. W charakterze aplikacyjnym rozpatrzono dwa przykłady zastosowań tych metod. W przykładzie pierwszym dla ściskania bloków z materiałów metalicznych na gorąco [74, 76, 117, 138] użyto warunków plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego (H-M-H) i Treski, a w drugim warunek plastyczności Coulomba-Mohra dla materiałów typu grunty, materiałów półkruchych i kruchych.

ROZDZIAŁ I

WARUNKI JEDNOZNACZNOŚCI ROZWIĄZANIA PROBLEMU BRZEGOWEGO W UOGÓLNIONEJ TERMOPLASTYCZNOŚCI

1. WSTĘP

W tym rozdziale wyprowadzono konieczne i dostateczne warunki jednoznaczności rozwiązania sformułowanego przyrostowego (prędkościowego) problemu brzegowego sprzężonej uogólnionej termoplastyczności, dla przypadku dużych i małych gradientów przemieszczeń (dużych i małych odkształceń), por. np. [122-124], [142, 144]. Wyprowadzono warunki globalne dla dużych i małych odkształceń oraz bezpieczniejsze warunki lokalne dla małych odkształceń. Wyprowadzono warunki jednoznaczności dla uogólnionego ciała termoplastycznego, por. [142-144] oraz odpowiednich „ciał porównawczych”, por. [91, 92] [122-124] [142, 144]. W niniejszej pracy wzorowano się szczególnie na tych pracach. Wyprowadzone warunki jednoznaczności (globalne i lokalne) są odpowiednimi koniecznymi i dostatecznymi warunkami wykluczającymi wystąpienie stanów rozdzielenia równowagi (bifurkacja stanów równowagi) w sprzężonej uogólnionej termoplastyczności oraz przy pominięciu efektów termicznych w procesach izotermicznych obciążeń. W pracy wykazano także, że lokalne warunki jednoznaczności dla uogólnionego ciała termoplastycznego i „ciał porównawczych” mają taką samą postać. Natomiast technika obliczeń stanów niejednoznaczności dla „ciał porównawczych” jest znacznie łatwiejsza, ponieważ są one funkcjami liniowymi zależnymi od kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości odkształceń lub od statycznie dopuszczalnych pól prędkości naprężeń. Jest to pewien argument uzasadniający celowość wprowadzenia takich „ciał porównawczych”. Natomiast globalne warunki jednoznaczności i globalne kryteria wykluczające stany bifurkacyjne mają różną postać.

W uogólnionym przypadku równania konstytutywne sprzężonej termoplastyczności mają charakter niestowarzyszonych praw plastycznego płynięcia nawet w przypadku przyjęcia postulatu Gyarmatiego, por. np. [25, 142, 143], zawierają efekty sprzężeń termomechanicznych oraz uwzględniają zjawisko sprzężenia „sprężysto-plastycznego”. Oznacza to, że można je stosować do opisu nie tylko materiałów metalicznych plastycznych i półkruchych, lecz również do materiałów porowatych, proszków spiekanych, skał, gruntów, betonów i innych. W pracy wyspecyfikowano także przypadki szczególne lokalnego warunku jednoznaczności dla mniej ogólnych modeli ciał. W mniej ogólnych modelach ciał funkcje konstytutywne występujące w warunkach jednoznaczności będą przyjmować odpowiednio bardziej prostą postać.

Wyprowadzone warunki jednoznaczności poza czysto matematyczną i poznawczą wartośćią mogą mieć również duże znaczenie praktyczne. Stano-

wią one bowiem narzędzie mogące służyć do oceny krytycznych obciążeń, po przekroczeniu których możliwe jest wystąpienie rozdwojenia stanu równowagi (bifurkacja stanu równowagi), por. np. [122], [142-145]. W stosunku do istniejących już prac poświęconych zagadnieniom jednoznaczności rozwiązania i rozdwojenia stanów równowagi w sprzężonej termo-sprężysto-plastyczności, por. [89-92], [119-123], [142-145] w niniejszej pracy wyprowadzono nowe kryterium globalne i lokalne dla przypadku wyprowadzonego „ciała porównawczego” zależnego od statycznie dopuszczalnych pól prędkości naprężenia. Niniejsza praca jest więc dalszym rozwinięciem wcześniejszych prac autora, por. [142-144]. Wyprowadzone bowiem w pracach [119, 122, 123, 142, 144] warunki jednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego i kryteria bifurkacyjne dotyczyły „ciała porównawczego” wyprowadzonego dla materiałów o niestowarzyszonym i stowarzyszonym prawie plastycznego płynięcia (w tym również dla ciała sprzężonej uogólnionej termoplastyczności) w zależności od kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości odkształcenia.

Analizując problem jednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego, zakłada się, że znany jest stan termodynamiczny ciała w pewnej (np. początkowej) chwili procesu plastycznego odkształcania ciała. Należy natomiast dla każdej następnej chwili znaleźć wartości np. pola prędkości odkształcenia lub przemieszczenia oraz temperatury dla zadanych (początkowych) wartości prędkości naprężenia i dywergencji wektora strumienia ciepła wymienianego z otoczeniem przez powierzchnię ciała o jednostkowym polu.

W rozdziale zamieszczono także Dodatek A, w którym wyprowadzono lokalny dostateczny warunek jednoznaczności będący lokalnym kryterium wykluczającym bifurkację stanu równowagi dla wyprowadzonego „ciała porównawczego” zależnego od statycznie dopuszczalnych pól prędkości naprężeń. Wykazano, że lokalny dostateczny warunek jednoznaczności dla „ciała porównawczego” wynikający z żądania, aby funkcja podcałkowa oznaczona symbolem I' była dodatnio określona, jest taki sam jak dla funkcji podcałkowej I dla uogólnionego ciała termoplastycznego [142, 144]. Stanowi to pewne kryterium i argument potwierdzające słuszność wprowadzenie takiego „ciała porównawczego”. Wyrażenie podcałkowe I' dla ciała porównawczego jest dolną majorantą wyrażenia I dla przypadku uogólnionego ciała termoplastycznego.

W Dodatku A zamieszczono, jak już wspomniano, procedurę otrzymania optymalnego (minimalnego) warunku jednoznaczności z wyprowadzonej jednoparametrowej rodziny lokalnych warunków jednoznaczności dla przypadku wyprowadzonego „ciała porównawczego” zależnego od statycznie dopuszczalnych pól prędkości naprężenia. Warunki jednoznaczności i oszacowania stanów bifurkacji w teorii sprzężysto-termoplastyczności dla przypadku dużych odkształceń i materiałów o stowarzyszonych i niestowarzyszonych prawach plastycznego płynięcia, w zależności od kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości odkształcenia, badano w pracach, por. np. [27], [123, 124].

Ważniejsze oznaczenia i skróty

- D** – tensor prędkości odkształcenia,
T – temperatura bezwzględna w [K],
 \dot{T} – prędkość zmian temperatury bezwzględnej w czasie,
H – izotermiczna funkcja wzmocnienia,
M i **L** – odpowiednio tensor izotermicznych modułów sprężystości i podatności sprężystej,
F – funkcja płynięcia plastycznego określona w przestrzeni naprężeń,
 f_1 – uogólniona funkcja płynięcia plastycznego określona w przestrzeni sił termodynamicznych, por. np. [122, 142, 143],
d – funkcja opisująca ewolucję parametrów wewnętrznych wg [142, 143],
Z – tensor izotermicznych zmian odkształceń sprężystych wywołanych odkształceniami plastycznymi, por. np. [142, 143],
 c_ϵ i c_σ – odpowiednio ciepło właściwe mierzone przy stałym odkształceniu sprężystym ϵ^e i stałym naprężeniu σ ,
v i **V** – odpowiednio prędkość przemieszczenia i jego gradient, $V_{ij} = v_{i,j}$
i $V_{ij}^T = V_{ji}$,
b_m – wektor nominalnej siły masowej na jednostkę objętości wg [124].

Litery greckie

- α** – symetryczny tensor współczynników rozszerzalności cieplnej taki, że $\alpha\delta_{ij} = \text{const}$,
Q – wektor strumienia ciepła wymianianego z otoczeniem przez powierzchnię o jednostkowym polu w jednostce czasu,
 σ i **ϵ^e** – tensor rzeczywistego naprężenia (tensor Cauchy) i tensor odkształceń sprężystych,
 $\hat{\sigma}$ – obiektywna prędkość symetrycznego tensora naprężenia wg [123],
 ρ_0 – gęstość masy ciała w termodynamicznym stanie odniesienia (t.s.o) taka, że $\rho_0 \cong \rho$,
 ω – tensor prędkości obrotu (tensor spinu), $2\omega = \mathbf{V} - \mathbf{V}^T$
K – oznaczenie pary parametrów wewnętrznych, $K = \{\kappa, \kappa\}$,
 Π – oznaczenie wektora pary wewnętrznych sił termodynamicznych, $\Pi = \{\pi, \pi\}$ stowarzyszonych z wektorem pary parametrów wewnętrznych K.

Symbolami pogrubionymi oznaczono tensory. Zastosowano konwencję sumacyjną wraz z rozszerzeniem na tensory różnych walencji:

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= A_{ij}B_j & \text{lub } A_{ijkl}B_{kl}, & & \text{oraz } \text{tr}\mathbf{A} &= A_{ii}, & \text{tr}(\mathbf{AB}) &= A_{ij}B_{ji}, \\ \mathbf{A}:\mathbf{B} &= A_iB_i & \text{lub } A_{ij}B_{ij} & & \text{oraz } \mathbf{A}\otimes\mathbf{B} &= A_iB_j & \text{lub } A_{ij}B_{kl}, \end{aligned}$$

$$\text{sym}\mathbf{A} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) \text{ oraz } \quad \text{dev}\mathbf{A} = \mathbf{A} - \frac{1}{3}(\text{tr}\mathbf{A})\mathbf{1}, \text{ gdzie } \mathbf{1} - \text{tensor}$$

jednostkowy,

$$A_{i,j} = \frac{\partial A_i}{\partial x_j}, \quad \dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t} \quad \text{oraz } \delta_{ij} - \text{oznacza deltę Kroneckera}$$

(tensor jednostkowy).

Jeżeli \mathbf{I} i \mathbf{K} oznaczają parę tensorów drugiej i zerowej walencji, wówczas działanie $\mathbf{I} \cdot \mathbf{K}$ jest skalarem [142, 143]: $\mathbf{I} \cdot \mathbf{K} = \boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\kappa} + \pi \kappa = \pi_{ij} \kappa_{ij} + \pi \kappa$.

Jeżeli \mathbf{Z} oznacza parę tensorów czwartej i drugiej walencji: $\mathbf{Z} \Leftrightarrow \{Z_{mnlk}; Z_{mn}\}$, a \mathbf{M} , jest tensorem czwartej walencji, to działanie \mathbf{MZ} jest następującą parą tensorów czwartej i drugiej walencji: $\mathbf{MZ} \Leftrightarrow \{M_{ijmn} Z_{mnlk}; M_{ijmn} Z_{mn}\}$, por. np. [142, 143].

2. WARUNKI JEDNOZNACZNOŚCI I KRYTERIA BIFURKACYJNE

2.1. UWAGI WSTĘPNE

W tym punkcie sformułowano przyrostowy problem brzegowy sprzężonej uogólnionej termoplastyczności. Następnie dokonano interpretacji warunków jednoznaczności rozwiązania sformułowanego przyrostowego problemu brzegowego i wyprowadzono warunki konieczne i dostateczne jednoznaczności rozwiązania. W dalszej części przedstawiony został w oparciu o dostępne dane literaturowe dostateczny globalny warunek jednoznaczności w zależności od kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości odkształcenia. Przedstawione zostały także globalne i lokalne warunki jednoznaczności dla „ciała porównawczego” zależnego od kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości odkształcenia. Następnie jako oryginalny wkład wyprowadzono dostateczny globalny i lokalny warunek jednoznaczności oraz sformułowano kryteria bifurkacyjne w zależności od statycznie dopuszczalnych pól prędkości naprężeń.

Podobny przyrostowy problem brzegowy sprzężonej uogólnionej termoplastyczności był już w literaturze badany [123, 124], [142, 144]. Oryginalnym elementem jest jak już wspomniano we wstępie wyprowadzenie „ciała porównawczego” i warunków jednoznaczności w zależności od statycznie dopuszczalnych pól prędkości naprężeń oraz uwzględnienie dużych odkształceń. Prowadzi to do innego zagadnienia niż rozpatrywane dotychczas [122-124], [142-144], ponieważ należy wyprowadzić niezależnie inną postać dla „ciała porównawczego” oraz wyprowadzić podstawowe nierówności i warunki jednoznaczności w zależności od statycznie dopuszczalnych pól prędkości naprężeń.

2.2. WARUNKI KONIECZNE JEDNOZNACZNOŚCI

Założmy, że znany jest stan termodynamiczny ciała w pewnej chwili t_0 procesu termoplastycznego odkształcania (spełniony jest warunek plastyczności i warunek obciążenia plastycznego). Można sformułować następujące przyrostowe problemy dla tego typu procesów, por. np. [122, 123, 142, 144]. Należy dla danej chwili t_0 znaleźć wartości:

- a) \mathbf{D} i q – przyjmując, że $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ i \dot{T} są zadane,
- b) $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ i q – przyjmując, że \mathbf{D} i \dot{T} są zadane,
- c) $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ i \dot{T} – przyjmując, że \mathbf{D} i q są zadane,
- d) \mathbf{D} i \dot{T} – przyjmując, że $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ i q są zadane, gdzie $q \equiv -\text{div } \mathbf{q}$.

Nie jest trudno wykazać, por. np. [122, 142, 144], że aby rozwiązanie problemów a) i b) było jednoznaczne, muszą koniecznie być spełnione znane w izotermicznej teorii plastyczności warunki, por. np. [142, 144]:

$$\text{dla problemu: a) } h > 0, \quad (1.1)$$

$$\text{dla problemu: b) } h + \mathbf{g}_1 : \mathbf{Mf}_\sigma > 0, \quad (1.2)$$

gdzie: h - izotermiczna funkcja wzmocnienia,

$$\text{oraz } \mathbf{g}_1 = \mathbf{f}_{1,\sigma} + \mathbf{Z}d, \quad \mathbf{f}_\sigma = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \mathbf{f}_{1,\sigma} = \frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}}.$$

Warunki (1.1) i (1.2) są również lokalnymi warunkami dostatecznymi (wystarczającymi) jednoznacznego rozwiązania problemów, odpowiednio a) i b). Okazuje się jednak, że mogą istnieć dwa rozwiązania problemów c) i d), nawet gdy odpowiednio nierówności (1.1) i (1.2) są spełnione. Konieczne lokalne warunki jednoznaczności rozwiązania problemów c) i d), por. [142, 144] mają odpowiednio następującą postać:

$$\text{dla problemu: c) } h_1 = h - m_\sigma f_T > 0, \quad (1.3)$$

$$\text{dla problemu: d) } H = h + \mathbf{g}_1 : \mathbf{Mf}_\sigma - \frac{1}{p} (m_\sigma + \xi \mathbf{g}_1 : \mathbf{Mf}_\sigma) (f_T - \boldsymbol{\alpha} : \mathbf{Mf}_\sigma) > 0, \quad (1.4)$$

gdzie:

$$m_\sigma = \frac{1}{\rho_0 c_\sigma} \left[(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{f}_{1,\sigma} - \Pi \cdot d) - T \left(\frac{\partial \Pi(T, \boldsymbol{\sigma}, K)}{\partial T} \cdot d \right) \right],$$

$$\xi = \frac{1-p}{p} = \frac{T}{\rho_0 c_\sigma}, \quad p = \frac{c_\varepsilon}{c_\sigma}, \quad f_T = \frac{\partial f}{\partial T}.$$

W przypadku stowarzyszonych praw plastycznego płynięcia ($\mathbf{f}_{1,\sigma} = \mathbf{f}_\sigma$) i przy pominięciu efektów sprzężenia „sprężysto-plastycznego” wielkość ($m_\sigma = m$), por. [122]. Interpretując wielkość m_σ przy analizie izotermicznego procesu cyklicznego obciążenia w przestrzeni naprężeń zauważono, że m_σ w przypadku metali jest na ogół dodatnie ($m_\sigma > 0$), [122, 142, 144]. Warto w tym miejscu dodać, że również w przypadku metali i innych materiałów spełnienie warunku (1.3) implikuje na ogół spełnienie warunku (1.4), por. np. [122, 142, 144].

Warunki (1.3) i (1.4) należy więc traktować jako ograniczenia nakładane na funkcje wzmocnienia, które występują w grupie równań konstytutywnych uogólnionej sprzężonej termoplastyczności. Zespół podstawowych równań pola sprzężonej uogólnionej termoplastyczności podany w pracach autora [142-144] wraz z warunkami brzegowymi i początkowymi, może służyć jako podstawa do analizy i obliczeń wielu zagadnień oraz problemów statycznych, quasi-statycznych, a także dynamicznych w sprzężonej termoplastyczności.

2.3. SFORMUŁOWANIE PRZYROSTOWEGO PROBLEMU BRZEGOWEGO

Można obecnie sformułować następujący przyrostowy (prędkościowy) problem brzegowy statyki dla ciała sprężysto-plastycznego [123, 124].

Niech w pewnej chwili czasu t_0 ciało zajmuje obszar przestrzenny D . Oznaczmy symbolem \overline{D} domknięcie obszaru D , a symbolem S brzeg \overline{D} . S jest domknięciem sumy nieprzecinających się otwartych regularnych powierzchni S_v i S_T . Niech w chwili t_0 znany będzie stan termodynamiczny $\{T, \boldsymbol{\sigma}, K\}$ oraz prędkość sił masowych $\dot{\mathbf{b}}_m$ w każdym punkcie \mathbf{x} domknięcia \overline{D} . Zakłada się, że funkcje stanu termodynamicznego $\{T, \boldsymbol{\sigma}, K\}$ spełniają warunek plastyczności $f \leq 0$. Przyjmujemy, że w chwili t_0 na częściach brzegu S_T i S_v znane są wartości prędkości sił powierzchniowych $\dot{\mathbf{F}}$ i prędkości punktów materialnych \mathbf{v}_0 . Więc por. [123]

$$\dot{\mathbf{S}}^T \mathbf{n} = \dot{\mathbf{F}} \quad \text{dla } \mathbf{x} \in S_T \quad \text{ i } \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \quad \text{dla } \mathbf{x} \in S_v, \quad (1.5)$$

$$\text{gdzie } \dot{\mathbf{S}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{V}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}(\text{div } \mathbf{v}), \quad (1.6)$$

\mathbf{n} – jednostkowy wektor normalny do powierzchni S ciała D i skierowany na zewnątrz,

$\dot{\mathbf{S}}$ – oznacza prędkość niesymetrycznego tensora „nominalnych naprężeń” [123, 124].

Podobnie jak w pracy [123] zakłada się, że różnica między prędkością obiektywną tensora naprężenia $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ a prędkością nominalną tensora naprężenia $\dot{\mathbf{S}}$, wyraża się następującą liniową funkcją gradientu prędkości odkształcenia \mathbf{V} ,

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\mathbf{S}} + \mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{V}^T \text{ lub } \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}(\text{div } \mathbf{v}) - \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}, \quad (1.7)$$

gdzie:

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{v}^*, \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}^* \text{ i } \Delta \dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{S}} - \dot{\mathbf{S}}^* \text{ oraz } \hat{\boldsymbol{\sigma}}^T = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \text{ i } \hat{\boldsymbol{\sigma}}^* = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{D}^*),$$

$$2D_{ij} = v_{i,j} + v_{j,i}, V_{ij} = v_{i,j} \text{ i } V_{ij}^T = V_{ji}, A_{ijmn} = A_{mnij}, 2\boldsymbol{\omega}_j = V_{ij} - V_{ji} \text{ lub } 2\boldsymbol{\omega} = \mathbf{V} - \mathbf{V}^T.$$

Na podstawie wyrażen (1.5), (1.6), (1.7) i wykorzystując równanie równowagi

$$\dot{S}_{ij,j} + \rho_0 \dot{\mathbf{b}}_m = \mathbf{0}, \quad (1.8)$$

po przekształceniach otrzyma się, por. [123], że

$$A^* = \int_S \Delta \hat{\mathbf{F}} : \Delta \mathbf{v} ds = \int_D (\Delta \dot{\mathbf{S}}) : \Delta \mathbf{V}^T dV = \int_D J dV - \Sigma(\Delta \mathbf{v}) = 0. \quad (1.9)$$

Wynika to z faktu, że oba rozwiązania spełniają te same warunki brzegowe (1.5) oraz

$$J = (\Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}) : (\Delta \mathbf{D}), \quad \Sigma(\Delta \mathbf{v}) = \int_D \Delta \mathbf{V}^T : (\mathbf{A} \Delta \mathbf{V}^T) dV. \quad (1.10)$$

Dwa przykłady postaci funkcji $\Sigma(\mathbf{v})$ można znaleźć np. w pracy [123] o postaci:

$$\Sigma_1(\mathbf{v}) = \int_D (2\mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma}\mathbf{D} - \mathbf{V}^T : \boldsymbol{\sigma}\mathbf{V}^T) dV \quad \text{i} \quad \Sigma_2(\mathbf{v}) = - \int_D \mathbf{V}^T : \boldsymbol{\sigma}\mathbf{V}^T dV.$$

Problem polega na znalezieniu zespołu funkcji $\{\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{D}, \mathbf{v}\}$ określonych w \bar{D} oraz funkcji \dot{T} określonej w D , które spełniają w obszarze D wraz z równaniem równowagi (1.8) podstawowy zespół równań pola sprzężonej uogólnionej termoplastyczności, por. np. [123, 142, 144].

Sformułowany problem brzegowy odgrywa w sprzężonej uogólnionej termoplastyczności taką samą rolę jak odpowiedni problem brzegowy w izotermicznej teorii plastyczności, a mianowicie: jeżeli jego rozwiązanie nie jest jednoznaczne, to niejednoznaczne jest również rozwiązanie problemu ogólnego, w którym zadana jest historia zmian sił powierzchniowych, prędkości cząstek i temperatury na powierzchni S ciała D , por. np. [123, 142, 144].

Zbadanie warunków jednoznaczności rozwiązania postawionego w tym punkcie przyrostowego problemu brzegowego stanowi jedno z głównych zagadnień sprzężonej uogólnionej termoplastyczności. W oparciu o tego typu badania można wyprowadzić odpowiednie użyteczne praktycznie kryteria (globalne i lokalne) dla „ciała porównawczego” umożliwiające oszacowanie od strony bezpiecznej krytycznego stanu termodynamicznego, przy którym możliwe jest wystąpienie bifurkacji stanu równowagi. Warunki te i kryteria stanowią równocześnie warunki dostateczne (wystarczające) jednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego sprzężonej uogólnionej termoplastyczności. Lokalne warunki i kryteria są łatwe do bezpośredniego wykorzystania, gdyż wyrażają się bezpośrednio przez odpowiednie funkcje konstytutywne i stałe materiałowe. Dają one jednak bardziej bezpieczne (dolne) oszacowania krytycznego stanu bifurkacji. Warunki i kryteria globalne, odwrotnie, pozwalają lepiej oszacować stany krytyczne, ale są trudniejsze w zastosowaniu, gdyż wymagają znalezienia odpowiednio: kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości odkształcenia lub statycznie dopuszczalnych pól prędkości naprężeń, dla których odpowiednie wyrażenia całkowe (funkcjonały) podane w następnych punktach pracy osiągają wartość równą zero.

2.4. OMÓWIENIE WARUNKÓW I KRYTERIÓW

2.4.1. GLOBALNY WARUNEK JEDNOZNACZNOŚCI I KRYTERIUM BIFURKACJI

Założmy, że istnieją dwa zbiory funkcji $\{\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{D}, \dot{T}, \mathbf{v}\}$ i $\{\hat{\boldsymbol{\sigma}}^*, \mathbf{D}^*, \dot{T}^*, \mathbf{v}^*\}$, które są rozwiązaniem sformułowanego w punkcie 2.3 przyrostowego problemu brzegowego sprzężonej uogólnionej termoplastyczności. Wówczas na podstawie wyrażenia (1.9), musi być spełniona następująca równość $A^* = 0$.

Globalnym więc warunkiem dostatecznym wykluczającym stan niejednoznaczności rozwiązania i rozdwojenia stanu równowagi, będzie dodatnia wartość ($A^* > 0$) wyrażenia (1.9). Stąd

$$A^* = \int_S \Delta \dot{\mathbf{F}} : \Delta \mathbf{v} ds = \int_D (\Delta \dot{\mathbf{S}}) : \Delta \mathbf{V}^T dV = \int_D J(\Delta \mathbf{v}) dV - \Sigma(\Delta \mathbf{v}) > 0. \quad (1.11)$$

1. Przypadek kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości odkształcenia

Oznaczmy obecnie symbolem J funkcję podcałkową wyrażenia (1.11), zależną od \mathbf{D} i \mathbf{D}^* dla ciała sprzężonej uogólnionej termoplastyczności następująco:

$$J(\mathbf{D}, \mathbf{D}^*, j_1, j_2^*) = [\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{D}) - \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{D}^*)] : \Delta \mathbf{D}, \quad (1.12)$$

gdzie: $\Delta \mathbf{D} = \mathbf{D} - \mathbf{D}^*$ oraz $j_1 = j_1(\mathbf{D})$ i $j_1^* = j_1(\mathbf{D}^*)$.

Funkcje j_1 i j_1^* przyjmują odpowiednio wartości: 1 – dla procesu czynnego plastycznego odkształcenia lub 0 – dla procesu sprężystego obciążania lub plastycznego odciążania.

Natomiast wielkości $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ i \mathbf{D} oraz $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^*$ i \mathbf{D}^* powiązane są odpowiednim równaniem konstytutywnym, por. np. [123, 124], [142, 144] o postaci podobnej do poniższego wyrażenia

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{M}_1(\mathbf{D} - \mathbf{d}_1) - \frac{j_1}{H_1} \mathbf{g}^* [\bar{\mathbf{f}}_{\boldsymbol{\sigma}}^*(\mathbf{D} - \mathbf{d}_1) + z_1], \quad (1.13)$$

gdzie

$$\begin{cases} \mathbf{g}^* = \mathbf{M}_1 \mathbf{g}, \quad \bar{\mathbf{f}}_{\boldsymbol{\sigma}}^* = \mathbf{M}_1 \bar{\mathbf{f}}_{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \mathbf{d}_1 = q \boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}^{(a)}, \quad \mathbf{L}_1 = \mathbf{L}^{(a)}, \quad z_1 = -q f_T, \quad H_1 = H, \\ 2(M_{ijmn} L_{mhrs})_{\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}(T, \boldsymbol{\varepsilon}^e, K)} = \delta_{is} \delta_{jr} + \delta_{ir} \delta_{js}, \quad M_{ijmn} = M_{mnij} = M_{jimn} = M_{ijnm}, \\ \mathbf{M} = (\mathbf{L}^{-1})_{\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}(T, \boldsymbol{\varepsilon}^e, K)}, \quad \mathbf{g} = (\mathbf{f}_{1, \boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{Z}d + m_{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\alpha}), \quad \bar{\mathbf{f}}_{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{f}_{\boldsymbol{\sigma}} - \zeta f_T \boldsymbol{\alpha}), \\ \mathbf{M}^{(a)} = \mathbf{M} + \zeta (\mathbf{M} \boldsymbol{\alpha}) \otimes (\mathbf{M} \boldsymbol{\alpha}). \end{cases} \quad (1.14)$$

Z wyrażen (1.3), (1.4) i (1.14) po przekształceniach wynika, że

$$H_1 = h + \mathbf{g}_1 : \mathbf{M}_1 \bar{\mathbf{f}}_{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (1.15)$$

Wprowadźmy funkcję J' zależną od \mathbf{D} i \mathbf{D}^* w sposób następujący, por. [123], [142, 144]

$$J'(\mathbf{D}, \mathbf{D}^*) = \Delta \mathbf{D} : \mathbf{M}_1 \Delta \mathbf{D} - \frac{1}{4x^2 H_1} \left[(\mathbf{g}^* + x^2 \bar{\mathbf{f}}_{\boldsymbol{\sigma}}^*) : \Delta \mathbf{D} \right]^2, \quad (1.16)$$

gdzie: x^2 – jest pewnym dodatnim parametrem skalarnym ($x^2 > 0$).

Wyrażenie (1.16) przedstawia sobą jednoparametrową rodzinę wyrażeń J' ze względu na parametr x^2 . Funkcje J i J' oprócz zmiennych niezależnych \mathbf{D} i \mathbf{D}^* zależą także od stanu termodynamicznego, por. p. 2.3.

W pracach [122-124], [142, 144] wykazano na podstawie dowodu, że:

Lemat 1.

Przy zadanym stanie termodynamicznym takim samym dla J i J' , dla każdej pary $\{\mathbf{D}$ i $\mathbf{D}^*\}$ oraz dla każdej kombinacji $(j_1$ i $j_1^*)$ prawdziwa jest następująca nierówność

$$J(\mathbf{D}, \mathbf{D}^*, j_1, j_1^*) - J'(\mathbf{D}, \mathbf{D}^*, j_1, j_1^*) \geq 0. \quad (1.17)$$

Dowód

Wprowadźmy następujące oznaczenia dla postaci funkcji $\mathbf{J}(\mathbf{D}, \mathbf{D}^*, j, j^*)$ jako

$$\begin{aligned} J_1 &= J(\mathbf{D}, \mathbf{D}^*, j, j^*) && \text{jeżeli } j(\mathbf{D})=1 \text{ i } j(\mathbf{D}^*)=1, \\ J_2 &= J(\mathbf{D}, \mathbf{D}^*, j, 0) && \text{jeżeli } j(\mathbf{D})=1 \text{ i } j(\mathbf{D}^*)=0, \\ J_3 &= J(\mathbf{D}, \mathbf{D}^*, 0, j^*) && \text{jeżeli } j(\mathbf{D})=0 \text{ i } j(\mathbf{D}^*)=1, \\ J_4 &= J(\mathbf{D}, \mathbf{D}^*, 0, 0) && \text{jeżeli } j(\mathbf{D})=0 \text{ i } j(\mathbf{D}^*)=0. \end{aligned}$$

Obliczając następnie różnicę (1.17) dla wszystkich możliwych powyższych czterech przypadków na podstawie wyrażeń (1.12), (1.13) i (1.16) otrzyma się następujące wyrażenia

$$(J_1 - J')H = \frac{1}{4x^2} (\gamma_g - x^2 \gamma_f)^2 \geq 0, \text{ gdzie } J_1 = \Delta \mathbf{D} : \mathbf{M}_1 \Delta \mathbf{D} + \frac{1}{H} \gamma_g \gamma_f,$$

$$(J_2 - J')H = -x^2 A_D A_D^* + \left[x A_D^* + \frac{1}{2} (\gamma_g + x^2 \gamma_f) \right]^2 \geq 0,$$

$$\text{gdzie: } J_2 = \Delta \mathbf{D} : \mathbf{M}_1 \Delta \mathbf{D} + \frac{1}{H} \gamma_g A_D, \text{ gdyż: } A_D \geq 0 \text{ i } A_D^* < 0, \quad (1.18)$$

$$(J_3 - J')H = -x^2 A_D A_D^* + \left[x A_D - \frac{1}{2} (\gamma_g + x^2 \gamma_f) \right]^2 \geq 0,$$

$$\text{gdzie } J_3 = \Delta \mathbf{D} : \mathbf{M}_1 \Delta \mathbf{D} + \frac{1}{H} \gamma_g A_D^*, \text{ gdyż: } A_D < 0 \text{ i } A_D^* \geq 0,$$

$$(J_4 - J')H = \left[x\gamma_f - \frac{1}{2}(\gamma_g + x^2\gamma_f) \right]^2 \geq 0, \text{ gdzie } J_4 = \Delta\mathbf{D} : \mathbf{M}_1\Delta\mathbf{D},$$

$$\text{gdzie: } \gamma_g = \mathbf{g}^* : \Delta\mathbf{D} \text{ i } \gamma_f = \bar{\mathbf{f}}_{\sigma}^* : \Delta\mathbf{D} \text{ oraz } \gamma_f = A_D - A_D^*,$$

$$\text{a także } A_D = \bar{\mathbf{f}}_{\sigma}^* : (\mathbf{D} - \mathbf{d}_1) + z_1 \text{ i } A_D^* = \bar{\mathbf{f}}_{\sigma}^* : (\mathbf{D} - \mathbf{d}_1) + z_1.$$

Na podstawie zespołu nierówności (1.18) wynika prawdziwość nierówności (1.17).

Na podstawie wyrażenia (1.11) i nierówności (1.17) i (1.18) można teraz sformułować następujące dostateczne globalne kryterium wykluczające wystąpienie stanu bifurkacji.

Twierdzenie

Niech $H > 0$ w każdym punkcie ciała $\mathbf{x} \in D_p$, w tej jego części, gdzie zachodzą plastyczne deformacje, tzn. gdzie $D_p = \{\mathbf{x} : f = 0\}$. Jeżeli dla każdego kinematycznie dopuszczalnego pola prędkości \mathbf{v} (lub pola różnicy prędkości $\Delta\mathbf{v}$), które znika na części powierzchni (brzegu ciała) S_v , jest spełniona następująca nierówność:

$$\int_D J'_1(\mathbf{v})dV - \int_{D_p} J'_2(\mathbf{v})dV - \Sigma(\mathbf{v}) > 0, \quad (1.19)$$

wówczas może istnieć tylko jedna para $\{\hat{\sigma}, \hat{T}\}$, będąca rozwiązaniem podstawowego przyrostowego problemu brzegowego termo-sprężysto-plastyczności.

Dowód

Funkcje podcałkowe występujące w wyrażeniu (1.19) mają następującą postać:

$$J'_1(\mathbf{D}) = \mathbf{D} : \mathbf{M}_1\mathbf{D} \text{ oraz } J'_2 = -\frac{1}{4x^2H} \left[(\mathbf{g}^* + x^2\bar{\mathbf{f}}_{\sigma}^*) : \mathbf{D} \right]^2. \quad (1.20)$$

Dla przypadku małych odkształceń $\mathbf{D} \cong \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, funkcja $\Sigma(\mathbf{v})$ znika (przyjmuje wartość równą zero) oraz $\hat{\sigma} \cong \dot{\mathbf{S}}$ i $\hat{\sigma} \cong \dot{\boldsymbol{\sigma}}$.

Oznaczając dwa pierwsze wyrazy lewej strony nierówności (1.19) przez $\Sigma_x(\mathbf{v})$, wówczas nierówność tę można zapisać następująco

$$\Sigma_x(\mathbf{v}) > \Sigma(\mathbf{v}), \quad (1.21)$$

gdzie $\Sigma_x(\mathbf{v})$ otrzymuje się, podstawiając do wyrażień (1.19), (1.20)

optymalną wartość x^2 , równą: $x_0^2 = \sqrt{\frac{\mathbf{g} : \mathbf{M}_1 \mathbf{g}}{\bar{\mathbf{f}}_\sigma : \mathbf{M}_1 \bar{\mathbf{f}}_\sigma}}$ wyprowadzoną w pracach [123,

124], [142, 144] oraz w Dodatku A.

Analizując wyrażenie $\Sigma_x(\mathbf{v})$ występujące po lewej stronie nierówności (1.21), po podstawieniu optymalnej wartości x_0^2 i po przekształceniach otrzymano w pracach [123, 124], że

$$\Sigma_x(\mathbf{v}) = \int_D \mathbf{D} : \mathbf{M}_1 \mathbf{D} dV - \frac{1}{4} \int_{D_p} \frac{\left[(\bar{\mathbf{f}}_\sigma : \mathbf{M}_1 \bar{\mathbf{f}}_\sigma)^{\frac{1}{2}} \mathbf{g} : \mathbf{M}_1 \mathbf{D} + (\mathbf{g} : \mathbf{M}_1 \mathbf{g})^{\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{f}}_\sigma : \mathbf{M}_1 \mathbf{D} \right]^2}{H_1 (\mathbf{g} : \mathbf{M}_1 \mathbf{g})^{\frac{1}{2}} (\bar{\mathbf{f}}_\sigma : \mathbf{M}_1 \bar{\mathbf{f}}_\sigma)^{\frac{1}{2}}} dV. \quad (1.22)$$

2. Przypadek statycznie dopuszczalnych pól prędkości naprężenia

Oznaczmy teraz symbolem I przekształcone wyrażenie (1.12), zależne od $\hat{\sigma}$ i $\hat{\sigma}^*$ dla uogólnionego ciała termo-sprężysto-plastycznego następująco:

$$I(\hat{\sigma}, \hat{\sigma}^*, j, j^*) = [\mathbf{D}(\hat{\sigma}) - \mathbf{D}(\hat{\sigma}^*)] : \Delta \hat{\sigma}, \quad (1.23)$$

gdzie $\Delta \hat{\sigma} = \hat{\sigma} - \hat{\sigma}^*$, $\hat{\sigma}^* = \hat{\sigma}(\mathbf{D}^*)$ oraz $j = j(\hat{\sigma})$ i $j^* = j(\hat{\sigma}^*)$.

Podobnie jak w punkcie 1, funkcje j i j^* przyjmują odpowiednio wartości: 1 – dla procesu czynnego plastycznego odkształcania lub 0 – dla procesu sprężystego obciążania lub plastycznego odciążania.

Natomiast $\hat{\sigma}$ i \mathbf{D} oraz $\hat{\sigma}^*$ i \mathbf{D}^* są obecnie powiązane odpowiednim równaniem konstytutywnym, por. np. [123, 124, 142, 144] o postaci

$$\mathbf{D} = \mathbf{L}_1 \hat{\sigma} + \frac{j}{h_1} \mathbf{g} [\bar{\mathbf{f}}_\sigma \hat{\sigma} + z_1] + \mathbf{d}_1 \quad \text{i} \quad I(\hat{\sigma}, \hat{\sigma}^*, j, j^*) = [\mathbf{D}(\hat{\sigma}) - \mathbf{D}(\hat{\sigma}^*)] : \Delta \hat{\sigma}. \quad (1.24)$$

Wprowadźmy funkcję I' zależną od $\hat{\sigma}$ i $\hat{\sigma}^*$ w sposób następujący

$$I'(\hat{\sigma}, \hat{\sigma}^*) = \Delta \hat{\sigma} : \mathbf{L}_1 \Delta \hat{\sigma} - \frac{1}{4y^2 h_1} \left[(\mathbf{g} - y^2 \bar{\mathbf{f}}_\sigma) : \Delta \hat{\sigma} \right]^2, \quad (1.25)$$

gdzie: y^2 – jest pewnym dodatnim parametrem skalarnym.

Wyrażenie powyższe przedstawia sobą jednoparametrową rodzinę wyrażeń I' ze względu na parametr y^2 . Funkcje I i I' oprócz zmiennych niezależnych $\hat{\sigma}$ i $\hat{\sigma}^*$ zależą także od stanu termodynamicznego, por. p. 2.3.

Lemat 1.

Poniżej zostanie pokazane, że przy zadanym stanie termodynamicznym takim samym dla I i I' , dla każdej pary $\{\hat{\sigma}$ i $\hat{\sigma}^*\}$ oraz dla każdej kombinacji j i j^* , prawdziwa jest następująca nierówność

$$I(\hat{\sigma}, \hat{\sigma}^*, j, j^*) - I'(\hat{\sigma}, \hat{\sigma}^*, j, j^*) \geq 0. \quad (1.26)$$

Dowód

Wprowadźmy następujące oznaczenia dla postaci funkcji $I(\hat{\sigma}, \hat{\sigma}^*, j, j^*)$ jako

$$I_1 = I(\hat{\sigma}, \hat{\sigma}^*, j, j^*) \text{ jeżeli } j(\hat{\sigma})=1 \text{ i } j(\hat{\sigma}^*)=1,$$

$$I_2 = I(\hat{\sigma}, \hat{\sigma}^*, j, 0) \text{ jeżeli } j(\hat{\sigma})=1 \text{ i } j(\hat{\sigma}^*)=0,$$

$$I_3 = I(\hat{\sigma}, \hat{\sigma}^*, 0, j^*) \text{ jeżeli } j(\hat{\sigma})=0 \text{ i } j(\hat{\sigma}^*)=1,$$

$$I_4 = I(\hat{\sigma}, \hat{\sigma}^*, 0, 0) \text{ jeżeli } j(\hat{\sigma})=0 \text{ i } j(\hat{\sigma}^*)=0.$$

Obliczając następnie różnicę (1.26) dla wszystkich możliwych powyższych czterech przypadków na podstawie wyrażeń (1.23), (1.24) i (1.25) otrzymamy się, że

$$(I_1 - I') h_1 = \frac{1}{4y^2} (\gamma_g + y^2 \gamma_f)^2 \geq 0, \text{ gdzie } I_1 = \Delta \hat{\sigma} : \mathbf{L}_1 \Delta \hat{\sigma} + \frac{1}{h_1} \gamma_g \gamma_f,$$

$$(I_2 - I') h_1 = -y^2 A_\sigma A_\sigma^* + \left[y A_\sigma^* + \frac{1}{2} (\gamma_g + y^2 \gamma_f) \right]^2 \geq 0,$$

$$\text{gdzie } I_2 = \Delta \hat{\sigma} : \mathbf{L}_1 \Delta \hat{\sigma} + \frac{1}{h_1} \gamma_g A_\sigma, \text{ gdyż: } A_\sigma \geq 0 \text{ i } A_\sigma^* < 0, \quad (1.27)$$

$$(I_3 - I')h_1 = -y^2 A_\sigma A_\sigma^* + \left[yA_\sigma - \frac{1}{2}(\gamma_g + y^2 \gamma_f) \right]^2 \geq 0,$$

gdzie $I_3 = \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{L}_1 \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{h_1} \gamma_g A_\sigma^*$, gdyż: $A_\sigma < 0$ i $A_\sigma^* \geq 0$,

$$(I_4 - I')h_1 = \left[y\gamma_f - \frac{1}{2}(\gamma_g + y^2 \gamma_f) \right]^2 \geq 0, \text{ gdzie } I_4 = \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{L}_1 \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}},$$

gdzie: $\gamma_g = \mathbf{g} : \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ i $\gamma_f = \bar{\mathbf{f}}_\sigma : \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ oraz $\gamma_f = A_\sigma - A_\sigma^*$,

a także $A_\sigma = \bar{\mathbf{f}}_\sigma : \hat{\boldsymbol{\sigma}} + z_1$ i $A_\sigma^* = \bar{\mathbf{f}}_\sigma : \hat{\boldsymbol{\sigma}}^* + z_1$.

Na podstawie zespołu nierówności (1.27) wynika prawdziwość nierówności (1.26).

Na podstawie wyrażenia (1.11) i nierówności (1.26) i (1.27) można teraz (analogicznie jak w punkcie 1) sformułować następujące dostateczne globalne kryterium wykluczające wystąpienie stanu bifurkacji.

Twierdzenie

Niech $h_1 > 0$ w każdym punkcie ciała $\mathbf{x} \in D_p$ w tej jego części, gdzie zachodzą plastyczne deformacje, tzn. gdzie $D_p = \{\mathbf{x} : f = 0\}$. Jeżeli dla każdego statycznie dopuszczalnego pola prędkości naprężenia $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ (lub pola różnicy prędkości naprężenia $\Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}$), które zanika na części powierzchni (na brzegu ciała) S_T , jest spełniona następująca nierówność:

$$\int_D I'_1(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) dV - \int_{D_p} I'_2(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) dV - \bar{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) > 0, \quad (1.28)$$

wówczas może istnieć tylko jedna para $\{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \dot{T}\}$, będąca rozwiązaniem przyrostowego problemu brzegowego sprzężonej uogólnionej termoplastyczności. Prawdziwość powyższego wprowadzonego kryterium nie jest trudno dowieść.

Dowód

Funkcje podcałkowe występujące w wyrażeniu (1.28) mają następującą postać:

$$I'_1(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) = \hat{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{L}_1 \hat{\boldsymbol{\sigma}} \text{ oraz } I'_2 = -\frac{1}{4y^2 h_1} \left[(\mathbf{g} - y^2 \bar{\mathbf{f}}_\sigma) : \hat{\boldsymbol{\sigma}} \right]^2, \quad (1.29)$$

a $\bar{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$ jest pewną funkcją wynikającą z np. (1.7), (1.24) i (1.25), zależną od statycznie dopuszczalnych pól prędkości naprężenia $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, którą można wyznaczyć podobnie jak $\Sigma(\mathbf{v})$.

Dla przypadku małych odkształceń $\mathbf{D} \cong \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, funkcja $\bar{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$ podobnie jak $\Sigma(\mathbf{v})$, znika (przyjmuje wartość równą zero) oraz wówczas $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cong \dot{\mathbf{S}}$ i $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cong \dot{\boldsymbol{\sigma}}$.

Oznaczając dwa pierwsze wyrazy lewej strony nierówności (1.28) przez $\bar{\Sigma}_y(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$, wówczas nierówność tę można zapisać następująco

$$\bar{\Sigma}_y(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) > \bar{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}), \quad (1.30)$$

gdzie $\bar{\Sigma}_y(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$, otrzymuje się podstawiając do wyrażeń (1.28) i (1.29) opty-

malną wartość parametru y^2 , równą: $y_0^2 = \sqrt{\frac{\mathbf{g} : \mathbf{M}_1 \mathbf{g}}{\bar{\mathbf{f}}_{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{M}_1 \bar{\mathbf{f}}_{\boldsymbol{\sigma}}}}$, którą wyprowadzono w

Dodatku A.

Analizując wyrażenie $\bar{\Sigma}_y(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$, występujące po lewej stronie nierówności (1.30), po podstawieniu y_0^2 i po przekształceniach (podobnie jak w punkcie 1) otrzyma się, że

$$\Sigma_x(\mathbf{v}) = \int_D \hat{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{L}_1 \hat{\boldsymbol{\sigma}} dV - \frac{1}{4} \int_{D_p} \frac{\left[(\bar{\mathbf{f}}_{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{M}_1 \bar{\mathbf{f}}_{\boldsymbol{\sigma}})^{\frac{1}{2}} \mathbf{g} : \hat{\boldsymbol{\sigma}} - (\mathbf{g} : \mathbf{M}_1 \mathbf{g})^{\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{f}}_{\boldsymbol{\sigma}} : \hat{\boldsymbol{\sigma}} \right]^2}{h_1 (\mathbf{g} : \mathbf{M}_1 \mathbf{g})^{\frac{1}{2}} (\bar{\mathbf{f}}_{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{M}_1 \bar{\mathbf{f}}_{\boldsymbol{\sigma}})^{\frac{1}{2}}} dV. \quad (1.31)$$

Warunek całkowy (1.28) przedstawiony w tej postaci będzie posiadać istotne znaczenie praktyczne. Mianowicie, jeżeli dla zadanego stanu termodynamicznego $\{T, \boldsymbol{\sigma}, K\}$ niemożliwe jest znalezienie takiego pola prędkości naprężeń $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ lub $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, por. wyrażenia (1.6) i (1.7), dla którego suma całek występująca po lewej stronie wyrażenia jest równa zero, to można być wtedy pewnym, że stan ten jest stanem bezpiecznym z punktu widzenia możliwości wystąpienia stanu rozdwojenia równowagi (bifurkacji).

Ponieważ jak już wspomniano, wyrażenie (1.9) ze znakiem zero po prawej stronie dopuszcza istnienie dwóch zbiorów funkcji $\{\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{D}, \dot{T}, \mathbf{v}\}$ i $\{\hat{\boldsymbol{\sigma}}^*, \mathbf{D}^*, \dot{T}^*, \mathbf{v}^*\}$, które są rozwiązaniem sformułowanego problemu brzegowe-

go, więc warunkiem wykluczającym wystąpienie stanu rozdwojenia równowagi będzie dodatnia wartość ($A^* > 0$) przekształconego wyrażenia (1.9).

Stąd

$$A^* = \int_D I(\Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}) dV - \bar{\Sigma}(\Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}) > 0. \quad (1.32)$$

Nierówności (1.11) i (1.32) stanowią więc zarazem dostateczne (wystarczające) globalne warunki jednoznaczności rozwiązania przyrostowego problemu brzegowego sprzężonej termoplastyczności. Natomiast prawdziwość dostatecznego globalnego kryterium (1.28) wykluczającego wystąpienie stanu bifurkacji (rozdwojenie stanu równowagi) wynika bezpośrednio z zespołu nierówności (1.26) i (1.27) oraz nierówności ($A^* > 0$).

W zakończeniu tego punktu można dodać uwagę, że funkcja podcałkowa J dla „ciała porównawczego” (1.16) zależna od kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości odkształcenia przy przejściu granicznym ($\mathbf{g}^* = \bar{\mathbf{f}}_{\boldsymbol{\sigma}}^*$) i ($x^2 = 1$), staje się odpowiednią funkcją podcałkową J_1 , jak w przypadku ciała sprężysto-plastycznego o stowarzyszonych prawach plastycznego płynięcia określoną wyrażeniem (1.12). Natomiast z wyrażenia (1.25) dla „ciała porównawczego” zależnego od statycznie dopuszczalnych pól prędkości naprężenia wynika, że podstawiając w granicy ($\mathbf{g} = \bar{\mathbf{f}}_{\boldsymbol{\sigma}}$) i ($y^2 = 1$) otrzymamy wyrażenie I_4 analogiczne jak dla przypadku ciała termosprężystego. „Ciała porównawczych” nie otrzymuje się więc przez ich wzajemne „odwrócenie”, jak w przypadku ciała sprężysto-plastycznego, lecz wyprowadza się je niezależnie, tak aby spełnione były nierówności: (1.17) - (1.19) lub (1.26) - (1.28).

2.4.2. WARUNEK LOKALNY JEDNOZNACZNOŚCI I KRYTERIUM LOKALNE

W pracach [142, 144] podano wyprowadzenie dowodu następującego twierdzenia dla przypadku małych odkształceń $\mathbf{D} \equiv \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$. Wówczas także $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \dot{\mathbf{S}}$ i $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \dot{\boldsymbol{\sigma}}$.

Twierdzenie

Jeżeli w każdym punkcie ciała w tej jego części gdzie zachodzą plastyczne deformacje $D_P = \{\mathbf{x} : f = 0\}$ jest spełniona następująca nierówność

$$h_I > \frac{1}{2} \left[\sqrt{(\mathbf{g} : \mathbf{M}^{(a)} \mathbf{g})(\bar{\mathbf{f}}_{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{M}^{(a)} \bar{\mathbf{f}}_{\boldsymbol{\sigma}})} - \mathbf{g} : \mathbf{M}^{(a)} \bar{\mathbf{f}}_{\boldsymbol{\sigma}} \right] = h_1^{cr}, \quad (1.33)$$

wówczas może istnieć tylko jeden zbiór funkcji $\{\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}, \bar{T}\}$ klasy co najmniej C^1 , który jest rozwiązaniem sformułowanego w punkcie 2.3 przyrostowego problemu brzegowego sprzężonej uogólnionej termoplastyczności. Powyższa nierówność jest słuszna także dla „ciał porównawczych” zależnych od kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości odkształcenia oraz statycznie dopuszczalnych pól prędkości naprężeń. Nierówność (1.33) stanowi również lokalne kryterium wykluczające bifurkację dla przypadku „ciała porównawczego” zależnego od kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości odkształcenia, co pokazano w pracach [142, 144], a także zależnego od statycznie dopuszczalnych pól prędkości naprężeń, co pokazano w Dodatku A pracy. Wyrażenie o postaci (1.33) otrzymano także w pracach [123, 124], badając dodatnie wartości wyrażeń (1.12) i (1.16).

Każdy więc stan termodynamiczny, dla którego warunek (1.33) jest spełniony, jest stanem bezpiecznym z punktu widzenia możliwości wystąpienia rozdzielenia (bifurkacji) tego stanu. Ponieważ w procesie plastycznego odkształcania ciała wartość funkcji (modułu) wzmocnienia na ogół maleje, więc wartość h_1^{cr} można traktować jako górne oszacowanie nieznaney krytycznej wartości funkcji wzmocnienia h odpowiadającej stanowi bifurkacji.

Szczególne proste przypadki i postacie wyrażenia (1.33) były już cytowane w literaturze. Huckel i Maier [39, 40] otrzymali podobny warunek analizując stabilność materiału w procesie izotermicznego odkształcania, rozumianą jako dodatniość połowy iloczynu tensora prędkości naprężenia i tensora prędkości odkształcenia. Autorzy ci ograniczyli się w badaniach do przypadku małych odkształceń w izotermicznej teorii plastyczności, zachowując efekty wpływu odkształceń plastycznych na własności sprężyste materiału (efekty sprzężenia „sprężysto-plastycznego”) i niestowarzyszone prawa plastycznego płynięcia. Również Mróz, por. np. [89, 90], otrzymał wyrażenie tej postaci analizując lokalne dostateczne warunki jednoznaczności w przypadku izotermicznej i niesprężonej teorii plastyczności o niestowarzyszonym prawie plastycznego płynięcia. Otrzymany w pracach [89, 90] lokalny dostateczny warunek jednoznaczności dla materiału ściśliwego plastycznie i izotropowego ze względu na własności sprężyste przedstawiono w postaci „unormowanej”.

Dla przypadku dużych odkształceń lokalny warunek (1.33) wynikający z dodatniej określoności wyprowadzonych w pracy „ciał porównawczych” J' i I' otrzymuje się przy założeniu, że tensory modułów \mathbf{M} i \mathbf{L} hyposprężystości są dodatnio określone, tzn. $\boldsymbol{\epsilon}:\mathbf{M}\boldsymbol{\epsilon} > 0$ i $\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} > 0$, dla każdego $\boldsymbol{\epsilon} \neq \mathbf{0}$ i $\boldsymbol{\sigma} \neq \mathbf{0}$ [123]. Warunek (1.33) otrzymuje się więc badając dodatnią określoność wyrażeń J' i I' oraz uwzględniając w jednoparametrowej rodzinie warunków jednoznaczności parametry optymalne x_0^2 i y_0^2 , por. [123, 124, 142, 144] oraz Dodatek A.

2.5. PRZYPADKI SZCZEGÓLNE LOKALNEGO WARUNKU JEDNOZNACZNOŚCI

W równaniach konstytutywnych sprzężonej uogólnionej termoplastyczności, por. np. (1.3), (1.4), (1.13), (1.14), (1.24) i w „ciałach porównawczych” (1.16) i (1.25) oraz w wyprowadzonych warunkach jednoznaczności, por. wyrażenia (1.11), (1.19), (1.28) i (1.33) występują funkcje \mathbf{g} , $\bar{\mathbf{f}}_{\boldsymbol{\sigma}}$, $\mathbf{M}^{(a)}$ i m_{σ} oraz $\Sigma(\mathbf{v})$ i $\bar{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$, które będą miały inną postać w przypadkach mniej ogólnych modeli ciał. W przypadkach mniej ogólnych modeli ciał funkcje te będą przyjmować odpowiednio bardziej prostą postać.

Rozpatrzmy wybrane przypadki, ograniczając się do małych gradientów przemieszczeń (odkształceń) i ich prędkości $\mathbf{D} \cong \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$. Wówczas to $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cong \dot{\mathbf{S}}$ i $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cong \boldsymbol{\sigma}$ oraz $\Sigma(\mathbf{v}) = 0$ i $\bar{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) = 0$.

1. Stowarzyszone prawa plastycznego płynięcia, gdy $f_{1,\Pi} = 0$ to: $f_1(T, \boldsymbol{\sigma}, K) = f(T, \boldsymbol{\sigma}, K)$.

Wówczas funkcje \mathbf{g} , $\bar{\mathbf{f}}_{\boldsymbol{\sigma}}$ i m_{σ} przyjmują następujące postacie

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= (\mathbf{f}_{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{Z}d + m_{\sigma}\boldsymbol{\alpha}), & \bar{\mathbf{f}}_{\boldsymbol{\sigma}} &= (\mathbf{f}_{\boldsymbol{\sigma}} - \xi f_T \boldsymbol{\alpha}), \\ m_{\sigma} &= \frac{1}{\rho_0 c_{\sigma}} \left[(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{f}_{\boldsymbol{\sigma}} - \Pi \cdot d) - T \left(\frac{\partial \Pi(T, \boldsymbol{\sigma}, K)}{\partial T} \cdot d \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Funkcja $\mathbf{M}^{(a)}$ pozostaje natomiast bez zmian.

W tym przypadku uogólniona funkcja płynięcia plastycznego f_1 (potencjał plastyczny) nie zależy od wektora par wewnętrznych sił dysypacyjnych Π , które jednak zależą od stanu naprężenia, por. np. [142, 144]. Ponadto zachowane są wszystkie sprzężenia termomechaniczne oraz efekty sprzężenia „sprężysto-plastycznego”.

2. Przypadek nie uwzględniający efektu sprzężenia „sprężysto-plastycznego”.
Wówczas

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= (\mathbf{f}_{1,\boldsymbol{\sigma}} + m_{\sigma}\boldsymbol{\alpha}), & \bar{\mathbf{f}}_{\boldsymbol{\sigma}} &= (\mathbf{f}_{\boldsymbol{\sigma}} - \xi f_T \boldsymbol{\alpha}), \\ m_{\sigma} &= \frac{1}{\rho_0 c_{\sigma}} \left[(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{f}_{1,\boldsymbol{\sigma}} - \Pi \cdot d) - T \left(\frac{\partial \Pi(T, K)}{\partial T} \cdot d \right) \right], \end{aligned} \quad (1.35)$$

a postać funkcji $\mathbf{M}^{(a)}$, tak jak poprzednio pozostaje bez zmian.

W tym przypadku zachowane są także wszystkie efekty sprzężeń termomechanicznych oraz niestowarzyszone prawa plastycznego płynięcia. Model takiego ciała może być użyteczny np. podczas analizy adiabatycznych i nieizotermicznych procesów lokalizacji odkształceń plastycznych oraz nieizotermicznych, adiabatycznych lub quasiadiabatycznych procesów plastycznego odkształcania i formowania metali. Takie np. lokalne adiabatyczne niestateczności mogą powstawać w niektórych procesach obróbki skrawaniem np. podczas frezowania, toczenia powodując drgania i nierówności obrabianej powierzchni.

3. Stowarzyszone prawa plastycznego płynięcia przy równoczesnym braku efektu sprzężenia „sprężysto-plastycznego”. Wówczas

$$\mathbf{f}_{1,\sigma} = \mathbf{f}_\sigma, \quad \mathbf{g} = (\mathbf{f}_\sigma + m_\sigma \boldsymbol{\alpha}), \quad \bar{\mathbf{f}}_\sigma = (\mathbf{f}_\sigma - \xi f_T \boldsymbol{\alpha}), \quad (1.36)$$

$$m_\sigma = \frac{1}{\rho_0 c_\sigma} \left[(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{f}_\sigma - \Pi \cdot d) - T \left(\frac{\partial \Pi(T, K)}{\partial T} \cdot d \right) \right].$$

Ten sam rezultat opisywany przez funkcje konstytutywne (1.36) uzyskuje się również w przypadku stosowania postulatów Gyarmatiego, por. [142, 143]. W tym przypadku mamy do czynienia z modelem ciała sprzężonej termoplastyczności analizowanym przez Mroza i Ranieckiego w pracach [91, 92].

4. Przypadek równań konstytutywnych „przybliżonych”.

Ten przypadek funkcji konstytutywnych „przybliżonych” sprzężonej termoplastyczności był analizowany i badany w pracy, por. [119, 121, 122]. Gdzie

$$\mathbf{f}_{1,\sigma} = \mathbf{f}_\sigma, \quad \mathbf{g} = \mathbf{f}_\sigma, \quad \bar{\mathbf{f}}_\sigma = \mathbf{f}_\sigma \text{ i } \mathbf{M}^{(a)} = \mathbf{M}, \quad (1.37)$$

$$m_\sigma = \frac{1}{\rho_0 c_\sigma} \left[(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{f}_\sigma - \Pi \cdot d) - T \left(\frac{\partial \Pi(T, K)}{\partial T} \cdot d \right) \right].$$

Dla tego przypadku równań konstytutywnych na podstawie analizy wyrażań (2.3) i (2.4) oraz (1.15) wynika, że $h_I > 0$ oraz $H_I = h + \mathbf{f}_\sigma : \mathbf{M} \mathbf{f}_\sigma > 0$.

Wyrażenia te otrzymuje się, przyjmując założenia jak w przypadku 3 oraz pomijając dodatkowo efekt piezokaloryczny ($\xi f_T \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$) oraz rozszerzalność cieplną spowodowaną ciepłem dyssypacji i ciepłem przemian wewnętrznych, por. np. [119, 122].

5. Izotermiczna teoria plastyczności o niestowarzyszonym prawie plastycznego płynięcia, ze sprzężeniem „sprężysto-plastycznym” i niesprężona termicznie. Wówczas

$$\bar{\mathbf{f}}_\sigma = \mathbf{f}_\sigma, \quad \mathbf{g} = (\mathbf{f}_{1,\sigma} + \mathbf{Z} d), \quad \mathbf{M}^{(a)} = \mathbf{M}, \quad m_\sigma = 0 \text{ i } h_I = h. \quad (1.38)$$

Tego rodzaju model ciała sprężysto-plastycznego jest bardzo często używany do opisu materiałów porowatych, spieków, skał i gruntów, por. np. [37-40], [69]. W tym modelu zachowane są efekty wpływu odkształceń plastycznych na własności sprężyste ciała.

6. Izotermiczna teoria plastyczności o niestowarzyszonym prawie plastycznego płynięcia bez efektów sprzężenia „sprężysto-plastycznego” i bez sprzężeń termicznych. Wtedy

$$\mathbf{g} = \mathbf{f}_\sigma, \bar{\mathbf{f}}_\sigma = \mathbf{f}_\sigma, \mathbf{M}^{(a)} = \mathbf{M}, m_\sigma = 0 \text{ i } h_I = h. \quad (1.39)$$

Warunki jednoznaczności dla tego modelu ciała były szczegółowo badane i analizowane m.in. przez Mroza [89, 90]. Autor ten w pracy [90] wyprowadził także dostateczny lokalny warunek jednoznaczności dla ciała ściśliwego plastycznie oraz izotropowego ze względu na własności sprężyste i plastyczne.

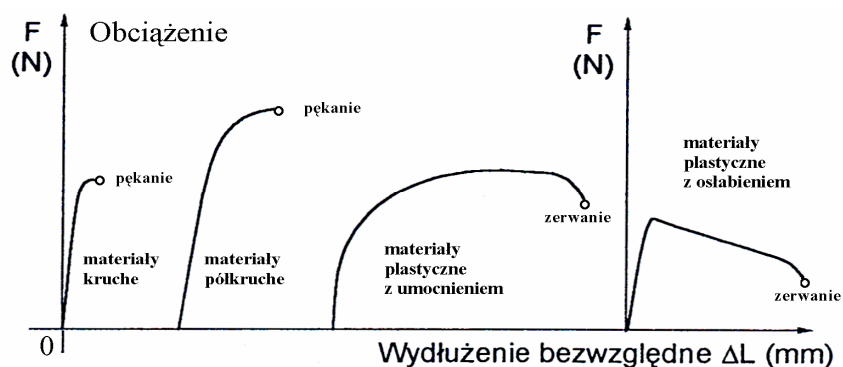
Przedstawione w tym punkcie niektóre wybrane przypadki ciał sprężysto-plastycznych i odpowiadające im globalne oraz lokalne warunki jednoznaczności rozwiązania przyrostowego problemu brzegowego, nie wyczerpują oczywiście wszystkich możliwych modeli ciał, które wynikają z wyprowadzonego w pracach autora, por. [142-144], uogólnionego modelu ciała sprzężonej termoplastyczności. Przedstawione przypadki 1÷6 modeli ciał odpowiadają w mniejszym lub większym stopniu standardowym modelom ciał sprężysto-plastycznym, które były już omawiane i cytowane w rozpoznanej literaturze.

3. UWAGI KOŃCOWE I WNIOSKI

1. W pracy wyprowadzono konieczne i dostateczne warunki jednoznaczności rozwiązania sformułowanego przyrostowego (prędkościowego) problemu brzegowego sprzężonej uogólnionej termo-sprężysto-plastyczności, dla przypadku dużych i małych gradientów przemieszczeń (dużych i małych odkształceń), por. [123-124], [142-144]. Wyprowadzono warunki globalne oraz bezpieczniejsze dla małych odkształceń warunki lokalne. Wyprowadzono warunki jednoznaczności dla uogólnionego ciała termoplastycznego [142-144] oraz odpowiednich „ciał porównawczych”, por. [91, 92], [122-124], [142-144]. Wyprowadzone warunki jednoznaczności (globalne i lokalne) są odpowiednimi koniecznymi i dostatecznymi kryteriami wykluczającymi wystąpienie stanów rozdwojenia równowagi (bifurkacja stanów równowagi) sprzężonej uogólnionej nieizotermicznej sprężysto-termoplastyczności a także w procesach izotermicznych obciążeń. W pracy wykazano także, że lokalne warunki jednoznaczności dla przypadku uogólnionego ciała sprężysto-termoplastycznego i „ciał porównawczych” mają taką samą postać natomiast technika obliczeń stanów niestateczności dla „ciał porównawczych” jest znacznie łatwiejsza. Jest to więc pewnego rodzaju

merytoryczne uzasadnienie celowości wyprowadzenia takich „ciał porównawczych”. Natomiast globalne warunki jednoznaczności i kryteria bifurkacyjne dla przypadku ciał porównawczych mają różną postać.

2. W uogólnionym przypadku równania konstytutywne sprzężonej termoplastyczności mają charakter niestowarzyszonych praw plastycznego płynięcia, nawet w przypadku przyjęcia postulatu Gyarmatiego, por. np. [25, 142, 143], zawierają efekty sprzężeń termomechanicznych oraz uwzględniają zjawisko sprzężenia „sprężysto-plastycznego”. Oznacza to, że można je stosować do opisu nie tylko materiałów metalicznych plastycznych, kruchych i półkruchych, lecz również do materiałów porowatych, proszków spiekanych, skał, gruntów, betonów i innych. Cztery najczęściej spotykane przykłady rodzajów materiałów spotykanych w zastosowaniach przedstawiono poglądowo na rys. 1.1.



Rys. 1.1. Poglądowe wykresy rozciągania różnych rodzajów materiałów

3. W stosunku do istniejących już prac poświęconych badaniom zagadnień jednoznaczności rozwiązania i rozdwojenia stanów równowagi, por. np. [91, 92], [122-124], [142-144], w niniejszej pracy wyprowadzono nowe kryterium globalne i lokalne dla przypadku wyprowadzonego „ciała porównawczego” zależnego od statycznie dopuszczalnych pól prędkości naprężenia oraz uwzględniono duże odkształcenia. Niniejsza praca jest więc dalszym rozwinięciem wcześniejszych prac, por. [142-144]. Wyprowadzone bowiem we wcześniejszych pracach, por. [142, 144], warunki jednoznaczności i kryteria bifurkacyjne dotyczyły „ciała porównawczego” wyprowadzonego dla przypadku ciała uogólnionej sprężysto-termoplastyczności w zależności od kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości odkształcenia.
4. Praktycznym przykładem zastosowania takiego kinematycznie dopuszczalnego pola prędkości odkształcenia, może być wyprowadzony w pracach autora, por. [148, 155], uogólniony model odkształcenia w procesach gięcia metalowych rur na kolana rurociągów lub instalacji rurowych na giętarkach.

5. Można także założyć, że w tych obszarach plastycznie odkształcanego ciała, w których przekroczone zostały warunki jednoznaczności lub kryteria bifurkacyjne mogą powstać koncentratory deformacji np. submikro- lub mikrokoncentracje odkształceń. Mogą pojawić się mikropęknięcia, mikrolokalizacje odkształceń plastycznych, które następnie w procesie eksploatacji, wskutek dalszego rozwoju i nukleacji staną się wielkościami makro, doprowadzając do pęknięcia materiału. Wpływ takich koncentratorów może być szczególnie ważny podczas zmiennych obciążeń mechanicznych i ciepłno-mechanicznych, pełzania, a więc w zagadnieniach wytrzymałości zmęczeniowej, czasowej oraz w analizie zjawisk pękania materiałów, por. np. [42], [64-68], [93], [97-101].
6. Na eksploatacyjną wytrzymałość doraźną, czasową na pełzanie w warunkach zmiennych obciążeń mechanicznych i ciepłno-mechanicznych elementów konstrukcji mają także wpływ: historia procesów technologicznych, historii obciążenia i odkształceń na etapie wytwarzania, prób przedeksplatacyjnych, prób dopuszczających do eksploatacji itp. oraz wielkości pozostałych naprężeń wewnętrznych (resztkowych). W pracy [93 rozdział IV, p. 4.1] pierwszy z autorów stwierdził, że „Jedną z najczęściej obserwowanych form zniszczenia konstrukcji jest zniszczenie zmęczeniowe, niezwykle groźne w skutkach, gdyż zazwyczaj niespodziewane. Zniszczenie to może wystąpić przy poziomie naprężeń znacznie niższym niż wytrzymałość doraźna, czy też granica plastyczności. Poziom naprężeń, przy których element konstrukcyjny ulega zniszczeniu na skutek zmiennych w czasie obciążeń zależy od gatunku materiału, obróbki cieplnej, stanu powierzchni elementów, wymiarów geometrycznych i kształtu elementu konstrukcyjnego, sposobu obciążenia oraz od procesów technologicznych wytwarzania, które pozostawiać mogą po sobie mikrodefekty lub naprężenia własne. Zniszczenie zmęczeniowe może nastąpić nawet przy poziomie naprężeń czterokrotnie mniejszym niż wytrzymałość doraźna”.
7. W pracy wykazano, że dla przypadku „ciała porównawczego” zależnego od kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości odkształcenia funkcja podcałkowa J' (1.16), przy przejściu granicznym $(\mathbf{g}^* = \bar{\mathbf{f}}_{\sigma}^*)$ i $(x^2 = 1)$ przechodzi w funkcję podcałkową J_1 jak dla ciała termo-sprężysto-plastycznego o stowarzyszonych prawach plastycznego płynięcia (mogą to być równania np. (1.37) lub mniej złożone). Natomiast z wyrażenia (1.25) dla „ciała porównawczego” zależnego od statycznie dopuszczalnych pól prędkości naprężeń wynika, że podstawiając w granicy $(\mathbf{g} = \bar{\mathbf{f}}_{\sigma})$ i $(y^2 = 1)$ otrzymamy wyrażenie I_4 analogiczne jak dla ciała termosprężystego. Równań dla „ciał porównawczych” nie otrzymuje się więc przez ich wzajemne matematyczne „odwrócenie” jak w przypadku ciał termo-sprężysto-plastycznych, lecz wy-

prowadza się je niezależnie tak, aby spełnione były nierówności (1.17) - (1.18) oraz (1.26) - (1.28).

8. W pracy wyprowadzono tylko ogólne wyrażenia dla równań pola i funkcji konstytutywnych sprzężonej uogólnionej sprężysto-termoplastyczności, które występują odpowiednio w koniecznych jak i dostatecznych (wystarczających) globalnych oraz lokalnych warunkach jednoznaczności rozwiązania sformułowanego przyrostowego problemu brzegowego. W dalszych badaniach można przeprowadzić specyfikację postaci dla funkcji konstytutywnych sprzężonej uogólnionej sprężysto-termo-plastyczności w ramach nieliniowej mechaniki ośrodków ciągłych dla przypadku dużych odkształceń, por. [1, 3, 5, 9], [26-36], [56-58], [62, 63, 80, 85, 86], [105-117], [129, 134], [165-168], w oparciu o przeprowadzone i dostępne badania doświadczalne.
9. Należałoby także w przyszłości wyprowadzić lokalne dostateczne warunki jednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego dla przypadku dużych odkształceń zarówno dla ciał sprężysto-termoplastycznych jak i „ciał porównawczych” zależnych od kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości odkształcenia oraz statycznie dopuszczalnych pól prędkości naprężenia. Wydaje się intuicyjnie, na podstawie równań konstytutywnych dla ciał termo-sprężysto-plastycznych jak i dla „ciał porównawczych”, że warunki te będą miały taką samą postać, podobnie jak to ma miejsce w przypadku małych odkształceń.
10. Lokalne dostateczne warunki jednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego dla przypadku dużych odkształceń będzie można wyprowadzić przy znajomości jawnych postaci dla funkcji $\Sigma(\mathbf{v})$ i $\bar{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$, por. np. wyrażenia (1.9), (1.11), (1.19) i (1.32), które w tym przypadku nie będą równe zero. Dwie konkretne postacie funkcji $\Sigma(\mathbf{v})$ podano w pracy [123]. Mają one odpowiednio następującą postać

$$\Sigma(\mathbf{v}) = \Sigma_1 = \int_D (2\mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma}\mathbf{D} - \mathbf{V}^T : \boldsymbol{\sigma}\mathbf{V}^T) dV \quad \text{lub} \quad \Sigma(\mathbf{v}) = \Sigma_2 = - \int_D (\mathbf{V}^T : \boldsymbol{\sigma}\mathbf{V}^T) dV, \quad (1.40)$$

gdzie, odpowiednio:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\mathbf{S}} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{V}^T + (\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{D}) = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}(\text{div } \mathbf{v}) - \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}, \quad (1.41)$$

lub

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2 = \dot{\mathbf{S}} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{V}^T = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{V}^T - \mathbf{V}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}(\text{div } \mathbf{v}). \quad (1.42)$$

Wyznaczając formalnie z zależności (1.41) i (1.42) wielkość \mathbf{v} i podstawiając następnie do (1.40), można formalnie otrzymać zależność na poszukiwaną postać funkcji $\bar{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$.

DODATEK A

Pokażemy obecnie, że I' jest dodatnio określone, jeżeli nierówność (1.33) jest spełniona. Ten fakt ukazuje, że dostateczny lokalny warunek jednoznaczności dla przypadku małych gradientów przemieszczeń i ich prędkości (przypadek małych odkształceń i ich prędkości) oraz warunek dodatniej określoności dla funkcji podcałkowej I' jest taki sam jak dla funkcji J' , a także jest taki sam dla funkcji podcałkowych ciała sprężysto-plastycznego I i J , por. np. [123, 124], [142, 144]. Jest to zarazem pewne dodatkowe kryterium potwierdzające słuszność wprowadzenia takiego „ciała porównawczego” oznaczonego symbolem I' .

Na podstawie wyrażenia (1.25) wprowadźmy następujące oznaczenie

$$\left(\mathbf{g} - y^2 \bar{\mathbf{f}}_{\sigma} \right) \equiv \mathbf{L}_1 \mathbf{W}_1. \quad (\text{A.1})$$

Z wyrażenia (A.1) otrzyma się po nasunięciu tensora \mathbf{M}_1 , gdzie:

$\mathbf{M}_1 = \left(\mathbf{L}_1^{-1} \right)_{\sigma=\sigma(T,D,K)}$ następującą zależność

$$\mathbf{M}_1 \left(\mathbf{g} - y^2 \bar{\mathbf{f}}_{\sigma} \right) \equiv \mathbf{W}_1, \quad (\text{A.2})$$

gdzie wyrażenia \mathbf{g} i $\bar{\mathbf{f}}_{\sigma}$ określone są wyrażeniami w (1.14).

Podstawiając (A.1) do (1.25), otrzyma się

$$I' = \Delta \hat{\sigma} : \mathbf{L}_1 \Delta \hat{\sigma} - \frac{1}{4y^2 h_I} (\Delta \hat{\sigma} : \mathbf{L}_1 \mathbf{W}_1)^2. \quad (\text{A.3})$$

Rozkładając $\Delta \hat{\sigma}$ na kierunek \mathbf{W}_1 i kierunek \mathbf{t}_1 prostopadły do \mathbf{W}_1 w 9-wymiarowej przestrzeni z metryką \mathbf{L}_1 otrzyma się po przekształceniach następujące wyrażenie:

$$\mathbf{t}_1 = \Delta \hat{\sigma} - \frac{(\mathbf{L}_1 \mathbf{W}_1) : \Delta \hat{\sigma}}{L_w^2}, \quad (\text{A.4})$$

gdzie $L_w^2 = \mathbf{W}_1 : \mathbf{L}_1 \mathbf{W}_1$.

Wówczas

$$I' = \mathbf{t}_1 : \mathbf{L}_1 \mathbf{t}_1 + \frac{1}{4y^2 h_I} (4y^2 h_I - L_w^2) (\Delta \hat{\sigma} : \mathbf{L}_1 \mathbf{W}_1). \quad (\text{A.5})$$

Z wyrażenia (A.5) wynika, że I' jest dodatnio określone, gdy

$$h_I > \frac{1}{4y^2} (\mathbf{W}_1 : \mathbf{L}_1 \mathbf{W}_1). \quad (\text{A.6})$$

Warunek (A.6) przedstawia sobą jednoparametrową, ze względu na parametr y^2 , rodzinę lokalnych dostatecznych warunków jednoznaczności i warunków dodatniej określoności dla ciała porównawczego I' . Obecnie należy przeprowadzić procedurę optymalizacji warunku (A.6), aby osiągał on minimum ze względu na parametr y^2 .

Niech $r \equiv y^2$, stąd $r > 0$

$$\text{oraz} \quad P(r) = \frac{1}{4r} (\mathbf{W}_1 : \mathbf{L}_1 \mathbf{W}_1). \quad (\text{A.7})$$

Podstawiając $r \equiv y^2$ do wyrażen (A.2) i (A.7) i przyrównując obliczoną pochodną do zera, otrzyma się

$$\frac{\partial P(r)}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} (\mathbf{W}_1 : \mathbf{L}_1 \mathbf{W}_1) - \frac{2}{r} (\mathbf{W}_1 : \mathbf{L}_1 \mathbf{M}_1 \bar{\mathbf{f}}_\sigma) = 0, \quad (\text{A.8})$$

więc

$$-2r (\mathbf{W}_1 : \bar{\mathbf{f}}_\sigma) = (\mathbf{W}_1 : \mathbf{L}_1 \mathbf{W}_1). \quad (\text{A.9})$$

Podstawiając \mathbf{g} i $\bar{\mathbf{f}}_\sigma$, które są określone wyrażeniami (1.14)₁₁ i ₁₂ oraz $r \equiv y^2$ do wzoru (A.9), po przekształceniach otrzyma się następujące wyrażenie

$$y_0^2 = \sqrt{\frac{\mathbf{g} : \mathbf{M}_1 \mathbf{g}}{\bar{\mathbf{f}}_\sigma : \mathbf{M}_1 \bar{\mathbf{f}}_\sigma}}. \quad (\text{A.10})$$

Jest to wyrażenie o podobnej postaci (analogiczne) do otrzymanego wcześniej w pracach, por. np. [123, 124], [142, 144].

Podstawiając ostatecznie wyrażenia (A.2) i (A.10) do wzoru (A.6) oraz wykorzystując wzór (1.14)₄, po wykonaniu odpowiednich przekształceń, otrzyma się następującą zależność

$$h_I > \frac{1}{2} \left[\sqrt{(\mathbf{g} : \mathbf{M}^{(a)} \mathbf{g})(\bar{\mathbf{f}}_\sigma : \mathbf{M}^{(a)} \bar{\mathbf{f}}_\sigma)} - \mathbf{g} : \mathbf{M}^{(a)} \bar{\mathbf{f}}_\sigma \right] = h_1^{cr}. \quad (\text{A.11})$$

Jak widać, jest to wyrażenie analogiczne do wyrażenia otrzymanego dla przypadku uogólnionego sprzężonego ciała sprężysto-termoplastycznego, por. zależność (1.33). Ten matematyczny fakt potwierdza dodatkowo słuszność i celowość wprowadzenia takiego wyrażenia podcałkowego I' dla „ciała porównawczego” zależnego od statycznie dopuszczalnych pól prędkości naprężenia.

W zakończeniu można jeszcze raz podkreślić, że warunek (A.11) jest razem warunkiem koniecznym i dostatecznym aby wyrażenia odpowiednio J , por. (1.12) oraz J' , por. (1.16) były dodatnio określone, por. np. [123, 124]. Na podstawie natomiast nierówności (1.26) - (1.28) wynika także, że jest to również warunek konieczny i dostateczny, aby wyrażenia I , por. (1.23) oraz I' , por. (1.25) także były dodatnio określone.

ROZDZIAŁ II

KRYTYCZNE WARTOŚCI FUNKCJI I MODUŁÓW WZMOCNIENIA DLA WYBRANYCH MATERIAŁÓW

1. WSTĘP

W rozdziale I i w pracach [142, 144] wyprowadzono lokalny konieczny i dostateczny warunek jednoznaczności rozwiązania sformułowanego przyrostowego (prędkościowego) problemu brzegowego uogólnionej sprzężonej termo-sprężysto-plastyczności dla przypadku małych gradientów przemieszczeń (małych odkształceń) i ich prędkości. Wyprowadzono także lokalne warunki dla szeregu innych bardziej prostych modeli ciał. Wyprowadzone lokalne warunki jednoznaczności są odpowiednio koniecznymi i dostatecznymi warunkami wykluczającymi możliwość wystąpienia rozdwojenia stanu równowagi (bifurkacja stanu równowagi) w procesach izotermicznych oraz nieizotermicznych obciążen cieplno-mechanicznych. Wyprowadzone lokalne warunki jednoznaczności poza czysto matematyczną i poznawczą wartością mogą mieć duże znaczenie praktyczne. Stanowią one narzędzie służące do oceny wartości krytycznych obciążeń, odkształceń i temperatury, po przekroczeniu których, możliwe jest wystąpienie stanu rozdwojenia równowagi (bifurkacja równowagi) [142-145].

Można bowiem założyć, że w tych obszarach plastycznie odkształcanego ciała (punktach, częściach objętości), w których przekroczone zostały warunki jednoznaczności lub kryteria bifurkacyjne mogą powstać mikronieciągłości naprężeń i odkształceń. Negatywny wpływ takich mikronieciągłości może być szczególnie ważny podczas pełzania, zmiennych obciążeń mechanicznych i cieplno-mechanicznych, a więc w zagadnieniach określania wytrzymałości zmęczeniowej i czasu trwałości eksploatacyjnej oraz w analizie zjawisk pęknięcia materiałów i elementów konstrukcyjnych, por. np. [42], [64-68], [97-101].

W uogólnionym przypadku równania konstytutywne sprzężonej termo-sprężysto-plastyczności mają charakter niestowarzyszonych praw plastycznego płynięcia, nawet w przypadku przyjęcia postulatu Gyarmatiego, por. [142-144], zawierają efekty sprzężeń termomechanicznych oraz uwzględniają efekty sprzężenia „sprężysto-plastycznego” [142]. Oznacza to, że można je stosować do opisu nie tylko ciał metalicznych plastycznych i półkruchych, lecz również do materiałów porowatych, proszków spiekanych, skał i gruntów, betonu czy mniej plastycznych metali i ich stopów. Dla tych wymienionych i wybranych rodzajów materiałów wyprowadzono w niniejszym rozdziale w oparciu o równania konstytutywne lokalne konieczne warunki wystąpienia stanu rozdwojenia równowagi (bifurkacja) dla przypadku małych odkształceń i ich prędkości.

W pracy wyspecyfikowano przypadki szczególne lokalnego warunku jednoznaczności dla małych odkształceń dla wybranych ciał z grupy materiałów metalicznych, materiałów porowatych, proszków spiekanych, skał i gruntów, betonu i mniej plastycznych metali i ich stopów eksploatowanych przez długi czas, np. w złożonych warunkach obciążeń ciepłno-mechanicznych. Dla tych materiałów niestateczność odkształceń plastycznych (np. w postaci płaszczyzny lokalizacji [127, 128], powstania bruzdy [73], [138-140], karbu, szyjki [43, 47], pasm ścinania [114] itp.) może zachodzić już dla małych odkształceń. Materiały opisywane są odpowiednio: równaniami konstytutywnymi elipsoidalnymi, Druckera-Pragera, Jenike-Shilda oraz Rice'a-Rudnickiego, Hubera-Misesa-Hencky'ego i innymi. W przypadku mniej ogólnych modeli ciał funkcje konstytutywne występujące w lokalnych warunkach jednoznaczności będą przyjmować odpowiednio bardziej prostą postać [27-41], [89, 90], [142]. Dla tych wybranych rodzajów materiałów wyprowadzono także formalnie konieczne lokalne warunki możliwego wystąpienia stanu lokalizacji odkształceń plastycznych w postaci płaszczyzny lokalizacji Rice'a-Rudnickiego (R-R), [127, 128]. Wybrane rodzaje materiałów nie wyczerpują oczywiście wszystkich cytowanych w literaturze równań konstytutywnych. Są to równania konstytutywne materiałów, które są najczęściej spotykane i cytowane w poznanej literaturze.

Można dodać, że lokalny dostateczny warunek jednoznaczności rozwiązania sformułowanego przyrostowego (prędkościowego) problemu brzegowego uogólnionej termo-sprężysto-plastyczności ze znakiem (\leq) po prawej stronie staje się lokalnym koniecznym warunkiem możliwego wystąpienia rozdwojenia stanu równowagi w postaci np. płaszczyzny lokalizacji odkształceń, bruzdy, szyjki, mikro i makro pasm ścinania czy też innych stanów niestateczności odkształceń plastycznych materiałów, por. [31], [37-41], [105-114].

W pracach [142, 144, 145] wykazano, że w przypadku równań konstytutywnych materiału analizowanego przez Rice'a-Rudnickiego (R-R) [127, 128] lokalny konieczny warunek niejednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego sprężysto-plastyczności nakłada większe wartości na izotermiczną funkcję wzmocnienia h aniżeli lokalny konieczny warunek lokalizacji odkształceń plastycznych (R-R) w postaci płaszczyzny lokalizacji. Oznacza to, że lokalny konieczny warunek niejednoznaczności jest górnym oszacowaniem wartości funkcji (modułów) wzmocnienia nakładanych przez warunek lokalizacji (R-R). Fizycznie jest to równoważne temu, że konieczny lokalny warunek niejednoznaczności rozwiązania podstawowego problemu brzegowego sprężysto-plastyczności dopuszcza mniejsze (bezpieczniejsze) wielkości krytycznych obciążeń niż konieczny warunek lokalizacji odkształceń plastycznych (R-R). Wynika to stąd, że im większa jest wartość funkcji (modułu) wzmocnienia h tym mniejsze są dopuszczalne obciążenia zewnętrzne. Stąd wynika, że lokalny konieczny warunek niejednoznaczności jest dolnym (bezpieczniejszym) oszacowaniem wartości obciążeń zewnętrznych niż warunek lokalizacji (R-R).

2. RÓWNANIA KONSTITUTYWNE I OPIS WYBRANYCH MATERIAŁÓW

2.1. RÓWNANIA UWZGLĘDNIAJĄCE NIESTOWARZYSZONE PRAWA PLASTYCZNEGO PŁYNIĘCIA

2.1.1. Równania elipsoidalne

Równania elipsoidalne o niestowarzyszonych prawach plastycznego pływnięcia służą do opisu ściśliwych plastycznie materiałów porowatych, proszków spiekanych, skał i gruntów, betonu oraz mniej plastycznych (półkruchych) [22] materiałów metalicznych i innych. Mają one następującą postać [39-41]:

$$\Phi = (I_1 - a_1)^2 + b_1 I_{\text{II}d} - d = 0, \text{ warunek (funkcja) plastyczności. (2.1)}$$

$$\Psi = (I_1 - a_2)^2 + b_2 I_{\text{II}d}, \text{ potencjał plastyczny, (2.2)}$$

gdzie: I_1 – pierwszy niezmiennik tensora naprężenia, $I_1 = \sigma_{ii}$,
 $I_{\text{II}d}$ – drugi niezmiennik dewiatora tensora naprężenia σ'_{ij} ,
 więc: $\text{dev} \sigma_{ij} = \sigma'_{ij}$.

$$I_{\text{II}d} = \bar{\tau}^2 = \left(\frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \right) \text{ oraz } \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \quad (2.3)$$

δ_{ij} – oznacza deltę Kroneckera (tensor jednostkowy) oraz ($i, j, k = 1, 2, 3$),
 a_1, a_2, b_1, b_2 i d – odpowiednie parametry materiałowe, które ogólnie mogą być zależne od historii deformacji. Jeżeli np. tylko parametr d zależy od historii deformacji, a pozostałe nie, to opisywane jest tylko wzmocnienie izotropowe ciała.

Z wyrażeń (2.1) i (2.2) otrzyma się, że

$$\begin{cases} (f_{\sigma})_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = b_1 \sigma'_{ij} + 2(\sigma_{kk} - a_1) \delta_{ij} \\ g_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{ij}} = b_2 \sigma'_{ij} + 2(\sigma_{kk} - a_2) \delta_{ij} \end{cases} \quad (2.4)$$

Stąd

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{h} [b_2 \sigma'_{ij} + 2(\sigma_{kk} - a_2) \delta_{ij}] [b_1 \sigma'_{ij} \dot{\sigma}_{kl} + 2(\sigma_{kk} - a_1) \dot{\sigma}_{kk}], \\ \dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1}{2} \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{G} + \frac{1}{9} \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{K} \delta_{ij}, \end{cases} \quad (2.5)$$

oraz

$$\begin{cases} 2\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{G} + \frac{b_2}{h} \sigma'_{ij} [b_1 \sigma'_{ij} \dot{\sigma}_{kl} + 2(\sigma_{kk} - a_1) \dot{\sigma}_{kk}], \\ \dot{\epsilon}_{kk} = \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{3K} + \frac{6(\sigma_{kk} - a_2)}{h} [b_1 \sigma'_{ij} \dot{\sigma}_{kl} + 2(\sigma_{kk} - a_1) \dot{\sigma}_{kk}]. \end{cases} \quad (2.6)$$

Z wyrażeń (2.5) i (2.6) po przekształceniach otrzyma się

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} = & \frac{1}{2} \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{G} + \frac{b_2}{2h} \sigma'_{ij} [b_1 \sigma'_{ij} \dot{\sigma}_{kl} + 2(\sigma_{kk} - a_1) \dot{\sigma}_{kk}] + \\ & + \frac{1}{3} \left\{ \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{3K} + \frac{6(\sigma_{kk} - a_2)}{h} [b_1 \sigma'_{ij} \dot{\sigma}_{kl} + 2(\sigma_{kk} - a_1) \dot{\sigma}_{kk}] \right\} \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

gdzie: h – funkcja (moduł) wzmocnienia,

G – moduł sprężystego odkształcenia postaciowego ($G \equiv \mu$) lub moduł ścinania,

K – moduł sprężystego odkształcenia objętościowego.

Z analizy wyrażeń (2.1) – (2.7) wynika, że równania elipsoidalne opisują ściśle materiały sprężysto-plastyczne o niestowarzyszonych prawach plastycznego płynięcia i nie uwzględniają efektów sprzężeń „sprężysto-plastycznych” i termomechanicznych. Opisują więc materiały, które wynikają z założeń izotermicznej teorii sprężystości i plastyczności.

Odpowiadający równaniom elipsoidalnym lokalny dostateczny warunek jednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego dla przypadku małych odkształceń ma postać

$$\begin{aligned} \frac{h}{\mu} > \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left[(2b_1 \bar{\tau})^2 + 24(\sigma_{kk} - a_1)^2 \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \right] \left[(2b_2 \bar{\tau})^2 + 24(\sigma_{kk} - a_2)^2 \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \right]} \right. \\ \left. - \left[4b_1 b_2 \bar{\tau}^2 + 24(\sigma_{kk} - a_1)(\sigma_{kk} - a_2) \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

gdzie: $\frac{3\lambda + 2\mu}{\mu} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}$ i $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ lub $K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}$

oraz μ i λ – stałe sprężystości Lamego,

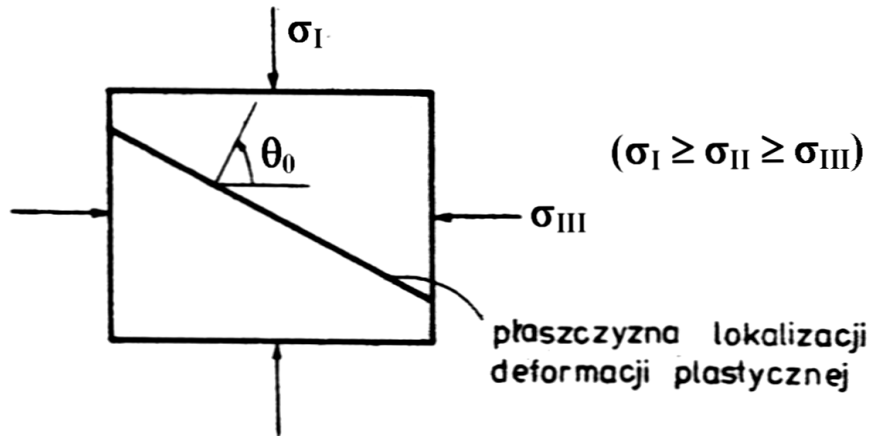
ν – współczynnik Poissona, E – moduł Younga.

Nierówność (2.8) ze znakiem równości po prawej stronie staje się lokalnym koniecznym warunkiem niejednoznaczności rozwiązania sformułowanego przyrostowego problemu brzegowego sprężysto-termoplastyczności – rozdwojenia stanu równowagi (bifurkacja stanu równowagi).

Natomiast formalnie wyprowadzona postać na krytyczną wartość funkcji wzmocnienia h^{cr} , określająca możliwość wystąpienia stanu lokalizacji odkształceń plastycznych w postaci płaszczyzny lokalizacji Rice'a-Rudnickiego (R-R) wg [127, 128] dla równań elipsoidalnych, którą otrzymano dla przypadku $\hat{\sigma} \approx \hat{\sigma}$ (przypadek małych odkształceń oraz pomijane są efekty współobrotów cząstek ciała), a także przy pominięciu wyrazów rzędu $O(\bar{\tau}/G)$ i wyższych, ma następującą postać

$$\frac{h^{cr}}{\mu} = \frac{4(1+\nu)}{1-\nu} (a_1 - a_2)^2 - \frac{1+\nu}{2} [N + 3(2\sigma_{kk} - a_1 - a_2)]^2. \quad (2.9)$$

Zmienny parametr N występujący we wzorze (2.9) zależy od stanu naprężenia i wynosi, por. [127, 128, 142, 144]: $\sigma'_{II} = N \bar{\tau}$, gdzie σ'_{II} – jest drugą składową główną dewiatora naprężeń w układzie współrzędnych jak na rys. 2.1.



Rys. 2.1. Poglądowy schemat płaszczyzny lokalizacji odkształceń plastycznych w układzie kierunków naprężeń głównych $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$, wg [128, 142, 145]

Zakłada się także jak w pracach, por. [127, 128], że normalna \mathbf{n} do płaszczyzny lokalizacji odkształceń plastycznych jest prostopadła do kierunku σ_{II} oraz: $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$, gdzie $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ oznaczają naprężenia główne.

W pracy [128] oznaczono kąt θ jako kąt orientujący płaszczyznę lokalizacji odkształceń plastycznych w układzie kierunków głównych stanu naprężenia (kąt θ zawarty jest między normalną do płaszczyzny lokalizacji \mathbf{n} a kierunkiem σ_{III}). Oznaczonemu na rys. 2.1 kątowi θ_0 , odpowiada maksymalna wartość funkcji wzmocnienia h_{\max}^{cr} .

Jak widać dla materiałów opisywanych równaniami elipsoidalnymi, warunek (2.8) jest zależny od części kulistej tensora naprężenia σ_{kk} , natomiast warunek (2.10) zależy dodatkowo poprzez parametr N od intensywności istniejącego stanu naprężenia $\bar{\tau}$. Stan naprężenia wynika od obciążenia zewnętrznego, rodzaju materiału i warunków brzegowych.

Maksymalna natomiast wartość krytycznej funkcji wzmocnienia h_{\max}^{cr} na podstawie wyrażenia (2.9) jest osiągnięta dla: $N = -3(2\sigma_{kk} - a_1 - a_2)$. Wówczas z wyrażenia (2.9) otrzymano

$$\frac{h_{\max}^{\text{cr}}}{\mu} = \frac{4(1+\nu)}{1-\nu} (a_1 - a_2)^2. \quad (2.10)$$

Jak wynika z wyrażenia (2.10) krytyczna maksymalna wartość funkcji wzmocnienia h_{\max}^{cr} nie zależy już od stanu naprężenia tylko od odpowiednich parametrów materiałowych (μ, ν, a_1 i a_2), podobnie jak to ma miejsce dla innych równań konstytutywnych [127, 128, 142].

2.1.2. Równania Druckera-Pragera

Równania konstytutywne Druckera-Pragera o niestowarzyszonych pracach plastycznego płynięcia także mogą służyć do opisu ściśliwych plastycznie materiałów porowatych, proszków spiekanych, skał i gruntów, betonu czy też mniej plastycznych (np. półkruchych), por. np. [27] materiałów metalicznych np. długotrwale eksploatowanych w warunkach złożonych obciążeń cieplno-mechanicznych. Mają one, por. np. [37-41] następującą postać

$$\Phi = \alpha I_1 + (I_{\text{IIId}})^{\frac{1}{2}} - k = 0, \text{warunek (funkcja) plastyczności.} \quad (2.11)$$

$$\Psi = \alpha \theta I_1 + (I_{\text{IIId}})^{\frac{1}{2}}. \text{potencjał plastyczny.} \quad (2.12)$$

Między parametrami materiałowymi zachodzą następujące zależności

$$\begin{cases} 3\alpha^2 = \sin^2 \rho (3 + \sin^2 \rho)^{-1}, \\ k^2 = (3c^2 + \cos^2 \rho)(3 + \sin^2 \rho)^{-1}, \end{cases} \quad (2.13)$$

gdzie: k – parametr określający granicę plastyczności materiału,
 θ – bezwymiarowy parametr materiałowy ($\theta < 1$),
 ρ – kąt tarcia wewnętrznego materiału,
 c – współczynnik kohezji (spójności) materiału.

Znaczenie pozostałych wielkości fizycznych i parametrów materiałowych jest takie same jak w przypadku równań elipsoidalnych.

Z wyrażen (2.11) i (2.12) otrzymano następujące zależności

$$\begin{cases} (f_\sigma)_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\tau}} + \alpha \delta_{ij}, \\ g_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\tau}} + \alpha \theta \delta_{ij}. \end{cases} \quad (2.14)$$

Stąd z teorii równań plastycznego płynięcia i teorii sprężystości otrzyma się

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{h} \left[\frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\tau}} + \alpha \theta \delta_{ij} \right] \left[\frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\tau}} \dot{\sigma}_{kl} + \alpha \dot{\sigma}_{kk} \right], \\ \dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1}{2} \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{G} + \frac{1}{9} \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{K} \delta_{ij}, \end{cases} \quad (2.15)$$

gdzie: $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ – tensor prędkości odkształcenia plastycznego,

$\dot{\epsilon}_{ij}^e$ – odpowiednio tensor prędkości odkształcenia sprężystego.

$$\begin{cases} 2\dot{\epsilon}'_{ij} = \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{G} + \frac{1}{h} \frac{\sigma'_{ij}}{\bar{\tau}} \left[\frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\tau}} \dot{\sigma}_{kl} + \alpha \dot{\sigma}_{kk} \right], \\ \dot{\epsilon}_{kk} = \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{3K} + \frac{3\alpha\theta}{h} \left[\frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\tau}} \dot{\sigma}_{kl} + \alpha \dot{\sigma}_{kk} \right], \end{cases} \quad (2.16)$$

gdzie: $\dot{\mathcal{E}}_{ij}$ – dewiator tensora prędkości odkształcenia całkowitego,

$\dot{\mathcal{E}}_{kk}$ – część kulista (objętościowa) tensora prędkości odkształcenia.

Z wyrażen (2.15) i (2.16) po przekształceniach otrzymano

$$\dot{\mathcal{E}}_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{G} + \frac{1}{2h} \frac{\sigma'_{ij}}{\bar{\tau}} \left[\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\tau}} \dot{\sigma}_{kl} + \alpha \dot{\sigma}_{kk} \right] + \frac{1}{3} \left[\frac{\dot{\sigma}_{kk}}{3K} + \frac{3\alpha\theta}{h} \left(\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\tau}} \dot{\sigma}_{kl} + \alpha \dot{\sigma}_{kk} \right) \right] \delta_{ij}, \quad (2.17)$$

gdzie: $\dot{\mathcal{E}}_{ij}$ – tensor prędkości całkowitego odkształcenia.

Natomiast znaczenie pozostałych wielkości fizycznych i parametrów materiałowych występujących w wyrażeniach (2.14) – (2.17) jest takie samo jak w przypadku konstytutywnych równań elipsoidalnych.

Z analizy wyrażen (2.11) – (2.17) wynika także, że równania konstytutywne Druckera-Pragera opisują ściśle materiały sprężysto-plastyczne o niestowarzyszonych prawach plastycznego płynięcia oraz nie uwzględniają efektów sprzężeń „sprężysto-plastycznych” i termomechanicznych. Opisują więc materiały, których zachowanie się podczas obciążeń eksploatacyjnych odpowiada założeniom izotermicznej teorii sprężystości i plastyczności.

Odpowiadający równaniom konstytutywnym Druckera-Pragera lokalny dostateczny warunek jednoznaczności rozwiązania podstawowego problemu brzegowego dla przypadku małych odkształceń i ich prędkości ma następującą postać

$$\frac{h}{\mu} > \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left[1 + 6\alpha^2 \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \right] \left[1 + 6(\alpha\theta)^2 \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \right]} - \left[1 + 6\alpha^2 \theta \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \right] \right\}. \quad (2.18)$$

Wyrażenia na krytyczną h^{cr} i maksymalną krytyczną h_{max}^{cr} funkcję wzmocnienia, określające możliwość wystąpienia stanu lokalizacji odkształceń plastycznych mają postać

$$\frac{h^{cr}}{\mu} = \frac{1+\nu}{(1-\nu)} [\alpha(1-\theta)]^2 - \frac{1+\nu}{2} \left(N + \frac{3\alpha(1+\theta)}{2} \right)^2. \quad (2.19)$$

$$\frac{h_{max}^{cr}}{\mu} = \frac{1+\nu}{(1-\nu)} [\alpha(1-\theta)]^2. \quad (2.20)$$

Jak widać, wyrażenie (2.20) na h_{\max}^{cr} otrzymano dla przypadku, gdy: $2N = -3\alpha(1 + \theta)$. Z wyrażenia (2.19) wynika także, że warunek ten zależy podobnie jak w przypadku równań Rice'a-Rudnickiego [127, 128] od stanu naprężenia poprzez zmienny parametr N , natomiast wyrażenia (2.18) i (2.20) zależą tylko od parametrów materiałowych (α, μ, ν i θ).

2.1.3. Równania Jenike -Shielda

Są to równania wynikające z równań Druckera-Pragera dla przypadku, gdy bezwymiarowy parametr materiałowy $\theta = 0$. Równania konstytutywne Jenike-Shielda mają również charakter niestowarzyszonych praw plastycznego płynięcia. Służą jednak do opisu ściśliwych sprężyste i zarazem nieściśliwych plastycznie materiałów o niestowarzyszonych prawach plastycznego płynięcia oraz np. eksploatowanych długotrwale w warunkach złożonych obciążeń cieplno-mechanicznych. Postać równań jest następująca

$$\Phi = \alpha I_1 + (I_{\text{IIId}})^{\frac{1}{2}} - k = 0, \text{ warunek (funkcja) plastyczności.} \quad (2.21)$$

$$\Psi = (I_{\text{IIId}})^{\frac{1}{2}}, \text{ potencjał plastyczny.} \quad (2.22)$$

Znaczenie odpowiednich wielkości fizycznych i parametrów materiałowych jest takie same jak w równaniach Druckera-Pragera dla przypadku, gdy

$$\theta = 0. \quad (2.23)$$

Z wyrażen (2.21) i (2.22) po przekształceniach otrzymamy:

$$\begin{cases} (f_{\sigma})_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\tau}} + \alpha \delta_{ij}, \\ g_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\tau}}. \end{cases} \quad (2.24)$$

Wówczas z równań teorii plastycznego płynięcia i teorii sprężystości otrzyma się następujące zależności

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{h} \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\tau}} \left(\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\tau}} \dot{\sigma}_{kl} + \alpha \dot{\sigma}_{kk} \right), \\ \dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1}{2} \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{G} + \frac{1}{9} \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{K} \delta_{ij}, \end{cases} \quad (2.25)$$

więc

$$\begin{cases} 2\dot{\epsilon}'_{ij} = \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{G} + \frac{1}{h} \frac{\sigma'_{ij}}{\bar{\tau}} \left[\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\tau}} \dot{\sigma}_{kl} + \alpha \dot{\sigma}_{kk} \right], \\ \dot{\epsilon}_{kk} = \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{3K}. \end{cases} \quad (2.26)$$

gdzie: $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ i $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ – tensory prędkości odkształcenia plastycznego i sprężystego,
 $\dot{\epsilon}'_{ij}$ – prędkość dewiatora tensora odkształcenia całkowitego,
 $\dot{\epsilon}_{kk}$ – część kulista (objętościowa) sprężystego tensora prędkości odkształcenia.

Jak wynika z zależności (2.26)₂, równania konstytutywne Jenike-Shielda o niestowarzyszonych prawach plastycznego płynięcia mogą służyć do opisu materiałów porowatych, proszków spiekanych, skał i gruntów, betonu [11], [37-41] czy też dla mniej plastycznych materiałów metalicznych (półkruchych) [22], które wykazują nieściśliwość plastyczną.

Z wyrażeń (2.25) i (2.26) po przekształceniach otrzymano

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{G} + \frac{1}{2h} \frac{\sigma'_{ij}}{\bar{\tau}} \left[\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\tau}} \dot{\sigma}_{kl} + \alpha \dot{\sigma}_{kk} \right] + \frac{1}{9} \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{K} \delta_{ij}, \quad (2.27)$$

gdzie: $\dot{\epsilon}_{ij}$ – prędkość tensora całkowitego odkształcenia.

Natomiast znaczenie pozostałych wielkości fizycznych i parametrów materiałowych występujących w wyrażeniach (2.24) – (2.27) jest takie samo jak w przypadku konstytutywnych równań elipsoidalnych i równań Druckera-Pragera.

Z analizy wyrażeń (2.21) – (2.27) wynika także, że równania konstytutywne Jenike-Shielda opisują materiały sprężysto-plastyczne o niestowarzyszonych prawach plastycznego płynięcia, które wykazują nieściśliwość plastyczną oraz nie uwzględniają efektów sprzężeń „sprężysto-plastycznych” i termomechanicznych. Opisują więc takie materiały, które odpowiadają założeniom wynikającym z izotermicznej teorii sprężystości i plastyczności.

Odpowiadający równaniom konstytutywnym Jenike-Shielda lokalny dostateczny warunek jednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego dla przypadku małych odkształceń i ich prędkości ma następującą postać

$$\frac{h}{\mu} > \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left[1 + 6\alpha^2 \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \right]} - 1 \right\}. \quad (2.28)$$

Nierówność (2.28) ze znakiem równości po prawej stronie staje się lokalnym koniecznym warunkiem możliwego wystąpienia stanu rozdwojenia równowagi.

Wyrażenia natomiast na krytyczną h^{cr} i maksymalną krytyczną h_{max}^{cr} postać funkcji wzmocnienia, określające możliwość wystąpienia stanu lokalizacji odkształceń plastycznych w postaci płaszczyzny lokalizacji (R-R) mają postać

$$\frac{h^{cr}}{\mu} = \frac{1+\nu}{(1-\nu)} \alpha^2 - \frac{1+\nu}{2} \left(N + \frac{3\alpha}{2} \right)^2. \quad (2.29)$$

$$\frac{h_{max}^{cr}}{\mu} = \frac{1+\nu}{(1-\nu)} \alpha^2. \quad (2.30)$$

Jak wynika z wyrażenia (2.30) na h_{max}^{cr} , otrzymano je dla przypadku, gdy: $2N = -3\alpha$.

Z wyrażenia (2.29) wynika podobnie jak w poprzednim przypadku, że warunek ten zależy podobnie jak dla przypadku równań Rice'a-Rudnickiego, por. [127, 128] od stanu naprężenia poprzez zmienny parametr N . Wyrażenia natomiast (2.28) i (2.30) zależą tylko od odpowiednich parametrów materiałowych (α , μ i ν).

2.1.4. Równania Rice'a-Rudnickiego

Równania konstytutywne Rice'a-Rudnickiego były już wykorzystywane w pracach autora, por. np. [142, 145]. Równania te służą do opisu materiałów porowatych, proszków spiekanych, skał i gruntów, betonu czy też dla mniej plastycznych materiałów metalicznych (półkruchych), por. np. [22] długotrwale eksploatowanych w warunkach złożonych obciążeń cieplno-mechanicznych.

$$\Phi = \frac{\bar{\mu}}{3} I_1 + (I_{II})^{\frac{1}{2}} - k = 0, \text{ warunek (funkcja) plastyczności.} \quad (2.31)$$

$$\Psi = \frac{\beta}{3} I_1 + (I_{II})^{\frac{1}{2}}. \text{ potencjał plastyczny.} \quad (2.32)$$

Są to jak widać równania Druckera-Pragera dla: $\bar{\mu} = 3\alpha$ i $\beta = 3\alpha\theta$

gdzie: $\bar{\mu}$ – współczynnik tarcia wewnętrznego materiału, $\bar{\mu} \in \langle 0, 0.9 \rangle$,

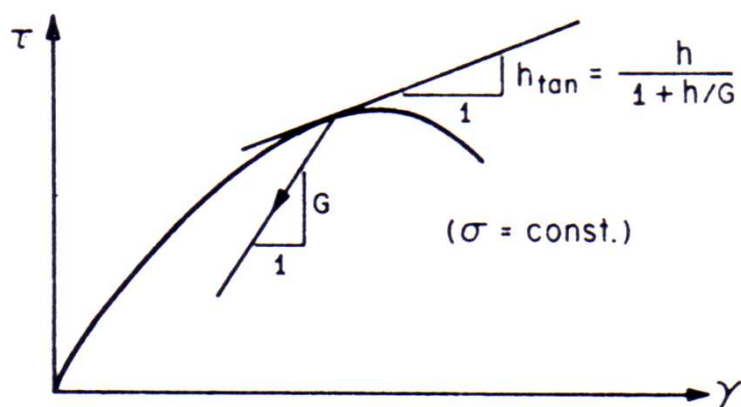
β – współczynnik dylatacji materiału, $\beta \in \langle 0, 0.6 \rangle$.

Znaczenie pozostałych wielkości fizycznych i parametrów materiałowych jest takie same jak w poprzednich przypadkach.

Podana w pracach, por. np. [128, 142, 145], analityczna zależność między obliczanym modułem (funkcją) wzmocnienia h , a wyznaczanym graficznie i określonym stycznym modułem wzmocnienia h_{\tan} , jest następująca

$$h_{\tan} = \frac{h}{1 + \frac{h}{\mu}} \quad \text{lub} \quad h_{\tan} = \frac{h}{1 + \frac{h}{E}}. \quad (2.33)$$

Wzór (2.33)₁ dotyczy prób podczas czystego ścinania, a (2.33)₂ prostego rozciągania.



Rys. 2.2. Schemat powierzchni płynięcia plastycznego ukazujący poglądowo krzywą naprężenia stycznego τ w zależności od odkształcenia postaciowego γ , geometryczną interpretację izotermicznej funkcji wzmocnienia h , stycznego modułu wzmocnienia h_{\tan} i sprężystego modułu ścinania G ($G \equiv \mu$), gdzie $(\sigma = -1/3\sigma_{kk})$ wg [128]

Mając wyznaczoną wartość stycznego modułu wzmocnienia można określić dopuszczalny stan naprężenia i odkształcenia z odpowiedniej krzywej umocnienia [128, 142, 145]. Graficzną i fizyczną interpretację stycznego modułu wzmocnienia we współrzędnych $(\tau-\gamma)$ podano na rys. 2.2. Dla krzywej przedstawionej we współrzędnych $(\sigma-\epsilon)$ we wzorze na h_{\tan} w miejsce modułu Kirchhoffa G ($G \equiv \mu$), należy wstawić moduł Younga E .

Z wyrażeń (2.31) i (2.32) otrzymamy

$$(f_\sigma)_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\tau}} + \frac{\bar{\mu}}{3} \delta_{ij}. \quad (2.34)$$

$$g_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\tau}} + \frac{\beta}{3} \delta_{ij}. \quad (2.35)$$

Stąd z równań teorii równań plastycznego płynięcia i teorii sprężystości otrzymano następujące zależności

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{1}{h} \left[\frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\tau}} + \frac{\beta}{3} \delta_{ij} \right] \left[\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\tau}} \dot{\sigma}_{kl} + \frac{\bar{\mu}}{3} \dot{\sigma}_{kk} \right], \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1}{2} \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{G} + \frac{1}{9} \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{K} \delta_{ij}, \end{cases} \quad (2.36)$$

więc

$$\begin{cases} 2\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{G} + \frac{1}{h} \frac{\sigma'_{ij}}{\bar{\tau}} \left[\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\tau}} \dot{\sigma}_{kl} + \frac{\bar{\mu}}{3} \dot{\sigma}_{kk} \right], \\ \dot{\varepsilon}_{kk} = \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{3K} + \frac{\beta}{h} \left[\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\tau}} \dot{\sigma}_{kl} + \frac{\bar{\mu}}{3} \dot{\sigma}_{kk} \right], \end{cases} \quad (2.37)$$

gdzie: $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ i $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ – tensory prędkości odkształcenia plastycznego i sprężystego,

stego,

$\dot{\varepsilon}'_{ij}$ – dewiator tensora prędkości całkowitego odkształcenia,

$\dot{\varepsilon}_{kk}$ – część kulista (objętościowa) tensora prędkości odkształcenia.

Z wyrażeń (2.36) i (2.37) po przekształceniach otrzymano

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{G} + \frac{1}{2h} \frac{\sigma'_{ij}}{\bar{\tau}} \left[\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\tau}} \dot{\sigma}_{kl} + \frac{\bar{\mu}}{3} \dot{\sigma}_{kk} \right] + \frac{1}{3} \left[\frac{\dot{\sigma}_{kk}}{3K} + \frac{\beta}{h} \left(\frac{\sigma'_{kl}}{\bar{\tau}} \dot{\sigma}_{kl} + \frac{\bar{\mu}}{3} \dot{\sigma}_{kk} \right) \right] \delta_{ij}, \quad (2.38)$$

Znaczenie natomiast pozostałych wielkości fizycznych i parametrów materiałowych występujących w wyrażeniach (2.34) – (2.38) jest takie samo jak w przypadku poprzednich równań konstytutywnych.

Z analizy wyrażeń (2.31) – (2.38) wynika także, że równania konstytutywne Rice’a-Rudnickiego opisują ściśle materiały sprężysto-plastyczne o niestowarzyszonych prawach plastycznego płynięcia oraz nie uwzględniają efektów sprzężenia „sprężysto-plastycznego” i sprzężeń termomechanicznych. Opisują więc materiały, które odpowiadają warunkom i założeniom wynikającym z izotermicznej teorii sprężystości oraz plastyczności.

Odpowiadający równaniom konstytutywnym Rice’a-Rudnickiego lokalny dostateczny warunek jednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego dla przypadku małych odkształceń i ich prędkości ma, por. [142, 145], następującą postać:

$$h > \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left[\mu + \frac{\beta^2}{3} (2\mu + 3\lambda) \right] \left[\mu + \frac{\bar{\mu}^2}{3} (2\mu + 3\lambda) \right]} - \left[\mu + \frac{\beta \bar{\mu}}{3} (2\mu + 3\lambda) \right] \right\}, \quad (2.39)$$

lub w postaci bezwymiarowej, po uwzględnieniu wyrażenia (2.10) jako

$$\frac{h}{\mu} > \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left[1 + \frac{2}{3} \beta^2 \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \right] \left[1 + \frac{2}{3} \bar{\mu}^2 \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \right]} - \left[1 + \frac{2}{3} \beta \bar{\mu} \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \right] \right\} \quad (2.40)$$

Nierówności (2.39) i (2.40) ze znakiem równości po prawej stronie stają się jak w poprzednich przypadkach lokalnymi koniecznymi warunkami wystąpienia rozdzielenia stanu równowagi (bifurkacja stanu równowagi) dla przypadku małych odkształceń i ich prędkości. Z wyrażeń (2.39) i (2.40) wynika także, że warunki te nie zależą od stanu naprężenia.

Bardziej ogólna natomiast postać krytycznego lokalnego koniecznego warunku na możliwe wystąpienie stanu lokalizacji w postaci płaszczyzny lokalizacji odkształceń plastycznych Rice’a-Rudnickiego (R-R), por. [127, 128] dla przypadku, gdy $\hat{\sigma} \approx \check{\sigma}$ (przypadek małych odkształceń oraz pomija się efekty współobrotów cząstek ciała) zależy w złożony (nieliniowy) sposób od istniejącego stanu naprężenia następująco

$$\begin{aligned} \frac{h^{cr}}{\mu} = & \frac{1+\nu}{9(1-\nu)} (\beta - \bar{\mu})^2 - \frac{1+\nu}{2} \left(N + \frac{\beta + \bar{\mu}}{2} \right)^2 + \\ & + \frac{(4-3N^2)(1+\nu)}{24(1-\nu)} (\bar{\mu} - \beta) \sin^2 2\theta_0 \left(\frac{\bar{\tau}}{\mu} \right) + O\left(\frac{\bar{\tau}}{\mu} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Mniej natomiast ogólna krytyczna wartość funkcji wzmocnienia h^{cr} określająca możliwość wystąpienia lokalizacji odkształceń plastycznych Rice'a-Rudnickiego (R-R), por. [127, 128] otrzymana dla przypadku $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \approx \boldsymbol{\sigma}$ (przypadek małych odkształceń oraz pomija się efekty współobrotów cząstek ciała) oraz przy pominięciu wyrazów rzędu $O(\bar{\tau}/G)$ i wyższych, zależy w kwadracie od wielkości intensywności dewiatora $\bar{\tau}$ tensora naprężenia lub drugiej składowej głównej dewiatora $\boldsymbol{\sigma}'_{\text{II}}$, por. [127, 128, 142, 145].

Postać tego wyrażenia jest następująca

$$\frac{h^{\text{cr}}}{\mu} = \frac{1+\nu}{9(1-\nu)}(\beta - \tilde{\mu})^2 - \frac{1+\nu}{2} \left(N + \frac{\beta + \tilde{\mu}}{3} \right)^2. \quad (2.42)$$

Zmianę krytycznej wartości funkcji wzmocnienia h^{cr} w zależności od N dla przypadku osiowo-symetrycznego rozciągania ($N = -1/\sqrt{3}$), czystego ściskania ($N = 0$) i osiowo-symetrycznego ściskania $N = 1/\sqrt{3}$ przedstawiono w pracy [128]. Maksymalna wartość $h_{\text{max}}^{\text{cr}}$ na podstawie wyrażenia (2.42) jest osiągana dla przypadku, gdy: $N = -\frac{(\beta + \tilde{\mu})}{3}$. Wówczas

$$\frac{h_{\text{max}}^{\text{cr}}}{\mu} = \frac{1+\nu}{9(1-\nu)}(\beta - \tilde{\mu})^2. \quad (2.43)$$

Jak widać krytyczna maksymalna wartość funkcji wzmocnienia $h_{\text{max}}^{\text{cr}}$ nie zależy już od stanu naprężenia tylko od odpowiednich parametrów materiałowych (β , μ , $\tilde{\mu}$ i ν), por. np. [127, 128, 142, 145].

Na podstawie prac, por. [127, 128, 142, 145], wynika, że aby wyrażenia (2.42) i (2.43) były określone w obszarze zmienności współczynników (β i $\tilde{\mu}$) oraz aby normalna do płaszczyzny lokalizacji odkształceń plastycznych \mathbf{n} , nie była prostopadła do kierunku $\boldsymbol{\sigma}_{\text{III}}$, wówczas powinien być spełniony następujący warunek

$$\beta + \tilde{\mu} \leq \sqrt{3}. \quad (2.44)$$

2.2. RÓWNANIA UWZGLĘDNIAJĄCE STOWARZYSZONE PRAWA PLASTYCZNEGO PŁYNIĘCIA

W niniejszym punkcie przedstawione zostaną wybrane przykłady warunków plastyczności, które również mogą służyć do opisu zachowania się ściśliwych plastycznie materiałów porowatych, proszków spiekanych, skał i gruntów, betonu czy też mniej plastycznych materiałów metalicznych (półkruchoch), por. np. [22] długotrwałe eksploatowanych w warunkach złożonych obciążeń cieplno-mechanicznych. Natomiast warunek plastyczności Misesa-Hilla lub Hubera-Misesa-Hencky'ego jest słuszny dla przypadku nieściśliwych plastycznie materiałów metalicznych (dla metali i ich stopów), por. np. [35].

2.2.1. Warunek plastyczności Misesa-Schleichera

Postać warunku wyrażona w postaci analitycznej jest następująca [41]:

$$\Phi = \alpha I_1 + (I_{\text{IIId}})^{\frac{1}{2}n} - k = 0, \text{ warunek (funkcja) plastyczności,} \quad (2.45)$$

gdzie: α, k i n – są dodatnimi parametrami materiałowymi i ($1 \leq n \leq 2$),

I_{IIId} – drugi niezmiennik dewiatora tensora naprężenia, por. np. [31, 41, 104], [138-140], [164, 165].

Odpowiadający równaniom konstytutywnym Misesa-Schleichera lokalny dostateczny warunek jednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego dla przypadku małych odkształceń i ich prędkości, por. np. [142, 144, 145], ma następującą postać:

$$h > 0. \quad (2.46)$$

a) Przypadek dla $n = 1$. Wówczas z wyrażenia (2.45) otrzyma się

$$(f_{\sigma})_{ij} = g_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\tau}} + \alpha \delta_{ij}. \quad (2.47)$$

Z równań teorii plastyczności i sprężystości wynikają następujące zależności

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{h} \left[\frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\tau}} + \alpha \delta_{ij} \right] \left[\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\tau}} \dot{\sigma}_{kl} + \alpha \dot{\sigma}_{kk} \right], \\ \dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1}{2} \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{G} + \frac{1}{9} \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{K} \delta_{ij}, \end{cases} \quad (2.48)$$

oraz

$$\begin{cases} 2\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{G} + \frac{1}{h} \frac{\sigma'_{ij}}{\bar{\tau}} \left[\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\tau}} \dot{\sigma}_{kl} + \alpha \dot{\sigma}_{kk} \right], \\ \dot{\epsilon}_{kk} = \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{3K} + \frac{3\alpha}{h} \left[\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\tau}} \dot{\sigma}_{kl} + \alpha \dot{\sigma}_{kk} \right], \end{cases} \quad (2.49)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{G} + \frac{1}{2h} \frac{\sigma'_{ij}}{\bar{\tau}} \left[\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\tau}} \dot{\sigma}_{kl} + \alpha \dot{\sigma}_{kk} \right] + \left[\frac{\dot{\sigma}_{kk}}{9K} + \frac{\alpha}{h} \left(\frac{\sigma'_{kl}}{\bar{\tau}} \dot{\sigma}_{kl} + \alpha \dot{\sigma}_{kk} \right) \right] \delta_{ij}. \quad (2.50)$$

Wyrażenia natomiast na krytyczną h^{cr} i maksymalną krytyczną h_{max}^{cr} funkcję wzmocnienia dla przypadku, gdy: $n = 1$, określające możliwość wystąpienia stanu lokalizacji odkształceń plastycznych w postaci płaszczyzny lokalizacji (R-R) mają postać

$$\frac{h^{cr}}{\mu} = -\frac{1+\nu}{2} (N + 3\alpha)^2. \quad (2.51)$$

$$h_{max}^{cr} = 0. \quad (2.52)$$

Jak widać, wyrażenie (2.52) otrzymano z wyrażenia (2.51), gdy: $N = -3\alpha$.

b) Przypadek dla $n = 2$. Wówczas z wyrażenia (2.45) otrzymano

$$(f_{\sigma})_{ij} = g_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = \sigma'_{ij} + \alpha \delta_{ij}. \quad (2.53)$$

Z teorii plastycznego płynięcia i teorii sprężystości wynikają następujące zależności konstytutywne

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{h} [\sigma'_{ij} + \alpha \delta_{ij}] \left[\sigma'_{kl} \dot{\sigma}_{kl} + \alpha \dot{\sigma}_{kk} \right], \\ \dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1}{2} \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{G} + \frac{1}{9} \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{K} \delta_{ij}, \end{cases} \quad (2.54)$$

$$\begin{cases} 2\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{G} + \frac{1}{h}\sigma'_{ij}[\sigma'_{kl}\dot{\sigma}_{kl} + \alpha\dot{\sigma}_{kk}], \\ \dot{\varepsilon}_{kk} = \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{3K} + \frac{3\alpha}{h}[\sigma'_{kl}\dot{\sigma}_{kl} + \alpha\dot{\sigma}_{kk}]. \end{cases} \quad (2.55)$$

oraz

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{G} + \frac{1}{2h}\sigma'_{ij}(\sigma'_{kl}\dot{\sigma}_{kl} + \alpha\dot{\sigma}_{kk}) + \left[\frac{\dot{\sigma}_{kk}}{3K} + \frac{3\alpha}{h}(\sigma'_{kl}\dot{\sigma}_{kl} + \alpha\dot{\sigma}_{kk}) \right] \delta_{ij}, \quad (2.56)$$

gdzie: $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – prędkość tensora całkowitego odkształcenia.

Wyrażenia natomiast na krytyczną h^{cr} i maksymalną krytyczną h_{max}^{cr} funkcję wzmocnienia dla przypadku, gdy: $n = 2$, określające możliwość wystąpienia stanu lokalizacji odkształceń plastycznych w postaci płaszczyzny lokalizacji (R-R) mają postać

$$\frac{h^{cr}}{\mu} = -\frac{1+\nu}{2}(2\sigma'_{II} + 3\alpha)^2. \quad (2.57)$$

$$h_{max}^{cr} = 0. \quad (2.58)$$

Wyrażenie (2.58) otrzymano z wyrażenia (2.57), gdy: $2\sigma'_{II} = -3\alpha$.

2.2.2. Warunek plastyczności Misesa-Hilla

Analityczna postać tego warunku (jest to warunek H-M-H) uogólnionego dla materiałów wykazujących wzmocnienie, por. np. [41], jest następująca:

$$\Phi = (I_{IIId})^{\frac{1}{2}} - k = 0, \text{ warunek (funkcja) plastyczności.} \quad (2.59)$$

Odpowiadający równaniom konstytutywnym Misesa-Hilla lokalny dostateczny warunek jednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego dla przypadku małych odkształceń i ich prędkości, por. np. [142, 144, 145], ma jak poprzednio następującą postać

$$h > 0. \quad (2.60)$$

Z wyrażenia (2.55) otrzymano następującą zależność

$$(f_{\sigma})_{ij} = g_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\tau}}. \quad (2.61)$$

Z równań teorii plastyczności i sprężystości wynikają następujące zależności

$$\begin{cases} 2\dot{\epsilon}'_{ij} = \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{G} + \frac{1}{h} \frac{\sigma'_{ij}}{\bar{\tau}} \left(\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\tau}} \dot{\sigma}_{kl} \right), \\ \dot{\epsilon}_{kk} = \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{3K}. \end{cases} \quad (2.62)$$

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}^p_{ij} = \frac{1}{2h} \frac{\sigma'_{ij}}{\bar{\tau}} \left(\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\tau}} \dot{\sigma}_{kl} \right), \\ \dot{\epsilon}^e_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{G} + \frac{1}{9} \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{K} \delta_{ij}, \end{cases} \quad (2.63)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{G} + \frac{1}{2h} \frac{\sigma'_{ij}}{\bar{\tau}} \left(\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\tau}} \dot{\sigma}_{kl} \right) + \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{9K} \delta_{ij}. \quad (2.64)$$

Wyrażenia na krytyczną h^{cr} i maksymalną krytyczną h_{max}^{cr} postać funkcji wzmocnienia określające możliwość wystąpienia stanu lokalizacji odkształceń plastycznych w postaci płaszczyzny lokalizacji (R-R) mają postać

$$\frac{h^{cr}}{\mu} = -\frac{1+\nu}{2} (2\sigma'_{II})^2. \quad (2.65)$$

$$h_{max}^{cr} = 0. \quad (2.66)$$

Jak widać, wyrażenie (2.66) otrzymano z wyrażenia (2.65), gdy: $\sigma'_{II} = 0$.

Z wyrażen (2.51), (2.57) i (2.65) wynika, że warunki te dopuszczają ujemną wartość funkcji (modułu) wzmocnienia h^{cr} . Podobnie jak w poprzednich przypadkach warunki na h^{cr} zależą, tak jak dla przypadku równań Rice'a-Rudnickiego, por. [127, 128] od stanu naprężenia. Stan naprężenia odpowiednio reprezentuje tutaj, jak widać, zmienny parametr N lub druga składowa główna dewiatora tensora naprężenia σ'_{II} . Wyrażenia natomiast na h_{max}^{cr} , por. (2.46), (2.52), (2.58), (2.60) i (2.66) osiągają swoją najprostszą postać oraz wartość równą zero i nie zależą już od parametrów materiałowych.

2.2.3. Warunek plastyczności Druckera

Warunek ten także wyrażony jest w naprężeniach głównych σ_1 , σ_2 , i σ_3 . Analityczna postać tego warunku, por. np. [41], jest następująca:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) + \beta I_1 - k = 0, \quad (2.67)$$

gdzie: $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ – odpowiednie naprężenia główne, takie że $(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$.

2.2.4. Warunek plastyczności Coulomba-Mohra

Postać tego warunku, por. np. [41, 136, 147], jest następująca:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = (\sigma_1 + \sigma_3 - 2H) \sin \varphi, \quad (2.68)$$

gdzie: H – oznacza wytrzymałość materiału na izotropowe rozciąganie,
 φ – kąt tarcia wewnętrznego, por. np. [41, 136, 140, 147].

Dla funkcji (warunków) plastyczności (2.67) i (2.68), lokalny dostateczny warunek jednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego i zarazem wykluczający rozdwojenie (bifurkację) stanu równowagi ma następującą postać:

$$h > 0. \quad (2.69)$$

Natomiast nierówności (2.46), (2.60) i (2.69) ze znakiem (\leq) po prawej stronie stają się lokalnymi koniecznymi warunkami niejednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego lub wystąpienia rozdwojenia (bifurkacja) stanu równowagi. Stąd

$$h \leq 0. \quad (2.70)$$

Natomiast warunek (R-R) ma postać: $h_{\max}^{cr} = 0$. (2.71)

W rozdziale przedstawiono rozszerzone uwagi o lokalnym koniecznym warunku jednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego sprężysto-plastyczności (lokalnym koniecznym warunkiem powstania rozdwojenia stanu równowagi) i o lokalnym koniecznym warunkiem powstania stanu lokalizacji odkształceń plastycznych w postaci płaszczyzny lokalizacji Rice'a-Rudnickiego (R-R). Dokonano pogłębionej analizy wzajemnych relacji i zależności jakie występują między tymi warunkami.

3. UWAGI I WNIOSKI

1. W pracy wyspecyfikowano przypadki szczególne równań konstytutywnych i lokalnego warunku jednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego sprężysto-plastyczności oraz lokalnego warunku koniecznego inicjacji lokalizacji odkształceń plastycznych w postaci płaszczyzny lokalizacji odkształceń Rice'a-Rudnickiego (R-R), por. [127, 128]. Specyfikacji dokonano dla szeregu wybranych ciał z grupy materiałów porowatych, proszków spiekanych, skał i gruntów, betonu, materiałów metalicznych oraz mniej plastycznych (półkruchych) metali i ich stopów, eksploatowanych np. przez długi czas w warunkach złożonych obciążeń cieplno-mechanicznych. Materiały te opisują równania konstytutywne o niestowarzyszonych i stowarzyszonych prawach plastycznego płynięcia dla przypadków małych odkształceń (małe gradienty przemieszczeń) oraz ich prędkości. W przyszłości po analizie zachowania się rozpatrywanych materiałów podczas badań doświadczalnych, można będzie nałożyć odpowiednie ograniczenia na parametry materiałowe występujące w funkcjach konstytutywnych podobnie jak w pracach Rice'a [127] lub Rice'a-Rudnickiego [128].
2. W przypadku równań konstytutywnych elipsoidalnych lokalny dostateczny warunek jednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego (warunek wykluczający możliwość wystąpienia rozdziwienia-bifurkacji stanu równowagi) i lokalny konieczny krytyczny warunek na lokalizację odkształceń plastycznych h^{cr} (R-R) zależą od stanu naprężenia. Dla pozostałych równań konstytutywnych materiałów lokalne warunki jednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego nie zależą już od stanu naprężenia. Podobnie ma to miejsce we wszystkich przypadkach wyrażen na maksymalne krytyczne wartości funkcji (modułów) wzmocnienia h_{max}^{cr} (R-R). Natomiast krytyczne wartości funkcji (modułów) wzmocnienia h^{cr} (R-R), jak już wspomniano, zależą dla wszystkich rozpatrywanych w pracy równań konstytutywnych materiałów od rodzaju stanu naprężenia poprzez wprowadzony w pracach [127, 128] parametr N .
3. Przy praktycznym wyznaczaniu odpowiednich wartości modułów wzmocnienia wygodne i praktyczne jest korzystanie z pojęcia stycznego modułu wzmocnienia przy znajomości krzywej umocnienia danego materiału. Mając bowiem wyznaczoną wartość stycznego modułu wzmocnienia, por. (2.33), można za pomocą np. planigrafu określić odpowiednią dopuszczalną wartość naprężenia i odkształcenia z danej krzywej umocnienia, (por. interpretację geometryczną przedstawioną na rys. 2.2 w podpunkcie 2.1.4 tego rozdziału).

4. W pracach [142, 144] wykazano jako przypadek szczególny, że lokalny konieczny warunek jednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego termo-sprężysto-plastyczności dla przypadku równań konstytutywnych Rice'a-Rudnickiego, (por. p.2.1.4) jest dolnym (bezpieczniejszym) oszacowaniem wartości obciążeń zewnętrznych w porównaniu z lokalnym koniecznym warunkiem lokalizacji (R-R). Fizycznie jest to równoważne temu, że lokalny konieczny warunek niejednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego uogólnionej sprężysto-termoplastyczności dopuszcza mniejsze (bezpieczniejsze) wielkości krytycznych obciążeń zewnętrznych niż warunek na lokalizację odkształceń plastycznych (R-R). Wynika to stąd, że im większa jest wartość funkcji wzmocnienia h lub stycznego modułu wzmocnienia h_{tan} , tym mniejsze są dopuszczalne obciążenia zewnętrzne. Wydaje się, że podobne rezultaty będzie można otrzymać także dla innych rodzajów równań konstytutywnych materiałów analizowanych w niniejszej pracy. Należy jednak wcześniej przeprowadzić założenia odpowiednich ograniczeń na stałe materiałowe podobnie jak w pracach Rice'a-Rudnickiego [127, 128].
5. W pracy [128] przedstawiono analizę zmian krytycznych wartości funkcji (modułów) wzmocnienia h^{cr} (R-R) w zależności od stanu naprężenia reprezentowanego poprzez zmienny parametr N . Rozpatrzono przypadki osiowo-symetrycznego rozciągania, czystego ścinania i osiowo-symetrycznego ściskania. Z przeprowadzonej analizy wynika, że funkcja h^{cr} może przyjmować także ujemne wartości dla odpowiednich wartości parametru N .
6. Wyprowadzone w tym rozdziale pracy lokalne warunki jednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego i zarazem wykluczające bifurkację stanu równowagi oraz lokalne konieczne warunki powstania lokalizacji odkształceń plastycznych (R-R) poza czysto matematyczną i poznawczą wartością mogą mieć również duże znaczenie praktyczne. Stanowią one narzędzie służące do oceny wartości krytycznych obciążeń i odkształceń po przekroczeniu których, możliwe jest powstanie stanu niestateczności odkształceń plastycznych w postaci np. rozdzielenia stanu równowagi (bifurkacja stanu równowagi) lub lokalizacji odkształceń, por. [27-36], [107-114], [122, 123], [142-145].
7. Zagadnienia niestateczności odkształceń plastycznych w postaci np. lokalizacji odkształceń plastycznych lub rozdzielenia (bifurkacji) stanu równowagi odgrywają znaczącą rolę w wielu zagadnieniach ogólnie rozumianej technologii i inżynierii produkcji (wykonania) elementów maszyn i urządzeń metodami plastycznego kształtowania i nie tylko. Mogą mieć także znaczenie w poprawie niezawodności eksploatowanych maszyn, urządzeń i ich elementów, bezpiecznego projektowania, w badaniach doświadczalnych oraz w zagadnieniach remontowych wielu urządzeń, maszyn i elementów konstrukcyjnych. Należy więc prowadzić dalsze badania i udoskonalać me-

tody badawczo-pomiarowe, metody obliczeń celem oszacowania stanów wystąpienia tych zjawisk, wykorzystując m.in. wyprowadzone w pracy lokalne warunki jednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego sprężysto-plastyczności i warunki na lokalizację odkształceń plastycznych Rice'a-Rudnickiego (R-R).

8. Można bowiem założyć, że w tych obszarach plastycznie odkształcanego ciała, w których przekroczone zostały warunki jednoznaczności lub kryteria bifurkacyjne mogą powstać mikrokoncentracje naprężeń i odkształceń prowadzące do mikropęknięć. Mogą pojawić się więc mikropęknięcia, mikrolokalizacje odkształceń, które następnie w warunkach eksploatacyjnych w wyniku ich dalszego rozwoju poprzez procesy nukleacji (łączenia) staną się wielkościami makro doprowadzając do pęknięcia i powstania złomu. Wpływ takich mikrokoncentratorów może być także szczególnie ważny podczas eksploatacji w warunkach zmiennych obciążeń mechanicznych i cieplno-mechanicznych, a więc w zagadnieniach wytrzymałości zmęczeniowej oraz w analizie pęknięcia materiałów, por. np. [42], [64-68], [97-101].
9. Można także podkreślić, że w rozpoznanej dotąd literaturze nie spotkano się dotąd z wyprowadzeniem dostatecznego lokalnego warunku na lokalizację odkształceń plastycznych w postaci płaszczyzny lokalizacji odkształceń Rice'a-Rudnickiego (R-R), por. [127, 128]. Można więc w przyszłych badaniach dla omawianych w pracy rodzajów materiałów, a także innych, wyprowadzić odpowiednie lokalne dostateczne warunki wystąpienia lokalizacji odkształceń plastycznych w postaci płaszczyzny lokalizacji odkształceń Rice'a-Rudnickiego (R-R).
10. W zakończeniu tego rozdziału można jeszcze raz podkreślić, że analizowane w pracy lokalne dostateczne warunki jednoznaczności rozwiązania sformułowanego problemu brzegowego sprężysto-termoplastyczności ze znakiem (\leq) po prawej stronie, stają się formalnie lokalnymi koniecznymi warunkami niejednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego i możliwe wystąpienia rozdwojenia (bifurkacji) stanu równowagi.

ROZDZIAŁ III

SZACOWANIE STANÓW LOKALIZACJI ODKSZTAŁCEŃ PLASTYCZNYCH

1. WSTĘP

Wyprowadzone w rozdziałach I i II oraz w pracach, por. [142, 144] warunki i kryteria jednoznaczności (warunki i kryteria wykluczające bifurkację stanu równowagi) rozwiązania sformułowanego podstawowego problemu brzegowego termo-sprężysto-plastyczności uwzględniają efekty sprzężeń termomechanicznych, „sprężysto-plastycznych” (wpływ odkształceń plastycznych na moduły sprężystości) oraz zawierają przypadki niestowarzyszonych praw plastycznego płynięcia. Oznacza to, że można je stosować do materiałów metalicznych (metale i ich stopy), mniej plastycznych (półkruchych) metali i ich stopów, (np. eksploatowanych dłuższy czas w warunkach obciążeń cieplno-mechanicznych), materiałów porowatych, spieków, skał i gruntów, por. [41] i innych. W niniejszej pracy przedstawione zostaną rezultaty obliczeń wynikające z dostatecznego lokalnego warunku jednoznaczności – a konkretnie wykorzystujące lokalny konieczny warunek niejednoznaczności [145]. Porównane zostaną następnie z wynikami obliczeń wykorzystując konieczny warunek wystąpienia stanu lokalizacji odkształcenia Rice’a-Rudnickiego (R-R). Porównane zostaną więc rezultaty ograniczeń nakładanych na wartości izotermicznej funkcji wzmocnienia przez dwa lokalne konieczne warunki: niejednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego oraz wystąpienia stanu lokalizacji w postaci płaszczyzny lokalizacji odkształceń plastycznych Rice’a-Rudnickiego [127, 128]. W pracy wykazano, że lokalny konieczny warunek niejednoznaczności dają bardziej bezpieczne oszacowania dopuszczalnych (krytycznych) obciążeń aniżeli konieczny warunek wystąpienia stanu lokalizacji odkształceń (R-R). Dokonano także analizy wzajemnych relacji występujących między wyprowadzonym koniecznym lokalnym warunkiem niejednoznaczności a koniecznym lokalnym warunkiem lokalizacji odkształceń (R-R). Otrzymane rezultaty obliczeń przedstawiono w postaci odpowiednich wykresów.

2. PORÓWNANIE LOKALNEGO WARUNKU JEDNOZNACZNOŚCI Z WARUNKIEM LOKALIZACJI ODKSZTAŁCEŃ (R-R)

2.1. OMÓWIENIE WARUNKU NA LOKALIZACJĘ ODKSZTAŁCEŃ (R-R)

W pracach [127, 128] Rice i Rudnicki-Rice wyprowadzili warunki (kryteria) możliwego powstania stanu lokalizacji odkształceń plastycznych w postaci płaszczyzny lokalizacji dla ściśliwych materiałów sprężysto-plastycznych o

niestowarzyszonych prawach plastycznego płynięcia. Równania konstytutywne takich materiałów zmodyfikowane dla przypadku małych odkształceń $\hat{\sigma} \approx \dot{\sigma}$ (gdzie $\hat{\sigma}$ – oznacza pochodną obiektywną Jaumanna tensora naprężenia Cauchy'ego σ) mają następującą (por. równania (2.37) z rozdziału II) postać

$$2\dot{\epsilon}'_{ij} = \frac{\dot{\sigma}_{ij}}{\mu} + \frac{1}{h} \frac{\sigma'_{ij}}{\bar{\tau}} \left(\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\tau}} \dot{\sigma}_{kl} + \tilde{\mu} \frac{\dot{\sigma}_{kl}}{3} \right), \quad (3.1)$$

$$\dot{\epsilon}_{kk} = \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{2\mu + 3\lambda} + \frac{\beta}{h} \left(\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\tau}} \dot{\sigma}_{kl} + \tilde{\mu} \frac{\dot{\sigma}_{kl}}{3} \right),$$

gdzie: $\dot{\epsilon}' = \text{dev } \dot{\epsilon}$, $\sigma' = \text{dev } \sigma$, β – współczynnik dylatacji materiału,

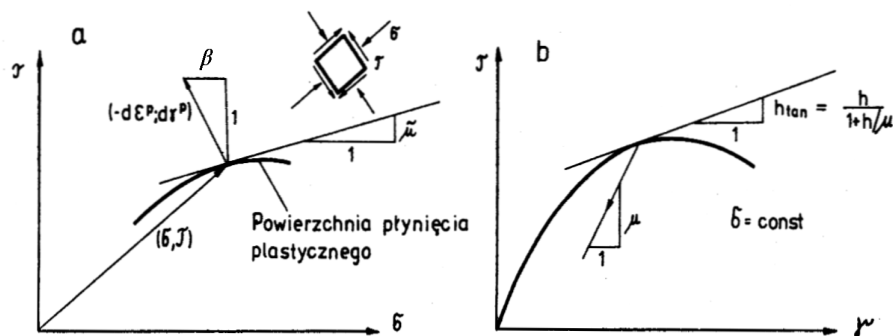
h – oznacza izotermiczną funkcję wzmocnienia,

$\tilde{\mu}$ – współczynnik tarcia wewnętrznego a (μ, λ) są stałymi sprężystości Lamego,

$(\mu \equiv G)$ – moduł ścinania lub moduł sprężystego odkształcenia postaciowego.

Symbolem $\bar{\tau}$ oznaczono drugi niezmiennik dewiatora tensora naprężenia.

$$\bar{\tau} = \left(\frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.2)$$



Rys. 3.1(a, b). Schemat powierzchni płynięcia plastycznego, wg [142]

Na rys. 3.1a. pokazano poglądowo geometryczną interpretację współczynnika tarcia wewnętrznego materiału $\tilde{\mu}$ i współczynnika dylatacji β . Natomiast na rys. 1b pokazano poglądowo krzywą naprężenia stycznego τ w zależności od odkształcenia postaciowego γ oraz ukazano geometryczną interpretację izotermicznej funkcji wzmocnienia h , stycznego modułu wzmocnienia h_{\tan} oraz sprężystego modułu ścinania μ , a także ich wzajemną analityczną zależność, gdzie ($\sigma = -1/3\sigma_{kk}$).

Interpretację graficzną współczynników $\tilde{\mu}$ i β pokazano na rys. 3.1a, dla przypadku ścinania w obecności ciśnienia hydrostatycznego, a wzajemną interpretację funkcji wzmocnienia h i stycznego modułu wzmocnienia h_{\tan} na rys. 3.1b.

W ogólnym przypadku, jeżeli współczynnik tarcia wewnętrznego $\tilde{\mu}$ nie jest równy współczynnikowi dylatacji ($\tilde{\mu} \neq \beta$) i oba współczynniki są różne od zera, to równania konstytutywne praw plastycznego płynięcia (3.1) są niestowarzyszone oraz uwzględniają ściśliwość sprężystą i plastyczną materiału. Równania konstytutywne praw plastycznego płynięcia (3.1) są stowarzyszone gdy ($\tilde{\mu} = \beta$) $\neq 0$, por. np. [127, 128, 142]. Prawa płynięcia o postaci (3.1) nie uwzględniają efektu sprzężenia sprężysto-plastycznego, por. np. [142-145]. W przypadku gdy ($\tilde{\mu} = \beta = 0$) równania (2.1) przyjmują postać związków konstytutywnych Prandtla-Reussa, które nie uwzględniają efektu plastycznej ściśliwości materiału [127, 128, 142, 145].

Krytyczna wartość funkcji wzmocnienia h^{cr} określająca początek lokalizacji odkształceń plastycznych wg [127, 128, 142, 145] otrzymana dla przypadku $\hat{\sigma} \approx \check{\sigma}$ (pomijane są efekty współobrotów cząstek) i przy pominięciu wyrazów rzędu $O(\bar{\tau}/\mu)$ oraz wyższych ma następującą postać

$$\frac{h^{cr}}{\mu} = \frac{1+\nu}{9(1-\nu)}(\beta - \tilde{\mu})^2 - \frac{1+\nu}{2} \left(N + \frac{\beta + \tilde{\mu}}{3} \right)^2, \quad (3.3)$$

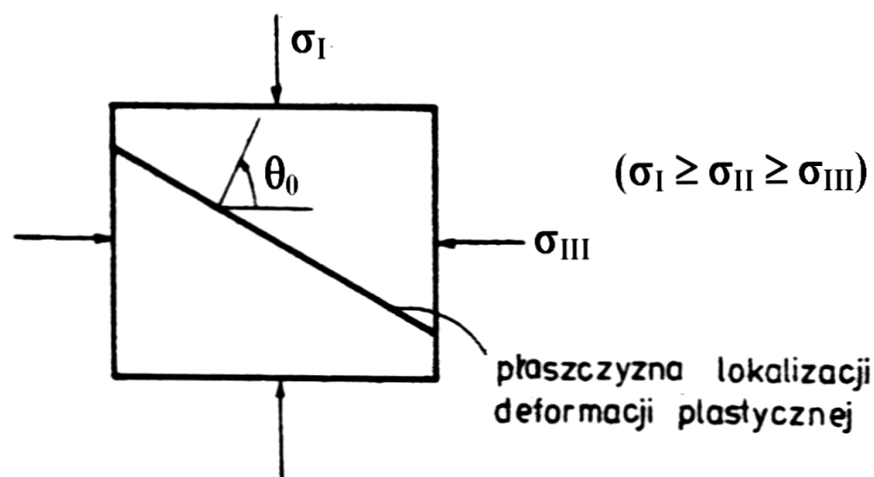
gdzie: ν – współczynnik Poissona.

Zależność (3.3) otrzymuje się więc z bardziej ogólnego wyrażenia wyprowadzonego przez Rice'a i Rudnickiego [127, 128] przy pominięciu wyrazów rzędu $O(\bar{\tau}/\mu)$ i wyższych.

Zmienny parametr N występujący we wzorze (3.3) zależy od stanu naprężenia i wynosi $\sigma'_{II} = N\bar{\tau}$, gdzie σ'_{II} – jest drugą składową główną dewiatora tensora naprężenia σ_{ij} w układzie współrzędnych jak na rys. 3.2. Zakłada się także, por. [127, 128], że normalna \mathbf{n} do płaszczyzny lokalizacji odkształceń

plastycznych jest prostopadła do kierunku σ_{II} oraz $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$, gdzie $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ oznaczają naprężenia główne.

Zmiana krytycznej wartości modułu wzmocnienia h^{cr} z parametrem N jest następująca: dla przypadku osiowo-symetrycznego rozciągania ($\sigma_I > \sigma_{II} = \sigma_{III}$) i wówczas ($N = -1/\sqrt{3}$). Dla przypadku czystego ścinania ($\sigma_I = -\sigma_{II}$) wówczas ($N = 0$) i dla przypadku osiowo-symetrycznego ściskania ($\sigma_I = \sigma_{II} > \sigma_{III}$) wówczas ($N = 1/\sqrt{3}$) są prezentowane w pracy [26].



Rys. 3.2. Poglądowy schemat płaszczyzny lokalizacji odkształceń plastycznych w układzie kierunków naprężeń głównych $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$, wg [142, 145]

W pracy [128] kąt θ oznacza kąt orientujący płaszczyznę lokalizacji odkształceń plastycznych w układzie kierunków głównych stanu naprężenia (kąt θ zawarty jest między normalną do płaszczyzny lokalizacji a kierunkiem σ_{III}). Na rys. 2 kątowi θ_0 odpowiada natomiast maksymalna wartość funkcji wzmocnienia h . Maksymalna wartość krytycznej funkcji wzmocnienia na podstawie wyrażenia (3.3) jest osiągnięta dla $N = -\frac{(\beta + \tilde{\mu})}{3}$. Wówczas ze wzoru (3.3) otrzymano po przekształceniach

$$\frac{h_{max}^{cr}}{\mu} = \frac{1+v}{9(1-v)} (\beta - \tilde{\mu})^2. \quad (3.4)$$

Na podstawie prac, por. [128, 142, 145] wynika, że aby wyrażenia (3.3) i (3.4) były określone i słuszne w obszarze zmienności współczynników ($\tilde{\mu}$ i β) oraz aby normalna \mathbf{n} do płaszczyzny lokalizacji odkształceń plastycznych nie była prostopadła do kierunku σ_{III} , wówczas powinien być spełniony następujący warunek

$$\tilde{\mu} + \beta \leq \sqrt{3}. \quad (3.5)$$

2.2. POSTAĆ LOKALNEGO WARUNKU JEDNOZNACZNOŚCI DLA PRZYPADKU RÓWNAŃ KONSTITUTYWNYCH RICE'A-RUDNICKIEGO (R-R)

Na podstawie analizy przeprowadzonej w p. 2.1 można powiedzieć, że równania konstytutywne plastycznego płynięcia (3.1) należą (jako przypadek szczególny) do klasy równań konstytutywnych rozpatrywanych w pracy [142]. Porównując odpowiednie zależności i oznaczenia zawarte w pracach [142, 144, 145] z wyrażeniami (3.1), po odpowiednich przekształceniach (por. także równania (2.34) i (2.35) z rozdziału II) otrzymuje się

$$g_{ij} = \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\tau}} + \frac{\beta}{3}\delta_{ij}, \quad (3.6)$$

$$(f_{\sigma})_{kl} = \frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\tau}} + \frac{\tilde{\mu}}{3}\delta_{kl}$$

oraz: $h_1 = h$ i $\mathbf{M}^{(a)} = \mathbf{M}$.

Dla ciała izotropowego ze względu na własności sprężyste materiałów są prawdziwe następujące zależności, por. np. [122-124], [142, 143].

$$M_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}, \quad \frac{2\mu + 3\lambda}{\mu} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \quad \text{i} \quad 2\mu = \frac{E}{1+\nu}, \quad (3.7)$$

gdzie: μ i λ – stałe sprężystości Lamego,

E – moduł sprężystości Younga,

δ_{ij} – oznacza deltę Kroneckera (tensor jednostkowy).

Podstawiając wyrażenia (3.6) do lokalnego warunku jednoznaczności wyprowadzonego i analizowanego w pracach, por. np. [37-40], [90, 91], [142, 144] i uwzględniając wyrażenia (3.7), po wykonaniu odpowiednich przekształceń, por. [142, 144] otrzymuje się

$$\frac{h}{\mu} > \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left[1 + \frac{2}{3} \beta^2 \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \right] \left[1 + \frac{2}{3} \tilde{\mu}^2 \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \right]} - 1 + \frac{2}{3} \beta \tilde{\mu} \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \right\} = \frac{h^*}{\mu}. \quad (3.8)$$

Jest to poszukiwana postać lokalnego dostatecznego warunku jednoznaczności (lewa strona wyrażenia – nierówność) i zarazem postać lokalnego koniecznego warunku niejednoznaczności rozwiązania podstawowego przyrostowego problemu brzegowego sprężysto-plastyczności (prawa strona wyrażenia – równość).

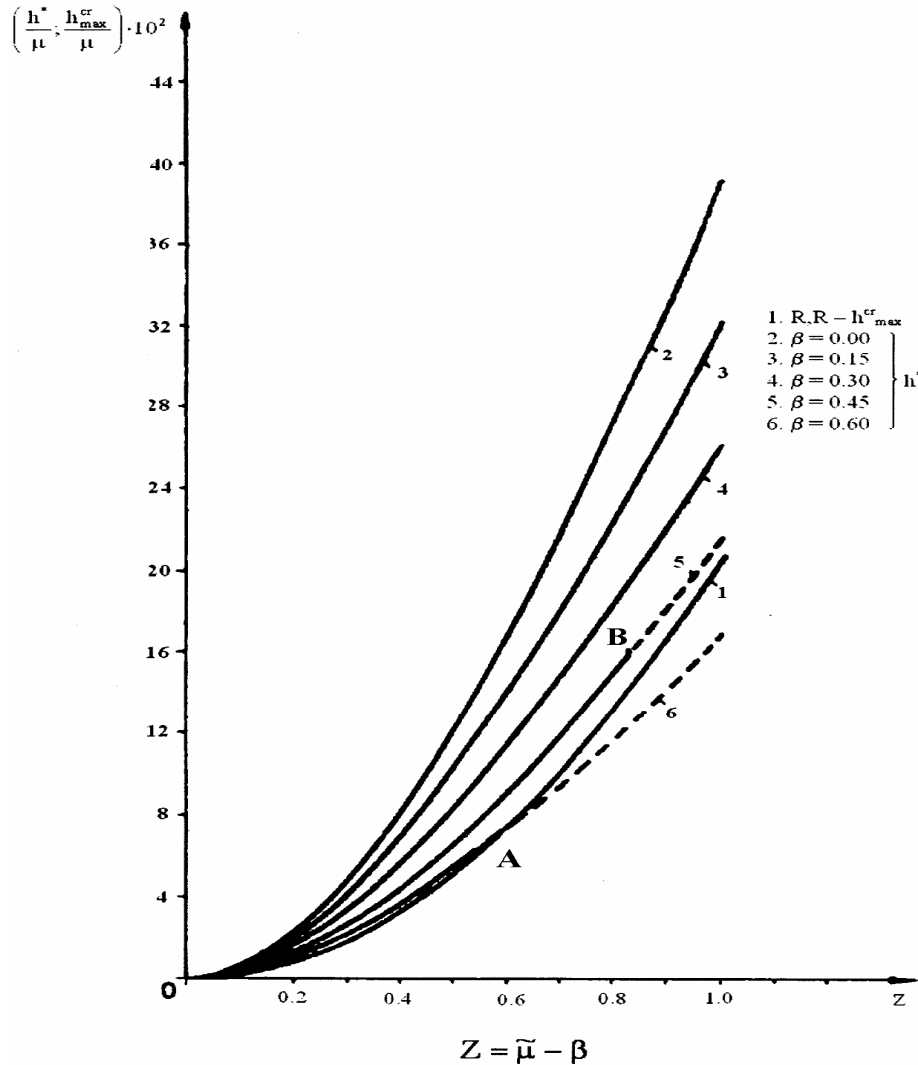
2.3. PORÓWNANIE DWÓCH LOKALNYCH WARUNKÓW

Na rys. 3.3 krzywą 1 otrzymano z warunku (3.4) na maksymalną wartość funkcji wzmocnienia h_{\max}^{cr} w zależności od wprowadzonego parametru $z = \tilde{\mu} - \beta$. Tak wprowadzony parametr nie ma określonego znaczenia fizycznego lecz ma charakter użytecznego parametru wprowadzonego celem przeprowadzenia odpowiednich obliczeń.

Krzywe (2, 3, 4, 5 i 6) są natomiast wykresami otrzymanymi z lokalnego koniecznego warunku niejednoznaczności $\frac{h^*}{\mu}$, por. (3.4), po uprzednim pod-

stawieniu parametru z . Warunek niejednoznaczności $\frac{h^*}{\mu}$ reprezentuje wówczas rodzinę lokalnych koniecznych warunków niejednoznaczności w zależności od parametrów z i β . Wprowadzając parametr $z = \tilde{\mu} - \beta$ do wzoru (3.8), nie otrzymamy zależności tylko od parametru z jak było w przypadku wyrażenia (3.4), lecz zależność od parametrów z i β . Traktując z jako zmienną niezależną, wówczas warunek (3.8) staje się jednoparametrową rodziną lokalnych koniecznych warunków niejednoznaczności $\frac{h^*}{\mu}$, zależną od parametru β .

Przedstawione na rys. 3.3 rezultaty obliczeń, otrzymano przyjmując za [26], że stała Poissona $\nu = 0,3$, współczynnik tarcia wewnętrznego materiału $\tilde{\mu}$ przyjmuje wartości z przedziału $\langle 0,0 - 0,9 \rangle$, a współczynnik dylatacji β z przedziału $\langle 0,0 - 0,6 \rangle$.



Rys. 3.3. Wykresy przedstawiające rezultaty obliczeń otrzymane z wyrażeń na maksymalną wartość funkcji wzmocnienia h_{\max}^{cr} (2.4) i na wartość funkcji h^* wynikającą z lokalnego koniecznego warunku niejednoznaczności (3.8), wg [145]

Z wykresów na rys. 3.3 wynika, że lokalny konieczny warunek niejednoznaczności (3.8) jest dolnym (bezpieczniejszym) oszacowaniem wartości obciążeń zewnętrznych wynikających z warunku (3.4) określającego możliwość wystąpienia lokalizacji odkształceń plastycznych Rice'a-Rudnickiego (R-R) dla przypadku maksymalnych wartości krytycznej funkcji wzmocnienia h_{\max}^{cr} .

Oznacza to, że dla danego materiału maksymalny warunek (3.4) dopuszcza mniejszą wartość krytycznej funkcji wzmocnienia (co oznacza, że dopuszczalne są większe obciążenia zewnętrzne) aniżeli lokalny konieczny warunek niejednoznaczności (2.8). Tym bardziej więc dotyczyć to będzie warunku (3.3). Tak otrzymane rezultaty obliczeń są zgodne z przewidywaniami. Na podstawie bowiem treści zawartych w p. 2.1 oraz na podstawie wykresów na rys. 3.3, można stwierdzić, że dla wartości współczynników $(\beta, \tilde{\mu}, \nu)$ wziętych z podanego w pracy [128] zakresu i takich samych dla warunków (3.3), (3.4) i (3.8), spełnione są następujące nierówności

$$h^{cr} \leq h_{max}^{cr} \leq h^* . \quad (3.9)$$

Wynika to m.in. stąd, że jak już wspomniano wcześniej lokalnym koniecznym warunkiem niejednoznaczności rozwiązania przyrostowego problemu brzegowego plastyczności jest $h \leq h^*$ a lokalnym dostatecznym warunkiem niejednoznaczności jest odpowiednio $h \leq 0$. W przedziale $0 < h \leq h^*$ niejednoznaczność (czyli rozdwojenie stanu równowagi) może wystąpić. Natomiast w przedziale $h_{max}^{cr} < h \leq h^*$ mogą wystąpić różnego rodzaju (różne „mody”) stanu niestateczności odkształceń plastycznych materiału, niejednoznaczności rozwiązania i rozdwojenia stanu równowagi (bifurkacji), por. np. [7, 15, 16, 21], [27-36], [47, 71-73], [77, 81, 134], [137-140], [166, 167]. Mogą wystąpić także innego rodzaju (inne „mody”) lokalizacji odkształceń plastycznych (inne rodzaje utraty stateczności materiału podczas odkształceń plastycznych) aniżeli lokalizacja (R-R). Wykresy na rys. 3 pokazują więc, że $h^* \geq h_{max}^{cr}$.

Punkty A ($z \cong 0,532$ lub $z = \sqrt{3} - 1,2$) i B ($z \cong 0,832$ lub $z = \sqrt{3} - 0,9$) na krzywych odpowiednio 6 i 5 na rys. 3.3 są granicznymi punktami, po przekroczeniu których nie jest spełniona wymagana nierówność (3.5) dotycząca przedziału określoności, w którym spełniony jest warunek lokalizacji odkształceń plastycznych Rice'a-Rudnickiego (3.3) i (3.4) w zależności od współczynników tarcia wewnętrznego i dylatacji ($\tilde{\mu}$ i β).

Punkt wspólny, w którym występuje równość warunków (3.4) i (3.8) jest więc punktem początku układu współrzędnych. Jest to punkt zerowy, w którym $z = 0$ i $h = 0$, a więc dla przypadku gdy $\tilde{\mu} = \beta$. Jest to jak wspomniano wcześniej punkt, w którym równania konstytutywne plastycznego płynięcia (3.1) przyjmują postać stowarzyszonych praw. Wówczas konieczny lokalny warunek niejednoznaczności (3.8) oraz konieczny warunek lokalizacji odkształceń plastycznych (R-R) (3.4), przyjmują następującą postać: $h_{max}^{cr} = h^* = 0$, a wartości funkcji wzmocnienia wynikające z warunku (3.3) są nawet ujemne.

Porównując wzajemnie wyrażenia (3.4) z (3.8) po przekształceniach, gdy spełniony jest warunek ($\beta \tilde{\mu} \leq \frac{3}{4}$) otrzymamy następujące wyrażenie na istnienie wspólnych punktów (jednakowe wartości dla funkcji wzmocnienia), nakładane odpowiednio przez warunek na lokalizację odkształceń (R-R) i przez lokalny warunek niejednoznaczności, w zależności od wartości stałych materiałowych ($\beta, \tilde{\mu}$ i ν)

$$\frac{1-2\nu}{3(1-\nu)}(\beta - \tilde{\mu})^2 = \frac{3}{2} - 2\beta \tilde{\mu}. \quad (3.10)$$

Dla przypadku materiału nieściśliwego plastycznie $\nu = 0,5$ z wyrażenia (3.10) otrzymano, że $\beta \tilde{\mu} = \frac{3}{4}$. Wykres dla $\nu = 0,5$ lub dla ($\beta = \tilde{\mu}$) oznaczono krzywą 1 na rys. 4. Krzywe natomiast 2 i 3 na rys. 3.4 otrzymano odpowiednio dla przypadków $\nu = 0,3$ i $\nu = 0,0$.

Na podstawie badania obszaru określoności i słuszności wyrażen na lokalizację (3.3) i (3.4) wynika, że [127, 128] w poniższym zakresie zmienności stałych materiałowych β i $\tilde{\mu}$

$$\beta + \tilde{\mu} < \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (3.11)$$

normalna \mathbf{n} do płaszczyzny lokalizacji odkształceń plastycznych jest prostopadła do kierunku σ_{II} a warunki (3.3) i (3.4) nie zależą od rodzaju stanu naprężenia.

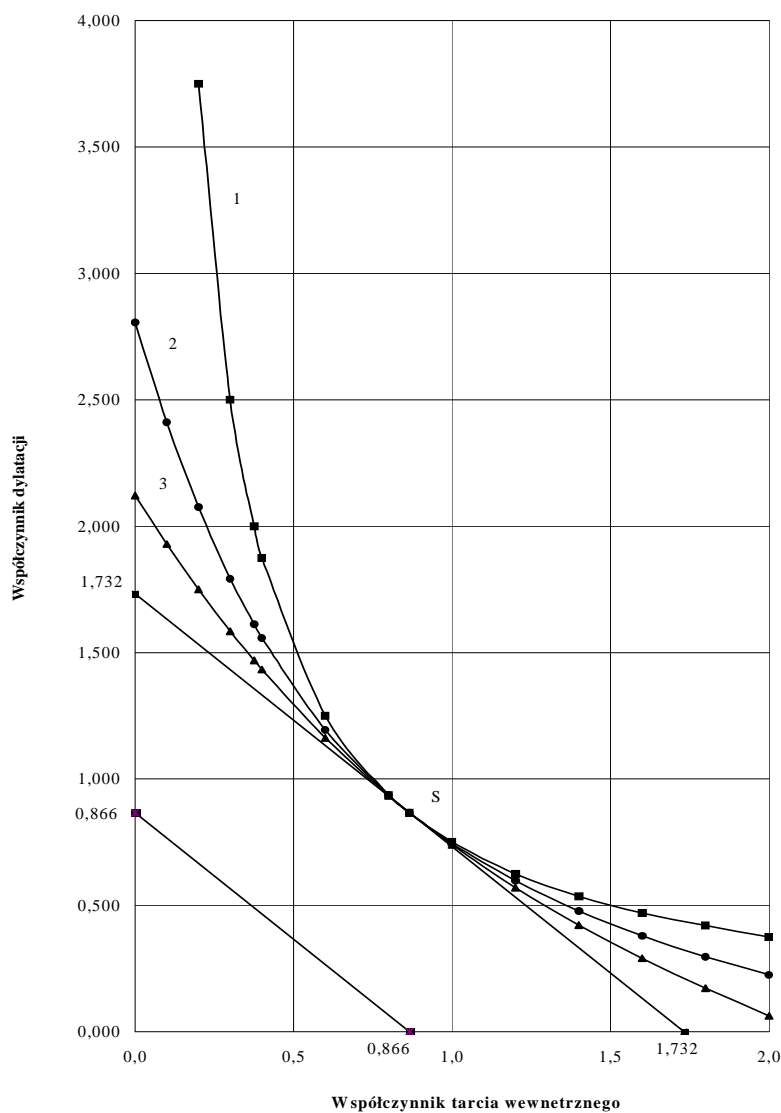
W konsekwencji po wzajemnym porównaniu warunków (3.5) i (3.11) dla poniższego zakresu zmienności β i $\tilde{\mu}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \beta + \tilde{\mu} \leq \sqrt{3}, \quad (3.12)$$

normalna do płaszczyzny lokalizacji odkształceń plastycznych \mathbf{n} nie jest prostopadła do kierunku σ_{II} i nie jest także prostopadła do kierunku σ_{III} .

W przypadku natomiast, gdy $\tilde{\mu} + \beta > \sqrt{3}$ normalna \mathbf{n} do płaszczyzny lokalizacji odkształceń plastycznych jest prostopadła do kierunku σ_{III} , por. [127, 128]. Ten jednak rodzaj lokalizacji odkształceń plastycznych nie jest rozpatrywany w niniejszej pracy.

Graficzną interpretację warunków (3.5), (3.10)-(3.12) dla różnych wartości stałych materiałowych ($\beta, \tilde{\mu}$ i ν) przedstawiono na odpowiednich wykresach na rys. 3.4. W punkcie S ($\beta = \tilde{\mu}$) $\neq 0$ i wówczas prawa plastycznego płynięcia są stowarzyszone.



Rys. 3.4. Geometryczna interpretacja warunku (3.10) dotycząca istnienia wspólnych punktów i ograniczeń matematycznych (3.11) i (3.12) wynikających z warunku na lokalizację odkształceń (R-R)

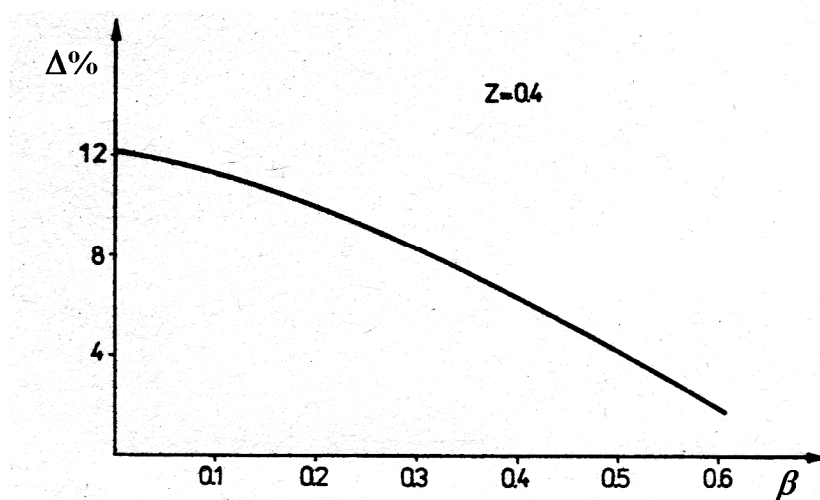
Jak wspomniano, warunek powstania stanu lokalizacji odkształceń plastycznych (R-R) jest matematycznie warunkiem koniecznym. Wyprowadzony warunek $h > h^*$ (3.8), jest dostatecznym lokalnym warunkiem jednoznaczności rozwiązania przyrostowego problemu brzegowego plastyczności, natomiast lokalnym warunkiem koniecznym rozwiązania jest warunek $h > 0$. Jest to równocześnie warunek konieczny i dostateczny jednoznacznej odwracalności równań konstytutywnych sprężysto-termoplastyczności, por. np. [122, 142, 144].

W pracach [142, 145] wprowadzono współczynnik Δ oszacowania różnic w wartościach funkcji wzmocnienia dla warunków utraty jednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego oraz inicjacji lokalizacji odkształceń plastycznych (R-R). Postać współczynnika oszacowania Δ jest następująca

$$\Delta = \frac{h_{\tan}^* - h_{\max, \tan}^{\text{cr}}}{\mu} = \frac{\frac{h^*}{\mu}}{\left(1 + \frac{h^*}{\mu}\right)} - \frac{\frac{h_{\max}^{\text{cr}}}{\mu}}{\left(1 + \frac{h_{\max}^{\text{cr}}}{\mu}\right)}. \quad (3.13)$$

We wzorze (3.13) użyto stycznych modułów wzmocnienia jako parametrów oszacowania, ponieważ mają one określoną interpretację geometryczną oraz mogą być wyznaczone (określone) doświadczalnie z krzywej umocnienia dla danego materiału za pomocą odpowiednich pomiarów graficznych. Geometryczną interpretację wyznaczania (określania) i analityczny opis stycznych modułów wzmocnienia h_{\tan}^{cr} i $h_{\max, \tan}^{\text{cr}}$ dla danego materiału w zależności od odpowiednio krytycznych wartości funkcji wzmocnienia h^* i h_{\max}^{cr} , zilustrowano na rys.3.1b. W pracach [142, 145] określono procentową zmianę współczynnika oszacowania Δ dla ustalonej wartości parametru z ($z = 0,4$), w zależności od parametru ściśliwości materiału β .

Na rys. 3.5 przedstawiono procentową zmianę współczynnika oszacowania Δ dla przyjętej wartości parametru $z = 0,4$. Wartości $\frac{h^*}{\mu}$ i $\frac{h_{\max}^{\text{cr}}}{\mu}$ dla danego z w zależności od współczynnika dylatacji materiału β wyznaczono z wykresów na rys. 3.3. Z wykresu na rys. 3.5 wynika, że oszacowanie to jest bardzo dokładne i bardzo bliskie (osiągające wartość ok. 2% dla $\beta = 0,6$ i ok. 12% dla $\beta = 0,0$).



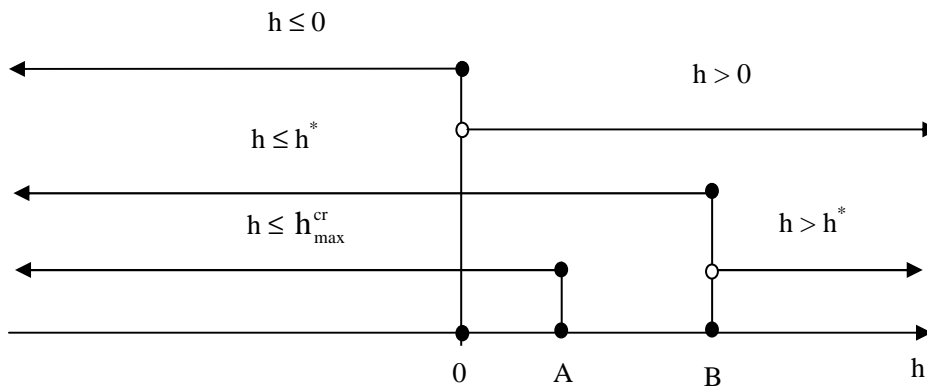
Rys. 3.5. Procentowa zmiana współczynnika oszacowania Δ w zależności od β dla ustalonej wartości $z = 0,4$ [142, 145]

Na podstawie rys. 3.5 można sformułować także następujący bardziej ogólny wniosek, że oszacowanie to jest bardziej dokładne (mniejsze wartości Δ) dla przypadku materiałów bardziej ściśliwych plastycznie, którym odpowiadają większe wartości współczynnika ściśliwości β aniżeli dla materiałów mniej ściśliwych lub nieściśliwych plastycznie ($\beta = 0,0$).

3. ROZSZERZONE UWAGI O LOKALNYM WARUNKU JEDNOZNACZNOŚCI I WARUNKU LOKALIZACJI ODKSZTAŁCEŃ PLASTYCZNYCH (R-R)

Wyprowadzony warunek powstania stanu lokalizacji odkształceń plastycznych Rice'a-Rudnickiego (R-R) jest matematycznie warunkiem koniecznym, a wyprowadzone lokalne warunki jednoznaczności rozwiązania są równocześnie odpowiednimi kryteriami koniecznymi i dostatecznymi wykluczającymi wystąpienie rozdwojenia stanu równowagi (bifurkacja stanu równowagi). Na tej podstawie można stwierdzić, że lokalnym warunkiem koniecznym niejednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego plastyczności jest $h \leq h^*$, a warunkiem dostatecznym niejednoznaczności rozwiązania jest więc odpowiednio $h \leq 0$. Zilustrować to można na następującym schemacie.

Na rys. 3.6 w punkcie A jest, że ($h = h_{\max}^{\text{cr}}$) a w punkcie B ($h = h^*$). Na lewo od punktu A ($h \leq h_{\max}^{\text{cr}}$) dla przypadku, gdy $N = -\frac{(\beta + \tilde{\mu})}{3}$, lokalizacja odkształceń plastycznych (R-R) może wystąpić lub nie. Jest to więc warunek konieczny wystąpienia stanu lokalizacji odkształceń opisanego warunkiem (3.4). Także na lewo od punktu A, na podstawie warunku (3.3), gdy $N \neq -\frac{(\beta + \tilde{\mu})}{3}$ mogą wystąpić stany lokalizacji odkształceń plastycznych (R-R) dla innych warunków, niż te wynikające z (3.4). Wystąpić mogą także innego rodzaju stany niestateczności odkształceń plastycznych – innego rodzaju niż lokalizacja odkształceń plastycznych (R-R), np. lokalizacja odkształceń plastycznych w postaci bruzdy, por. [31, 47, 73], [137-139].



Rys. 3.6. Schemat wzajemnych relacji występujących pomiędzy lokalnymi warunkami jednoznaczności i lokalizacji odkształceń plastycznych

Na lewo od punktu 0 ($h \leq 0$) rozdwojenie stanu równowagi musi wystąpić, jest to warunek dostateczny wystąpienia stanu rozdwojenia (warunek dostateczny niejednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego). W przedziale ($0 < h \leq B$) niejednoznaczność, czyli rozdwojenie stanu (bifurkacja) może wystąpić lub nie. W przedziale natomiast ($A < h \leq B$) pomiędzy punktami A i B mogą wystąpić różnego rodzaju (inne „mody”) stanu niestateczności odkształceń plastycznych oraz niejednoznaczności rozwiązania i rozdwojenia stanu równowagi (bifurkacji), por. np. [27-36], [47, 73], [137-140].

4. UWAGI KOŃCOWE I WNIOSKI

1. W tym rozdziale wykazano, że lokalny konieczny warunek niejednoznaczności rozwiązania podstawowego problemu brzegowego sprężysto-plastyczności nakłada większe wartości na izotermiczną funkcję wzmocnienia aniżeli konieczny warunek lokalizacji odkształceń plastycznych (R-R). Oznacza to, że lokalny warunek niejednoznaczności jest górnym oszacowaniem dla funkcji wzmocnienia nakładanych przez warunek lokalizacji odkształceń plastycznych (R-R). Fizycznie jest to równoważne temu, że konieczny lokalny warunek niejednoznaczności rozwiązania podstawowego problemu brzegowego sprężysto-plastyczności dopuszcza mniejsze (bezpieczniejsze) wielkości krytycznych obciążeń zewnętrznych niż konieczny warunek na lokalizację odkształceń plastycznych (R-R). Wynika to stąd, że im większa jest wartość funkcji (modułu) wzmocnienia h tym mniejsze są dopuszczalne obciążenia zewnętrzne. Intuicyjnie było to do przewidzenia, ponieważ warunek jednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego wyklucza wystąpienie każdej postaci niestateczności odkształceń plastycznych a lokalizacja odkształceń plastycznych w postaci płaszczyzny lokalizacji (R-R) jest jedną z form niestateczności.
2. W niniejszej pracy wykazano matematycznie, że $(h^* \geq h_{\max}^{\text{cr}})$, a stąd wynika także, że $(h^* \geq h^{\text{cr}})$. Na odpowiednich wykresach, por. rys. 3.3, 3.4 i 3.5 pokazano jak duże są różnice w wartościach nakładanych na odpowiednie funkcję wzmocnienia i od jakich parametrów materiałowych oraz od jakich rodzajów stanu naprężenia i obciążenia zależą. Należy podkreślić, że w rozpoznanej dotychczas literaturze nie spotkano się ze sformułowaniem warunków brzegowych i wyprowadzeniem dostatecznego warunku (kryterium) na lokalizację odkształceń plastycznych (R-R) w przedziale $h \leq h_{\max}^{\text{cr}}$, tj. na lewo od punktu A, por. rys. 3.6. Jest to więc nadal problem badawczy otwarty do analizy i rozwiązania. W punkcie zero, por. rys. 3.3 oba warunki są równe zero ($h^* = h^{\text{cr}} = 0$).
3. Zagadnienia niestateczności odkształceń plastycznych i rozdzielenia stanu równowagi (bifurkacji) oraz lokalizacji odkształceń plastycznych odgrywają znaczącą rolę w wielu procesach plastycznego kształtowania materiałów i elementów konstrukcyjnych wielu maszyn i urządzeń, w procesach obróbki plastycznej i skrawaniem, w zjawiskach inicjacji oraz rozwoju mikropeknięć, w zagadnieniach lokalnego pocieniania, inicjacji bruzdy, szyjkowania itp., por. np. [142, 145]. Zagadnienia te mogą więc odgrywać znaczącą rolę w tematyce ogólnie rozumianej niezawodności pracy, bezpiecznego projektowania, w badaniach doświadczalnych i technologii wytwarzania

oraz w zagadnieniach remontowych, a także konstrukcyjnych wielu urządzeń, maszyn i ich elementów. Należy więc prowadzić dalsze badania i udoskonalać metody badawczo-pomiarowe, metody obliczeń celem oszacowania momentów wystąpienia tych zjawisk. W tym celu wykorzystywać można m.in. wyprowadzone w niniejszej pracy lokalne i globalne warunki jednoznaczności rozwiązania, które są, jak już wspomniano wcześniej, również kryteriami rozdzielenia stanów równowagi. W dalszych badaniach należy także przeprowadzić specyfikację dla innych równań konstytutywnych materiałów i funkcji płynięcia plastycznego aniżeli te opisane wyrażeniami (3.1) i (3.6) w oparciu o przeprowadzone i dostępne badania doświadczalne.

4. Jak bowiem wynika z rezultatów pracy po przekroczeniu (oszacowanym na podstawie wzoru (3.13) i przedstawionym na rys. 3.5), wartości lokalnego warunku jednoznaczności w odkształcanym materiale mogą pojawić się mikroplaszczyny lokalizacji odkształceń plastycznych lub mikropasma ścinania, w których podczas dalszego trwania procesu obciążenia i odkształcenia będą się intensyfikować, doprowadzając do ich nukleacji w np. makroplaszczynę lokalizacji i w następstwie utratę spójności materiału w postaci ścięcia na wskroś.
5. Należałoby także w przyszłych badaniach wyprowadzić lokalny dostateczny warunek jednoznaczności (lub konieczny niejednoznaczności) dla dużych odkształceń w ramach nieliniowej mechaniki ośrodków ciągłych, por. np. [27-36], [62, 63], [93], [105-117], [122-124], [167, 168].

ROZDZIAŁ IV

STANY KRYTYCZNE W ADIABATYCZNYM PROCESIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEGO ODKSZTAŁCANIA

1. WSTĘP

W tym rozdziale rozważa się zagadnienie krytycznego adiabaticznego ścinania dla przypadku materiałów metalicznych. Tego rodzaju techniczne zjawiska mogą wystąpić już przy quasistatycznych oraz większych prędkościach odkształcenia plastycznego np. ($\dot{\epsilon}^p > 10^{-1} s^{-1}$). Zjawiska te mogą wystąpić w niektórych procesach technologicznych obróbki plastycznej, takich jak: przecinanie na gilotynach, przebijanie i wycinanie stemplem, kucie, kalibrowanie i przeciąganie ze skręcaniem rur, prętów itp. a także w niektórych procesach obróbki skrawaniem np. frezowanie, toczenie, ukosowanie krawędzi rur pod spoiny, przecinanie itp. Zjawisko adiabaticznego ścinania może wywoływać np. wzajemnie lokalne drgania narzędzia skrawającego i materiału poprzez lokalne mięknięcie materiału, wskutek wzrostu temperatury w procesie adiabaticznej dyssypacji energii odkształcenia plastycznego oraz energii sił tarcia. Określone zostaną wartości krytycznych odkształceń, naprężeń i przyrostu temperatury, przy których zjawiska adiabaticznych krytycznych odkształceń mogą wystąpić. Stan krytyczny określa maksimum na adiabaticznej krzywej umocnienia lub co jest równoznaczne, że funkcja wzmocnienia oznaczona jako h_1 [R. I, wzór (1.3)] osiąga wartość zero. Rozpatrzono także proces adiabaticznego skręcania grubo i cienkościennych metalowych rurek. W ostatnich dwudziestu latach pojawił się szereg prac dotyczących zagadnień dużych odkształceń w sprzężonej termo-sprężysto-plastyczności o stowarzyszonych prawach plastycznego płynięcia [3, 5, 9, 58, 85, 129, 133]. Większość prac dotycząca zagadnień sprzężonej termo-sprężysto-plastyczności, zarówno dla przypadku małych i dużych odkształceń oparta była na termodynamice procesów nieodwracalnych w opisie z parametrami wewnętrznymi [79, 85, 118, 122, 142, 143].

2. MODEL CIAŁA Z IZOTROPOWYM WZMOCNIENIEM

Rozważmy szczególny model ciała termo-sprężysto-plastycznego z izotropowym wzmocnieniem (parametrem wzmocnienia będzie praca odkształcenia plastycznego) i stowarzyszonym prawie plastycznego płynięcia [122, 142].

Niech stan wewnętrzny ciała opisuje T , σ i jeden parametr skalarny κ utożsamiany z pracą odkształcenia plastycznego. Na tej podstawie założyć można, że potencjał Gibbsa może być przedstawiony w postaci, por. [156]

$$G = G^e(\sigma, T) + G^p(\kappa). \quad (4.1)$$

Powyższe założenie jest równoznaczne z pominięciem efektów sprzężenia „sprężysto-plastycznego” i ciepła przemian wewnętrznych $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial T} \cdot d\kappa = 0\right)$, [142, 143, 156], gdzie Π – jest wektorem par wewnętrznych sił termodynamicznych stowarzyszonych z wektorem par parametrów wewnętrznych K .

Postaci funkcji (4.1) odpowiada następująca addytywna postać entalpii

$$X = X^e(\boldsymbol{\sigma}, T) + G^p(\kappa), \quad (4.2)$$

gdzie: $X^e = G^e(\boldsymbol{\sigma}, T) + T s^e(\boldsymbol{\sigma}, T)$ i s^e – sprężysta część entropii [122].

Siła termodynamiczna π stowarzyszona z parametrem wewnętrznym κ ma następującą postać [142, 143, 156]

$$\pi = \rho_0 \frac{\partial G}{\partial \kappa} = \rho_0 \frac{\partial G^p(\kappa)}{\partial \kappa} \quad (4.3)$$

i nie zależy ani od stanu naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$, ani od temperatury T .

Przyjmujemy, że nieodwracalny proces plastycznego płynięcia stowarzyszony jest z następującą funkcją płynięcia [142, 143, 156]

$$f_1 = \sigma_{(i)} - Y_1(\pi, \kappa, T), \quad (4.4)$$

gdzie: $Y_1 = Y_0(\kappa, T) \exp \pi(\kappa)$, której odpowiada warunek H-M-H ($f_1 = 0$) [28, 31]. Występująca w równaniu powyższym wielkość $\sigma_{(i)}$ jest intensywnością naprężenia zdefiniowaną następująco [31, 82, 120, 122, 142, 156]

$$\sigma_{(i)} = \left(\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' \right)^{\frac{1}{2}} \text{ oraz } \boldsymbol{\sigma}' = \text{dev} \boldsymbol{\sigma}. \quad (4.5)$$

Podstawiając wyrażenie (4.3) do wzoru (4.4), granicę plastyczności Y przy prostym rozciąganiu możemy wyrazić jako funkcję zmiennych κ i T następująco

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa, T) = f_1|_{\pi=\pi(\kappa)} = \sigma_{(i)} - Y(\kappa, T), \quad (4.6)$$

gdzie: $Y(\kappa, T) = Y_1|_{\pi=\pi(\kappa)}$ oraz $f_1(\pi, \kappa, T)|_{\pi=\pi(\kappa)} = f(\kappa, T)$.

Prawa płynięcia plastycznego stowarzyszone z funkcją f oraz równanie ewolucji dla parametru wewnętrznego $\dot{\kappa}$ mają postać [142, 143, 156]

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}'^p = \frac{3}{2} \frac{\Lambda}{\sigma_{(i)}} \boldsymbol{\sigma}' \quad \text{i} \quad \dot{\kappa} = \Lambda \frac{\partial Y_1}{\partial \pi}, \quad \text{lub} \quad \dot{\kappa} = \Lambda d, \quad (4.7)$$

$$\text{gdzie} \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}'^p = \text{dev} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad \text{i} \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{kk}^p = 0.$$

Biorąc pod uwagę warunek $f = 0$, równanie (4.7) i przyjętą szczególną postać funkcji Y_1 widać, że parametr κ można utożsamić z pracą odkształcenia plastycznego [120, 122, 142, 143, 156] następująco

$$\dot{\kappa} = \boldsymbol{\sigma}' : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}'^p. \quad (4.8)$$

3. UPROSZCZONY LOKALNY WARUNEK JEDNOZNACZNOŚCI

W pracach [142, 143] dokonując analizy wpływu różnego rodzaju sprzężeń na krytyczną wartość funkcji wzmocnienia h , wykazano, że dla przypadku stowarzyszonych praw plastycznego płynięcia ($\mathbf{f}_{I,\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{f}_{\boldsymbol{\sigma}}$) i przy pominięciu wszystkich efektów sprzężenia sprężysto-plastycznego [142, 143], wielkość ($m_{\sigma} = m$), (por. wzór (1.3) z rozdziału I) była szczegółowo analizowana w pracach [119, 120, 122, 142, 143]. Autorzy interpretując wielkość m podczas analizy izotermicznego procesu cyklicznego w przestrzeni naprężeń zauważyli, że w przypadku materiałów metalicznych m jest zawsze dodatnie ($m > 0$).

W momencie, w którym osiągnany jest stan ($h_1 = 0$), (por. wzór (1.3) z rozdziału I) oraz uwagi zawarte w pracach [121, 122, 142, 144], wówczas

$$h_1 = h - m f_T = 0, \quad (4.9)$$

a prędkość naprężenia $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ i prędkość wymiany ciepła z otoczeniem q_0 , powiązane są następującym związkiem:

$$\mathbf{f}_{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = f_T \left(\xi \boldsymbol{\alpha} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{q_0}{\rho_0 c_{\sigma}} \right). \quad (4.10)$$

Od tej chwili wg [119, 122, 142, 144] możliwe są dwie postacie odkształcenia: postać aktywnego plastycznego płynięcia i postać sprężysta (lub „sztyw-na”, jeśli pominiemy sprężystość). Jeżeli ($h_1 = 0$) wówczas ciało w procesie adiabatycznego odkształcania ($q_0 = 0$) zachowuje się podobnie jak ciało idealnie plastyczne (bez wzmocnienia) wtedy to możliwe jest chwilowe adiabatyczne płynięcie ($\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \neq \mathbf{0}$) przy stałych naprężeniach ($\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0}$) [119, 122, 142].

Równanie (4.10) umożliwia określenie kierunku procesu w chwili, gdy osiągnięty jest krytyczny stan (4.9). Na kierunek ten poza prędkością ogrzewania (chłodzenia) q_0 i wrażliwością granicy plastyczności na temperaturę f_T ma wpływ tylko jeden efekt sprzężeń termostatycznych – efekt piezokaloryczny ($\xi \boldsymbol{\alpha} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}$) [119, 121, 122, 142, 143]. Efekt ten przy umiarkowanych ciśnieniach (rzędu granicy plastyczności) jest na ogół pomijany [121, 122], ale w technice wysokich ciśnień odgrywa ważną rolę [93-95]. Ciepło dyssypacji, które wyraża człon ($\mathbf{f}_\sigma : \dot{\boldsymbol{\sigma}}$) wpływa natomiast na krytyczny stan (4.9), przy którym następuje rozdzielenie stanu odkształcenia.

Wyrażenie na m we wzorze (4.9) ma następującą postać [122, 142]

$$m = \frac{1}{\rho_0 c_\sigma} \left(\boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \pi \frac{\partial f_1}{\partial \pi} \right). \quad (4.11)$$

Jeżeli pominąć efekt piezokaloryczny, to z równania (4.10) wynika, że w każdym adiabatycznym procesie proporcjonalnych obciążeń naprężenie osiąga wartość ekstremalną w punkcie, w którym spełniony jest warunek (4.9).

Przy pominięciu ciepła przemian wewnętrznych [119, 120, 122, 142, 143], przyjęciu ciała spełniającego warunek H-M-H z izotropowym wzmocnieniem oraz gdy utożsamimy parametr κ z pracą odkształcenia plastycznego ($\dot{\kappa} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$), warunek (4.9) przyjmuje następującą postać [122, 142]:

$$\frac{\partial Y(\kappa, T)}{\partial \kappa} = \frac{(\pi - 1)}{\rho_0 c_\sigma} \frac{\partial Y(\kappa, T)}{\partial T}, \quad (4.12)$$

gdzie: π – wewnętrzna siła termodynamiczna (siła dysypacyjna) związana z wewnętrznym parametrem κ [122, 142, 143].

Równanie (4.12) można również wyrazić poprzez funkcję $\sigma = Y^*(\epsilon^p, T)$ opisującą, znane z prób na proste izotermiczne rozciąganie (krzywe rzeczywiste naprężenie – logarytmiczne odkształcenie) następująco [122]

$$\frac{1}{Y^*} \frac{\partial Y^*(\epsilon^p, T)}{\partial \epsilon^p} = \frac{(\pi - 1)}{\rho_0 c_\sigma} \frac{\partial Y^*(\epsilon^p, T)}{\partial T} - \frac{(\pi - 1)}{\rho_0 c_\sigma} \frac{\partial Y^*(\epsilon^p, T)}{\partial \epsilon^p} \frac{1}{Y^*} \int_0^{\epsilon^p} \frac{\partial Y^*(\zeta, T)}{\partial T} d\zeta. \quad (4.13)$$

Przy przyjętych założeniach wynika, że przyrost temperatury Θ w procesie lokalnie adiabatycznym ($q_0 = \text{div} \mathbf{q} = 0$) wyraża się następującym wzorem

$$\Theta \rho_0 c_\sigma = \kappa - \rho_0 G^p(\kappa), \quad (4.14)$$

gdzie: $(\Theta = T - T_0)$, T_0 – temperatura otoczenia, a $G^p(\kappa)$ – jest nazywana plastyczną częścią potencjału Gibbsa [122, 142, 143, 156].

Adiabatyczną granicę plastyczności można określić następująco [142]:

$$Y^{(a)}(\kappa) = Y(\kappa, T)|_{T=T(\kappa)}, \quad (4.15)$$

gdzie: $T = T(\kappa)$ jest obliczane z wyrażenia (4.14).

Obliczając pochodną funkcji $Y^{(a)}(\kappa)$ i wykorzystując wzór (4.12) otrzymuje się po przekształceniach

$$\frac{dY^{(a)}(\kappa)}{d\kappa} = 0. \quad (4.16)$$

Tak więc stan krytyczny jest stanem, któremu odpowiada maksimum na krzywej adiabatycznej, w próbie na proste rozciąganie lub na ścinanie wg hipotezy (H-M-H), gdyż

$$Y(\kappa, T) = \sqrt{3} k(\kappa, T), \quad (4.17)$$

gdzie: $k(\kappa, T)$ – jest izotermiczną granicą plastyczności przy czystym ścinaniu.

Równanie na przyrost temperatury (4.14) zawiera jak widać (drugi człon po prawej stronie) wyrażenie, które uwzględnia zmagazynowaną energię deformacji plastycznej [6, 102, 103, 142, 143, 156]. Założyliśmy wcześniej, że pomijane jest ciepło przemian wewnętrznych, wówczas wyrażenie $\rho_0 G^p(\kappa)$ jest równe zmagazynowanej energii deformacji plastycznej [142, 156].

Dla dalszej analizy problemu celem uproszczenia założymy, że wyrażenie $\rho_0 G^p(\kappa)$ jest liniową zależnością od parametru wewnętrznego κ , co jest równoważne na podstawie zależności (4.12) z faktem, że siła termodynamiczna π jest stała. Przy powyższych założeniach, analizując problem deformacji termosprężysto-plastycznej, w dalszej części pracy siła π będzie odgrywać rolę stałej materiałowej. W najnowszych pracach autora [156] wykazano, że siła termodynamiczna π dla przypadków materiałów metalicznych jest bezpośrednio związana z krzywą umocnienia materiału. Dla niektórych materiałów metalicznych np. dla aluminium i jego stopów wykazujących liniowe wzmocnienie siła termodynamiczna π ma prawie stałą wartość ($\tau \cong \text{const}$). Dla innych materiałów metalicznych np. dla stali węglowych i stopowych siła termodynamiczna π nie jest stała i jest funkcją krzywej umocnienia [156].

Dla dalszego rozwiązania zagadnienia procesu adiabatycznego krytycznego odkształcania rozważymy klasę materiałów metalicznych, które dadzą się opisać następującym związkiem między rzeczywistym naprężeniem σ , logaryt-

micznym odkształceniem plastycznym ε^p i temperaturą Θ dla przypadku prostego rozciągania [48], [59-61], [83, 122, 142]

$$\sigma = \bar{Y}(\varepsilon^p, \Theta) = (a - b\Theta)(c + \varepsilon^p)^n. \quad (4.18)$$

Stałe materiałowe ($a, b, c, n, \rho_{\sigma c \sigma}, E, \sigma_0$) występujące we wzorze (4.18) wybrane zostały dla pewnej klasy materiałów metalicznych (stali węglowych, stali stopowych konstrukcyjnych, stali kwasoodpornych, stopów aluminium i miedzi i innych) wg danych doświadczalnych zawartych w pracach [87, 122, 125, 142], zawierają się w następujących granicach:

$$a = (450 - 5 \cdot 10^3) \text{ [MPa]}, b = (0,2 - 5) \text{ [MPa/}^\circ\text{C]}, c = 0,016, n = (0,2 - 0,5),$$

$$\rho_{\sigma c \sigma} = (3 - 4) \text{ [MPa/}^\circ\text{C]}, E = (200 - 220) \text{ [GPa]}, \text{ gdzie: } E - \text{ moduł Younga,}$$

$\sigma_0 = ac^n \text{ [MPa]}$, gdzie: n – współczynnik umocnienia, σ_0 – początkowa granica plastyczności przy ($\varepsilon^p = 0$ i $\Theta = 0^\circ\text{C}$).

Zależność konstytutywna (4.18) może być przedstawiona w wielkościach bezwymiarowych następująco

$$\tau = (A - \Theta^*) (c + \varepsilon^p)^n. \quad (4.19)$$

gdzie

$$\tau = \frac{\sigma(1+\nu)}{\sqrt{3}E}, A = \frac{a(1+\nu)}{\sqrt{3}E}, \Theta^* = \frac{b(1+\nu)}{\sqrt{3}E} \Theta, 2\mu = \frac{E}{1+\nu}. \quad (4.20)$$

Bezwymiarowa praca odkształcenia plastycznego jest określona następująco [73, 142]

$$\kappa^* = \frac{1+\nu}{E} \kappa = \sqrt{3} \int_0^{\varepsilon^p} \tau(\Theta, \varepsilon^p) d\varepsilon^p. \quad (4.21)$$

gdzie: $\kappa = \int_0^{\varepsilon^p} \sigma(\Theta, \varepsilon^p) d\varepsilon^p$ – jest wymiarową pracą odkształcenia plastycznego.

Po podstawieniu wyrażenia (4.19) do (4.21) i formalnym scałkowaniu otrzymuje się

$$\kappa^* = \sqrt{3} \frac{(A - \Theta^*)}{n+1} \left[(c + \varepsilon^p)^{n+1} - c^{n+1} \right]. \quad (4.22)$$

Zakładając więc, że $[\rho_0 G^p(\kappa) = \pi \kappa]$ i przyjmując do obliczeń, że $\pi \approx 0,1$ [6, 122, 141, 142] z równania na przyrost temperatury (4.14) otrzymano

$$\Theta^* = \delta \kappa^*, \text{ gdzie: } \delta \cong 5,2 \frac{b}{\rho_0 c_\sigma}. \quad (4.23)$$

Tutaj bezwymiarowy parametr δ reprezentuje wrażliwość granicy plastyczności stali na temperaturę. Z układu równań (4.19), (4.22) i (4.23) można wyznaczyć następujące adiabaty

$$\tau^a = \tau(\kappa^*), \quad \varepsilon^p = \varepsilon^p(\kappa^*) \quad \text{i} \quad \Theta^* = \delta \kappa^*. \quad (4.24)$$

Porównując pochodną $\frac{d\tau^a}{d\kappa^*}$ do zera $\left(\frac{d\tau^a}{d\kappa^*} = 0\right)$ znajdziemy krytyczną wartość bezwymiarowej pracy odkształcenia plastycznego κ_{cr}^* , a następnie odpowiadające jej krytyczne wartości odkształcenia plastycznego, bezwymiarowej temperatury i naprężenia ε_{cr}^p , Θ_{cr}^* i τ_{cr}^* następująco

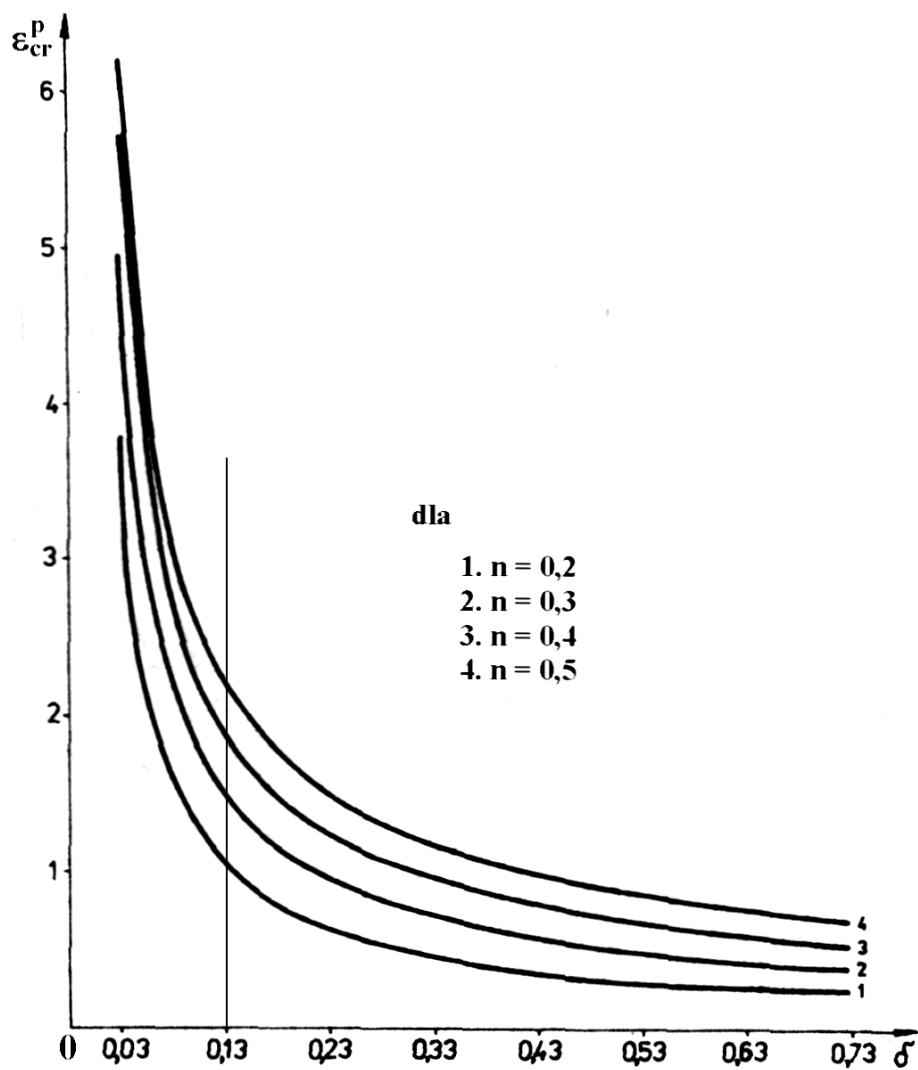
$$\begin{aligned} \varepsilon_{cr}^p &= \left[\frac{n(1+n-\sqrt{3}\delta c^{n+1})}{\sqrt{3}\delta} \right]^{\frac{1}{1+n}} - c, \\ \Theta_{cr}^* &= A \frac{(n-\sqrt{3}\delta c^{n+1})}{(1+n-\sqrt{3}\delta c^{n+1})}, \\ \tau_{cr}^a &= A \left(1 - \frac{n-\sqrt{3}\delta c^{n+1}}{1+n-\sqrt{3}\delta c^{n+1}} \right) \left[\frac{n(1+n-\sqrt{3}\delta c^{n+1})}{\sqrt{3}\delta} \right]^{\frac{n}{1+n}}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Na podstawie przeprowadzonej dokładnej analizy drugiego wyrażenia (4.25)₂ na Θ_{cr}^* , można stwierdzić, że dla określonych przedziałów wartości $\delta \in \langle 0,03-0,7 \rangle$, $b = (0,2 - 5)$ [MPa^oC], i $\rho_\sigma c_\sigma \cong 3,5$ [MPa^oC] wyrażenie to można z bardzo dużą dokładnością zastąpić następującym prostym wzorem

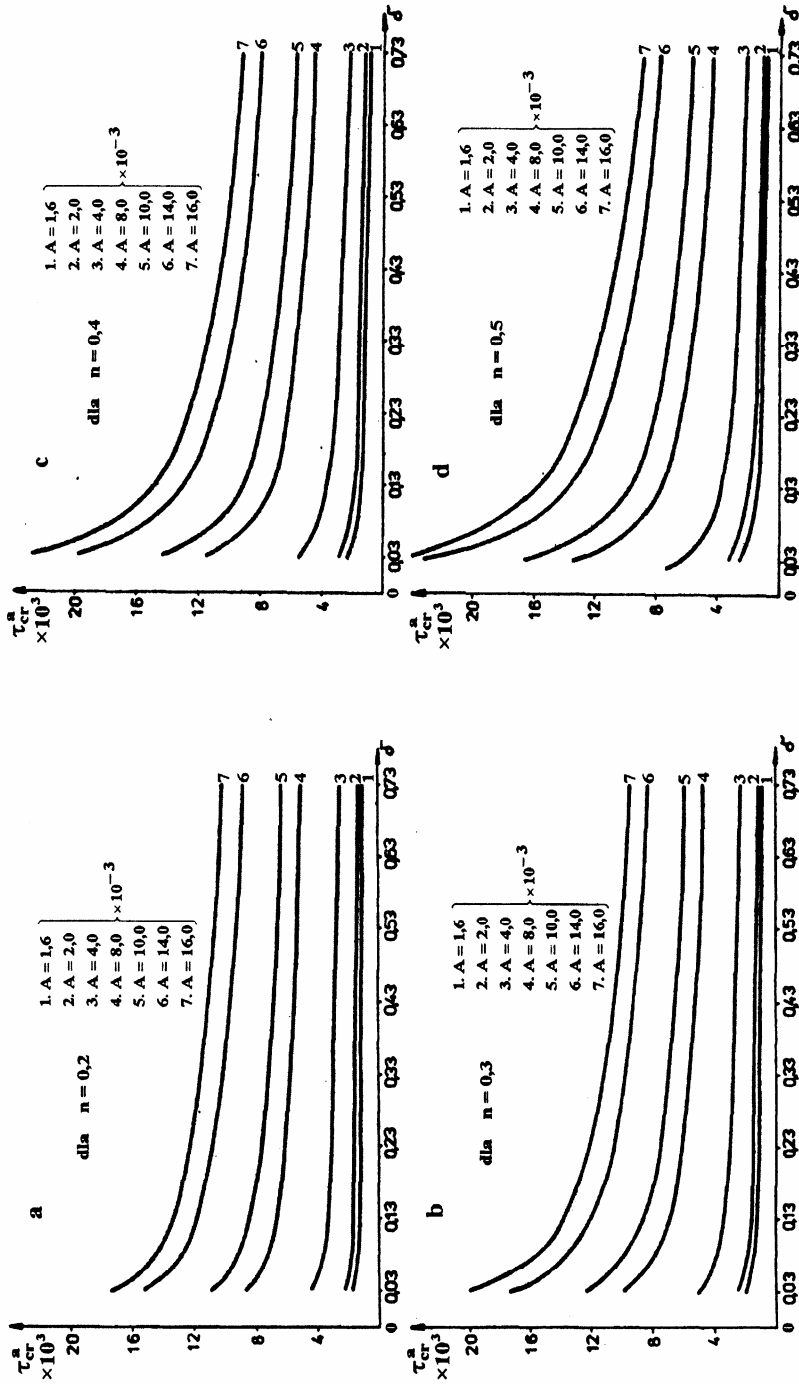
$$\Theta_{cr}^* \cong A \frac{n}{1+n}. \quad (4.26)$$

Stąd na podstawie powyższego wzoru ostatnie wyrażenie (4.25)₃ na τ_{cr}^a można zapisać w prostszej formie

$$\tau_{cr}^a = A \left(\frac{1}{1+n} \right) \left[\frac{n(1+n - \sqrt{3} \delta c^{n+1})}{\sqrt{3} \delta} \right]^{\frac{n}{1+n}}. \quad (4.27)$$



Rys. 4.1. Wykresy zmian krytycznych odkształceń adiabatycznych ε_{cr}^p w zależności od parametru czułości δ i dla wybranych wartości parametru umocnienia n



Rys. 4.2. Wykresy krytycznych naprężeń ścinających τ_{cr}^a w zależności od parametru δ dla wybranych wartości współczynnika umocnienia n i parametrów materiałowych A

Krytyczne wartości ε_{cr}^p w zależności od parametru czułości δ dla wybranych wartości współczynników umocnienia n ($n = 0,2; 0,3; 0,4$ i $0,5$) pokazano na wykresach rys. 4.1. Natomiast na wykresach rys. 4.2(a-d) przedstawiono krytyczne wartości adiabatywnych naprężeń ścinających τ_{cr}^a również w zależności od parametru czułości δ i dla wybranych wartości parametru wzmocnienia n oraz wybranych wartości parametru materiałowego A . Wartości parametru A dla poszczególnych krzywych są następujące: 1. $A = 1,6 \times 10^{-3}$, 2. $A = 2,0 \times 10^{-3}$, 3. $A = 4,0 \times 10^{-3}$, 4. $A = 8,0 \times 10^{-3}$, 5. $A = 10,0 \times 10^{-3}$, 6. $A = 1,6 \times 10^{-3}$, 7. $A = 1,6 \times 10^{-3}$. Wykresy na rys. 4.1 i 4.2(a-d) mają charakter odpowiednich nomogramów. Jak widać charakter przebiegu krzywych na rys. 4.1 i 4.2(a-d) jest podobny do przebiegu krzywych zmęczenia Wöhlera.

Na podstawie analizy wykresów, szczególnie z rys. 4.1 wynika, że dla celów praktycznych bardziej prawdziwe (bardziej realnie użyteczne) będą dla zdecydowanej większości materiałów metalicznych wartości ε_{cr}^p , a także w konsekwencji wartości τ_{cr}^a , [por. rys. 4.2(a-d)] otrzymane dla parametru $\delta \geq 0,13$.

Tego rodzaju wykresy przedstawione na rysunkach 4.1 i 4.2(a-d) mogą mieć w przyszłości także charakter użytecznych nomogramów, otrzymanych dla konkretnych materiałów metalicznych i mogą być np. wykorzystane przy analizie krytycznych adiabatywnych wartości obciążeń momentem skręcającym podczas np. skręcania pryzmatycznych prętów lub cienko i grubościennych metalowych rurek oraz rur, por. np. [3], [56-61], [126]

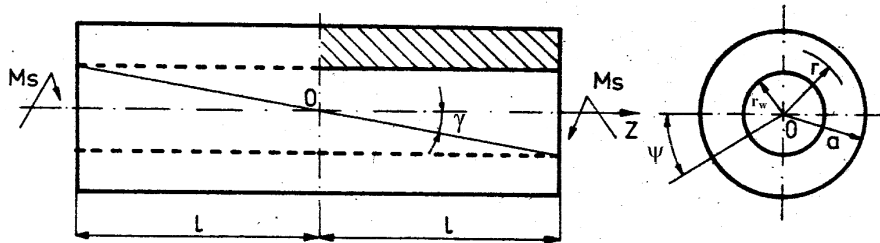
4. NIEIZOTERMICZNE – ADIABATYCZNE SKRĘCANIE METALOWYCH GRUBO- I CIENKOŚCIENNYCH RUREK

Niniejszy punkt monografii jest poświęcony lokalnie czystemu adiabatywnemu skręcaniu grubo- i cienkościennych metalowych rurek. Określono wartości krytyczne kąta skręcenia i momentu skręcającego. Ich przekroczenie może prowadzić do rozdwojenia stanów równowagi na zewnętrznej powierzchni skręcanych rurek. Wartości krytyczne kąta skręcenia i momentu skręcającego odpowiadają maksimum na adiabatywnych krzywych rozciągania lub czystego ścinania. W tym celu korzysta się bezpośrednio z wyników otrzymanych w p. 3 tego rozdziału, gdzie określono adiabatywnie wartości krytyczne dla: odkształceń plastycznych, naprężeń ścinających i temperatury. Problem skręcania metalowych rurek lub ścinania z uwzględnieniem efektów cieplnych był już badany w wielu pracach, por. np. [48, 59-61, 83, 94, 121, 126].

W niniejszej pracy uwzględniono pewien „efekt geometryczny”, który nie był dotąd uwzględniany w cytowanej literaturze i analizowano jego wpływ na wartości krytyczne kąta skręcenia i momentu skręcającego. W pracy pokazano, że linearyzacja adiabatywnych krzywych umocnienia prowadzi do rozwiązania

analitycznego w zamkniętej formie. Wykazano różnice, jakie występują pomiędzy rezultatami otrzymanymi z wzięcia pod uwagę nieliniowej adiabatycznej krzywej umocnienia. Rezultaty z uwzględnieniem nieliniowej adiabatycznej krzywej umocnienia otrzymano na drodze numerycznej. Otrzymane numeryczne i analityczne rezultaty obliczeń przedstawiono w postaci odpowiednich wykresów, które mogą mieć charakter użytecznych nomogramów. Podczas analizy procesu skręcania założono, że w środkowej części skręcanych rurek występują tylko sztywne obroty (czyste skręcanie) poprzecznych przekrojów bez zniekształcenia (deplanacji) przekroju oraz zmiany jego wymiarów. Zachodzi więc w nich stan odpowiadający stanowi czystego ścinania.

Poglądowy schemat parametrów podczas procesu skręcania rurek pokazano na rys. 4.3.



Rys. 4.3. Schemat skręcanej metalowej rurki

4.1. RURKA GRUBOŚCIENNA

Wprowadźmy następującą miarę plastycznego odkształcenia [59-61]

$$\epsilon^p = \frac{\text{tg} \gamma^p}{\sqrt{3}}, \quad (4.28)$$

gdzie: γ^p – plastyczne odkształcenie postaciowe podczas skręcania.
Całkowity kąt ścinania γ wyraża się następującym wzorem

$$\gamma = \gamma^e + \gamma^p, \quad (4.29)$$

gdzie: γ^e – sprężyste odkształcenie postaciowe podczas skręcania.
Z zależności geometrycznych, por. rys. 4.3 otrzymamy

$$\text{tg} \gamma = \alpha_s r, \quad (4.30)$$

gdzie: α_s – jest kątem skręcenia na jednostkę długości rurki,
 r – jest promieniem bieżącym skręcanej rurki.

Z wyrażenia (4.29) i zależności trygonometrycznych otrzymamy

$$\operatorname{tg}\gamma^e = \frac{\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\gamma^p}{1 + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\gamma^p}. \quad (4.31)$$

W przypadku czystego skręcania na podstawie [82, 142] można napisać następujący związek konstytutywny pomiędzy naprężeniem stycznym τ i sprężystym odkształceniem postaciowym podczas skręcania γ^e :

$$\tau = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\gamma^e. \quad (4.32)$$

Na podstawie wyrażen (4.28), (4.31) i (4.32) otrzymamy

$$\tau = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_s r - \sqrt{3} \varepsilon^p}{1 + \sqrt{3} \alpha_s r \varepsilon^p} \right). \quad (4.33)$$

Wprowadźmy następujące wielkości bezwymiarowe

$$\beta_s = \alpha_s a, \quad \rho = \frac{r}{a}, \quad \rho_w = \frac{r_w}{a}, \quad (4.34)$$

gdzie: a i r_w – odpowiednio zewnętrzny i wewnętrzny promień rurki.
 Uwzględniając wyrażenia (4.34) we wzorze (4.33) otrzymano

$$\tau = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_s \rho - \sqrt{3} \varepsilon^p}{1 + \sqrt{3} \beta_s \rho \varepsilon^p} \right), \quad (4.35)$$

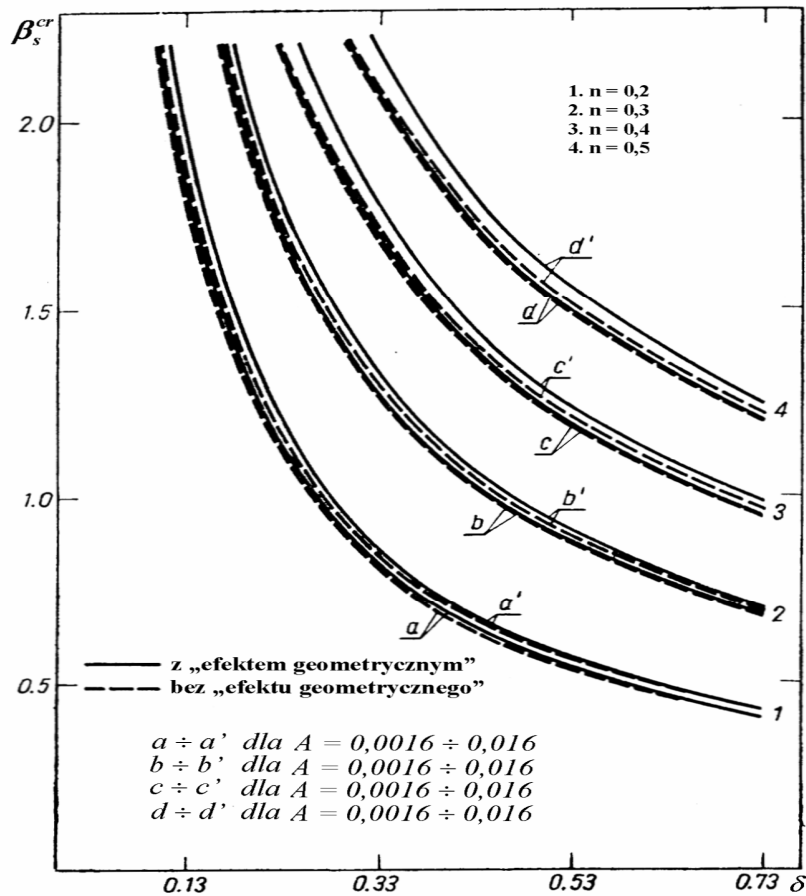
gdzie: wyrażenie w mianowniku $\sqrt{3} \beta_s \rho \varepsilon^p$ – reprezentuje wspomniany już „efekt geometryczny” [(patrz także wyrażenie $\operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\gamma^p$ we wzorze (4.31) i wyrażenie $\sqrt{3} \alpha_s r \varepsilon^p$ we wzorze (4.33)].

Z geometrii rozkładu odkształceń wynika, że pierwsze stany bifurkacji mogą wystąpić na zewnętrznym promieniu skręcanej rurki dla $\rho = 1$. Wówczas lokalnie na promieniu tym odpowiednio adiabatyczne odkształcenie plastyczne, temperatura i naprężenia ścinające osiągną swoje krytyczne wartości. Mając to

na uwadze i podstawiając krytyczne wartości $\varepsilon_{cr}^p, \tau_{cr}^a$ i $\rho=1$ do wzoru (4.35) po przekształceniach otrzymamy następujące wyrażenie na β_s^{cr}

$$\beta_s^{cr} = \frac{2\tau_{cr}^a + \sqrt{3}\varepsilon_{cr}^p}{1 - 2\sqrt{3}\tau_{cr}^a \varepsilon_{cr}^p}, \quad (4.36)$$

gdzie: β_s^{cr} – jest bezwymiarowym krytycznym kątem skręcenia w momencie, gdy na zewnętrznym promieniu skręcanej rurki mogą pojawić się stany rozdwojenia równowagi.



Rys. 4.4. Wykresy wartości bezwymiarowego kąta skręcenia β_s^{cr} w zależności od parametru czułości δ dla wybranych wartości współczynnika umocnienia n i parametrów materiałowych A

Rezultaty obliczeń β_s^{cr} w zależności od parametru δ czułości, por. wyrażenie (4.23) dla odpowiednich przedziałów wartości A i dla wybranych wartości współczynnika umocnienia n pokazano na rys. 4.4. Jak widać na rys. 4.4 wpływ umocnienia materiału i uwzględnienie „efektu geometrycznego” związanego z dużymi odkształceniami (dużymi kątami skręcenia) zwiększa wartości krytycznych bezwymiarowych kątów skręcenia β_s^{cr} .

Z obliczeń przeprowadzonych niezależnie wynika, że promień strefy sprężysto-plastycznej określony przez ρ_{cr}^c [82] w chwili, gdy na zewnętrznym promieniu skręcanej wałka osiągną stan krytyczny jest bardzo mały – jest rzędu 10^{-2} . Na podstawie wyrażień (4.34)_{2,3} możemy więc napisać, że $\rho_w \gg \rho_{cr}^c$, co fizycznie oznacza, że w przypadku skręcania grubościennych rurek, cały przekrój jest w stanie plastycznym. Powyższa uwaga będzie użyteczna w przypadku obliczeń skręcanej grubościennej rurki dla $\rho_w = 0,5$.

Z rys. 4.3 i zależności (4.34)₁ wynika, że kąt ψ , mierzony na czole skręcanej rurki jest równy [82]

$$\psi = \alpha_s l = \beta_s \frac{l}{a}, \quad (4.37)$$

gdzie: l – jest połową długości skręcanej rurki.

Bezwymiarowy moment skręcający M_s^* określimy rozwiązując następującą całkę [82]

$$M_s^* = \frac{M_s(1+\nu)}{E a^3} = 2\pi \int_{\rho_w}^1 \tau \rho^2 d\rho. \quad (4.38)$$

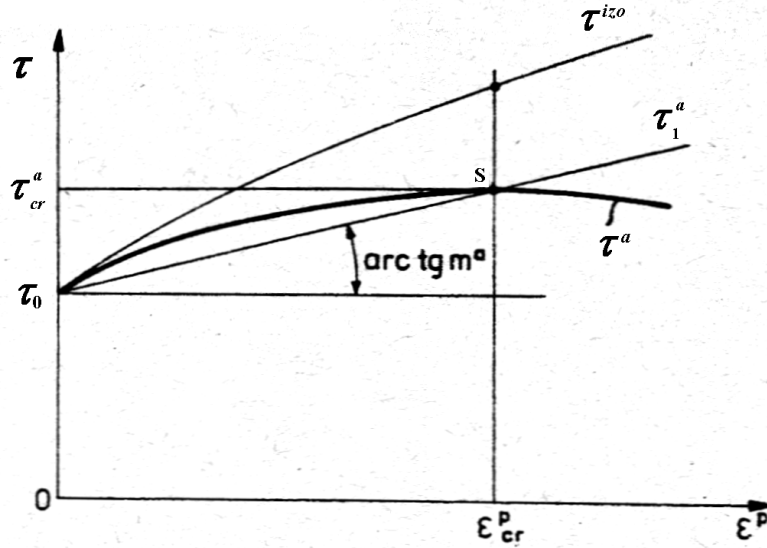
W ogólnym przypadku dla nieliniowego równania konstytutywnego (4.19) rozwiązanie powyższego wyrażenia całkowego otrzymano metodą obliczeń numerycznych, zakładając, że $M_{scr}^{*a} = M_s^{*a} |_{\beta_s = \beta_s^{cr}}$. Rezultaty obliczeń numerycznych M_{scr}^{*a} dla rozwiązania dokładnego przedstawiono na rys. 4.5.

Można dokonać jednak pewnego uproszczenia, które pozwoli otrzymać oszacowanie dolne wyrażenia (4.38) w postaci analitycznej poprzez linearyzację równania konstytutywnego (4.19). Idea tej linearyzacji jest przedstawiona na rys. 4.5. Stąd wynika, że

$$\tau_1^a = \tau_0 + m^a \varepsilon^p, \quad (4.39)$$

gdzie:

$$m^a = \frac{\tau_{cr}^a - \tau_0}{\varepsilon_{cr}^p} \text{ – jest liniowym adiabatycznym modułem wzmocnienia.}$$



Rys. 4.5. Poglądowy schemat metody linearyzacji adiabatycznej krzywej umocnienia τ^a linią prostą τ_1^a

Z rys. 4.5. graficznie wynika, że liniowa adiabata τ_1^a jest dolnym oszacowaniem krzywej adiabatycznej umocnienia τ^a a τ^{izo} jest izotermiczną krzywą umocnienia dla ($\Theta = 0^\circ\text{C}$) i zarazem górnym oszacowaniem τ^a .

Podstawiając τ_1^a w miejsce τ w wyrażeniu (4.35), otrzymano

$$\tau_0 + m^a \varepsilon^p = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_s \rho - \sqrt{3} \varepsilon^p}{1 + \sqrt{3} \beta_s \rho \varepsilon^p} \right). \quad (4.40)$$

Z wyrażenia (4.40) wyznaczy się wielkość $\varepsilon^p(\rho)$

$$\varepsilon^p(\rho) = \frac{-2m^a - \sqrt{3}}{4\sqrt{3}m^a \beta_s \rho} - \frac{\tau_0}{2m^a} + \frac{\sqrt{\Delta(\rho)}}{4\sqrt{3}m^a \beta_s \rho}, \quad (4.41)$$

gdzie

$$\begin{aligned}\Delta(\rho) &= a_s \rho^2 + b_s \rho + c_s, \\ a_s &= 4\beta_s^2 (3\tau_0^2 + 2\sqrt{3}m^a), \\ b_s &= 4\tau_0 \beta_s (3 - 2\sqrt{3}m^a), \quad c_s = (2m^a + \sqrt{3})^2.\end{aligned}\quad (4.42)$$

Podstawiając wyrażenie (4.41) do (4.42), otrzymano

$$\tau_1^a = \frac{\tau_0}{2} - \frac{2m^a + \sqrt{3}}{4\sqrt{3}\beta_s \rho} + \frac{\sqrt{\Delta(\rho)}}{4\sqrt{3}\beta_s \rho}. \quad (4.43)$$

Podstawiając wyrażenie (4.43) do wyrażenia całkowego (4.38) i po wykonaniu formalnie operacji całkowania, adiabatyczny dolny moment skręcający M_{1s}^{*a} ma następującą postać

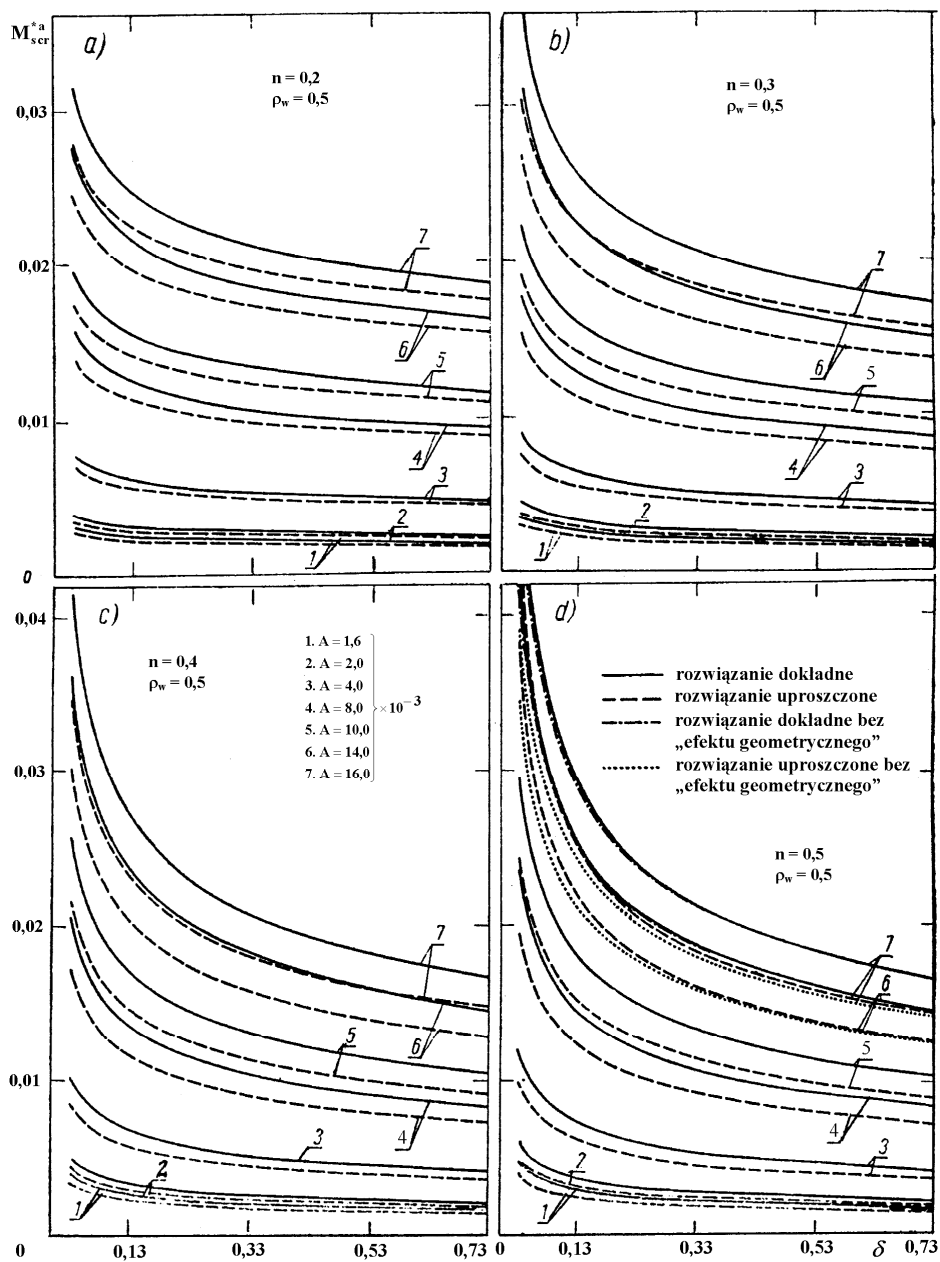
$$M_{1s}^{*a} = 2\pi \int_{\rho_w}^1 \tau_1^a(\rho) \rho^2 d\rho = 2\pi [A_s(\rho) + B_s(\rho) - C_s(\rho) - D_s(\rho)] \Big|_{\rho_w}^1, \quad (4.44)$$

gdzie

$$\begin{aligned}A_s(\rho) &= \frac{\tau_0}{6} \rho^3 - \frac{2m^a + \sqrt{3}}{8\sqrt{3}\beta_s}, \quad B_s(\rho) = \frac{[\Delta(\rho)]^{1.5}}{12\sqrt{3}a_s \beta_s}, \\ C_s(\rho) &= \frac{(2a_s b_s \rho + b_s^2) \sqrt{\Delta(\rho)}}{32\sqrt{3}a_s^2 \beta_s}, \\ D_s(\rho) &= \frac{(4a_s b_s c_s - b_s^3) \ln(2a_s \rho + b_s + 2\sqrt{a_s \Delta(\rho)})}{64\sqrt{3}a_s^{2.5}}.\end{aligned}\quad (4.45)$$

Wartość krytycznego dolnego adiabatycznego momentu skręcającego odpowiadająca stanowi krytycznemu (patrz punkt S na rys. 4.5) określi się formalnie z następującej zależności

$$M_{1s cr}^{*a} = M_{1s}^{*a} \Big|_{\beta_s = \beta_s^{cr}}. \quad (4.46)$$



Rys. 4.6. Wykresy adiabaticznych krytycznych momentów skręcających M_{scr}^{*a} w zależności od parametru czułości δ i dla wybranych wartości współczynnika umocnienia n i parametrów materiałowych A

Na rys. 4.6(a-c) przedstawiono rezultaty obliczeń krytycznych wartości adiabaticznych momentów skręcających $M_{s\ cr}^{*a}$ (linie ciągłe), liczonych wg zależności (4.37) dla ogólnych nieliniowych funkcji konstytutywnych oraz ich dolne oszacowania (linie przerywana – rozwiązanie uproszczone), liczone wg zależności (4.45) - (4.46). Obliczenia przeprowadzono w zależności od parametru δ dla wybranych wartości A i wybranych wartości parametru umocnienia n , bez uwzględnienia efektu geometrycznego. Obliczenia przeprowadzono dla grubościennej rurki o grubości ścianki równej $\rho_w = 0.5$. Dodatkowo na rys. 4.5d przedstawiono rezultaty obliczeń wartości $M_{s\ cr}^{*a}$ i $M_{1s\ cr}^{*a}$ z uwzględnieniem wprowadzonego „efektu geometrycznego równego” ($\sqrt{3}\beta_s \rho \varepsilon^p$), związanego z wpływem dużych odkształceń. Wartości parametru A dla poszczególnych krzywych na rys. 4.6(a-d) są następujące: 1. $A = 1,6 \times 10^{-3}$, 2. $A = 2,0 \times 10^{-3}$, 3. $A = 4,0 \times 10^{-3}$, 4. $A = 8,0 \times 10^{-3}$, 5. $A = 10,0 \times 10^{-3}$, 6. $A = 1,6 \times 10^{-3}$, 7. $A = 1,6 \times 10^{-3}$.

Jak widać na tych wykresach wpływ linearyzacji równania konstytutywnego (rozwiązanie uproszczone) ma pewien wpływ ilościowy na wartość krytycznego adiabaticznego momentu skręcającego, natomiast wpływ wprowadzonego „efektu geometrycznego” jest niewielki i może być pominięty w praktycznych zagadnieniach. Wydaje się, że większy wpływ będą miały efekty zniekształcenia przekroju jak: skrzywienie, deplanacja lub jego przewężenie, które często występują podczas procesów skręcania w przypadku dużych odkształceń. Efekt skrzywienia i zmiany przekroju oraz ich wpływ na rozkład krytycznych momentów skręcających został pominięty w niniejszej pracy.

Na podstawie uwag zawartych w punkcie 3 wynika w konsekwencji, że dla celów praktycznych bardziej prawdziwe (bardziej realnie użyteczne) będą dla zdecydowanej większości materiałów metalicznych wartości β_s^{cr} , [por. rys. 4.4] a także w następstwie wartości $M_{s\ cr}^{*a}$, [por. rys. 4.6(a-d)] otrzymane dla parametru $\delta \geq 0,13$.

W przypadku natomiast czystego skręcania pełnych wałków należy odpowiednio we wzorach (4.38) i (4.44) służących do obliczania wartości krytycznych adiabaticznych momentów skręcających $M_{s\ cr}^{*a}$ i $M_{1s\ cr}^{*a}$ podstawić wartość promienia wewnętrznego równą zero: $\rho_w = 0$.

Jak widać charakter przebiegu krzywych na rys. 4.6.(a-d) jest także podobny do przebiegu krzywych zmęczenia Wöhlera podobnie jak to miało miejsce w przypadku określania krytycznych adiabaticznych naprężeń ścinających czy też dla wartości parametru ($\delta \geq 0,13$) krytycznych adiabaticznych wielkości odkształceń plastycznych [por. rys. 4.1 i 4.2(a-d)].

4.2. RURKA CIENKOŚCIENNA

W przypadku adiabatycznego czystego skręcania cienkościennych metalowych rurek stan naprężenia jest także utożsamiany ze stanem czystego ścinania i zakładamy dodatkowo, że naprężenia nie zmieniają się po grubości ścianki i są stałe ($\tau^a \cong \text{const}$) a ewentualne odchylenia od stałości nie mają prawie praktycznego znaczenia.

Wg przepisów UDT [158] rurki stosowane w energetyce są cienkościennie, gdy ($0 < s_w^* < 0,05$) a wg [51] ($0 < s^* < 0,2$) gdzie: $s^* = g_0/2a$ i $s_w^* = g_0/2(a-g_0)$ a g_0 - oznacza grubość ścianki rurki. Natomiast w Rozdziale V i w pracy [155] dla praktycznych celów konstrukcyjnych i technologicznych przyjęto technologicznie dopuszczalną cienkościenność równą ($0 < s^* < 0,1$), którą wyznaczono jako średnią geometryczną cienkościenności ($0 < s_w^* < 0,05$) i ($0 < s^* < 0,2$). Wskutek powyższego założenia zagadnienie adiabatycznego skręcania cienkościennych metalowych rurek jest geometrycznie jednowymiarowe.

Wobec powyższych założeń wyrażenie na bezwymiarowy adiabatyczny moment skręcający (por. wyrażenie (4.38)) ma postać

$$\bar{M}_{s\ cr}^{*a} \cong 2\pi \tau_{cr}^a \int_{\rho_w}^1 \rho^2 d\rho = \frac{2}{3} \pi \tau_{cr}^a (1 - \rho_w). \quad (4.47)$$

Z rys. 4.4 wynika, że w przypadku skręcania rurek cienkościennych można otrzymać także w prosty sposób górne oszacowanie, używając krzywą izotermiczną τ^{iz} . Korzystając ze wzorów (4.19), (4.26), (4.27) i (4.47) otrzymano następującą zależność

$$\bar{M}_{s\ cr}^{*iz} \approx (1+n) \bar{M}_{s\ cr}^{*a}. \quad (4.48)$$

W przypadku uwzględnienia przepływu ciepła (rzeczywisty nieadiabatyczny proces skręcania) na podstawie wyrażeń (4.47) i (4.48) można oszacować rzeczywisty moment krytyczny $\bar{M}_{s\ cr}^{*r}$ następująco

$$\bar{M}_{s\ cr}^{*a} < \bar{M}_{s\ cr}^{*r} < (1+n) \bar{M}_{s\ cr}^{*a}. \quad (4.49)$$

Powyższe oszacowania (4.48) i (4.49) nie są słuszne w przypadku skręcania grubościennych metalowych rurek (patrz p. 4.1 niniejszego rozdziału).

5. UWAGI KOŃCOWE I WNIOSKI

1. Zagadnienia nieizotermicznych lokalizacji termomechanicznych zachodzące w procesach odkształceń termo-sprężysto-plastycznych mogą odgrywać znaczącą rolę w procesach obróbki plastycznej, obróbki skrawaniem (np. toczenie, frezowanie, ukosowanie krawędzi styku odcinków prostych rurociągów i kolan pod spoinę), w zjawiskach inicjacji mikropęknięć, w zagadnieniach szykowania i innych związanych ze zjawiskiem niestateczności odkształceń plastycznych. Zagadnienia te mogą odgrywać znaczącą rolę w problemach technicznych na poziomie technologii wytwarzania, w zagadnieniach eksploatacji urządzeń i ich elementów znajdujących się pod wpływem mechanicznych i termomechanicznych obciążeń, w zagadnieniach projektowania, w pracach badawczych itp. Mogą być także pomocne w analizie zmęczenia mechanicznego i termomechanicznego [97-101], w zagadnieniach rozwoju i propagacji mikro i makropęknięć w warunkach obciążeń cieplno-mechanicznych, w określaniu czasu bezpiecznej eksploatacji i stopnia wyeksploatowania pracujących maszyn i ich elementów itp.
2. Najbardziej znaczące w skutkach efekty podczas procesów odkształcania termo-sprężysto-plastycznego wywołują stany lokalizacji adiabatycznych termomechanicznych odkształceń plastycznych. Jak wykazano w wielu pracach [3, 54, 61, 83, 119, 121, 122, 142], parametry opisujące dowolny rzeczywisty, (uwzględniający przepływ ciepła) nieizotermiczny proces termo-sprężysto-plastycznego odkształcania będą zawierały się między parametrami procesu odkształcania izotermicznego i adiabatycznego.
3. Jak widać na rys. 4.1, 4.2(a-d) i 4.6(a-d) przebieg tych wykresów jest podobny do przebiegu wykresów zmęczeniowych Wöhlera. Może to być pewną wskazówką potwierdzającą przypuszczenia, czy mogą istnieć pewne cechy podobieństwa między tymi zagadnieniami i badanymi zjawiskami nieizotermicznych niestateczności odkształceń plastycznych podczas termo-sprężysto-plastycznych obciążeń a zjawiskami zmęczenia mechanicznego lub cieplno-mechanicznego?
4. Na podstawie analizy wykresów szczególnie z rys. 4.1, wynika, że dla celów praktycznych bardziej prawdziwe (bardziej realnie użyteczne) będą dla zdecydowanej większości materiałów metalicznych wartości ϵ_{cr}^p , a także w konsekwencji wartości τ_{cr}^a , [por. rys. 4.2(a-d)] otrzymane dla wartości parametru $\delta \geq 0,13$. Na tej podstawie wynika w konsekwencji, że dla celów praktycznych bardziej prawdziwe (bardziej realnie użyteczne) będą również dla zdecydowanej większości materiałów metalicznych obliczone wartości β_s^{cr} , (por. rys.4.4), a w następstwie wartości $M_{s\ cr}^{*a}$, [por. rys. 4.6(a-d)] otrzymane dla parametru $\delta \geq 0,13$.

5. Wartości krytyczne bezwymiarowego parametru adiabaticznej pracy odkształcenia plastycznego κ_{cr}^* otrzymamy, podstawiając do wyrażenia (4.22) odpowiednio wyrażenia (4.25)₁ na ε_{cr}^p i (4.25)₂ lub (4.26) na Θ_{cr}^* .
6. W przyszłości należałoby więc prowadzić dalsze badania teoretyczne i doświadczalne oraz udoskonalać metody obliczeń parametrów stanów niestateczności odkształceń termo-sprężysto-plastycznych lub sprężysto-plastycznych, w szczególności metody numeryczne MRS (metoda różnic skończonych), MES (metoda elementów skończonych), MEB (metoda elementów brzegowych) i inne. W tym celu można wykorzystać wyprowadzone w tej monografii lokalne i globalne warunki jednoznaczności rozwiązania podstawowego problemu brzegowego termo-sprężysto-plastyczności, które, jak już wspomniano wcześniej, są także kryteriami rozdwojenia (bifurkacji, niestateczności) stanów równowagi.
7. W przypadku natomiast czystego skręcania pełnych wałków należy odpowiednio we wzorach (4.38) i (4.44), służących do obliczania wartości krytycznych adiabaticznych momentów skręcających M_{scr}^{*a} i M_{1scr}^{*a} , podstawić wartość $\rho_w = 0$.
8. Jak wiadomo, techniczny warunek wytrzymałościowy na ścinanie można zapisać w następującej postaci: $\tau < k_t$, gdzie: τ – obliczane i k_t – dopuszczalne naprężenia na ścinanie. Po wykonaniu obliczeń dla danego rodzaju materiału i wymiaru rurki, może się zdarzyć, że $\tau_{cr}^a > k_t$. Wówczas oznacza to, że lokalnie na zewnętrznym promieniu skręcanej rurki ($\rho = 1$) mogą wystąpić stany technicznego aktywnego ścinania, poprzedzające wystąpienie stanu rozdwojenia równowagi (bifurkacja stanu równowagi).
9. Na uwagę zasługuje możliwość pogłębionej analizy procesu adiabaticznej lokalizacji odkształceń plastycznych dla przypadku stali kwasoodpornej 1H18N10Pr lub podobnej, dla której znane są wszystkie parametry materiałowe [102, 103, 125], występujące w równaniu konstytutywnym (4.18). Wyprowadzone są również dla tej stali równania ewolucji z plastycznym odkształcaniem dla wewnętrznej siły termodynamicznej π i dla procesu magazynowania się energii deformacji plastycznej [156]. W niniejszej pracy przyjęto bowiem, że średnia wartość wewnętrznej siły termodynamicznej π wynosi ($\pi \approx 0,1$), a więc i uśredniona wartość zmagazynowanej energii deformacji plastycznej w analizowanym procesie adiabaticznego odkształcania wynosi $\sim 0,1$ ($\sim 10\%$) wartości adiabaticznej pracy odkształcania plastycznego κ ; por. np. [141].

ROZDZIAŁ V

DOPUSZCZALNE WARTOŚCI ODKSZTAŁCENÍ I NAPRĘŻEŃ ORAZ KĄTA ZGIĘCIA PODCZAS GIĘCIA RUR

1. WSTĘP

Gięcie rur jako zagadnienie technologiczne [51] zaczęło się pojawiać w końcu XIX wieku, gdy rozpoczęto produkcję rur w skali przemysłowej. Głównym odbiorcą rur był wówczas przemysł budowy maszyn parowych, kotłów ciepłych, gazownictwo, energetyka, budownictwo. Obecnie odbiorcami rur i kolan są prawie wszystkie gałęzie przemysłu, a gięcie rur jest typowym zabiegiem w wielu procesach technologicznych przemysłu metalowego. Zwiększyła się także produkcja rur i kolan. Obecnie rośnie ona szybciej niż produkcja stali, ponieważ rury i kolana wytwarza się także z innych rodzajów materiałów np. z tworzyw sztucznych, włókien węglowych, a nawet z nanomateriałów.

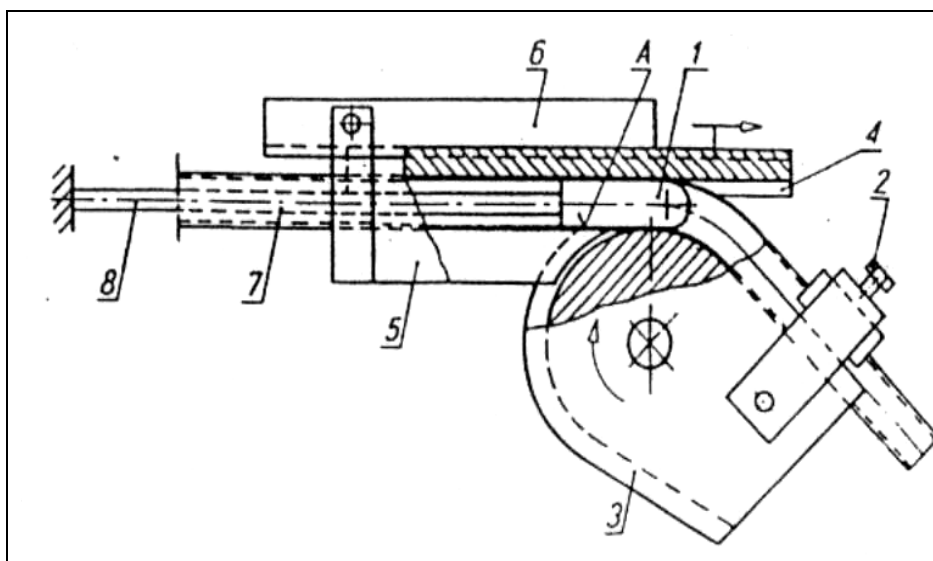
Wzrosły również wymagania dotyczące jakości produkowanych rur i kolan, tzn. wzrosła dokładność wykonania, zmniejszyła się tolerancja nierówności rozkładu grubości ścianki, średnicy wewnętrznej, pofałdowania, wytrzymałości i innych. Zwiększyły się także wymagania dotyczące wszelkich zabiegów technologicznych wykonywanych na rurach, takich jak gięcie rur, rozpęczanie, obciskanie, fazowanie itp. Na wybór metody gięcia rur mają głównie wpływ następujące czynniki: rodzaj materiału giętej rury, cienkościennność rury s^* , promień gięcia R , wymagana dokładność i jakość gięcia, wielkość kąta zgięcia, rodzaj warunków pracy zgiętego kolana, seryjność produkcji i inne.

Rurociągi i instalacje rurowe w eksploatowanych urządzeniach mają określony czas trwałości i bezpiecznej pracy. Głównymi elementami rurociągów i instalacji rurowych są odcinki proste, kolana, kształtki (trójniki, czwórniki, zwężki, króćce itp.) i elementy łączące, np. spoiny, połączenia gwintowe, śrubowe i inne. Czas ich trwałości eksploatacyjnej jest bardzo różny. Najdłuższym czasem trwałości eksploatacyjnej charakteryzują się odcinki proste, następnie kolana i kształtki, a najkrótszym czasem elementy łączące jak spoiny lub zgrzeiny, por. [10], [12-15], [50, 51], [117], [130-132], [150-153], [155].

Aby więc zwiększyć trwałość eksploatacyjną połączeń spawanych kolan z odcinkami prostymi rurociągów lub innych instalacji rurowych, zaleca się wykonywać odpowiednie operacje ukosowania (fazowania) w miejscach styku kolan z odcinkami prostymi, metodą obróbki skrawaniem za pomocą ukosowarek. Głównym celem takiej obróbki jest usunięcie negatywnego wpływu i działania kryzy. Przykłady występowania takich niesymetrycznych kryz wewnętrznych i zewnętrznych podczas wykonywania połączenia spawanego kolan z odcinkami prostymi przedstawiono i analizowano w pracy autora [155].

Głównymi przyczynami skracającymi czas trwałości eksploatacyjnej kolan są: pocienienie ścianki w warstwach rozciąganych, złożone i niekorzystne stany obciążeń zewnętrznych i naprężeń wewnętrznych oraz duże odkształcenia plastyczne powstające podczas gięcia rur, szczególnie w warstwach rozciąganych. Przyczyną jest także zjawisko magazynowania energii deformacji plastycznej i jej wpływ na strukturę wewnętrzną materiału oraz odporność na pełzanie i wiele innych. Występujące podczas eksploatacji rurociągów i instalacji rurowych przedwczesne uszkodzenia kolan mogą być także spowodowane niedostateczną pewnością zastosowanej metody obliczeń wytrzymałościowych [116, 155, 157]. Jedną z przyczyn takiego stanu jest brak dokładnej metody określania dopuszczalnego rozkładu grubości ścianki w punktach maksymalnych odkształceń podczas procesu gięcia kolana. Dotyczy to zwłaszcza wierzchołkowych części strefy zgięcia kolana, gdzie grubość ta jest najmniejsza. Znajomość wielkości składowych i intensywności odkształcenia w strefie zgięcia, szczególnie w wierzchołkowej części, umożliwi lepsze wykonanie obliczeń wytrzymałościowych kolan, ich lepsze wykonanie oraz przyczyni się do poprawy niezawodności pracy maszyn i urządzeń, w których są one elementami.

Obecnie najbardziej rozpowszechnioną technologią gięcia ze względu na zastosowania, jest gięcie rur na giętarkach metodą owijania na obracającym się wzorniku z użyciem odpowiedniego trzpienia, por. rys. 5.1.



Rys. 5.1. Schemat giętarki do gięcia rur z obracającym się wzornikiem i sztywnym trzpieniem z łbem kulistym, wg [50]

1 – głowa (łeb) trzpienia, 2 – element mocujący giętą rurę do obrotowego wzornika, 3 – obrotowy wzornik, 4 – listwa odcaczająca, 5 – gładzik, 6 – prowadnice listwy odcaczającej giętarki (łóże giętarki), 7 – gięta rura, 8 – droga trzpienia

Gięcie rur tą metodą prowadzi zawsze do pocienienia ścianki w warstwach rozciąganych, pogrubienia i pofałdowania w warstwach ściskanych oraz zniekształcenia (owalizacji) przekroju poprzecznego. Te niekorzystne zjawiska powinny zawierać się w granicach tolerancji, podanych w normach i dyrektywach europejskich (EN 448, 1983; [162]) oraz w odpowiednich przepisach Urzędu Dozoru Technicznego (UDT). Najważniejszym jednak czynnikiem decydującym o trwałości eksploatacyjnej kolan jest pocienienie ścianki i ujemny wpływ dużych odkształceń w wierzchołku [10], [12-15], [50], [130-132], [155].

Niniejszy rozdział stanowi kontynuację i rozwinięcie wcześniejszych prac autora, por. [148-153], [155]. Rozwinięcie polega na rozszerzeniu warunku utraty stateczności w formie zlokalizowanej (możliwa inicjacja bruzdy w przestrzeni naprężeń) wyprowadzonego przez Marciniaka, por. [73] dla jedno- i dwuosiowego rozciągania blach dla przypadków gięcia cienko- i grubościennych metalowych rur na giętarkach z użyciem obrotowego wzornika i trzpienia.

W pracach, por. [148-153], [155] założono, że gięcie cienkościennych metalowych rur na giętarkach w warstwach rozciąganych (gięcie rur metodą owijania na obrotowym wzorniku z użyciem trzpienia), jest złożonym procesem niejednorodnego, krzywoliniowego rozciągania (krzywoliniowego poosiowego obciążania) w warunkach dwuosiowego stanu naprężenia. Natomiast w przypadku warstw ściskanych jest jakby „złożeniem” odpowiednio procesu niejednorodnego, krzywoliniowego ściskania i nieswobodnego spęczania.

W niniejszej pracy analizuje się także wpływ parametrów wzmocnienia i anizotropii normalnej na dopuszczalne wartości kąta gięcia, odkształceń i naprężeń, jakie powstają w warstwach rozciąganych podczas gięcia na zimno cienko i grubościennych metalowych rur na giętarkach, w zakresie kąta gięcia $\alpha_g \in \langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$ oraz dla przypadku, gdy ($y_0 \geq 0$, gdzie y_0 oznacza przesunięcie osi obojętnej gięcia plastycznego, por. [150, 151, 155, 157]). Jako kryteria przyjęto momenty możliwego pojawienia się rozproszonej utraty stateczności dla przypadku jednoosiowego rozciągania i powstania lokalnie zlokalizowanej utraty stateczności w postaci (np. lokalnej inicjacji zewnętrznej bruzdy), w warunkach dwuosiowego stanu naprężenia [16, 21, 70, 73, 75, 88]. Dla przypadku rur cienkościennych rozpatrzono także problem powstania płaskiego stanu odkształcenia (PSO) w warunkach płaskiego stanu naprężenia (PSN) [16, 17, 22, 43, 73], [137-140], [150, 151]. Analityczne obliczenia przeprowadzono dla dwóch skrajnych przypadków, tj. dla uogólnionego schematu odkształcenia i uproszczenia 3. rodzaju (por. p. 2), ponieważ rezultaty obliczeniowe wynikające z uproszczenia 1. i 2. rodzaju (por. p. 2, początek str. 101 lub prace [149-153], [155]), będą zawierać się między tymi dwoma skrajnymi przypadkami. Wyłącznie dla celów poznawczych, pogładowych i porównawczych rozpatrzono także problem pęknięcia w oparciu o technologiczny wskaźnik A_5 .

W niniejszej pracy ograniczono się tylko do analizy wierzchołkowych punktów warstw rozciąganych, ponieważ jak wykazały dotychczasowe badania

doświadczalno-eksploatacyjne, proces uszkodzenia kolan większości rurociągów (a rurociągów energetycznych w szczególności) rozpoczyna się i rozwija najczęściej właśnie w zewnętrznych - wierzchołkowych punktach warstw rozciąganych strefy zgięcia. Z zebranych danych statystycznych, por. np. [10], [130-132, 162] wynika, że przeciętna trwałość czasowa kolan rurociągów obciążonych ciśnieniem wewnętrznym i pracujących w podwyższonych temperaturach, jest nawet trzy razy krótsza niż odcinków prostych rurociągów, a wytrzymałość na pełzanie (wytrzymałość czasowa) jest mniejsza nawet o około 30%. Pojawianie się więc podczas gięcia rur stanów utraty stateczności (szczególnie tych w postaci zlokalizowanej) jeszcze bardziej i znacząco trwałość eksploatacyjną skróci. Dlatego w niniejszej pracy zaleca się, aby w technologii gięcia metalowych rur na kolana rurociągów (w zależności od ich zastosowania), nie dopuszczać do pojawiania się tych stanów. W końcowych częściach pracy, przedstawiono także wyrażenie na przesunięcie i nowe położenie osi obojętnej gięcia plastycznego y_0 dla analizowanych momentów utraty stateczności oraz dla kątów gięcia zawartych w zakresie ($k\alpha_g \leq 180^\circ$). W zakończeniu przedstawiono także uproszczone metody rozwiązywania prostych przykładów celem wyznaczenia dopuszczalnych wartości odkształcenia, kątów gięcia i odpowiadających im naprężeń oraz zamieszczono uwagi końcowe i zalecenia.

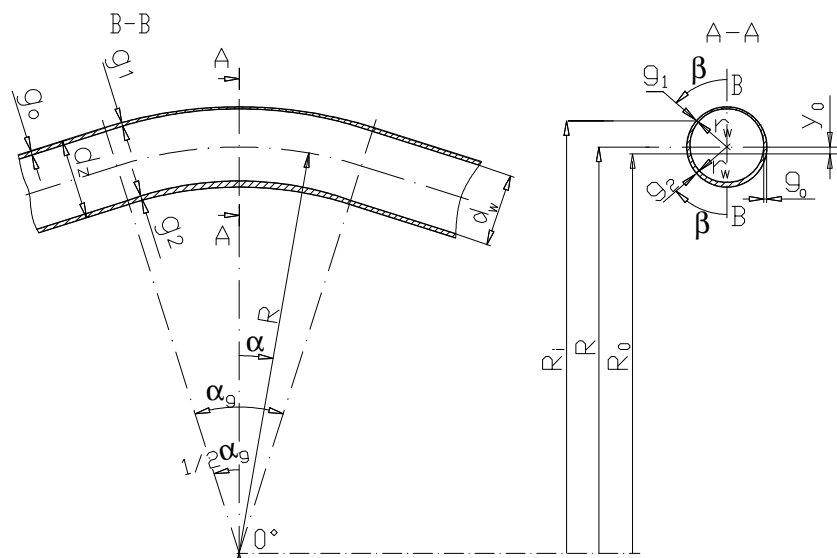
2. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA I ZALEŻNOŚCI

Analityczno-geometryczny opis i analiza procesu dotyczą gięcia rur metodą owijania na obracającym się wzorniku, z wykorzystaniem trzpienia lub ewentualnie bez trzpienia przy zachowaniu jednak, że $d_w \cong \text{const}$ (dopuszczalna owalizacja wynosi 6%, wg EN 448 z 1993 r.). W analitycznym opisie deformacji ograniczono się do określenia stanu odkształceń plastycznych metodą kinematycznie dopuszczalnych schematów (pól) odkształcenia, ponieważ odkształcenia sprężyste są pomijalnie małe. Uwzględniając posiadane dane z badań doświadczalnych zawartych w [19, 20] i własnych, wyprowadzone w pracy [148, 155] uogólnione składowe logarytmiczne stanu odkształcenia, uwzględniające dodatkowo w niniejszej pracy przesunięcie osi obojętnej gięcia plastycznego y_0 , mają następującą postać

$$\varphi_1 \cong \lambda_i \ln \frac{2(R - y_0) \pm (d_i \cos \beta_i \pm 2y_0) \left(\cos(k\alpha) - \cos\left(k \frac{\alpha_g}{2}\right) \right)}{2(R - y_0)},$$

$$\varphi_2 \cong \ln \frac{d_i}{d_z}, \varphi_3 \cong \ln \frac{g_i}{g_0}. \quad (5.1)$$

Uproszczenia 1. rodzaju otrzymuje się podstawiając ($d_i = d_z$) do wzoru (5.1)₁ a 2. rodzaju podstawiając ($d_i = d_z$) do wzoru (5.1)₂ oraz 3. rodzaju podstawiając ($d_i = d_z$) łącznie do wzorów (5.1)₁ i (5.1)₂



Rys. 5.1. Wielkości geometryczne występujące przy zginaniu rur wg [148, 151]

Wyrażenie na intensywność odkształcenia ma postać [23, 73, 148]

$$\varphi_{(i)} = \sqrt{\frac{2}{3}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2)}. \quad (5.2)$$

Wyrażenia (5.1) i (5.2) posłużą w szczególności do opisu stanu odkształcenia giętej rury w wierzchołkowym: $\cos(k\alpha) = 1$ i zewnętrznym: $\cos\beta = 1$ punkcie warstw rozciąganych lub ściskanych,

gdzie: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – logarymiczne (rzeczywiste) składowe odkształceń plastycznych, $\varphi_{(i)}$ – intensywność logarymicznych odkształceń plastycznych. Wielkości występujące we wzorach (5.1) i na rys. 1 mają następujące znaczenie:

R – nominalny promień gięcia rury,

R_i i R_0 – odpowiednio: „duży aktywny promień bieżący gięcia” związany z odkształceniem wzdłużnym i promień określający bieżące położenie warstwy obojętnej,

y_0 – wielkość przesunięcia warstwy obojętnej gięcia plastycznego,
 r_i – „mały aktywny promień bieżący” kolana w strefie gięcia, $r_i = r_w + g_i$
 i $d_i = 2r_i$,
 r_z i d_z – odpowiednio: zewnętrzny promień i średnica giętej rury, $d_z = 2r_z$,
 r_w i d_w – odpowiednio: wewnętrzny promień i średnica rury, $d_w = 2r_w$,
 g_0 i g_i – grubość początkowa rury i grubość bieżąca ścianki kolana
 w strefie gięcia,
 α_g – kąt gięcia mierzony w strefie gięcia. W strefie gięcia zachodzi równość kątów gięcia i zgięcia, więc: $\alpha_g = \alpha_0$,

gdzie: α_0 – kąt zgięcia (kąt obrotu wzornika giętarki),

α i β – kąty położenia punktu w strefie gięcia,

β – kąt obiegu warstw rozciąganych i ściskanych kolana $\beta \in \langle 0; 90^\circ \pm \beta_0 \rangle$,

oraz:

$\sin \beta_0 = y_0/r_z$, gdzie β_0 – kątowy zakres przesunięcia osi obojętnej gięcia,

indeks $i = 1$ i znak (+) we wzorach (2.1) odnoszą się do warstw rozciąganych,

indeks $i = 2$ i znak (-) we wzorach (2.1) odnoszą się do warstw ściskanych,

k – współczynnik technologiczno-materiałowy określany na podstawie badań doświadczalnych, który określa zakres strefy gięcia w strefie zgięcia tak, że $k\alpha_g = 180^\circ$. Teoretycznie $k \in \langle 1; \infty \rangle$. Dla celów praktycznych można przyjąć, że $k \in \langle 1; 6 \rangle$. Na podstawie znanych badań doświadczalnych można nawet przyjąć w przybliżeniu, że $k \in \langle 1 \div 3 \rangle$, por. [19, 50, 51], [148-153], [155]. Dla kolan zgiętych na kąt zgięcia równy $\alpha_0 = 180^\circ$, współczynnik k oznacza liczbowo stosunek kąta zgięcia α_0 do rzeczywistej wartości kąta gięcia α_g , tzn. $k \equiv \alpha_0/\alpha_g$. Gdy $\alpha_0 = 180^\circ$, to $\alpha_0 = k\alpha_g = 180^\circ$. Gdy np. kąt $\alpha_g = 90^\circ$ to $k = 2$; gdy $\alpha_g = 60^\circ$ to $k = 3$ itd.

λ_i – współczynnik korekcyjny (technologiczno-materiałowy) rozkładu odkształceń w warstwach rozciąganych ($i = 1$) i ściskanych ($i = 2$) strefy gięcia i zgięcia, określany na podstawie badań doświadczalnych taki, że $\lambda_1 \cong 1$ i $\lambda_2 \in \langle 0; 1 \rangle$. Dla większości znanych badań doświadczalnych, można przyjąć w przybliżeniu i z dużą dokładnością do obliczeń, że: $\lambda_2 \approx 0,5$ [19, 148, 155].

Jak już wspomniano na wstępie, dopuszczalne wartości dla kąta gięcia i odkształcenia zastępczego określa się dla odpowiednich momentów powstania utraty stateczności por. [16, 21, 146, 150, 151]. Jak wiadomo, zasięg odkształceń plastycznych z punktu widzenia możliwości wykorzystania w procesach obróbki plastycznej jest ograniczony możliwością utraty stateczności materiału bądź utratą spójności czyli pękaniem. Zwykle najpierw pojawia się utrata stateczności, można jednak tak dobrać własności materiału i warunki odkształcania oraz technologii wytwarzania, że powstanie złomu nie poprzedza utraty

stateczności [22]. W niniejszej pracy ograniczono się do analizy momentów możliwego powstania utraty stateczności w formie rozproszonej [21, 73] i lokalnie zlokalizowanej (np. początek lokalnej inicjacji bruzdy w polu naprężeń [16, 17, 21, 73, 75]) dla przypadku jedno i dwuosiowego stanu naprężenia. Rozpatrzono także przypadek powstania płaskiego stanu odkształcenia (PSO) w warunkach płaskiego stanu naprężenia (PSN). Materiał, z którego wykonano rurę, przyjęto jako sztywno-plastyczny z izotropowym wzmocnieniem, spełniający warunek plastyczności (H-M-H) i prawa plastycznego płynięcia Levy'ego-Misesa. Założono także, że przesunięcie osi obojętnej $y_0 \geq 0$ oraz, że proces gięcia rur na giętarkach odbywa się na zimno w temperaturze otoczenia. Jest to proces quasi-statyczny i quasi-izotermiczny. Nie uwzględnia się więc efektów dynamicznych i cieplnych, które towarzyszą małym i dużym odkształceniom plastycznym, por. np. [49], [56-58], [80], [93-95], [105-116], [120-121].

Do analizy problemu przyjęto następującą postać krzywej umocnienia [73]

$$\sigma_p = D(\varphi_0 + \varphi_{(i)})^n, \quad (5.3)$$

gdzie:

σ_p – naprężenie uplastyczniające w [MPa], n – współczynnik umocnienia,
 D – stała materiałowa w [MPa], φ_0 – logarytmiczne odkształcenie wstępne,
 $\varphi_{(i)}$ – logarytmiczne odkształcenie zastępcze (intensywność odkształcenia).

Dla większości metali i stopów stosowanych w technice wartość współczynnika n zawiera się w granicach $(0 \div 0,6)$.

3. ANALIZOWANE PRZYPADKI UTRATY STATECZNOŚCI

Rozpatrzmy trzy szczególne przypadki utraty stateczności w gięciu rur.

a. Przypadek dla jednoosiowego rozciągania, por. [21, 73, 146]

Utrata stateczności w formie rozproszonej (maksimum siły ciągnącej)

Wówczas
$$\varphi_{(i)a} = n - \varphi_0, \quad (5.4)$$

gdzie $\varphi_{(i)a}$ – wartość odkształcenia zastępczego odpowiadająca tej utracie stateczności.

b. Przypadek dwuosiowego stanu naprężenia, por. [21, 73, 137]

Utrata stateczności w formie zlokalizowanej, gdy lokalnie: $d(\sigma_p g_1) = 0$.

Wzorując się na pracach, por. [16, 21], [70-73], po uwzględnieniu wyrażeń na składowe główne stanu odkształcenia podczas gięcia rur, por. prace [148-153], [155] i wyrażeń na nieściśliwość plastyczną oraz odkształcenie zastępcze, por. [21-23], [73, 75], [148-153], a także przy poniższym założeniu:

$d_w \cong \text{const.}$ (d_w – średnica wewnętrzna giętej rury) oraz przyjęciu oznaczenia, że ($d\varphi_3 = dg_1/g_1$, por[155]), po przekształceniach otrzymano

$$\varphi_{(i)b1} \cong \sqrt{\frac{(1+r) \left[8 \left(\frac{g_1}{d_1} \right)^2 + 4 \left(\frac{g_1}{d_1} \right) + (1+r) \right]}{(1+2r)}} n - \varphi_0, \varphi_{(i)b2}''' = \frac{1+r}{\sqrt{1+2r}} n - \varphi_0. \quad (5.5)$$

Po przyjęciu pewnych wyrażen upraszczających, jak: ($g_1/d_1 \approx g_0/d_z$), wyniknie

$$\varphi_{(i)b1} \approx \sqrt{\frac{(1+r)[8(s^*)^2 + 4s^* + (1+r)]}{(1+2r)}} n - \varphi_0 \text{ i } \varphi_{(i)b2}''' = \frac{1+r}{\sqrt{1+2r}} n - \varphi_0, \quad (5.6)$$

gdzie:

$\varphi_{(i)b1}$, $\varphi_{(i)b2}'''$ – wartości odkształcenia zastępczego odpowiadające dla modelu uogólnionego odkształcenia i uproszczenia 3. rodzaju podczas rozpatrywanej utraty stateczności [155],

g_1 i d_1 – odpowiednio aktualna grubość i średnica kolana w warstwach rozciąganych,

s^* – cienkościenność giętej rury ($s^* = g_0/d_z$), por. [155]. W praktyce autor nie spotkał się z rurami w energetyce o maksymalnej grubościenności: $s^* \cong 0,2$,

s_w^* – cienkościenność giętej rury wg np. [14, 158], ($s_w^* = g_0/d_w$),

g_0 i d_z – grubość początkowa i średnica zewnętrzna giętej rury.

Parametr r – jest współczynnikiem anizotropii normalnej, por. np. [2, 4], [17, 18, 23, 46, 73, 146], który jest wyrażony następującym wzorem

$$r = \frac{\varphi_2}{\varphi_3} = \frac{\ln \frac{b}{b_0}}{\ln \frac{g}{g_0}}, \quad (5.7)$$

gdzie: b_0 i b – szerokość próbki przed i po odkształceniu,

g_0 i g – grubość próbki przed i po odkształceniu.

Z powyższej zależności wynika, że ze wzrostem wartości współczynnika r pocienienie próbki jest mniejsze, czyli rośnie opór przeciw pocienieniu ścianki giętej rury. Współczynnik r , dla większości stali stosowanych do produkcji rur zawiera się w granicach (1 ÷ 2,5).

Przypadki utraty stateczności (**a** i **b**) mogą być stosowane do szacowania stanu niestateczności rur o cienkościenności ($0 < s^* < 0,2$ wg [51] i ($0 < s_w^* < 0,05$) wg [14, 158]) oraz grubościennych ($0,2 \leq s^* < 0,5$ lub $0,05 \leq s_w^* < 0,5$). W pracy przyjęto jako bardziej odpowiednią technologicznie i realnie dopuszczalną cienkościenność ($0 < s_w^* < 0,1$) wyznaczoną jako średnia geometryczna cienkościenności ($s^* < 0,2$ i $s_w^* < 0,05$). Analizowany przypadek dwuosiowego stanu naprężenia odnosi się więc do gięcia rur cienkościennych ($0 < s^* < 0,1$). W zdecydowanej większości (lub nawet wyłącznie) rury grubościenne gięte są metodą na gorąco lub półgorąco, por. [24, 74, 76, 155]. Podczas gięcia rur grubościennych ($s^* > 0,1$) panuje w nich trójosiowy stan naprężenia, z którego wynika, że ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, por [82] oraz przyjmuje się, że σ_3 – są pomijalnie małe w stosunku do naprężeń σ_1 i σ_2). Zakłada się więc, że panuje wówczas pewien quasi (PSN). Warto dodać, że podczas gięcia na gorąco lub półgorąco współczynnik anizotropii normalnej ($r \approx 1$) oraz występuje brak umocnienia materiału [74, 138].

Warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego (H-M-H) oraz równania plastycznego płynięcia Levy'ego-Misesa, por. np. [73, 104], [138-140] lub bardziej właściwie Nadaia-Davies [165, 166] dla ciała izotropowego, wyrażone w naprężeniach głównych przyjmują następujące postaci

$$\sigma_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (5.8)$$

oraz

$$\frac{d\varphi_1}{\sigma_1 - \sigma_m} = \frac{d\varphi_2}{\sigma_2 - \sigma_m} = \frac{d\varphi_3}{\sigma_3 - \sigma_m} = \frac{d\varphi_{(i)}}{\frac{2}{3}\sigma_p}, \quad (5.9)$$

gdzie: $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ – oznacza naprężenie średnie; σ_1 , σ_2 i σ_3

– naprężenia główne,

oraz φ_1 , φ_2 i φ_3 – odpowiednie logarymiczne odkształcenia główne.

Gdy proces odkształcania jest proporcjonalny wówczas odpowiednie przyrosty odkształcenia mogą być zastąpione przez odkształcenia całkowite, por. np. [31, 73, 104, 135, 138, 139, 165, 166].

Odpowiadające odpowiednio stanowi (**b1**) i wyrażeniom (5.6)₁ (przy przyjęciu upraszczających założeń, że: $(g_1/d_1 \approx g_0/d_2)$, składowe stanu naprężenia dla przypadku gięcia rur grubościennych (na gorąco lub półgorąco to: $r \approx 1$), otrzymamy z równań plastycznego płynięcia (5.9), przy uwzględnieniu warunku plastyczności (H-M-H) (5.8) bez efektu wzmocnienia ($\sigma_p \cong \text{const.}$). Uwzględniając fakt stosowania bardzo małej wartości siły docisku listwy odciążającej i zarazem dociskającej giętą rurę do wzornika oraz wynikającej stąd

małej wartości naprężenia promieniowego ($\sigma_3 \cong 0$) na zewnętrznych powierzchniach warstw rozciąganych, po przekształceniach otrzymano

$$\sigma_1 \cong \frac{2(1+s^*)}{\sqrt{3[4(s^*)^2 + 2s^* + 1]}} \sigma_p, \sigma_2 \cong \frac{1-2s^*}{\sqrt{3[4(s^*)^2 + 2s^* + 1]}} \sigma_p, \quad (5.10)$$

$$\sigma_3(r_z) \cong \sigma_3(r_1) \cong 0.$$

Odpowiadające natomiast stanowi (**b2**), określone wzorami (5.5)₂ lub (5.6)₂, składowe stanu naprężenia dla przypadku gięcia rur grubościennych (wykonanych także z materiału izotropowego, wówczas: $r \cong 1$), można również otrzymać w podobny sposób, uwzględniając jak wyżej dodatkowy warunek wynikający z określenia prawie zerowej wartości naprężenia σ_3''' na zewnętrznych (nieobciążonych) powierzchniach warstw rozciąganych. Stąd

$$\sigma_1''' \cong \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_p, \sigma_2''' \cong \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}, \sigma_3'''(r_z) \cong \sigma_3(r_1) \cong 0. \quad (5.11)$$

Jak widać, przypadki (**b1**) wyprowadzone dla uogólnionego schematu odkształcenia i uproszczenia 1. rodzaju, por. wyrażenia (5.5)₁, (5.6)₁ i (5.10), zależą nie tylko od parametrów materiałowych (n , r i φ_0), lecz również od parametrów geometrycznych (g_1 i d_1) giętej rury (w przybliżeniu zależą od wartości współczynnika cienkościenności rury s^* : $s^* = g_0/d_z$). Ze wzorów tych wynika, że gdy cienkościenność rury rośnie: $s^* \uparrow$, to również: $\varphi_{(i) b1} \uparrow$. Natomiast drugie przypadki (**b2**), por. wyrażenia (5.5)₂, (5.6)₂ i (5.11) wyprowadzone odpowiednio dla schematu uproszczeń 2. i 3. rodzaju, por. [155], nie zależą już od parametrów geometrycznych giętej rury (g_1 i d_1) lub s^* . W przypadku, gdy $s^* = 0,5$ (pełny pręt), wówczas ze wzorów (5.9) i (5.10) wynika, że: $\sigma_1 = \sigma_p$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ oraz ($\varphi_2 = \varphi_3 = -0,5\varphi_1$) a także, że: $\varphi_{(i) b1p} \cong (2n - \varphi_0)$.

Ogólny rozkład naprężeń głównych we wszystkich punktach strefy gięcia można otrzymać wykorzystując wyrażenia (5.3), (5.8) i (5.9), odpowiednie równania równowagi uwzględniające siły tarcia dla przypadku niesymetrycznej (o zmiennej grubości) cienko i grubościennej zamkniętej powłoki (lub jako niesymetrycznego odcinka „torusoidy”) [47, 138, 155].

Warunek plastyczności (H-M-H) dla (PSN) i materiału ze wzmocnieniem oraz o własnościach anizotropii normalnej ma postać, por. [16, 22, 23, 73, 146]

$$(1+r)\sigma_p^2 = (1+r)\sigma_1^2 - 2r\sigma_1\sigma_2 + (1+r)\sigma_2^2. \quad (5.12)$$

Ograniczając się więc do przypadku rur cienkościennych (w których podczas procesu gięcia w warstwach rozciąganych panuje ~ dwuosiowy stan naprężenia), równania plastycznego płynięcia Levy'ego-Misesa lub bardziej precyzyjnie Nadaia-Davies, por. [165, 166], wyrażone w logarytmicznych miarach odkształcenia mają następującą postać, por. np. [16, 22, 23, 73, 146]

$$\frac{d\varphi_1}{(1+r)\sigma_1 - r\sigma_2} = \frac{d\varphi_2}{(1+r)\sigma_2 - r\sigma_1} = \frac{d\varphi_3}{-(\sigma_1 + \sigma_2)} = \frac{d\varphi_{(i)}}{(1+r)\sigma_p}, \quad (5.13)$$

$$\text{gdzie: } d\varphi_{(i)} = \sqrt{\frac{(1+r)(d\varphi_1^2 + d\varphi_2^2 + d\varphi_3^2)}{1+2r}}.$$

Odpowiadające odpowiednio stanom: **b1** i **b2** oraz wyrażeniom (5.6)₁ i (5.6)₂ (przy przyjęciu upraszczających założeń, że $(g_1/d_1 \approx g_0/d_2)$), składowe stanu naprężenia podczas gięcia rur cienkościennych, dla przypadku materiału wykazującego właściwości anizotropii normalnej (otrzymane z równań plastycznego płynięcia (5.13), przy uwzględnieniu krzywej umocnienia (5.3) oraz warunku plastyczności (5.12), mają następującą postać

$$\sigma_1 \cong \frac{(1+r)(1+r+2s^*)}{\sqrt{(1+r)(1+2r)[8(s^*)^2 + 4s^* + (1+r)]}} \sigma_p \text{ i } \sigma''_1 \cong \frac{1+r}{\sqrt{1+2r}} \sigma_p''', \quad (5.14)$$

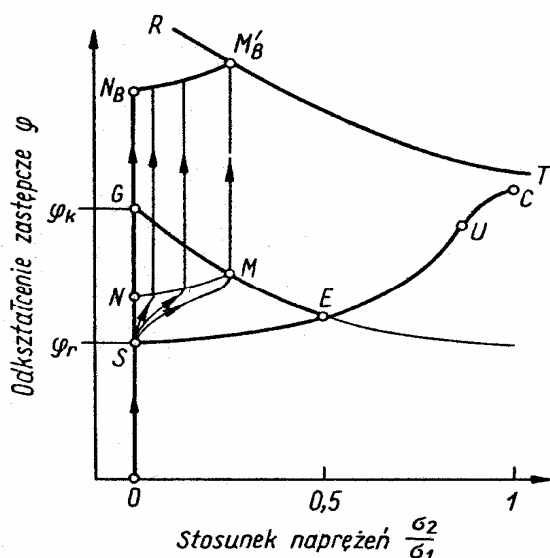
$$\sigma_2 \cong \frac{(1+r)(r-2s^*)}{\sqrt{(1+r)(1+2r)[8(s^*)^2 + 4s^* + (1+r)]}} \sigma_p \text{ i; } \sigma''_2 \cong \frac{r}{\sqrt{1+2r}} \sigma_p'''.$$

W przypadku, gdy $s^* = 0,5$ (gięty pełny pręt), wówczas odpowiednio ze wzorów (5.13) i (5.14) oraz (5.6) wynika jak poprzednio, że: $\sigma_1 = \sigma_p$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ i $(\varphi_2 = \varphi_3 = -0,5 \varphi_1)$ oraz: $\varphi_{(i)b1p} \cong (2n - \varphi_0)$.

Wyrażenia (5.5)₁, (5.6)₁ i (5.14)₁ są więc formalnym [dla przypadku cienko ($s^* < 0,1$) i grubościennych rur ($0,1 \leq s^* < 0,5$)] rozszerzeniem wyrażań otrzymanych przez Marciniaka [73], dla przypadku izotropowych blach i stanu, gdy $(0 \leq \sigma_2/\sigma_1 \leq 1/2)$. Podstawiając bowiem, że dla płaskich blach ich średnice (d_1 i d_2) $\rightarrow \infty$, to wówczas: $s^* \rightarrow 0$, więc otrzymamy wzory postaci (5.5)₂, (5.6)₂ oraz (5.14)₂. Otrzymane wyrażenia o takiej postaci były już cytowane w wielu pracach, por. [16, 21, 73, 88, 137, 150, 151]. Ideę oraz uzasadnienie tego rozszerzenia można w szczególności przedstawić na podstawie analizy poglądowych wykresów zamieszczonych w pracy [73], (por. także rys. 5.2), które otrzymano dla przypadku rozciągania szerokich płaskich próbek.

Dla przypadku gięcia metalowych rur na giętarkach z warunku $d(\sigma_p \cdot g) = 0$ otrzymano nierozpoznane dotąd w poznanej literaturze efekty:

- a) dla przypadku modelu uogólnionego odkształceń i uproszczenia 1. rodzaju otrzymano dla zewnętrznego punktu wierzchołkowego giętego kolana, w którym panuje (PSN), że:
- gdy $s^* \neq 0$, to warunkowi $d(\sigma_p \cdot g) = 0$ odpowiadają stany naprężenia leżące w zakresie hiperbolicznym na elipsie plastyczności w przypadku gdy $(\sigma_1 \text{ i } \sigma_2) > 0$ oraz $d\varphi_2 < 0$,
 - gdy $s^* = 0$ (powierzchnia wewnętrzna giętego kolana o grubości: $g = 0$) lub próbka płaska, gdy $d_z \rightarrow \infty$. Wówczas warunkowi $d(\sigma_p \cdot g) = 0$ odpowiada punkt paraboliczny na elipsie plastyczności, w którym odpowiednio ($d\varphi_2 = 0$) - występuje inicjacja (PSO),
- b) dla przypadku uproszczeń 2. i 3. rodzaju otrzymano dla wierzchołkowego punktu giętego kolana, że warunkowi $d(\sigma_p \cdot g) = 0$ odpowiada punkt s na elipsie plastyczności, w którym odpowiednio ($d\varphi_2 = 0$), co fizycznie oznacza lokalną inicjację (PSO).



Rys. 5.2. Przebieg rozciągania szerokiej próbki na tle wykresu odkształceń granicznych, wg [73]

Na rys. 5.2 linia $OSNG$ wyznacza stany odkształceń w zewnętrznych warstwach dla przypadku jednoosiowego rozciągania ($\sigma_2 / \sigma_1 = 0$), a linia ES przedstawia stany odkształceń granicznych z uwagi na utratę stateczności całej próbki, które wyznaczono z warunku maksimum siły rozciągającej. Linia

GMEUC przedstawia linię odkształceń granicznych z uwagi na lokalną utratę stateczności (lokalizacja odkształceń plastycznych w postaci np. inicjacji bruzdy), a linia *RT* odpowiada granicy pęknięcia materiału w samej bruzdzie. Punktowi *S* odpowiada natomiast moment tworzenia się szyjki (inicjacja rozproszonej utraty stateczności) [73]. Stany w punktach zawartych wewnątrz pola *SEG*, np. na linii *MN* reprezentują istniejące w danej chwili stany odkształcenia w punktach przekroju poprzecznego rozciąganej próbki (lub w przekroju poprzecznym warstw rozciąganych giętej rury).

Ograniczając się tylko do zewnętrznych warstw rozciąganych giętej rury o wymiarach ($\phi 44,5 \times 4,5$ mm, $s^* \approx 0,101$) oraz dla przyjętych danych materiałowych dla stali : $r = 1$, $n = 0,2$ i $\varphi_0 = 0,016$ otrzymano, że:

- punktowi *S* na rys 5.2 odpowiadają następujące wartości: $\varphi_{ia} \cong 0,184$, por. wzór (5.4) oraz: $\sigma_2/\sigma_1 = 0$.
- punktowi *E* odpowiadają wartości: $\varphi_{(i)b2}''' = \varphi_{(i)b2}'' \cong 0,215$, por. wzory (5.5)₂ i (5.6)₂, oraz: $\sigma_2/\sigma_1 = 0,5$ a także wartości otrzymane ze wzorów (5.5)₁ i (5.6)₁ dla $s^* = 0$,
- punktowi *M* odpowiadają wartości: $\varphi_{(i)b1} \cong 0,241$, por. wzory (5.5)₁ i (5.6)₁ oraz $\sigma_2/\sigma_1 \cong 0,3622$, por. wzory (5.10) lub (5.14). Innym punktem leżącym na linii *GE* (oprócz punktów *G*, *M* i *E*) odpowiadają inne wartości dla wymiarów geometrycznych giętej rury (a więc inne wartości współczynnika cienkościenności zawartego w przedziale: $s^* \in (0; 0,5)$ aniżeli: $s^* \cong 0,101$. Tę wartość współczynnika określono dla rury o wymiarach: $\phi 44,5 \times 4,5$ mm. Gdy współczynnik: $s^* \in (0,5; 0)$, to wówczas: odpowiednio: $\sigma_2/\sigma_1 \in (0; 0,5)$.
- punktowi *G* odpowiada wartość: $\varphi_{(i)b1p} = \cong 0,384$, którą otrzymano ze wzorów (5.5)₁ i (5.6)₁ dla przypadku, gdy: $s^* = 0,5$ (pełny pręt). Ze wzorów (5.10)_{1i2} lub (5.14)₁ otrzymamy, że: $\sigma_2/\sigma_1 = 0$, co oznacza, że $\sigma_2 = 0$.

Gdy w zewnętrznych punktach lub punkcie warstw rozciąganych giętej rury realizowany będzie inny schemat odkształcenia reprezentowany przez składowe odkształcenia opisane uśrednionymi wzorami, w których powierzchnią odniesienia jest warstwa środkowa w ścianie rury, to odpowiednie wyrażenia na dopuszczalne wartości intensywności odkształcenia, które odpowiadają wyrażeniom (5.5)₁ i (5.6)₁, mają następującą postać

$$\varphi_{(i)b1sr} \cong \sqrt{\frac{(1+r) \left[2 \left(\frac{g_1}{d_1} \right)^2 + 2 \left(\frac{g_1}{d_1} \right) + (1+r) \right]}{(1+2r)}} n - \varphi_0. \quad (5.15)$$

Po przyjęciu, jak poprzednio, pewnych wyrażeń upraszczających ($g_1/d_1 \approx g_0/d_z$) i po wykonaniu przekształceń, wyniknie

$$\varphi_{(i) b1sr} \approx \sqrt{\frac{(1+r)[2(s^*)^2 + 2s^* + (1+r)]}{(1+2r)}} n - \varphi_0. \quad (5.16)$$

Odpowiadające stanowi odkształcenia (5.15) (również przy przyjęciu upraszczających założeń, że: ($g_1/d_1 \approx g_0/d_z$), składowe stanu naprężenia dla przypadku gięcia rur grubościennych z zakresu ($s^* > 0,1$ lub $0,2 \leq s^* < 0,5$ [51] lub $0,05 < s^* < 0,5$ wg [14, 158]), na gorąco lub półgorąco oraz wykonanych także z materiału izotropowego dla ($r = 1$), mają następującą postać

$$\sigma_1 \equiv \frac{2+s^*}{\sqrt{3[(s^*)^2 + s^* + 1]}} \sigma_p, \sigma_2 \equiv \frac{1-s^*}{\sqrt{3[(s^*)^2 + s^* + 1]}} \sigma_p, \sigma_3(r_z) \equiv \sigma_3(r_1) \equiv 0. \quad (5.17)$$

Odpowiadające natomiast stanowi odkształcenia (5.16), składowe stanu naprężenia podczas gięcia rur cienkościennych oraz dla przypadku materiału wykazującego właściwości anizotropii normalnej, po uwzględnieniu warunku plastyczności (5.12), a także równań plastycznego płynięcia (5.13), mają następującą postać

$$\sigma_1 \equiv \frac{(1+r)(1+r+s^*)}{\sqrt{(1+r)(1+2r)[2(s^*)^2 + 2s^* + (1+r)]}} \sigma_p, \quad (5.18)$$

$$\sigma_2 \equiv \frac{(1+r)(r-s^*)}{\sqrt{(1+r)(1+2r)[2(s^*)^2 + 2s^* + (1+r)]}} \sigma_p.$$

Postępując podobnie jak w poprzednim przypadku i dla przypadku takich samych danych jak: $r = 1$, $n = 0,2$ i $\varphi_0 = 0,016$ otrzymamy obecnie zgodnie z rys. 5.2, że:

- wartości dopuszczalnych intensywności odkształceń i naprężeń odpowiadające punktom S , E i G , mają takie same wartości jak w poprzednio.
- punktowi M odpowiada obecnie punkt M_{sr} (leżący na innej linii), także łączącej punkty GE , któremu odpowiadają wartości: $\varphi_{(i) b1sr} = 0,227$, por. wzory (5.15) i (5.16)₁ oraz $\sigma_2/\sigma_1 \equiv 0,428$, por. wzory (5.17) lub (5.18). Innym punk-

tom leżącym teraz na tej linii (oprócz punktów G , M_{sr} i E), odpowiadają inne wartości dla wymiarów geometrycznych giętej rury (a więc dla innego anizelii: $s^* \equiv 0,101$ współczynnika cienkościenności rury, zawartego w przedziale: $s^* \in (0; 0,5)$, który także określono dla rury o wymiarach: $(\phi 44,5 \times 4,5 \text{ mm})$. Gdy: $s^* \in (0,5; 0)$ to wówczas odpowiednio: $\sigma_2 / \sigma_1 \in (0,2; 0,5)$. Oznacza to obecnie, że dla przypadku pełnego pręta (gdy $s^* = 0,5$) wówczas w rozpatrywanej środkowej warstwie ścianki rury naprężenie obwodowe nie jest już równe zero ($\sigma_2 \neq 0$). Podstawiając bowiem wartość $s^* = 0,5$ do wzorów (5.17) lub (5.18) otrzymano, że $\sigma_2 / \sigma_1 = 0,2$.

c. Przypadek powstania (PSO) w warunkach (PSN), por.[16, 21, 73, 88, 146, 151]

Przypadek dwuosowego stanu naprężenia (PSN) podczas gięcia rur cienkościennych

Wówczas

$$\varphi_{(i)c} = n z - \varphi_0, \quad (5.19)$$

gdzie formalnie można zapisać, że $(\varphi_{(i)c} \equiv \varphi_{(i)c}''')$ oraz

$\varphi_{(i)c}$ – wartość odkształcenia zastępczego odpowiadająca tej utracie stateczności,

z – jest podstyczną ujmującą wpływ naprężenia σ_p na moment utraty stateczności w warunkach płaskiego stanu naprężenia (PSN) i w momencie powstania płaskiego stanu odkształcenia (PSO) tak, że

$$z = \frac{1+r}{\sqrt{1+2r}}. \quad (5.20)$$

Ten przypadek utraty stateczności odnosi się do rur cienkościennych z uwagi na przyjęte warunki wynikające z płaskiego stanu naprężenia (PSN).

Wobec przyjętych uwag o procesie gięcia rur można założyć, że dopuszczalna wartość odkształcenia zastępczego $\varphi_{(i)dop}$, odpowiadająca niezlokalizowanej utracie stateczności dla przypadku gięcia rur na giętarkach, będzie zawierać się formalnie w następujących granicach

$$\varphi_{(i)a} \leq \varphi_{(i)dop} \leq \varphi_{(i)b1} \text{ lub } \varphi_{(i)a} \leq \varphi_{(i)dop} \leq \varphi_{(i)b2}, \quad (5.21)_{1,2}$$

a dla przypadku utraty stateczności w formie zlokalizowanej

$$\varphi_{(i)b1} \leq \varphi_{(i)dop} \leq \varphi_{(i)b2} \text{ lub } \varphi_{(i)b1} \leq \varphi_{(i)dop} \leq \varphi_{(i)c}. \quad (5.21)_{3,4}$$

Uwzględniając w (5.21)₂ wzory (5.4) i (5.19) dla cienkościennych rur, otrzymano

$$n - \varphi_0 \leq \varphi_{(i)dop} \leq \frac{1+r}{\sqrt{1+2r}} n - \varphi_0. \quad (5.22)$$

Dla materiałów izotropowych mamy, że $r = 1$, więc

$$n - \varphi_0 \leq \varphi_{(i)dop} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} n - \varphi_0. \quad (5.23)$$

Wykorzystując wyprowadzone w pracach [148, 150, 150, 155] wyrażenia na dopuszczalne wartości kątów gięcia α_g , w zależności od dopuszczalnych wartości intensywności odkształcenia w warstwach rozciąganych, które posłużą do analizy zagadnienia, otrzymuje się

$$\cos\left(k \frac{\alpha_{g\ dop}}{2}\right) = \frac{2R + d_1 - 2R \exp \sqrt{1,5\varphi_{(i)}^2 - (\varphi_2^2 + \varphi_3^2)}}{d_1} = \frac{2R + d_1 - 2R \exp \varphi_1}{d_1}, \quad (5.24)$$

$$\cos\left(k \frac{\alpha_{g\ dop}'''}{2}\right) = \frac{2R + d_1''' - 2R \exp \sqrt{1,5\varphi_{(i)}'''^2 - \varphi_3'''^2}}{d_z} = \frac{2R + d_1''' - 2R \exp \varphi'''_1}{d_z}, \quad (5.25)$$

gdzie:

α_{gdop} – krytyczne wartości kąta gięcia liczone odpowiednio dla wyrażen ogólnego schematu odkształcenia, por. np. [155], gdy wartość intensywność odkształcenia $\varphi_{(i)}$ osiąga swoją dopuszczalną wartość równą $\varphi_{(i)dop}$, wg np. (5.4) i (5.6)₁,

α_{gdop}''' – krytyczne wartości kąta gięcia liczone dla metody uproszczenia 3. rodzaju (jako oszacowania najbardziej bezpiecznego), gdy wartość intensywności odkształcenia $\varphi'''_{(i)}$ osiąga swoją dopuszczalną wartość $\varphi'''_{(i)dop}$, określoną wyrażeniami (5.6)₂ i (5.19),

d_1 i d_1''' – aktualne średnice w punktach wierzchołkowych warstw rozciąganych kolana dla uproszczenia 1. i 3. rodzaju.

Geometryczną interpretację procesu gięcia i oznaczenie podstawowych wielkości geometrycznych przedstawiono na rys. 5.1, por. [148-153], [155].

4. KRYTYCZNE ODKSZTAŁCENIA I NAPRĘŻENIA – INICJACJA (PSO)

Do oceny (dla tego przypadku) dopuszczalnych odkształceń, naprężeń, kątów gięcia czy też grubości ścianki (pocienienia), podczas gięcia metalowych rur na zimno na giętarkach (bez uwzględnienia efektu przesunięcia osi obojętnej gięcia plastycznego, tj. dla $y_0 = 0$), wykorzystane zostaną nierówności (5.21)₂, (5.22) i (5.23). Do analizy wielkości odkształceń można skorzystać z przypadku wyrażen zawartych w pracach autorskich, por. np. [150, 151, 155], wynikających z uproszczeń 3 rodzaju. Zależności te pozwalają opisywać inicjację płaskiego stanu odkształcenia (PSO), w warunkach płaskiego stanu naprężenia (PSN). Jak wykazano, metoda wynikająca z uproszczenia 3 rodzaju wyznacza najbardziej bezpieczne wartości dla dopuszczalnych wielkości odkształceń, naprężeń, kątów gięcia czy też grubości ścianki. Oznacza to, że dla danej dopuszczalnej wartości intensywności odkształcenia $\varphi_{(i)dop}$ w strefie gięcia, dopuszczalne wartości kąta gięcia będą odpowiednio mniejsze niż te wynikające z uogólnionego modelu uproszczenia 2 i 3 rodzaju oraz, gdy $y_0 = 0$. Do analizy problemu będziemy więc używać opisu wynikającego z uproszczenia 3. rodzaju jako najbardziej bezpiecznego a zarazem odpowiadającego powstaniu płaskiego stanu odkształcenia (PSO). Analiza zagadnienia dla przypadku jednoosiowego rozciągania dla warstw rozciąganych giętej rury jest ogólnie znana i ograniczona zostanie do rozwiązania jednego prostego przykładu.

Po porównaniu wyrażenia na $\varphi_{(i)dop}'''$ z wyrażeniami (5.19) i (5.20), po przekształceniach otrzymano

$$\varphi_{(i)dop}''' = \frac{1+r}{\sqrt{1+2r}} \cdot n - \varphi_0. \quad (5.26)$$

Jak wynika dla przypadku (PSO) warunek (5.26) jest, jak widać równy warunkowi (5.6)₂.

Po podstawieniu więc powyższego wyrażenia do wzoru (5.25) wyznaczy się krytyczną wartość kąta gięcia α''_{gdop} , która odpowiada początkowi utraty stateczności (lokalna inicjacja stanu (PSO) w warunkach (PSN)). Ponieważ, jak powszechnie wiadomo, najbardziej odkształcony jest wierzchołek (środek) warstw rozciąganych w strefie gięcia ($\alpha = \beta = 0^\circ$), należy oczekiwać, że tam właśnie zapoczątkowana zostanie zlokalizowana utrata stateczności.

Korzystanie z wyprowadzonych zależności jest więc następujące: dla danego materiału wyznaczy się analitycznie wartości $\varphi_{(i)dop}'''$ z wyrażenia (5.26), a następnie dla danych parametrów procesu gięcia w wierzchołkowym punkcie warstw rozciąganych dla ($\lambda_1 = 1$) wyznaczy się z równania (5.25) lub z rys. 5.7 wartości kąta α''_{gdop} . Z rys. 5.6, warunku nieściśliwości plastycznej i wyrażenia

na odkształcenie zastępcze określi się odpowiednie logarytmiczne składowe trwałych odkształceń φ''_1, φ''_3 oraz grubości g_1'' . Wartość zredukowanego krytycznego naprężenia plastycznego σ_{ps} , odpowiadająca stanowi odkształcenia (5.26) wyznaczy się z równania konstytutywnego (5.3) po podstawieniu wartości odkształcenia $\varphi_{(i)} = \varphi''_{(i)dop}$. Odpowiednie składowe naprężenia można wyznaczyć (na podstawie rys. 5.3), dla punktu s na elipsie plastyczności. Punkt ten, zgodnie z teorią stowarzyszonych praw plastycznego płynięcia wyznacza stan inicjacji płaskiego stanu odkształcenia (PSO) w warunkach (PSN). Podstawowy układ quasi-liniowych równań różniczkowych cząstkowych statyki, dla charakterystyk i warunku plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego w tym punkcie jest typu parabolicznego, por. [31, 47, 104, 135, 138, 139, 150, 151].

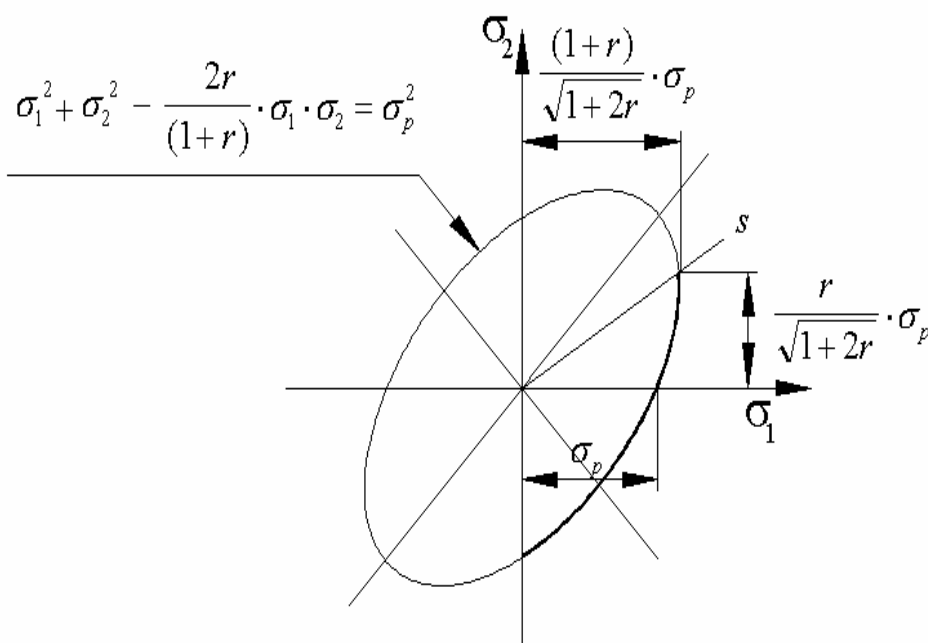
Więc

$$\sigma''_{1s} = \frac{1+r}{\sqrt{1+2r}} \sigma_p''', \sigma''_{2s} = \frac{r}{\sqrt{1+2r}} \sigma_p'''. \quad (5.27)$$

Na podstawie analizy stanu naprężenia w procesach gięcia rur cienkościennych metodą owijania na obrotowym wzorniku i z użyciem trzpienia wynika, że w wierzchołkowych punktach przekroju poprzecznego warstw rozciąganych (punkty intensywnego kontaktu giętej rury z trzpieniem w strefie gięcia) panuje stan naprężenia zawarty na elipsie plastyczności (por. rys. 5.3) pomiędzy osią σ_1 , a punktem s . Dla tego zakresu stanów naprężeń układ równań różniczkowych cząstkowych statyki dla charakterystyk pola naprężeń, jest typu hiperbolicznego, por. np. [31, 47, 147, 73, 104, 135, 138, 139].

Powstanie natomiast zjawiska utraty stateczności w formie rozproszonej i zlokalizowanej (a szczególnie w formie zlokalizowanych odkształceń w postaci lokalnej bruzdy) podczas procesu gięcia rur na kolana rurociągów, spowoduje znaczne przyspieszenie procesów degradacyjnych pełzania a następnie zniszczenia podczas ich eksploatacji. Wynika to stąd, że w punktach kolana, w których wystąpiły stany zlokalizowanych odkształceń w fazie wytwarzania, procesy lokalizacji odkształceń będą się intensywnie pogłębiały w czasie ich eksploatacji. Będzie następowała szybsza kontynuacja i rozwój lokalizacji odkształceń, doprowadzając w końcu do pęknięcia kolana i wystąpienia awarii.

W zakończeniu tego punktu warto dodać, że w przypadku, gdy stany naprężenia będą znajdowały się powyżej punktu s (stany dwuosiowego rozciągania), wówczas to przyrosty odkształcenia obwodowego w warstwach rozciąganych będą dodatnie ($d\varphi_2 > 0$ lub $d\varepsilon_2 > 0$), por. np. [73], a stany zlokalizowanej utraty stateczności będą się więc znajdować na prawo od punktu E , na linii EUC , por. rys. 5.2. Takie stany naprężeń i odpowiadające im stany odkształcenia występują podczas plastycznego rozpęczania rur.

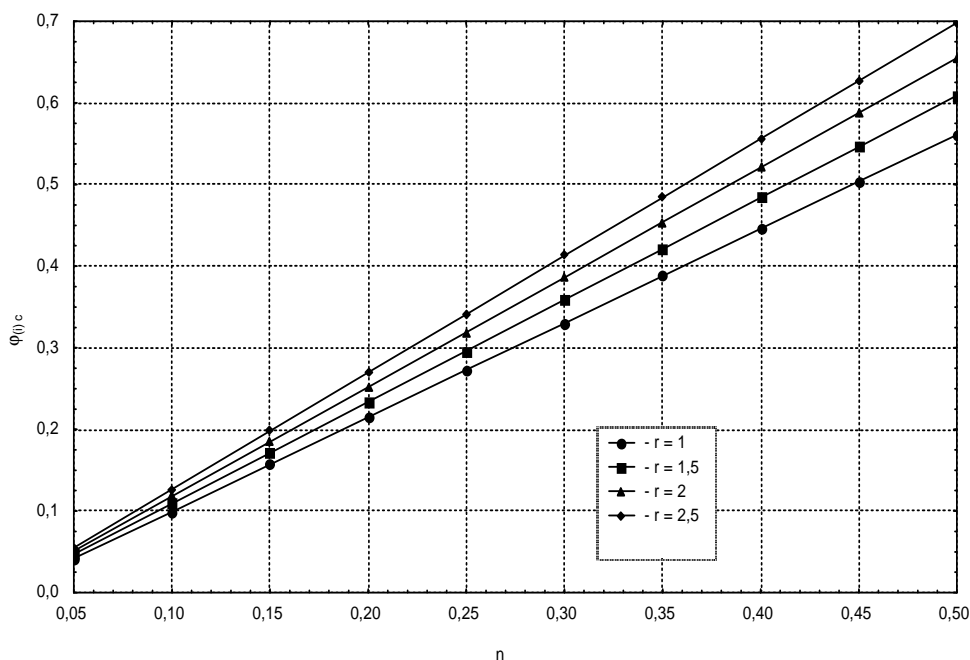


Rys. 5.3. Stany naprężeń na elipsie plastyczności H-M-H w punkcie utraty stateczności (punkt *s*) i inicjacji (PSO)

5. ANALIZA OTRZYMANYCH REZULTATÓW

Na rys. 5.4 i 5.5, przedstawiono w postaci wykresów obliczeniowe wartości odkształceń zastępczych $\varphi_{(i)c}$, dla przypadku powstania płaskiego stanu odkształcenia (PSO) w warunkach płaskiego stanu naprężeń (PSN) lub wynikających z zapoczątkowania stanu zlokalizowanej utraty stateczności (np. w postaci pojawienia się lokalnej bruzdy). Materiał rury przyjęto jako sztywnoplastyczny z izotropowym wzmocnieniem. Jak widać na wykresach, wartość $\varphi_{(i)c}$ wzrasta znacznie ze wzrostem współczynnika umocnienia n i zarazem bardzo nieznacznie ze wzrostem współczynnika anizotropii normalnej r . Z technologicznego punktu widzenia oznacza to, że wzrost współczynnika n ma pozytywny wpływ na proces gięcia rur na zimno, ponieważ zwiększa się wartość dopuszczalnych odkształceń. Zwiększa się więc zarazem, dla danych warunków gięcia, dopuszczalna wartość kąta gięcia $\alpha'''_{g dop}$.

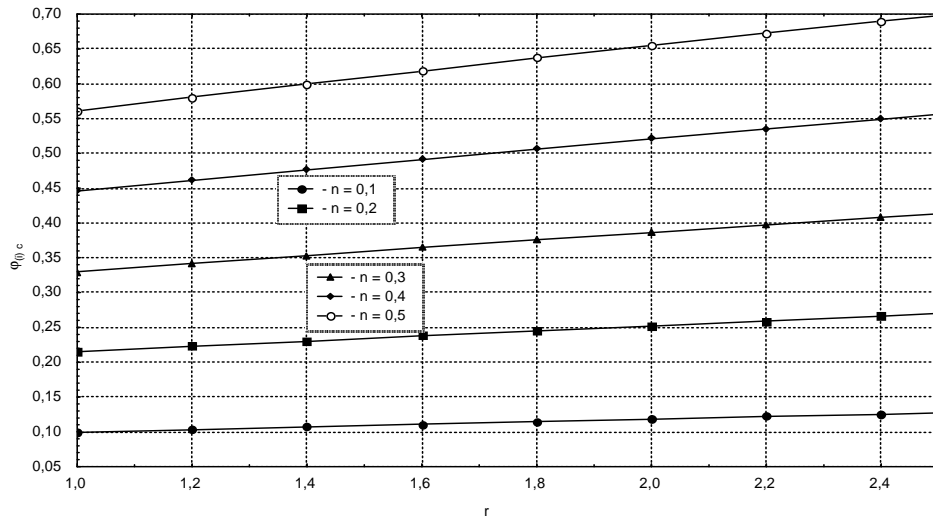
Wzrost r powoduje, że pocienienie ścianki giętej rury będzie mniejsze, czyli wzrasta opór przeciw pocienieniu, a więc materiały o większych wartościach współczynnika r wykazują nieznacznie lepsze własności do gięcia.



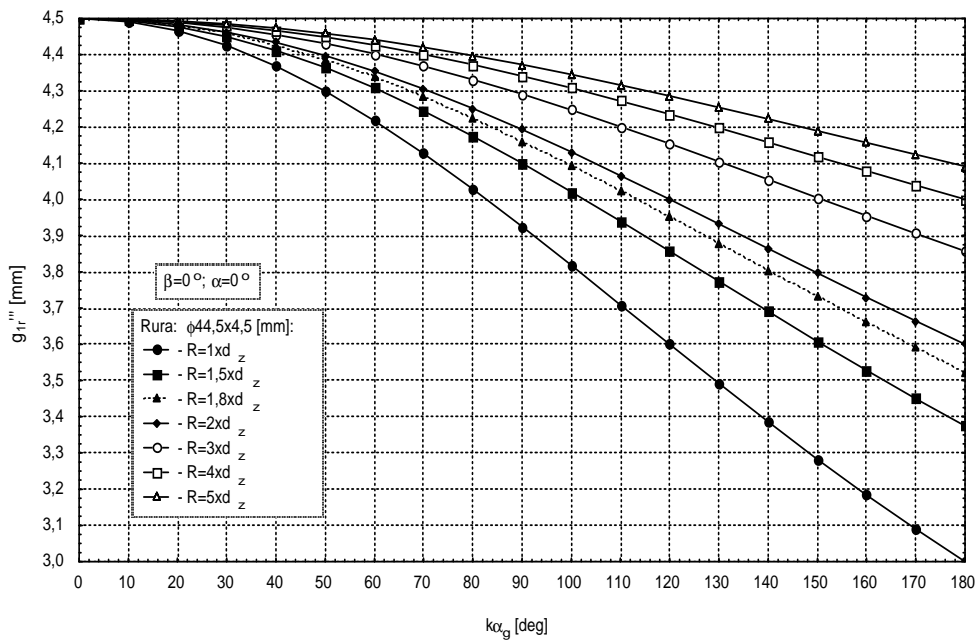
Rys. 5.4. Wykresy zmian dopuszczalnych wartości odkształceń zastępczych w zależności od współczynnika n umocnienia dla wybranych wartości współczynnika anizotropii normalnej

Wzrost współczynnika umocnienia n polepsza znacznie własności materiału do gięcia, ponieważ wykładnik ten jest równy liczbowo wartości wydłużenia równomiernego w próbie jednoosiowego rozciągania i jest częściowo związany z teksturą i wielkością ziaren dla danego gatunku stali [1, 4, 9, 18, 84, 87, 96, 125, 161]. Wynika to stąd, że wzrost wartości wydłużenia równomiernego materiału, polepsza warunki gięcia rur na zimno, a więc sprzyja powiększeniu się wartości dopuszczalnych odkształceń i kątów gięcia.

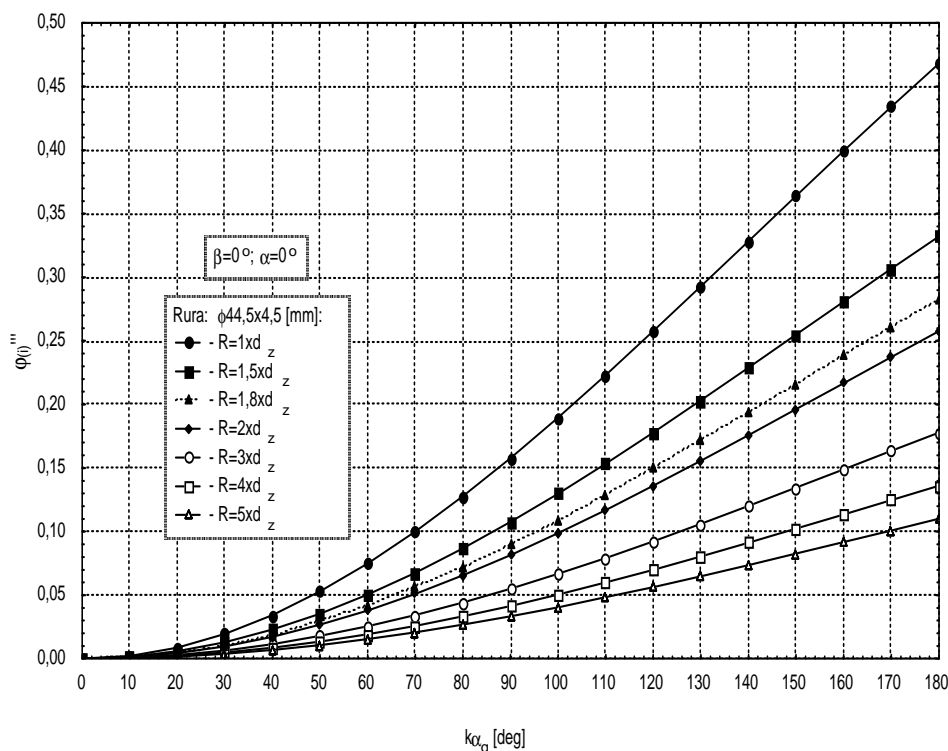
Na wykresach rys. 5.6 przedstawiono zmianę grubości ścianki g_{ir}''' łuku (kolana) rurociągu w jego wierzchołkowym (środkowym) punkcie warstw rozciąganych strefy gięcia, dla przyjętej wartości ($\lambda_1 = 1$) współczynnika technologiczno-materiałowego korekcji rozkładu odkształceń, w zależności od wartości kąta gięcia $k\alpha_g$. Wykresy otrzymano dla różnych promieni gięcia R , zawartych w przedziale $R \in \langle (1 \div 5) \times d_z \rangle$ i bez uwzględnienia przesunięcia osi obojętnej gięcia plastycznego ($y_0 = 0$). Do obliczeń przyjęto standardowo rurę o wymiarach $\phi 44,5 \times 4,5$ mm, jaką używano do przeprowadzania wielu obliczeń i badań, por. np. [19, 20], [148-153], [155]. Jak widać z otrzymanych wykresów, grubości ścianki maleją wraz ze wzrostem kąta gięcia $k\alpha_g$ i wzrastają odpowiednio ze wzrostem promienia gięcia R .



Rys. 5.5. Wykresy dopuszczalnych odkształceń zastępczych w zależności od współczynnika anizotropii normalnej n dla wybranych wartości współczynnika umocnienia



Rys. 5.6. Wykresy zmian grubości ścianki w wierzchołku kolana w zależności od wartości kąta zgięcia dla wybranych wartości promienia zgięcia

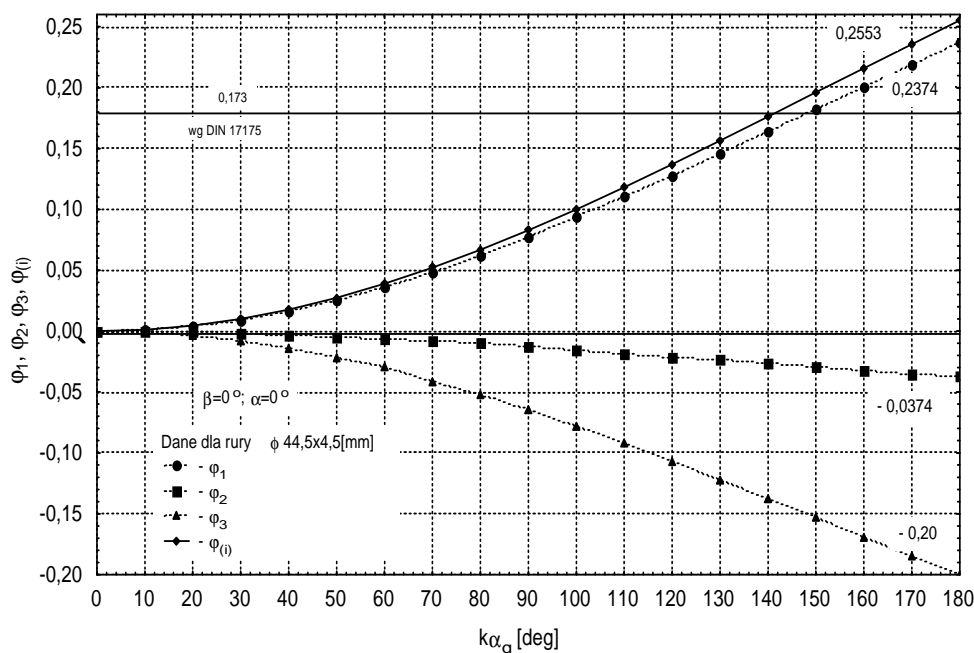


Rys. 5.7. Wykresy zmian wartości odkształcenia zastępczego w wierzchołku kolana w zależności od wartości kąta gięcia dla wybranych wartości promienia gięcia

Na rys. 5.7 przedstawiono zmianę wartości intensywności odkształceń plastycznych $\varphi''''_{(i)}$ obliczone także w środkowym (wierzchołkowym) punkcie warstw rozciąganych strefy gięcia w zależności od kąta gięcia $k\alpha_g$. Obliczenia, wykonano dla przypadku różnych wartości promieni gięcia R , zawartych jak poprzednio w przedziale $R \in \langle (1 \div 5) \times d_z \rangle$ dla rury o wymiarach $\phi 44,5 \times 4,5$ mm, por. np. [148, 150, 151]. Jak widać na wykresach rys. 5.6, wartość $\varphi''''_{(i)}$ wzrasta wraz ze wzrostem kąta gięcia $k\alpha_g$ i maleje ze wzrostem promienia gięcia R . To potwierdza nasze wcześniejsze intuicyjne przypuszczenia. Gdy promień gięcia R zdąży do nieskończoności (prosta rura), to $\varphi''''_{(i)}$ zdąży do zera, a w konsekwencji g_1 zdąży odpowiednio do g_0 , a to oznacza fizycznie brak gięcia. Wówczas $\alpha_g = 0^\circ$, ponieważ $k > 0$.

Na rys. 5.8 przedstawiono rezultaty obliczeń składowych logarytmicznych odkształceń głównych $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ oraz odkształcenia zastępczego $\varphi_{(i)}$, w zależności od wielkości kąta gięcia ($k\alpha_g$) dla wierzchołkowego punktu strefy

gięcia kolana ($\alpha = \beta = 0^\circ$). Odkładając na osi rzędnych wartość odkształcenia wyznaczoną doświadczalnie, np. w próbie jednoosiowego rozciągania, możemy określić wartość dopuszczalnego kąta gięcia, po przekroczeniu którego, przekroczone zostaną wartości technologicznie dopuszczalnych odkształceń, np. A_r lub A_5 czy też wartości odkształcenia odpowiadające zlokalizowanej formie utraty stateczności. Gdzie (A_r i A_5) oznaczają odpowiednio: A_r – wartość odkształcenia równomiernego i A_5 – wartość odkształcenia przy zerwaniu próbki pięciokrotnej w próbie jednoosiowego rozciągania.



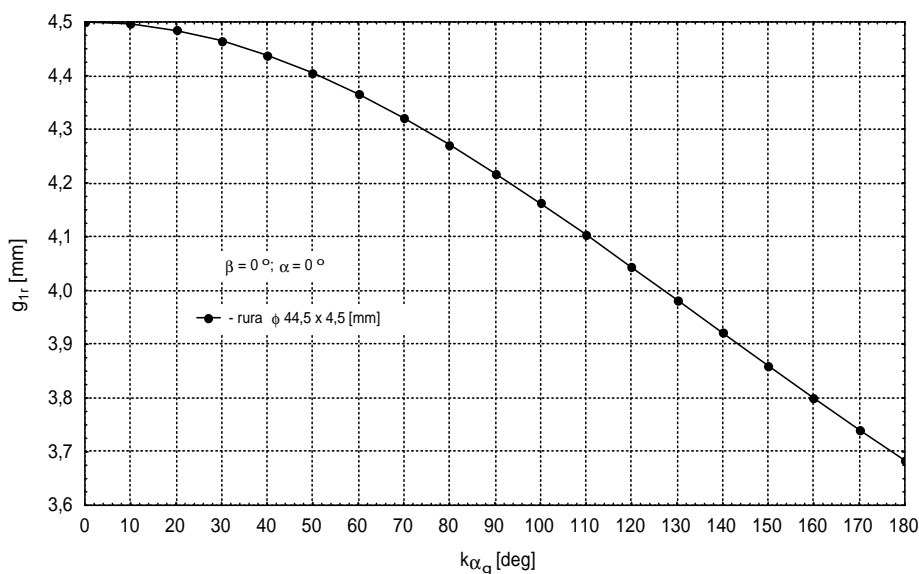
Rys. 5.8. Wykresy składowych odkształceń i intensywności odkształcenia w zależności od kąta gięcia $k\alpha_g$ dla przypadku uogólnionego schematu odkształcenia

Dla przypadku danych doświadczalnych zawartych w pracy [19] mamy ($A_r \approx 0,173$ dla St. 35,8 wg DIN 17175) i z wykresu na rys. 5.8, odpowiada to kątowi gięcia ($k\alpha_g \approx 145^\circ$). Oznacza to, że po przekroczeniu wartości kąta gięcia 145° , np. dla ($k\alpha_g = 180^\circ$) w zewnętrznych warstwach rozciąganych ograniczonych kątem β ($0^\circ \leq \beta \leq 45^\circ$) (patrz rys. 5.1) wystąpiły odkształcenia przekraczające wartość odkształcenia równomiernego A_r . Po przekroczeniu wartości A_r może wystąpić zjawisko rozproszonej utraty stateczności, a następnie lokaliza-

cja odkształceń plastycznych, podobnie jak to ma miejsce w próbach jedno- i dwuosowego rozciągania, por. np. [21, 73, 75]. Odpowiadająca kątowi gięcia $k\alpha_g \approx 145^\circ$, grubość ścianki ($g_1 \equiv g_{1r}$) w wierzchołkowych (środkowych) punktach kolana w warstwach rozciąganych można określić z wykresu na rys. 5.9 lub analitycznie określić ze wzorów (5.1), wykorzystując warunek nieściśliwości plastycznej materiału o postaci

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0. \quad (5.28)$$

Tak analitycznie wyznaczona wartość grubości ścianki oraz odczytana na rys. 5.9 wynosi $g_1 \equiv g_{1r} \approx 3,88$ mm.

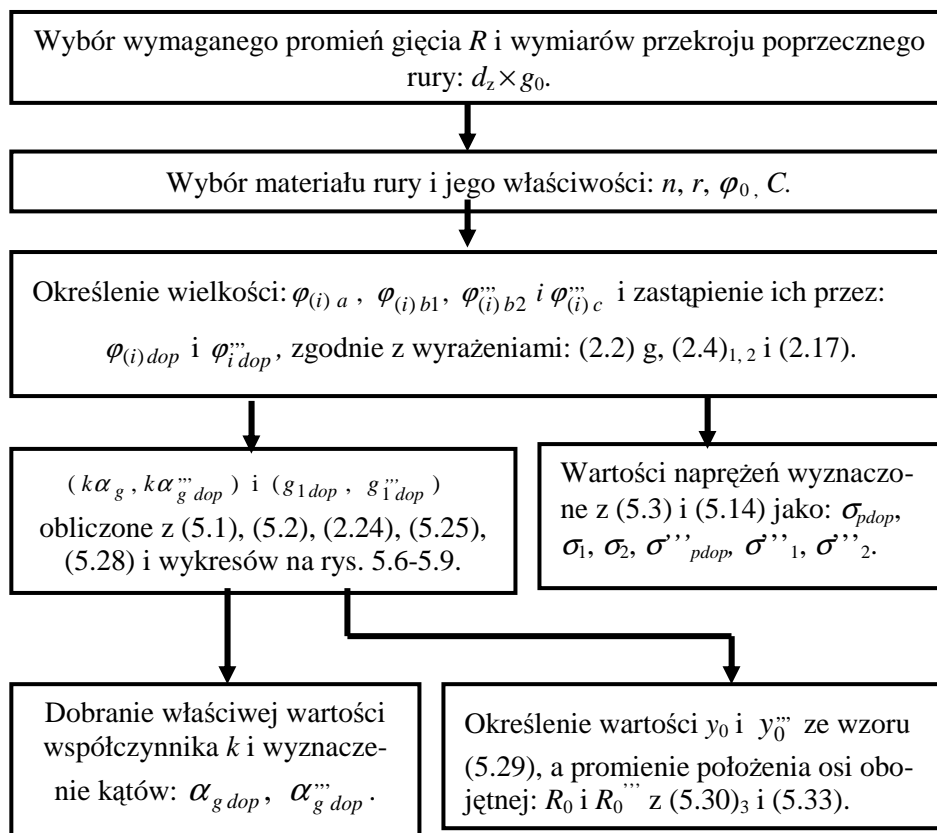


Rys. 5.9. Zmiany grubości ścianki rury w wierzchołkowym punkcie warstw rozciąganych w zależności od wielkości kąta gięcia $k\alpha_g$

6. PROSTE PRZYKŁADY OBLICZENIOWE STANÓW KRYTYCZNYCH

Niech we wszystkich przykładach materiał giętej rury o wymiarach przekroju $\phi 44,5 \times 4,5$ mm charakteryzują następujące parametry materiałowe: $n \approx 0,2$; $r \approx 1,5$; $\varphi_0 \approx 0,016$; $D \approx 550$ MPa i $R_m \approx 420$ MPa. Wartości te w przybliżeniu dość dobrze odpowiadają parametrom dla stali kotłowej K10 (na rury kotłowe), por. [87], [161].

Przykłady 1, 2, 3 i 4 są obliczane wg następującego schematu



Rys. 5.10. Schemat obliczeń stanów krytycznych

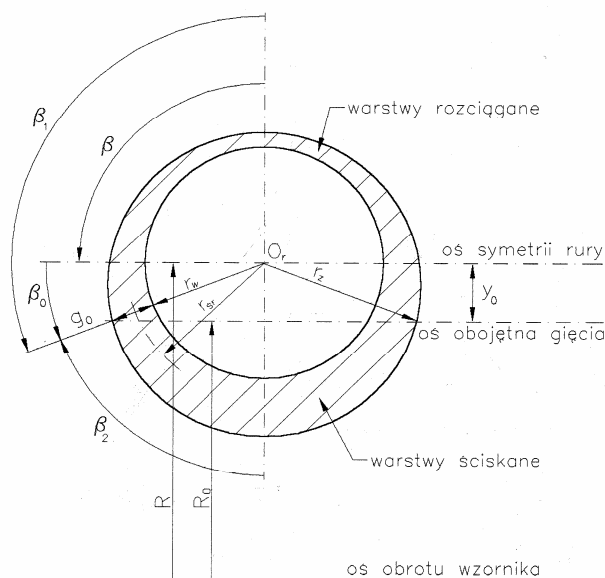
Przykład 1

Gdy osiągnięty jest stan odkształcenia wyrażony wzorem (5.4), to otrzymamy

$$\varphi_{(i)a} = 0,184 .$$

Odpowiadająca powyższej wartości dopuszczalna wartość kąta gięcia, odczytana z wykresu na rys. 5.8 wynosi: $k\alpha_{gdop} \cong 145^\circ$. To oznacza, że $\alpha_{gdop} \cong 145^\circ$ dla $(k = 1)$, $\alpha_{gdop} \cong 72,5^\circ$ dla $(k = 2)$, $\alpha_{gdop} \cong 58^\circ$ a dla $(k = 2,5)$ oraz $\alpha_{gdop} \cong 48,3^\circ$ dla $(k = 3)$. Obliczone wartości grubości ścianek g_1 i g_2 dla $(\lambda_1 = \lambda_2 = 1)$ wynoszą $g_1 \cong 3,88\text{mm}$ (por. rys. 5.9) i $g_2 \cong 5,66\text{mm}$. Franz w pracy [19] otrzymał doświadczalnie w próbie na proste rozciąganie wartość odkształcenia równą 0,180 dla przypadku utraty stanu odkształceń równomiernych. Natomiast obliczona wartość φ_{1dop} na podstawie wyrażenia (5.1) wynosi: $\varphi_{1dop} \cong 0,173$ i jest taka sama jak A_r , którą podano w pracy [19] dla przypadku odkształceń

równomiernych. Z wykonanych obliczeń i wykresów na rys. 5.7 odczytano także, że $k\alpha'''_g \approx 135^\circ$. Stąd ($k\alpha_g > k\alpha'''_g$). Wartość naprężenia uplastyczniającego liczona wg wzoru (5.3) osiąga następującą wartość: $\sigma_{pdop} \approx 398,6$ MPa.



Rys. 5.11. Poglądowe przesunięcie osi obojętnej gięcia plastycznego y_0 wraz z zaznaczonymi parametrami przekroju poprzecznego zgiętego kolana

Odpowiadające rozpatrywanemu stanowi, przybliżone położenie warstwy obojętnej zginania plastycznego, por. rys. 10 można określić z wyrażenia (uogólnionego w niniejszej pracy na przypadek stref przejściowych i gięcia nieswobodnego), por. np. wzory w pracach [155, 157]. Stąd

$$y_0 \approx \lambda_0 \frac{0,42}{\tilde{r}} \left(r_w + \frac{g_0}{2} \right) \left[\cos(k\alpha) - \cos\left(k \frac{\alpha_g}{2}\right) \right], \quad (5.29)$$

gdzie: λ_0 – współczynnik technologiczno-materiałowy korekcji przesunięcia się warstwy obojętnej gięcia plastycznego. Na podstawie przeprowadzonych badań doświadczalnych można przyjąć, że $\lambda_0 \in (0; 1)$, \tilde{r} – względny promień gięcia ($R = \tilde{r} d_z$). Stąd

$$\tilde{r} = \frac{R}{d_z} \text{ i } r_{sr} = r_w + \frac{g_0}{2} \text{ oraz } R_0 = R - y_0. \quad (5.30)$$

Maksymalne dla przypadku gięcia swobodnego przesunięcie osi obojętnej można określić korzystając ze wzoru (5.29) dla $k\alpha = 0^\circ$ i $k\alpha_g = 180^\circ$ oraz $\lambda_0 = 1$. Przyjmując dla analizowanego przypadku gięcia nieswobodnego $\lambda_0 \approx 0,5$, po wykonaniu obliczeń otrzymano, że $y_0 \approx 1,63\text{mm}$, a $y_{0\max} \approx 2,33\text{mm}$.

Promień R_0 wyznacza nowe (chwilowe dla danej wartości kąta gięcia) położenie warstwy obojętnej zgięcia plastycznego, dla wartości kąta $k\alpha = 0^\circ$. Więc $R_0 = R - y_0 \approx 78,37\text{mm}$. Gdy ($k\alpha_g = 180^\circ$ i $\lambda_0 = 0,5$), to dla rozpatrywanego przypadku gięcia nieswobodnego, wówczas $y_0 = y_{0\max}$.

$$\text{Stąd} \quad \frac{y_0}{d_z} \approx 0,037 \text{ lub } \frac{y_0}{d_z} \approx 3,7\%.$$

$$\text{Gdy} \quad (y_0 = y_{0\max}), \text{ to } \frac{y_{0\max}}{d_z} \approx 0,052 \text{ lub } \frac{y_{0\max}}{d_z} \approx 5,2\%.$$

Taka mała wartość y_0 nie będzie mieć znaczącego wpływu na wielkość rozkładu odkształceń plastycznych. Ponadto, wartość y_0 , przyjęta w niniejszej pracy ($\lambda_0 \approx 0,5$) dla przypadku gięcia nieswobodnego oraz usunięciu luzów pomiędzy narzędziami giętarki a giętą rurą - szczególnie w warstwach ściskanych, może być jeszcze mniejsza, wskutek kinematycznie dopuszczalnego przemieszczanie się cząstek materiału po obwodzie „do góry”.

Położenie osi obojętnej zginania plastycznego można również określać analitycznie korzystając z własności tej osi, por. np. [43, 52], że oś obojętnej zginania plastycznego dzieli przekrój poprzeczny na dwa równe pola oraz, że w przypadku, gdy oś obojętnej wyznaczona położeniem promienia R_0 , nie jest już osią symetrii, wówczas oś obojętnej ulega przesunięciu. W rozpatrywanym przypadku gięcia, będzie to przesunięcie w dół, w kierunku środka obrotu wzornika giętarki.

Przykład 2

Gdy osiągnięty jest stan odkształcenia wyrażony wzorami (5.6)_{1 i 2} to otrzymamy

$$\varphi_{(i)b1} \approx 0,257 \quad \text{lub} \quad \varphi_{(i)b2}''' \approx 0,234.$$

Odpowiadająca określonej wartości $\varphi_{(i)b1}$ obliczona dopuszczalna wartość kąta gięcia wynosi $k\alpha_{\text{gdop}} > 180^\circ$, por. wykresy na rys. 5.8 (oznacza to, że dla realizowanego uogólnionego schematu odkształcenia ta forma utraty stateczności nie wystąpi). Stąd na podstawie numerycznych obliczeń ze wzorów (5.1) i (5.28) dla $k\alpha_g = 180^\circ$ lub z wykresu na rys. 5.9 otrzymamy, że $g_{1\min} \approx 3,68 \text{ mm}$. Obliczona numerycznie wartość $g_{2\max}$ dla warstw ściskanych, dla ($\lambda_2 = 1$) wynosi $g_{2\max} \approx 6,0 \text{ mm}$, a dla ($\lambda_2 = 0,5$) wynosi $g_2 \approx 5,0 \text{ mm}$. Określona natomiast na podstawie wykresów na rys. 5.6 wartość $k\alpha_g''' \approx 158^\circ$. Stąd wynika również,

że ($k\alpha_g > k\alpha_g'''$). Oznacza to, że dla realizowanego schematu odkształcenia 3. rodzaju, ten rodzaj utraty stateczności wystąpi i jest to oszacowanie bezpieczniejsze, w stosunku do uogólnionego schematu odkształcenia. Obliczona wartość φ'''_{1dop} wynosi $\varphi'''_{1dop} \approx 0,203$. Wartości naprężenia uplastyczniającego i wartości składowych głównych naprężenia są następujące: $\sigma_{pdop} \approx 424,2$ MPa i $\sigma'''_{ps} \approx 417$ MPa oraz: $\sigma_1 \approx 524,4$ MPa, $\sigma_2 \approx 251,8$ MPa i $\sigma'''_1 \approx 521$ MPa, $\sigma'''_2 \approx 313$ MPa. Gdy osiągnięty jest stan gięcia o wartości odkształcenia wynikającej z ogólnego schematu odkształcenia równej $\varphi_{(i)b1} \approx 0,257$, to $y_0 = y_{0max} \approx 2,33$ mm i $R_0 = R_{0min}$. Stąd, podobnie jak w przykładzie 1, otrzymano, że ($y_{0max}/d_z \approx 0,052$) oraz także, że ($y_{0max}/d_z \approx 5,2\%$ i $R_{0min} \approx 77,67$ mm).

Przykład 3

Gdy osiągnięty jest warunek (5.19), to w danym procesie gięcia może wystąpić w wierzchołkowych punktach warstw rozciąganych strefy gięcia stan, związany z pojawieniem się (PSO) w warunkach (PSN). Odpowiednie wielkości charakteryzujące ten proces osiągają swoje dopuszczalne wartości, po przekroczeniu których, może wystąpić lokalizacja deformacji plastycznej w postaci (PSN), a następnie lokalne pojawienie się bruzdy.

Gdy

$$\varphi_{(i)b}''' = \varphi'''_{(i)dop}, \text{ to } \alpha_g''' = \alpha'''_{gdop}. \quad (5.31)$$

Wówczas wg wzoru (5.26) otrzymano ($\varphi'''_{(i)dop} = 0,234$). Wynika stąd, że warunek (5.26) jest taki sam jak warunek (5.6)₂ i będzie dawał takie same rezultaty obliczeniowe. Odczytane z wykresów na rys. 5.6 i 5.7 wielkości α'''_g i g'''_1 mają odpowiednio następujące wartości: $\alpha'''_{gdop} \approx 158^\circ$, dla ($k = 1$), $\alpha'''_{gdop} \approx 79^\circ$, dla ($k = 2$), $\alpha'''_{gdop} \approx 63^\circ$, dla ($k = 2,5$) i $\alpha'''_{gdop} \approx 53^\circ$, dla ($k = 3$) oraz $g'''_{1dop} \approx 3,66$ mm. Odczytana także wartość φ'''_{1dop} wynosi: $\varphi'''_{1dop} \approx 0,203$.

Wartość naprężenia uplastyczniającego obliczona wg wzoru (5.3) osiąga następującą wartość: $\sigma'''_{ps} \approx 417$ MPa, a odpowiednie składowe płaskiego stanu naprężenia liczone wg wzorów (5.27) mają następujące wartości: $\sigma'''_{1s} \approx 521$ MPa oraz $\sigma'''_{2s} \approx 313$ MPa. Więc dla ciała o anizotropii normalnej mamy

$$\sigma'''_{1s} \neq \sigma'''_{2s} \text{ i } \sigma'''_{1s} \neq 2 \sigma'''_{2s} \text{ dla } r \neq 1. \quad (5.32)$$

Przybliżone położenie warstwy obojętnej dla rozpatrywanego stanu (5.31), określone na podstawie wzoru (5.29), wynosi obecnie $y_0''' \approx 1,89$ mm.

Ponieważ $y_0''' \approx R - R'''_0$, więc podobnie jak we wzorze (5.30)₃, promień R'''_0 wyznaczający nowe położenie warstwy obojętnej dla kąta $k\alpha = 0^\circ$, określi się z poniższego wyrażenia następująco

$$R'''_0 = R - y'''_0 . \quad (5.33)$$

$$\text{Stąd } R'''_0 \cong 78,11 \text{ mm oraz } \frac{y'''_0}{d_z} \cong 0,042 \text{ lub } \frac{y'''_0}{d_z} \cong 4,2\% .$$

$$\text{Gdy } (k\alpha_g = 180^\circ, \text{ to } y'''_0 = y'''_{0\max}) \text{ to } \frac{y'''_{0\max}}{d_z} \cong 0,052 \text{ lub } \frac{y'''_{0\max}}{d_z} \cong 5,2\% .$$

Uogólnione wyrażenie na przesunięcie osi obojętnej gięcia plastycznego postaci (5.29) uwzględnia więc strefy przejściowe oraz dotyczy gięcia nieswobodnego, poprzez wprowadzenie odpowiedniego parametru korekcyjnego λ_0 . Parametr λ_0 określa charakterystyczne parametry technologiczne i materiałowe procesu gięcia. Ze wzoru (5.29) wynika także, że o wielkości przesunięcia osi obojętnej decydują nie tylko promień gięcia R i cienkościenność rury s^* , lecz także odpowiednia technologia i parametry procesu gięcia oraz rodzaj materiału giętej rury, które określa współczynnik korekcyjny λ_0 , a także kąt gięcia i kąty położenia badanego punktu w strefie zgięcia kolana.

Przykład 4

Odczytana z tablic wartość technologicznego współczynnika A_5 , dla stali rurowej K10, wynosi $A_5 \cong 0,250$. Odpowiadające tej wartości krytyczne logarytmiczne odkształcenie wzdłużne obliczone z poniższej zależności ma wartość

$$\varphi_{1\text{cr}} = \varphi'''_{1\text{cr}} = \ln(1+A_5) \approx 0,223 .$$

Odpowiadające temu stanowi określone krytyczne kąty gięcia, określone odpowiednio z rys. 5.6 i wzoru (5.1)₁, por. np. [150, 151] osiągają następujące wartości: ($k\alpha_{\text{gcr}} \approx 172^\circ$ i $k\alpha'''_{\text{gcr}} \approx 168^\circ$). Oznacza to, że moment pęknięcia liczony wg tego kryterium nastąpi później, aniżeli momenty pojawienia się rozproszonej i zlokalizowanej utraty stateczności, które liczone są wg zależności (5.4), (5.6)₂ i (5.26) (dla stali kotłowej K10 o współczynniku anizotropii normalnej $r = 1,5$ – analogicznie jak w przykładzie 3). Jest tak dlatego, ponieważ wielkości $\varphi_{1\text{dop}}$ z przykładu 1 i $\varphi'''_{1\text{dop}}$ z przykładów 2 i 3 mają mniejszą wartość niż $\varphi'''_{1\text{cr}}$. Więc, gdy ($\varphi_{1\text{dop}} < \varphi_{1\text{cr}}$) i ($\varphi'''_{1\text{dop}} < \varphi'''_{1\text{cr}}$) to ($\alpha_{\text{gdop}} < \alpha_{\text{gcr}}$) i ($\alpha'''_{\text{gdop}} < \alpha'''_{\text{cr}}$). Odpowiadająca natomiast wartości A_5 krytyczna wartość intensywności odkształcenia, odczytana z wykresów w pracach autora, por. np. [150, 151] jest równa $\varphi'''_{(i)\text{cr}} \approx 0,258$. Natomiast wyznaczona wartość krytyczna intensywności odkształcenia dla tego stanu wynosi $\varphi_{(i)\text{cr}} \approx 0,241$.

Otrzymane wyniki potwierdzają więc intuicyjne przypuszczenia, że podczas technologicznych procesów gięcia rur na giętarkach, wykonanych z plastycznych metali i ich stopów, momenty powstawania utraty stateczności w formie rozproszonej i zlokalizowanej poprzedzają moment pęknięcia, określony w oparciu o wskaźnik A_5 . Dodatkowym argumentem potwierdzającym ten efekt jest fakt, że technologiczny współczynnik wydłużenia A_5 podczas pęknięcia jest pewną wielkością uśrednioną (globalną) po całej długości pomiarowej próbki. Natomiast wielkości odkształceń obliczone dla odpowiednich warunków (kryteriów) utraty stateczności są wielkościami lokalnymi (w otoczeniu punktu pęknięcia) i mogą być dużo razy większe niż otrzymane w oparciu o wskaźnik A_5 . Tak jest w przypadku obliczonej wartości $\varphi_{(i)b1} \cong 0,257$ z przykładu 2. Odpowiadające stanowi pęknięcia wartości lokalnego odkształcenia wzdłużnego i po grubości w szycie są dużo większe od wartości $\varphi_{(i)b1}$. Porównywanie więc wielkości lokalnych odkształceń z uśrednionymi po całej długości pomiarowej próbki pięciokrotnej ma tutaj charakter wyłącznie poglądowy.

W zakończeniu należy dodać także praktyczne zalecenia wynikające z przeprowadzonych obliczeń, że kolana rurociągów w urządzeniach ciśnieniowych pracujących w podwyższonych i wysokich temperaturach należy wykonywać dla kątów gięcia, które nie przekraczają otrzymanych wartości określonych w przykładach (1, 2, 3 i 4). Przekroczenie dopuszczalnych wartości kątów gięcia (a więc także dopuszczalnych odkształceń) będzie powodować znaczne skrócenie czasu właściwej eksploatacji, szczególnie tych kolan rurociągów pracujących w podwyższonych i wysokich temperaturach. Powstanie zjawiska zlokalizowanych odkształceń podczas procesu gięcia rur na kolana rurociągów, spowoduje przyspieszone procesy degradacyjne pełzania, (ponieważ w tych miejscach będą się te procesy koncentrowały i pogłębiały), doprowadzając do powstania pęknięcia i wystąpienia groźnych w skutkach awarii, por. [12, 13], [97-101]. Warto dodać, że wyprowadzone w pracach autora, por. [148-153], [155] analityczne wyrażenia na składowe główne stanu odkształcenia umożliwią także w przyszłości analizę i badanie oceny przydatności rur do gięcia, stosując metody wyznaczania krzywych odkształceń granicznych, podobnie jak to ma miejsce w ocenie tłoczności blach, por. np. prace [16, 21, 45, 70, 73, 84, 88, 137, 146].

7. UWAGI I WNIOSKI

1. Wzrost współczynników anizotropii normalnej i umocnienia plastycznego powoduje wzrost dopuszczalnych krytycznych wartości intensywności odkształcenia i kąta gięcia podczas gięcia na zimno cienko- i grubościennych metalowych rur na giętarkach.

$$\text{Gdy } (r, n) \uparrow, \text{ to } \varphi_{(i)dop} \uparrow \text{ i } \varphi_{(i)cr} \uparrow \text{ oraz } \alpha_{gdop} \uparrow \text{ i } \alpha_{gcr} \uparrow. \quad (5.34)$$

Przy czym należy podkreślić, że wpływ współczynnika anizotropii normalnej jest niewielki w porównaniu z wpływem współczynnika umocnienia materiału.

2. Warunek możliwej inicjacji zlokalizowanej utraty stateczności dla przypadku inicjacji dwuosiowego (płaskiego) stanu odkształcenia (PSO), w warunkach płaskiego stanu naprężenia (PSN), wyznacza większe dopuszczalne wartości intensywności odkształcenia, aniżeli w przypadku utraty stateczności w formie rozproszonej (maksimum siły ciągnącej) oraz mniejsze dla zlokalizowanej utraty stateczności $d(\sigma_p, g) = 0$ podczas dwuosiowego rozciągania. W przypadku utraty stateczności w postaci rozproszonej podczas jednoosiowego równomiernego rozciągania, wówczas jak wiadomo, por. np. [21, 23, 73] dopuszczalna wartość intensywności odkształcenia jest porównywalna z wartością współczynnika wzmocnienia plastycznego metalu. Oryginalnym wkładem niniejszej pracy jest rozszerzenie kryterium lokalizacji odkształceń (wyprowadzone przez Marciniaka dla blach [73]) na przypadek gięcia rur. Tak wyprowadzone rozszerzone kryterium (bez uwzględnienia i z uwzględnieniem efektu wpływu przesunięcia osi obojętnej gięcia plastycznego y_0) zależy w przypadku uogólnionego schematu odkształcenia i uproszczenia I. rzędu dodatkowo od wymiarów geometrycznych giętej rury (w przybliżeniu od jej cienkościennosci s^*).
3. W przypadku gięcia metalowych rur na giętarkach z warunku $d(\sigma_p, g) = 0$ otrzymano nierozpoznane dotąd w poznanej literaturze efekty:
 - a) dla przypadku modelu uogólnionego odkształceń i uproszczenia I rzędu otrzymano dla zewnętrznego punktu wierzchołkowego giętego kolana, w którym panuje (PSN):
 - gdy $s^* \neq 0$, to warunkowi $d(\sigma_p, g) = 0$ odpowiadają stany naprężenia leżące w zakresie hiperbolicznym na elipsie plastyczności dla przypadku gdy: $(\sigma_1 \text{ i } \sigma_2) > 0$ oraz $d\varphi_2 < 0$,
 - gdy $s^* = 0$ (powierzchnia wewnętrzna giętego kolana o grubości $g = 0$) lub próbka płaska, gdy $d_z \rightarrow \infty$. Wówczas warunkowi $d(\sigma_p, g) = 0$ odpowiada punkt paraboliczny na elipsie plastyczności, w którym odpowiednio ($d\varphi_2 = 0$) - inicjacja (PSN),
 - gdy $s^* = 0,5$ wówczas rura przechodzi w pełny pręt, gdzie warunkowi $d(\sigma_p, g) = 0$ odpowiada na elipsie plastyczności punkt $\sigma_1 > 0$ i $\sigma_2 = 0$ oraz ($d\varphi_2 = d\varphi_3 = -0,5 d\varphi_1$). Jeżeli więc współczynnik: $s^* \in (0,5; 0)$, to wówczas odpowiednio: $\sigma_2 / \sigma_1 \in (0; 0,5)$. Gdy natomiast w zewnętrznych punktach lub punkcie warstw rozciąganych realizowany będzie schemat odkształcenia reprezentowany przez składowe odkształcenia opisane uśrednionymi wzorami (gdy powierzchnia odniesienia jest warstwą środkową w ścianie rury).

Wówczas dla $s^* \in (0,5; 0)$ otrzymuje się odpowiednio, że $\sigma_2 / \sigma_1 \in (0,2; 0,5)$. Oznacza to, że dla przypadku pełnego pręta (gdy $s^* = 0,5$) wówczas w środkowej warstwie naprężenie ($\sigma_2 \neq 0$), więc $\sigma_2 / \sigma_1 = 0,2$.

- b) dla przypadku modelu odkształceń wynikającego z uproszczenia 2. i 3. rodzaju otrzymano także dla zewnętrznego punktu wierzchołkowego giętego kolana, w którym panuje płaski stan naprężenia (PSN), że warunkowi $d(\sigma_p, g) = 0$ odpowiada punkt paraboliczny s na elipsie plastyczności, w którym odpowiednio ($d\phi_2 = 0$), co fizycznie oznacza lokalną inicjację (PSO).
4. Podczas gięcia rur na gorąco, półgorąco lub z podgrzaniem [74, 76] należy uwzględnić do opisu materiału inną postać równania konstytutywnego anizotropii (2.1) oraz należy uwzględniać inne kryteria utraty stateczności takie, które uwzględniać będą efekty cieplne związane ze wzrostem temperatury. Wynika to m.in. stąd, że wraz ze wzrostem temperatury maleje współczynnik wzmocnienia plastycznego metali, por. [26, 49, 135, 138, 139]. Z drugiej strony, materiał staje się bardziej miękki i plastyczny, więc będzie się odznaczał większymi wartościami dopuszczalnych i krytycznych odkształceń. W odpowiednio wysokiej temperaturze zakłada się [73, 74, 138, 139], że granica wytrzymałości materiału jest prawie równa granicy plastyczności (występuje brak efektu wzmocnienia).
 5. Proces gięcia rur, który opisuje uogólniony schemat odkształcenia (bez uwzględnienia efektu wpływu przesunięcia osi obojętnej gięcia plastycznego na stan odkształceń plastycznych) zaprezentowany w pracach autora, por. [148], [149, 155] oraz odpowiednie uproszczone metody, analizowane także w niniejszej pracy, powodują, że przesunięcie warstwy obojętnej zgięcia plastycznego następuje „ku dołowi” (w kierunku warstw ściskanych oraz w kierunku osi obrotu wzornika giętarki) i wzrasta wraz ze wzrostem kąta gięcia. Wartość tego przesunięcia w rozpatrywanych przykładach dla punktu wierzchołkowego warstw rozciąganych (patrz przykłady 1, 3) jest rzędu $\sim (1 \div 2 \text{ mm})$. Wielkość ta jest proporcjonalnie porównywalna z wartością pocienienia ścianki dla tych punktów warstw rozciąganych, por. wykresy na rys. 5.6.

ROZDZIAŁ VI

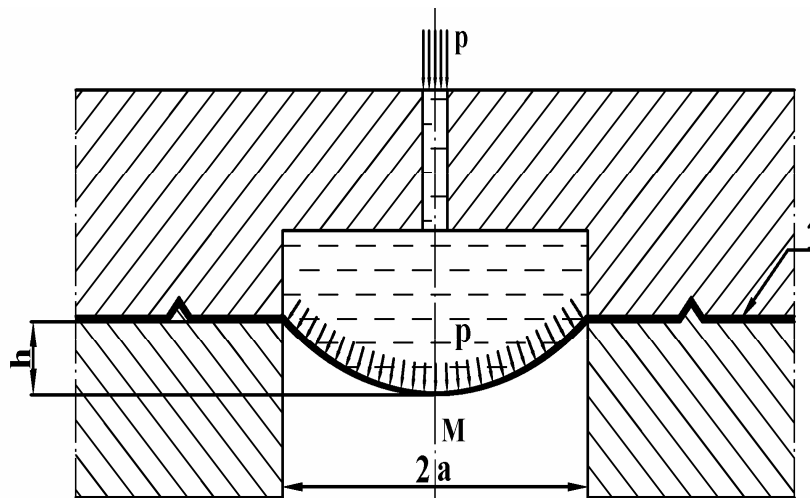
WARUNKI UTRATY STATECZNOŚCI W PRÓBIE HYDRAULICZNEGO WYBRZUSZANIA WYTŁOCZEK

1. WSTĘP

Znaczny udział w procesach obróbki plastycznej zajmują różnego rodzaju operacje technologiczne związane z tłoczeniem wyrobów z blach. W tłocznictwie blach cienkich ważną grupę stanowią procesy, w których żądany kształt wytłoczki uzyskuje się poprzez dwuosiowe rozciąganie w warunkach płaskiego stanu naprężenia (PSN) oraz istnieje wiele operacji tłoczenia blach, podczas których występuje dwuosiowe równomierne rozciąganie. Można tu wymienić technologiczne procesy obciągania oraz procesy tłoczenia blach utwierdzonych na obrzeżu. Kształtowanie wytłoczki następuje wówczas najczęściej za pomocą cieczy (oleje syntetyczne), żywic syntetycznych lub sztywnego stempla.

Laboratoryjną próbą symulującą rzeczywiste warunki tłoczenia i należąca do wymienionych wyżej grup procesów technologicznego wytłaczania jest próba hydraulicznego wybrzuszania blach cieczą, zwana także próbą Jovignota. Próba ta służy przede wszystkim do badania własności tłocznych, wytrzymałościowych i plastycznych blach, a zastąpienie sztywnego stempla ciśnieniem cieczy eliminuje wpływ tarcia pomiędzy narzędziem (stemplem) a powierzchnią blachy. Mimo że stany naprężeń i odkształceń w wybrzuszanej wytłoczce różnią się na ogół od stanów występujących w operacjach tłoczenia przemysłowego (za wyjątkiem tłoczenia cieczą, gumą czy inną żywicą syntetyczną), próba ta zachowała swą przydatność i stosowana jest ciągle w różnych odmianach. Niektórzy autorzy są zgodni, por. np. [44, 84, 96], że dane z próby wygniatania cieczą są przydatniejsze do oceny tłoczności blach, aniżeli wyniki uzyskane ze zwykłej próby ze sztywnym stemplem. Podkreśla się przy tym szczególnie przypadki tłoczenia blach karoseryjnych samochodów, wagonów, blach samolotowych [84], tłoczenie wielu rodzajów naczyń i wyrobów naczyniopodobnych, a także gięcie rur i metalicznych płatów na kształtowe rury spawane (ze szwem spawalniczym), gięcie blach na wszelkiego rodzaju obudowy maszyn i urządzeń przemysłowych oraz użytku domowego, gięcie powłok blaszanych na izolowane cieplnie (preizolowane) rurociągi energetyczne i inne.

Próba wygniatania blach jest także popularna w przemyśle lotniczym [84] i energetycznym. Próbę Jovignota w zmodyfikowanej postaci stosuje się także do badania własności blach przy dynamicznym wytłaczaniu lub w technologicznych procesach platerowania. Ma to znaczenie szczególnie przy dużych prędkościach odkształcenia (metoda wybuchowa), gdyż brak efektów tarcia umożliwia bardziej dokładne określenie własności blach, decydujących o ich przydatności do technologicznych procesów tłoczenia.



Rys. 6.1. Schemat wybrzuszania ciśnieniem cieczy krążka blachy utwardzonego na obrzeżu (próba Jovignota)

Na rys. 6.1 przedstawiono schematycznie próbę Jovignota, w której próbka 1 zaciśnięta jest pomiędzy matrycą a dociskaczem w sposób uniemożliwiający przemieszczenie się obrzeża. Próba przeprowadzana jest z reguły do momentu pęknięcia wytłoczki w miejscu najbardziej osłabionym, w jej środkowej (wierzchołkowej części) w otoczeniu punktu M. Bardziej dokładny opis doświadczeń i otrzymanych wyników z takiej próby przedstawiono w pracy [2], w której stwierdzono między innymi, że prawie 95% wytłoczek miało pęknięcia spowodowane lokalnym pocienieniem blachy, w otoczeniu punktu wierzchołkowego M. Technologiczna próba wybrzuszania krążka blachy cieczą należy do grupy zagadnień osiowo symetrycznych [47, 72, 115, 116, 135, 138, 162, 167].

Praktycznym celem próby Jovignota jest między innymi pomiar wysokości h wytłoczki jako miary twardości blachy i rejestracja ciśnienia, odpowiadającego momentowi bezpośrednio przed pęknięciem (w przeważającej części także w ponad 95% przypadkach) jest to ciśnienie za punktem p_{max} , w którym ciśnienie robocze osiąga swoją wartość maksymalną (jest to jeden z punktów utraty stateczności odkształcanej powłoki). Powstanie pęknięcia powoduje automatyczne przerwanie próby i wyłączenie pompy ciśnieniowej tłoczącej ciecz.

Obecnie, w próbach tego rodzaju można w sposób ciągły mierzyć i rejestrować bieżące wartości ciśnienia i odpowiadające im wartości wysokości czaszy. Można zatem zarejestrować i zmierzyć w szczególności wartość p_{max} i odpowiadającą mu wartość wysokości czaszy. Punkt p_{max} w tej próbie jest równie ważny jak punkt maksimum na krzywej jednoosiowego rozciągania, służący do określania wytrzymałości elementów maszyn i urządzeń.

Oznaczenia i skróty

- a – promień zewnętrzny wytłoczki,
 B i C – współczynniki anizotropii w płaszczyźnie blachy (anizotropia płaska),
 D – stała materiałowa przy potęgowej krzywej umocnienia (równanie Swifta),
por. np. [137],
 g – aktualna grubość ścianki wytłoczki odpowiadająca promieniowi bieżącemu oznaczonemu przez r_i ,
 g_0 – początkowa grubość blachy wytłoczki,
 h – wysokość wytłoczki,
 n – współczynnik krzywej umocnienia,
 p – ciśnienie cieczy w próbie hydraulicznego wytłaczania,
 r – współczynnik anizotropii normalnej,
 R – promień czaszy kulistej opisujący kształt czaszy wytłoczki,
 r_i – promień bieżący wytłoczki,
 r_0 – promień bieżący krążka blachy przed wytłaczaniem,
 z – wartość odciętej odpowiadająca utracie stateczności [88].

Litery greckie

- α – kąt zawarty pomiędzy promieniem R w miejscu odpowiadającym promieniowi bieżącemu r_i a osią symetrii wytłoczki,
 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – składowe główne logarytmicznych odkształceń plastycznych odpowiednio: obwodowe (równoleżnikowe), południkowe i po grubości w kierunku normalnym do powierzchni blachy,
 $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3$ – prędkości głównych logarytmicznych odkształceń plastycznych odpowiednio: obwodowe (równoleżnikowe), południkowe i po grubości w kierunku normalnym do powierzchni blachy,
 $\varphi_{(i)}$ – logarytmiczne plastyczne odkształcenie zastępcze (intensywność odkształcenia), $\varphi_{(i)} = \sqrt{\frac{2}{3}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2)}$,
 φ_0 – logarytmiczne odkształcenie wstępne (stała materiałowa),
 γ – stosunek naprężeń głównych ($\gamma = \sigma_2 / \sigma_1$),
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – składowe naprężeń głównych,
 σ_p – naprężenie równe naprężeniu plastycznemu,
 τ – naprężenia styczne w warunkach płaskiego stanu naprężenia (PSN),
 τ_{cr} – krytyczne naprężenie styczne w warunkach płaskiego stanu naprężenia oznaczanego przez skrót (PSN).

2. CEL I PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA

Celem niniejszego rozdziału jest analityczne opracowanie metody służącej do określania wysokości h (parametr tłoczności blachy) wytłaczanej czaszy dla przypadku czterech praktycznych inżynierskich warunków utraty stateczności oraz zbadanie wpływu niektórych parametrów materiałowych na tę wysokość (a więc i na tłoczność materiału blachy), jak współczynnik umocnienia n , współczynnik anizotropii normalnej r i współczynników r_1 i r_2 anizotropii w płaszczyźnie blachy (anizotropia płaska). Z większości danych eksperymentalnych wynikało, że pocienienie grubości ścianki w wierzchołku czaszy w momencie pęknięcia przewyższało wartości 50%. W procesie wybrzuszenia zachodzą więc duże odkształcenia plastyczne (nawet > 60%), gdzie dla przypomnienia maksymalne odkształcenia sprężyste są małego rzędu, np. 0,5%. Do analizy zagadnienia przyjęto anizotropowy (ortotropowy) model ciała sztywnoplastycznego ze wzmocnieniem, prawa płynięcia plastycznego Levy'ego-Misesa i logarymiczne miary odkształceń głównych.

W oparciu o literaturę [16, 33, 45, 53, 71, 73, 77, 81, 88, 137] uwzględniono stosowane już w zagadnieniach praktyki inżynierskiej następujące rodzaje utraty stateczności plastycznie odkształcanej powłoki:

- a) ciśnienie cieczy wywierane na kształtowaną (wybrzuszaną) powłokę osiąga wartość maksymalną,
- b) iloczyn naprężenia uplastyczniającego i aktualnej grubości ścianki w pewnym jej punkcie (w przeważającej większości jest to punkt wierzchołkowy) osiąga maksimum,
- c) powstanie lokalnego zmniejszenia się grubości wytłoczki (lokalne pocienienie) powodujące lokalną zmianę stosunku naprężeń głównych taką, że inicjuje się lokalne pocienienie w postaci jednej lub kilku bruzd,
- d) powstanie tak zwanej niestateczności w postaci pasma ścinania w miejscu pocienienia w warunkach płaskiego stanu naprężenia (PSN) dla przypadku naprężeń rozciągających, gdy naprężenie ścinające τ osiąga wartość krytyczną.

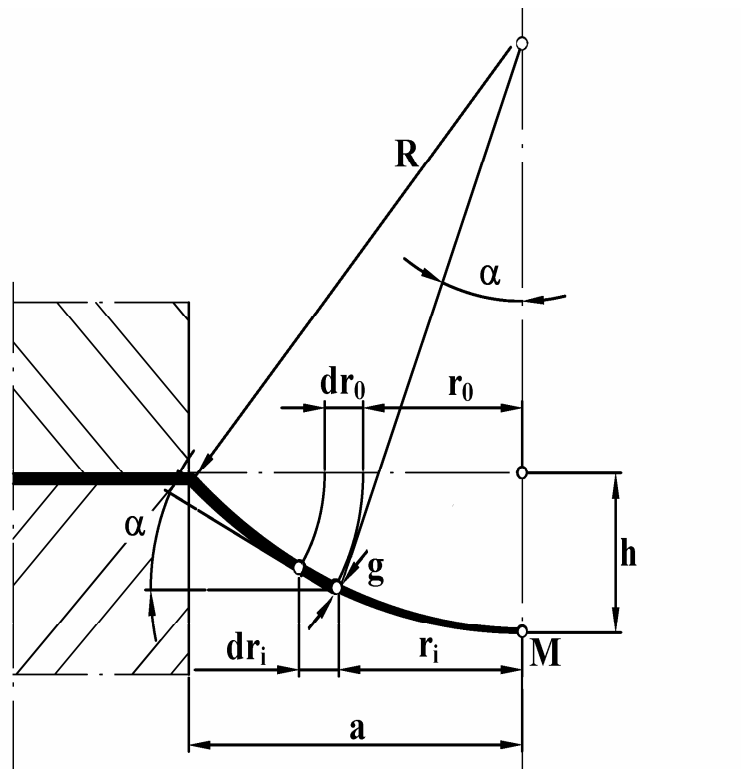
Zakłada się, że materiał wytłoczki spełnia warunek plastyczności H-M-H, uogólniony dla przypadku ciał o własnościach anizotropowych (ortotropowych) przez Hilla [31]. Przyjmuje się stowarzyszone prawa plastycznego płynięcia Levy'ego-Misesa oraz zakłada się nieściśliwość plastyczną materiału wytłoczki.

Schemat odkształceń i naprężeń w wybrzuszonym krążku blachy przyjęto, jak w przypadku odkształcanej powłoki błonowej. Jest to niewątpliwie pewne uproszczenie, w stosunku do rzeczywistego rozkładu odkształceń i naprężeń w metalicznej czaszy kulistej. Powoduje to, że określone w pracy wysokości wytłoczki h mogą być mniejsze od wysokości rzeczywistej. Będą to więc pewnego rodzaju dolne oszacowania, mające jednak tę zaletę, że może być szybko otrzymane na podstawie prostych analitycznych wyrażeń.

W pracy, jak już wspomniano, zbada się wpływ współczynnika umocnienia i wstępnego odkształcenia plastycznego oraz wpływ anizotropii normalnej i anizotropii płaskiej (w płaszczyźnie blachy) na krytyczną wartość zastępczego odkształcenia plastycznego $\varphi_{(i)}$, odpowiadającego powyższym (a-d) warunkom utraty stateczności. Znajomość krytycznego zastępczego logarytmicznego odkształcenia plastycznego $\varphi_{(i)}$ wystarczy przy powyższych założeniach do określania krytycznej wartości wysokości wytłoczki h .

Zgodnie z teorią błonową wytłoczka powstająca z krążka blachy utwierdzonego na obrzeżu i poddana działaniu ciśnienia cieczy, przyjmować będzie kształt czaszy kulistej o stopniowo zmniejszającej się grubości jak na rys. 6.2. Zwiększanie się pola powierzchni wytłoczki musi być, przy przyjętej stałej objętości materiału, kompensowane zmniejszaniem się jej grubości, przy czym największe pocienienie występuje w wierzchołkowej części.

Obliczone wartości przedstawiono w postaci tabeli 1 oraz na odpowiednich wykresach, które mają charakter nomogramów.



Rys. 6.2. Schemat odkształcenia (wybrzuszania) wytłaczanej kulistej powłoki wraz z podstawowymi wymiarami geometrycznymi

Logarytmiczne składowe odkształceń obwodowych (równoleżnikowych), południkowych i po grubości rozpatrywanego elementu powłoki wynoszą [71, 72]

$$\varphi_1 = \ln \frac{r_i}{r_0}, \quad \varphi_2 = \ln \frac{dr_i}{dr_0 \cdot \cos \alpha}, \quad \varphi_3 = \ln \frac{g}{g_0}. \quad (6.1)$$

Aby wg przyjętych założeń wytłoczka miała kształt czaszy kulistej musi zachodzić zgodnie z geometrią odkształceń, że $\varphi_1 = \varphi_2$. Po podstawieniu (6.1)_{1,2} do warunku ($\varphi_1 = \varphi_2$) i po przekształceniach w wyniku otrzymuje się równanie różniczkowe [71, 72].

Warunek nieściśliwości plastycznej ma postać [73]

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0. \quad (6.2)$$

Po rozwiązaniu wspomnianego równania różniczkowego, uwzględnieniu warunku brzegowego, gdy ($r_i = a$ to $g = g_0$), uwzględnieniu warunku nieściśliwości plastycznej materiału (6.2) i zależności geometrycznej wynikającej z rysunku 6.2, że $\{a^2 + (R - h)^2 = R^2\}$ otrzymuje się następującą zależność

$$\varphi_3 = \ln \frac{g}{g_0} = 2 \ln \frac{2R - h}{R + \sqrt{R^2 - r_i^2}}. \quad (6.3)$$

Po uwzględnieniu w wyrażeniu (6.3) odpowiednich zależności geometrycznych wynikających dla czaszy kulistej na rys. 6.2, po przekształceniach otrzymamy następujący wzór

$$\varphi_3 = \ln \frac{g}{g_0} = 2 \ln \frac{2a^2}{a^2 + h^2 + \sqrt{(a^2 + h^2)^2 - 4h^2 r_i^2}}, \quad (6.4)$$

gdzie: g_0 – początkowa grubość wytłoczki, g – aktualna grubość ścianki wytłoczki odpowiadająca promieniowi bieżącemu r_i .

Wykorzystując doświadczalny fakt, że największe pocienienie występuje w wierzchołku wytłoczki na promieniu $r_i = 0$ oraz uwzględniając, że w wyniku przyjęcia błonowego schematu odkształceń ($\varphi_1 = \varphi_2$), wówczas w rezultacie

otrzymano, że ($\varphi_{(i)} = -\varphi_3$). Uwzględniając powyższe uwagi we wzorze (6.4) po przekształceniach wyniknie, [73]

$$\varphi_{(i)} = 2 \ln \left[1 + \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right], \quad (6.5)$$

a stąd

$$h = a \sqrt{e^{\frac{1}{2}\varphi_{(i)}} - 1}. \quad (6.6)$$

Powyższe wyrażenie określa zależność maksymalnej wysokości wybrzuszonej wytłoczki, w zależności od maksymalnej wartości intensywności odkształcenia osiągniętego dla danego warunku utraty stateczności, por. warunki (a-c) podane w niniejszym punkcie pracy.

3. OKREŚLENIE STANÓW UTRATY STATECZNOŚCI

3.1. PODSTAWOWE RÓWNANIA I ZALEŻNOŚCI

1. W przypadku blach występuje często szczególny przypadek anizotropii charakteryzujący się tym, że w materiale istnieją trzy wyróżnione, wzajemnie prostopadłe kierunki: kierunek walcowania i kierunek prostopadły do niego leżące w płaszczyźnie blachy oraz kierunek normalny do powierzchni blachy. Ten rodzaj anizotropii nazywa się często ortotropią.

Teoria plastyczności ciała anizotropowego (ortotropowego) została opracowana przez Hilla [31] i jest cytowana w wielu książkach naukowych, opracowaniach monograficznych i podręcznikach akademickich, a także często stosowana w praktyce inżynierskiej.

W przypadku dwuosowego stanu naprężenia i przy założeniu, że kierunki naprężeń głównych σ_1 i σ_2 , w płaszczyźnie blachy pokrywają się z odpowiednim kierunkiem walcowania i kierunkiem prostopadłym do niego leżącym w płaszczyźnie blachy, a kierunek trzeciego naprężenia głównego ($\sigma_3 = 0$) jest prostopadły do powierzchni blachy, wówczas: warunek plastyczności, odkształcenie zastępcze oraz prawa plastycznego płynięcia mają odpowiednio następującą postać

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_p = \sqrt{\sigma_1^2 + \frac{2\sigma_1\sigma_2}{1+C} + \frac{(1+B)\sigma_2^2}{1+C}}, \\ \varphi_i = \sqrt{1+C} \sqrt{\frac{(1+B)\varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + (1+C)\varphi_2^2}{(1+B)(1+C)-1}}, \\ \frac{\dot{\varphi}_1}{(1+C)\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\dot{\varphi}_2}{(1+B)\sigma_2 - \sigma_1} = \frac{\dot{\varphi}_3}{-C\sigma_1 - B\sigma_2} = \frac{\dot{\varphi}_{(i)}}{(1+C)\sigma_p}. \end{array} \right. \quad (6.7)$$

W powyższych równaniach współczynniki B i C są stałymi charakteryzującymi anizotropię w płaszczyźnie materiału (blachy) tak, że

$$\frac{\dot{\varphi}_1}{\dot{\varphi}_2} = \frac{1}{B} = r_2, \quad \frac{\dot{\varphi}_2}{\dot{\varphi}_3} = \frac{1}{C} = r_1. \quad (6.8)$$

2. Szczególnym rodzajem anizotropii blachy jest tzw. anizotropia normalna, w wyniku której własności blachy są jednakowe we wszystkich kierunkach leżących w płaszczyźnie blachy, natomiast różnią się od właściwości, jakie wykazuje ta blacha w kierunku prostopadłym do jej powierzchni. Stąd otrzymamy, że ($r_1 = r_2 = r$), więc

$$B = C = \frac{1}{r} \text{ lub } r = \frac{1}{B} = \frac{1}{C}. \quad (6.9)$$

3. Najprostszym rodzajem własności materiału blachy jest izotropia. W tym przypadku własności plastyczne blachy nie zależą od żadnego kierunku i we wszystkich kierunkach są jednakowe, wówczas

$$B = C = r = 1. \quad (6.10)$$

Do analizy utraty stateczności w próbie hydraulicznego wybruszenia wylózek przyjęto następującą potęgową postać równania dla krzywej umocnienia materiału wylóczki

$$\sigma_p = D(\varphi_0 + \varphi_{(i)})^n. \quad (6.11)$$

Jest to równanie Swifta [73, 137].

3.2. ODKSZTAŁCENIA GRANICZNE WYNIKAJĄCE Z WARUNKÓW UTRATY STATECZNOŚCI

W pracach [45, 53, 73] wykazano, że w procesach plastycznego formowania materiałów w warunkach płaskiego stanu naprężenia wyróżnić można trzy charakterystyczne rodzaje utraty stateczności i określić dla tych stanów odkształcenia graniczne.

a) Utrata stateczności zachodzi wówczas, gdy proces odkształcania wytłoczki zachodzi bez jednoczesnego wzrostu ciśnienia cieczy. Fizycznie oznacza to, jak już wspomniano, osiągnięcie przez ciśnienie wartości maksymalnej, co matematycznie oznacza

$$\frac{dp}{d\varphi_{(i)}} = 0. \quad (6.12)$$

Postępując podobnie jak w pracy [73], w której ograniczono się wyłącznie do przypadku materiału izotropowego, w niniejszym opracowaniu wyznaczy się wartości odkształcenia zastępczego odpowiadające stanowi (6.12) dla materiałów anizotropowych następująco:

- dla materiału blachy o własnościach anizotropii płaskiej

$$\varphi_{(i)} = \frac{n}{3} \sqrt{\frac{(1+C)(B+C+4)}{(1+B)(1+C)-1}} - \varphi_0, \quad (6.13)$$

- dla materiału blachy o własnościach anizotropii normalnej

$$\varphi_{(i)} = \frac{n\sqrt{2(1+r)}}{3}, \quad (6.14)$$

- dla materiału blachy o własnościach izotropowych, wg [73]

$$\varphi_{(i)} = \frac{2}{3}n - \varphi_0. \quad (6.15)$$

b) Utrata stateczności następuje w chwili, gdy pewna część wytłoczki (najczęściej jest to wierzchołkowa część) zacznie odkształcać się bardziej niż inne i wówczas lokalnie w otoczeniu tej części kształt kulisty wytłoczki zostanie nieznacznie zakłócony [73]. Zjawisko to fizycznie występuje wówczas, gdy wytrzymałość plastyczna w ścianie wytłoczki, wyrażona iloczynem $(\sigma_p \cdot g)$

osiągnie, jak już wspomniano wcześniej, wartość ekstremalną i przy dalszym odkształcaniu wytłoczki zacznie się zmniejszać. Matematycznie stanowi takiemu odpowiada następujący warunek

$$\frac{d(\sigma_p \cdot g)}{d\varphi_{(i)}} = 0. \quad (6.16)$$

Postępując podobnie jak w pracy [73], po uwzględnieniu zależności konstytutywnej (6.11) otrzymano

- dla materiału blachy o własnościach anizotropii płaskiej

$$\varphi_{(i)} = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{(1+C)(B+C+4)}{(1+B)(1+C)-1}} - \varphi_0, \quad (6.17)$$

- dla materiału blachy o własnościach anizotropii normalnej

$$\varphi_{(i)} = n \sqrt{\frac{1+r}{2}} - \varphi_0, \quad (6.18)$$

- dla materiału blachy o własnościach izotropowych, wg [73]

$$\varphi_{(i)} = n - \varphi_0. \quad (6.19)$$

c) Trzecia forma utraty stateczności spowodowana jest dalszą nierównomiernością rozkładu odkształcenia, wskutek lokalnego pocienienia materiału (powstanie jednej lub kilku bruzd) w wierzchołkowej części wytłoczki podczas dalszego kontynuowania procesu wybrzuszenia. Procesowi pogłębiania się bruzdy może towarzyszyć dalsze odkształcanie obszarów bezpośrednio przylegających do bruzdy, ze stopniowo zmniejszającą się prędkością. Odkształcenie to ustaje w chwili, gdy stan naprężenia w bruzdzie osiąga punkt **S** na elipsie warunku plastyczności rys. 6.3. Wówczas to zgodnie z teorią stowarzyszonych praw plastycznego płynięcia Levy'ego-Misesa, otrzyma się

$$\frac{\dot{\varphi}_2}{\dot{\varphi}_1} = 0. \quad (6.20)$$

Stan naprężenia odpowiadający punktowi **S** na elipsie plastyczności, por. rys. 6.3 i zarazem matematycznemu warunkowi (6.20) jest następujący:

- dla materiału blachy o własnościach anizotropii płaskiej

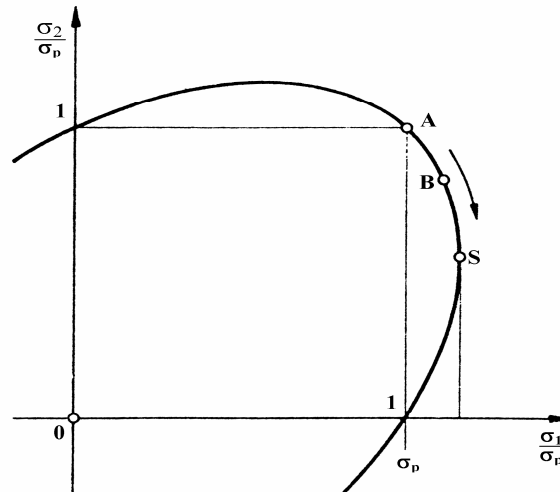
$$\sigma_1 = \frac{1+C}{\sqrt{(1+B)(1+C)-1}} \sigma_p, \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{(1+B)(1+C)-1}} \sigma_p, \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1}{1+C}, \quad (6.21)$$

- dla materiału blachy o własnościach anizotropii normalnej

$$\sigma_1 = \frac{1+r}{\sqrt{1+2r}} \sigma_p, \quad \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{1+2r}} \sigma_p, \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{r}{1+r}, \quad (6.22)$$

- dla materiału blachy o własnościach izotropowych wg [73]

$$\sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_p, \quad \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_p, \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1}{2}. \quad (6.23)$$



Rys. 6.3. Przejściowe stany naprężeń w wybrzuszonej wyloczce [73]

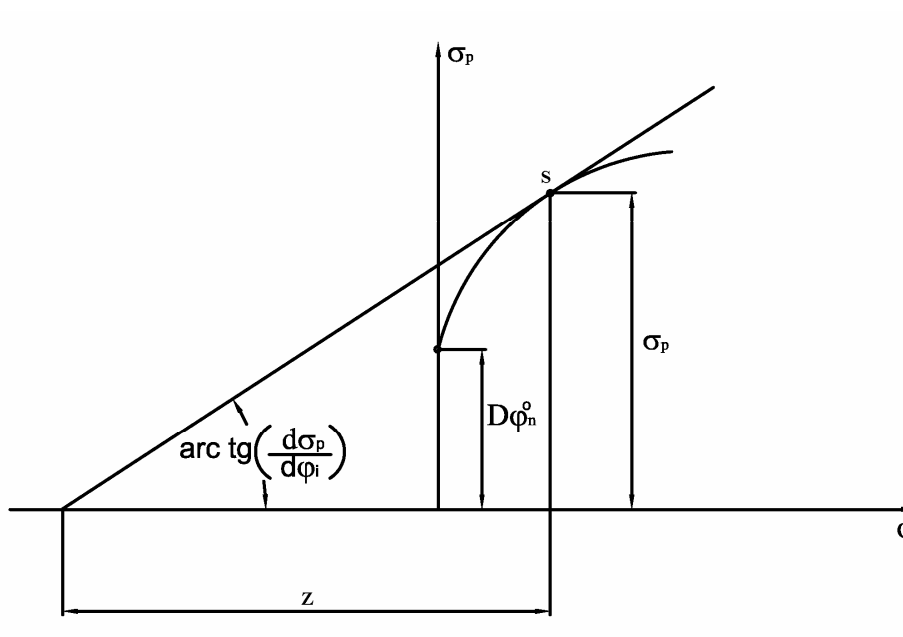
Aby wyznaczyć wartości odkształceń granicznych dla tej formy utraty stateczności, należy wykorzystać ogólny warunek niestateczności w procesach wylączania metalowych blach, w warunkach płaskiego stanu naprężenia (PSN), który przedstawiono w pracy [88]. Warunek ten ma następującą postać

$$\frac{d\sigma_p}{d\varphi_{(i)}} \cdot \frac{1}{\sigma_p} = \frac{1}{z}, \quad (6.24)$$

gdzie: z – jest tzw. krytyczną odcięta, por. rys. 6.4, której postać jest następująca

$$z = \sqrt{1+C} \frac{\sqrt{[(1+C)\gamma^2 - 2\gamma + (1+B)]^3}}{(1+C)^2 \gamma^3 - (1+2C)\gamma^2 - (1+2B)\gamma + (1+B)^2}, \quad (6.25)$$

gdzie: γ – jest jak już wspomniano, współczynnikiem stosunku naprężeń głównych dla danego warunku utraty stateczności. Stąd: $\gamma = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$.



Rys. 6.4. Schemat krzywej umocnienia z zaznaczonym punktem styczności s i odcięta podstyczna z , wg [88]

Podstawiając wyrażenie (6.11) do lewej strony zależności (6.24), po wykonaniu odpowiednich działań, otrzymano następujące wyrażenie

$$\frac{n}{\varphi_{(i)} + \varphi_0} = \frac{1}{z}. \quad (6.26)$$

Podstawiając kolejno wyrażenia dla współczynnika γ dla stosunku naprężeń głównych (6.21)₃ - (6.23)₃ do wyrażenia (6.25) i uwzględnieniu równania

(6.26) wyprowadzić można odpowiednie wzory na krytyczne (graniczne) wartości odkształcenia zastępczego $\varphi_{(i)}$ odpowiadające tej formie utraty stateczności, a mianowicie:

- dla materiału blachy o własnościach anizotropii płaskiej

$$\varphi_{(i)} = \frac{n(1+C)}{\sqrt{(1+B)(1+C)}-1} - \varphi_0, \quad (6.27)$$

- dla materiału blachy o własnościach anizotropii normalnej

$$\varphi_{(i)} = \frac{n(1+r)}{\sqrt{1+2r}} - \varphi_0, \quad (6.28)$$

- dla materiału blachy o własnościach izotropowych

$$\varphi_{(i)} = \frac{2}{\sqrt{3}}n - \varphi_0. \quad (6.29)$$

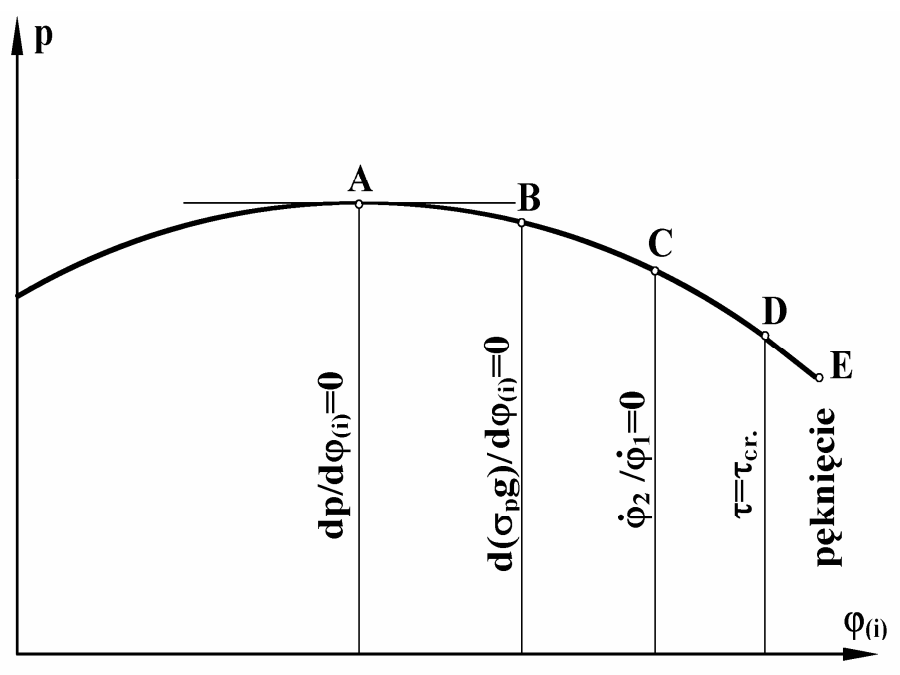
d) Czwarta forma utraty stateczności może powstać w wyniku zainicjowania się lokalnego ścinania po grubości ścianki w kierunku działania maksymalnych naprężeń stycznych (powstanie tak zwanej niestateczności w postaci pasma ścinania) w miejscu pocienienia w warunkach płaskiego stanu naprężenia (PSN), dla przypadku naprężeń rozciągających, por. [7, 30, 45, 47, 73, 135, 138, 139]. Gdy naprężenia główne są rozciągające (mają jednakowe znaki), wówczas płaszczyzny maksymalnych naprężeń stycznych przecinają powierzchnię blachy pod kątem 45° i przecinają one tę powierzchnię wzdłuż jednej prostej [30, 47, 138].

W tym warunku naprężenie ścinające τ osiąga więc wartość krytyczną. Warunek ten bezpośrednio poprzedza pęknięcie wybrzuszonej wytłoczki, co potwierdzają dane doświadczalne zestawione w tabeli 1.

Wyprowadzony w pracach [7, 45] warunek utraty stateczności dotyczył tylko materiału wytłoczki o własnościach izotropowych. Stąd

$$\varphi_{(i)} = \frac{4}{11}(2n+1) - \varphi_0. \quad (6.30)$$

Zachowanie się stanów niestateczności wybrzuszonej wytłoczki w próbie Jovignota można przedstawić schematycznie na wykresie w układzie ciśnienie-odkształcenie zastępcze $(p - \varphi_{(i)})$, por. rys. 6.5.



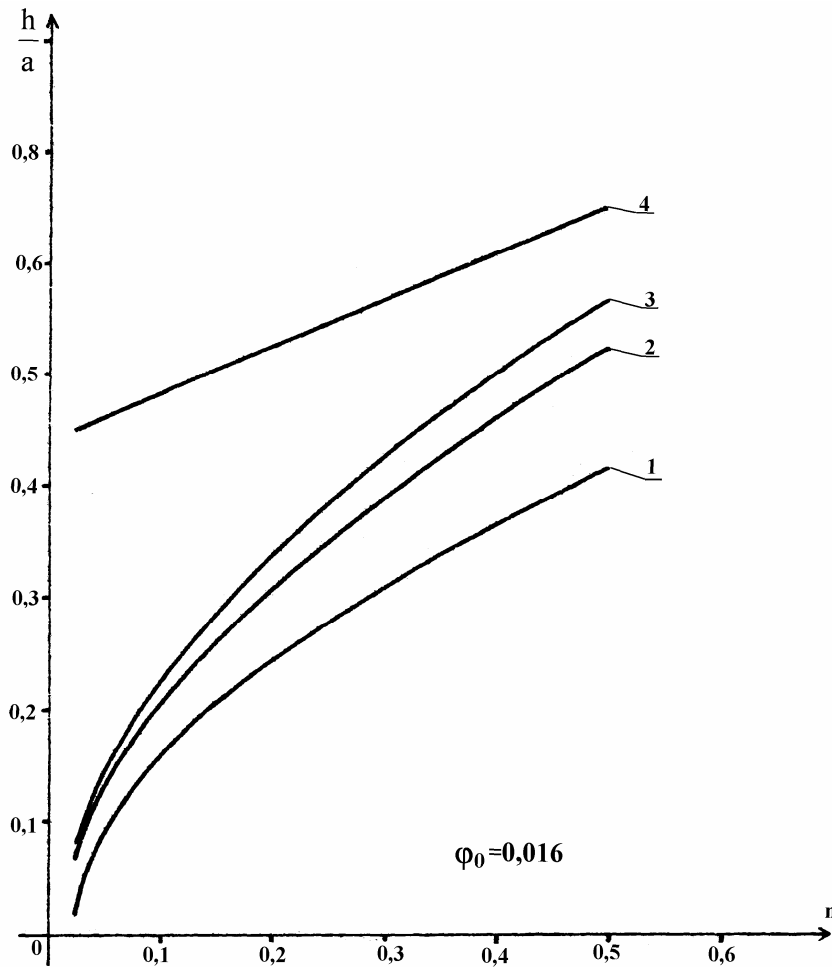
Rys. 6.5. Poglądowy proces odkształcania wybrzuszonej cieczą wylóczki z zaznaczonymi punktami charakterystycznymi określającymi dane warunki utraty stateczności oraz punkt pęknięcia

Jak widać na rys. 6.5, dla danego materiału odpowiednio: pierwsza-a, druga-b, trzecia-c i czwarta-d forma utraty stateczności w procesie wybrzuszenia wylóczki następują kolejno po sobie. Po przekroczeniu punktu reprezentującego trzecią formę utraty stateczności w postaci inicjacji bruzdy (następuje lokalna inicjacja płaskiego stanu odkształcenia-(PSO)) a obszary poza bruzdą przechodzą w stan sztywny. Natomiast po przekroczeniu czwartej formy utraty stateczności w postaci ścinania większość wylóczek ulegnie po chwili pęknięciu. W dalszym więc etapie procesu wylączania wylóczka ulega makropęknięciu (co najczęściej ma miejsce w wierzchołkowej części wylóczki), a to automatycznie kończy proces wybrzuszenia wylóczki w próbie Jovignota.

4. OMÓWIENIE OTRZYMANYCH WYNIKÓW

Otrzymane wyniki przedstawiono w tabeli 6.1 oraz w postaci odpowiednich wykresów, które mają charakter nomogramów. Na rysunku 6.6 pokazano wyniki wylączania wylóczki wykonanej z materiału izotropowego. Krzywą 1 otrzymano ze wzoru (6.15), z warunku na maksimum ciśnienia cieczy

($dp/d\varphi_{(i)} = 0$), a krzywą 2 odpowiednio ze wzoru (6.19). Krzywą 3 otrzymano ze wzoru (6.29) dla warunku ($\dot{\varphi}_2/\dot{\varphi}_1 = 0$) – inicjacja płaskiego stanu odkształcenia (PSO) – powstanie i rozwój bruzdy, aż do wystąpienia pęknięcia. Krzywą 4 otrzymano odpowiednio ze wzoru (6.30) wynikającego z warunku na osiągnięcie przez naprężenie styczne wartości krytycznych ($\tau = \tau_{cr}$) [7] w warunkach (PSN) dla przypadku, gdy dwa główne naprężenia są rozciągające [31, 47, 138, 139].



Rys. 6.6. Wykresy wysokości wybrzuszonej wytłoczki w zależności od współczynnika umocnienia dla czterech przypadków utraty stateczności

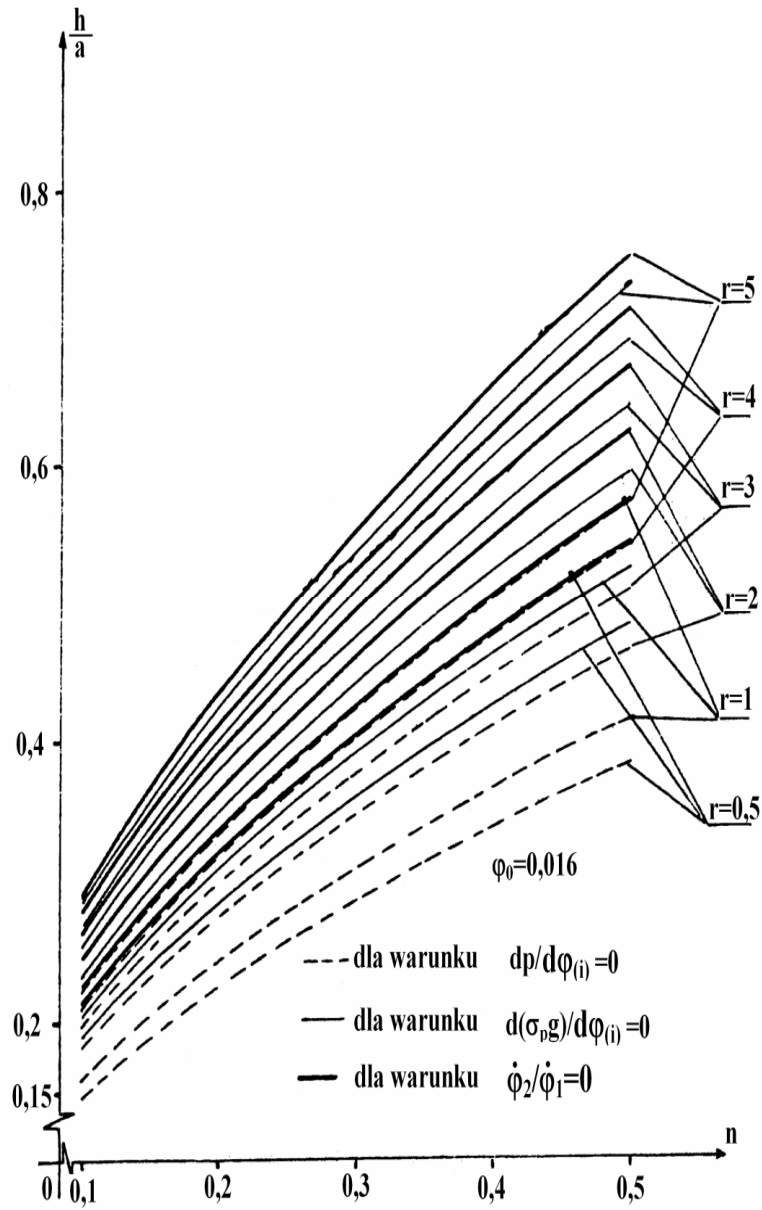
Tabela 6.1

Porównanie wyników doświadczalnych [7] z przewidywanymi przez teorię

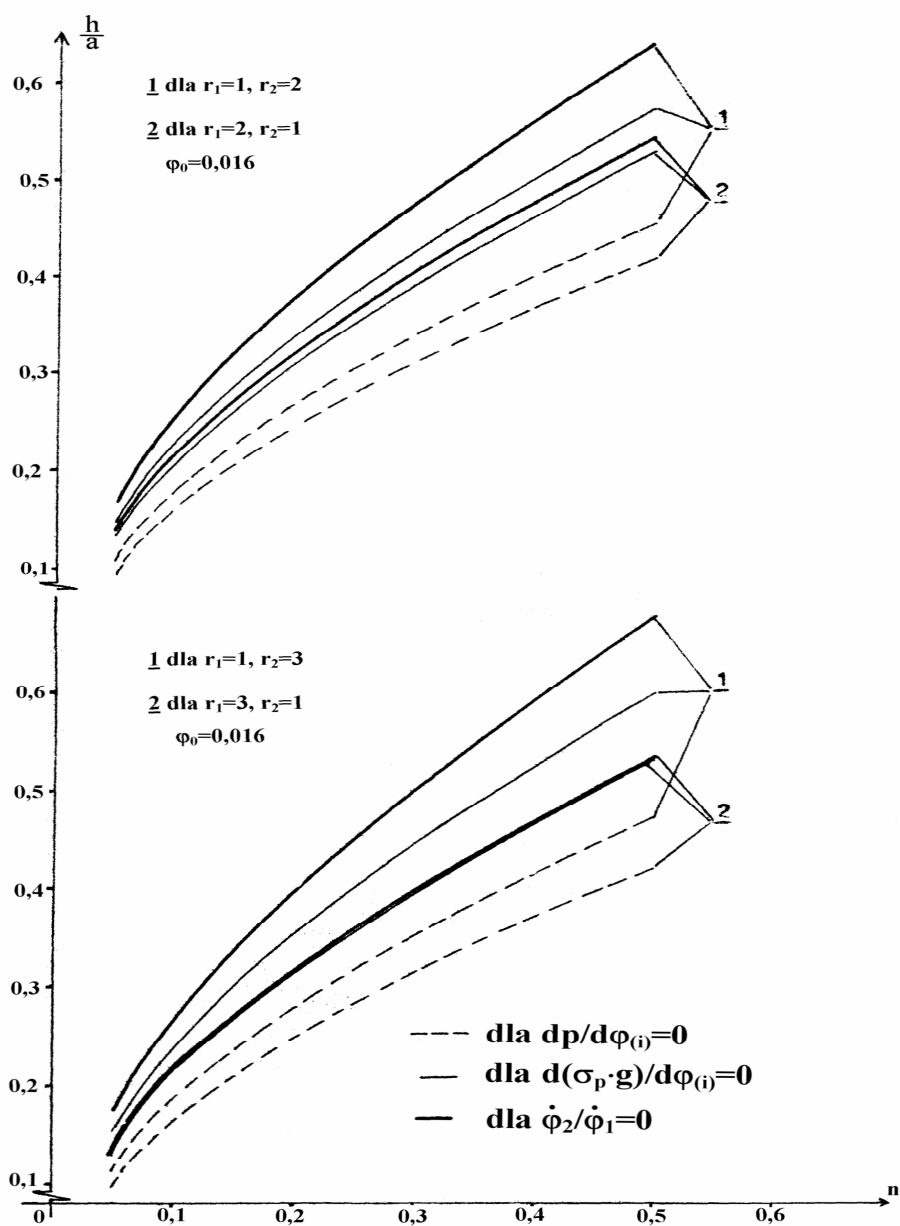
Materiał	n	φ_0	$\frac{g}{g_0}$			
			Eksperyment		Teoria	
			Niestateczność	Pękanie	Równanie (6.29)	Równanie (6.30)
Miedź miękka	0,30	0,010	0,555	0,50	0,51	0,71
Miedź półtwarda	0,30	0,070	0,590	0,58	0,54	0,75
Brąz miękki	0,48	0,000	-----	0,50	0,43	0,57
Brąz półtwardy	0,48	0,078	-----	0,51	0,46	0,62
Aluminium miękkie	0,25	0,000	0,565	0,48	0,52	0,74
Stal uspokojona	0,20	0,000	0,570	0,48	0,53	0,79
Stal nierdzewna	0,50	0,010	0,520	0,50	0,42	0,56

W tabeli 6.1 podano porównanie wyników doświadczalnych otrzymanych w pracy [7] z wynikami obliczeń przeprowadzonymi dla trzeciego i czwartego warunku utraty stateczności, por. wzory (6.29) i (6.30) dla przypadku materiału izotropowego.

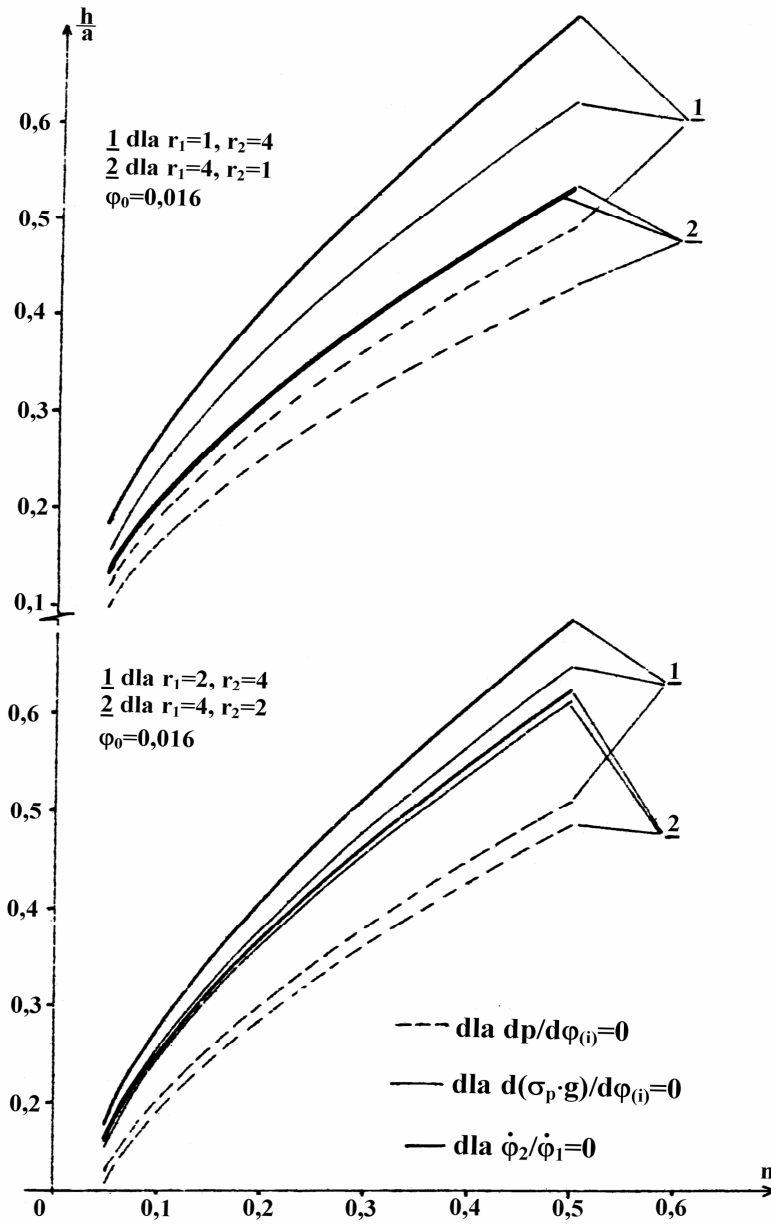
Na rys. 6.7 przedstawiono rezultaty otrzymane dla materiału blachy wykazującej własności anizotropii normalnej, dla odpowiednich trzech pierwszych warunków utraty stateczności, w zależności od wartości współczynnika umocnienia n i wybranych wartości ($r = 0,5; 1; 2; 3; 4$ i 5) współczynnika anizotropii normalnej r . Wartość stałej materiałowej przyjęto równą $\varphi_0 = 0,016$ [73]. Na wykresach widać, że wysokość wybrzuszonej wytłoczki h , wzrasta z kolejnym warunkiem utraty stateczności i ze wzrostem współczynnika umocnienia n oraz anizotropii normalnej r . To było intuicyjnie do przewidzenia, ponieważ współczynnik umocnienia zwiększa wartości naprężenia dopuszczalnego, a wzrost współczynnika anizotropii normalnej r wydłuża elipsę plastyczności w (PSN) [53, 73, 88] dla przypadku dodatnich naprężeń głównych, co także zwiększa wartości naprężeń dopuszczalnych w procesie wybrzuszenia wytłoczki cieczą. Wzrost r powoduje także, że pocienienie ścianki wytłoczki będzie mniejsze, czyli wzrasta opór przeciw pocienieniu, więc materiały o większych wartościach współczynnika r mają lepsze własności tłoczne, por. [53, 73, 88].



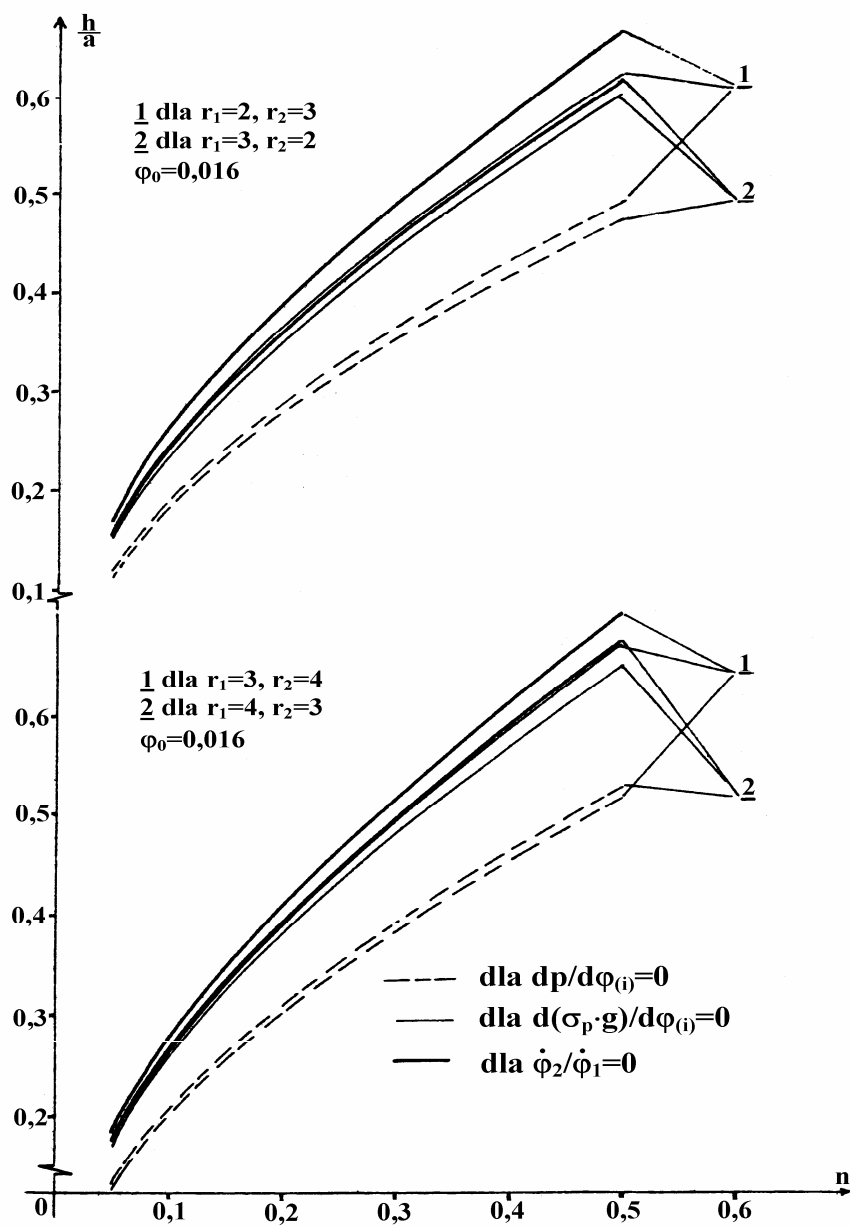
Rys. 6.7. Wykresy wysokości wybrzuszonej wylotczki w zależności od parametru umocnienia n i współczynnika anizotropii normalnej r dla trzech warunków utraty stateczności



Rys. 6.8. Wykresy wysokości czaszy kulistej w zależności od współczynnika umocnienia n i wybranych par wartości współczynników anizotropii płaskiej r_1 i r_2 dla trzech warunków utraty stateczności



Rys. 6.9. Wykresy wysokości czaszy kulistej w zależności od współczynnika umocnienia n i wybranych par wartości współczynników anizotropii płaskiej r_1 i r_2 dla trzech warunków utraty stateczności



Rys. 6.10. Wykresy wysokości czaszy kulistej w zależności od współczynnika umocnienia n i wybranych par wartości współczynników anizotropii płaskiej r_1 i r_2 dla trzech warunków utraty stateczności

Na rys. (6.8–6.10) przedstawiono wyniki obliczeń dla materiału blachy wykazującego własności anizotropii w płaszczyźnie. Przyjęte do obliczeń wartości dla par współczynników (r_1 i r_2), które reprezentują własności anizotropii płaskiej, zostały dobrane w oparciu o dane literaturowe [2, 53, 73]. Jak widać na wykresach przyjęte zmiany odpowiednio parami (r_1 i r_2) współczynników anizotropii w płaszczyźnie obrazują niejednoznaczny wpływ anizotropii płaskiej na wysokość wybrzuszonej wyłoczki h . Na podstawie otrzymanych wyników obliczeniowych ogólnie można powiedzieć, że anizotropia w płaszczyźnie blachy nie ma wyraźnie jednoznacznego wpływu na jej tłoczność i wysokość wybrzuszonej wyłoczki. Wykresy te przedstawiono w zależności od wartości parametru umocnienia n dla trzech kolejnych (a-c) warunków utraty stateczności. Do obliczeń przyjęto jak poprzednio wartość stałej $\varphi_0 = 0,016$ [73].

5. UWAGI KOŃCOWE I WNIOSKI

1. W niniejszym rozdziale przedstawiono rezultaty określające wysokość wybrzuszonej czaszy kulistej wykonanej z krążka blachy, utwierdzonego na brzegu w próbie hydraulicznego wyłaczania dla czterech wybranych praktycznych-inżynierskich warunków utraty stateczności. Warunki te określono korzystając i wzorując się głównie na pracach, por. [16, 33, 53, 73, 77, 81, 88, 137]. Wybruszony krążek przybiera kształt czaszy kulistej, której odkształcenia wyspecyfikowano w oparciu o teorię błonową powłok [70-73]. Podczas takiego procesu zmienia się grubość ścianki w zależności od promienia bieżącego r_i i stopnia zaawansowania procesu (w rozpatrywanym przypadku od wysokości czaszy h). Największe pocienienie grubości ścianki występuje w wierzchołkowej (środkowej) części wybrzuszonej powłoki.
2. Z wykresów na rys. 6.6 wynika, że największą wysokość powłoki h i największe odkształcenia zastępcze $\varphi_{(i)}$ otrzymuje się z czwartego warunku utraty stateczności (niestateczność w postaci ścinania) w warunkach (PSN), gdy oba naprężenia są rozciągające (mają jednakowe znaki dodatnie) a najmniejszą z warunku na maksimum ciśnienia cieczy p_{\max} .
3. Na wysokość wyłoczki mają wpływ także parametry materiałowe krążka blachy jak: współczynnik umocnienia n i współczynnik φ_0 . We wszystkich przypadkach wzrost wartości współczynnika n powoduje wzrost granicznych odkształceń zastępczych $\varphi_{(i)}$ i zarazem wzrost wysokości czaszy h . Natomiast wzrost odkształcenia wstępnego φ_0 powoduje we wszystkich przypadkach zmniejszenie się wartości $\varphi_{(i)}$ i zarazem wysokości czaszy h .
4. Na rys. 6.7 przedstawiono wpływ anizotropii normalnej r na wysokość wybrzuszonej czaszy kulistej h dla trzech (a-c) warunków utraty stateczności, ponieważ czwarty warunek podano w rozpoznanej literaturze tylko dla przypadku materiału izotropowego. Z wykresów wynika, że wzrost współ-

czynnika anizotropii r , dla warunku plastyczności H-M-H uwzględniającego wpływ anizotropii normalnej powoduje wydłużanie się elipsy plastyczności [2, 53, 73, 88, 138, 146], a więc odpowiednio zwiększenie dopuszczalnych wartości naprężeń i odkształceń.

5. Na rys. 6.8–6.10 przedstawiono wykresy wpływu współczynników anizotropii w płaszczyźnie wytłoczki (r_1 i r_2) na wysokość wytłoczki h jak poprzednio dla trzech (a-c) warunków utraty stateczności. Wpływ współczynników anizotropii płaskiej na wysokość czaszy h jest trudno jednoznacznie określić i można w ogólności stwierdzić, że go nie ma. Wynika to stąd, że elipsa plastyczności H-M-H ulega nie tylko wydłużeniu przy zmianie ($r_1 = 1/C$) lecz także obrotowi przy zmianie ($r_2 = 1/B$) wokół początku układu współrzędnych. Pełniejszą analizę tego zjawiska można znaleźć w pracach [2, 53, 77]. Ogólnie można powiedzieć, że wzrost współczynników r_1 i r_2 powoduje zmniejszenie się różnic pomiędzy wynikami dla drugiej-b i trzeciej-c formy utraty stateczności, por. rys. (6.9–6.10). Natomiast wzrost współczynnika r_2 przy stałej i małej wartości współczynnika r_1 powoduje, że różnice w wysokościach czaszy h dla trzech różnych warunków stateczności są znaczne, por. rys. (6.8–6.9). Wobec powyższych rezultatów obliczeniowych wynika, że potwierdzona została tym samym teza profesora M. Zakrzewskiego z Politechniki Wrocławskiej z lat 80., który stwierdził, że wpływ anizotropii płaskiej w procesie wytłaczania blach nie powinien mieć wpływu na ich tłoczność (wielkość dopuszczalnych odkształceń, wysokość wytłoczki, głębokość tłoczenia) lecz jej wpływ objawia się powstawaniem „uch”, por. np. [2, 21, 73, 146] na swobodnych obrzeżach wytłaczanych lub wybrzuszanych wytłoczek z blach. „Ucha” w próbie Jovignota nie powstają, ponieważ obrzeże krążka blachy jest unieruchomione w matrycy.
6. W zakończeniu można podkreślić, że wyprowadzone wyrażenia na wysokość wytłoczki mogą dawać mniejsze rezultaty obliczeniowe od doświadczalnych. Wynikać to może, jak wspomniano wcześniej, z przyjętego kulistego kształtu wybrzuszanej powłoki, wynikającego z teorii błonowej rozkładu odkształceń ($\varphi_1 = \varphi_2$) podczas, gdy w rzeczywistości kształt ten będzie bardziej zbliżony do kształtu paraboloidy obrotowej [73]. Wynikać to może z efektu nierównomierności rozkładu odkształceń i ich składowych w części wierzchołkowej, szczególnie w końcowej fazie procesu wybrzuszania, gdzie ($\varphi_1 \neq \varphi_2$). Można dodać, że wykorzystywane w pracy trzy pierwsze warunki utraty stateczności (a-c) oprócz czwartego, (który wg danych w tabeli 1 daje czasami rezultaty pocienienia mniejsze niż doświadczalne) będą wyznaczać stany poprzedzające makropęknięcie wytłoczki. Będą to więc w większości pewnego rodzaju dolne (bezpieczne) oszacowania rzeczywistej wysokości wybrzuszanej wytłoczki w próbie Jovignota.

ROZDZIAŁ VII

PRZEWĘŻANIE ORAZ KRUSZENIE BLOKÓW MATERIAŁU PRZEZ DWA PRZECIWBIEŻNE PŁASKIE STEMPLE

1. WSTĘP

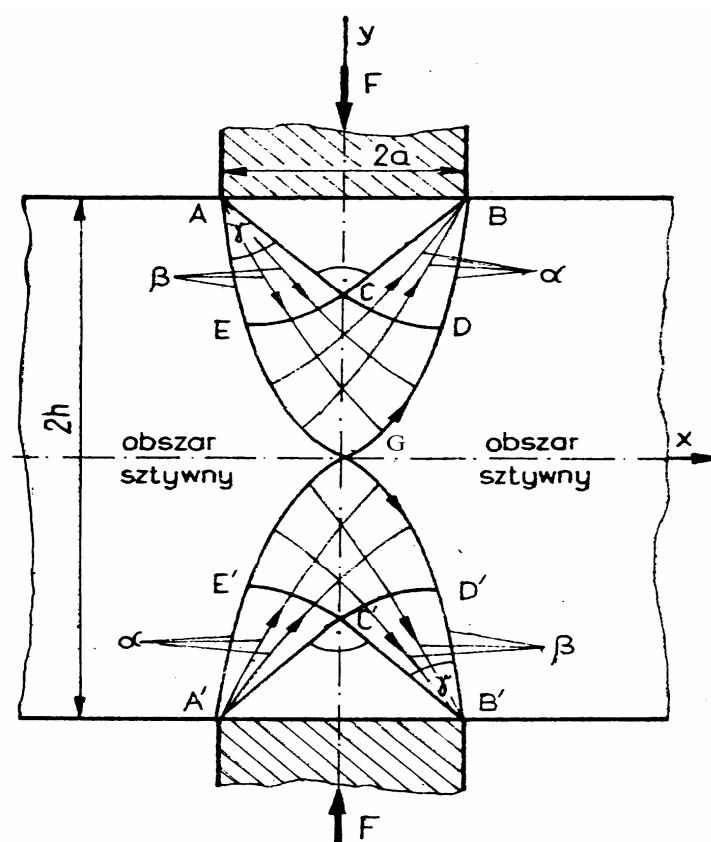
W niniejszym rozdziale o bardziej aplikacyjnym charakterze przedstawiono wykorzystanie metod kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości odkształcenia i statycznie dopuszczalnych pól naprężeń do oszacowania nacisku w procesach ściskania, przewężania i rozdzielania bloków materiału przez dwa przeciwbieżne płaskie i sztywne stemple. Idee metod oszacowania wielkości dopuszczalnego nacisku (obciążenia) wywodzą się z ogólnych twierdzeń teorii plastyczności, jak twierdzenia o nośności granicznej (oszacowania górne i dolne) lub zasad ekstremalnych, por. [41, 104, 135, 138, 139, 140]. Przekroczenie wartości określanego nacisku będzie powodować, że np. plastyczne materiały metaliczne będą ulegać przewężeniu i następnie przecięciu (ścięciu) wzdłuż płaszczyzn ścinania, natomiast bloki z materiałów półkruchych i kruchych ulegną rozdzielaniu wzdłuż płaszczyzn pękania (płaszczyzny kruchego złomu, rozdziału). Za pomocą metod kinematycznie i statycznie dopuszczalnych pól oszacowano rezultaty obliczeń, które otrzymano z rozwiązań numerycznych opartych na rozwiązaniach równań różniczkowych cząstkowych metodą charakterystyk.

Metody szacowania dopuszczalnego nacisku (obciążenia) mają duże zastosowania w analizie wielu rodzajów obróbki plastycznej metali [135, 138, 139] oraz w nośności granicznej materiałów kruchych i sypkich [41, 136, 140]. Rozpatrzono dwa przykłady zastosowania tych metod. W pierwszym użyto warunki plastyczności (H-M-H) i Treski dla materiałów metalicznych na gorąco, w drugim użyto warunek plastyczności Coulomba-Mohra stosowany do materiałów półkruchych i kruchych. W obu przypadkach zakłada się, że procesy ściskania, przewężania i przecinania bloków materiału przez dwa przeciwbieżne płaskie stemple przebiegają w warunkach płaskiego stanu odkształcenia (PSO).

Rozwiązywanie numeryczne zadań metodą charakterystyk polega na wyznaczaniu odpowiednich siatek linii poślizgu, które pokrywają się z liniami charakterystyk równań różniczkowych cząstkowych typu hiperbolicznego [31, 104, 138, 139]. Metody analityczne wymagają konstruowania odpowiednich schematów kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości odkształceń i budowy hodografu prędkości oraz statycznie dopuszczalnych pól naprężeń. Wielkość poszukiwanego nacisku p lub co jest równoważne obciążenia F , otrzymuje się dla pól kinematycznych (oszacowania górne) z warunku bilansu mocy dysypowanej, a dla statycznych (oszacowania dolne) z warunków równowagi. Przyjmuje się, że naprężenia ściskające są dodatnie oraz materiały są nieważkie. Otrzymane rezultaty obliczeń przedstawiono na odpowiednich wykresach.

2. NACISKI PODCZAS PRZEWEŻANIA I PRZECINANIA BLOKÓW WYKONANYCH Z MATERIAŁÓW METALICZNYCH

Proces obustronnego ściskania, przewężania i przecinania bloku z materiału metalicznego o grubości $2h$ przez dwa przeciwbieżne gładkie, sztywne i płaskie stemple o szerokości $2a$ ($a < h$) pokazano na rys. 7.1 z zaznaczonymi rodzinami charakterystyk α i β rozgraniczającymi obszar plastyczny od obszarów sztywnych. Jest to rodzaj obróbki plastycznej odpowiadającym pewnym typom procesów przecinania oraz szeroko stosowanemu, np. w kuźnictwie przewężaniu stalowych bloków na gorąco. W stanie na gorąco krzywa umocnienia zdecydowanej większości materiałów metalicznych jest prawie płaska [74, 76, 138], więc można przyjąć, że ich moduły wzmocnienia ($h = h_{\tan} = 0$).



Rys. 7.1. Przewężanie lub przecinanie bloku materiału metalicznego przez dwa przeciwbieżne płaskie stemple wg [138]

Z rys. 7.1 widać, że zagadnienie jest symetryczne względem osi X i Y.

Problem polega na wyznaczeniu nacisku p lub co jest równoważne obciążenia F , przy którym rozpoczyna się proces plastycznego płynięcia, w zależności od stosunku połowy grubości bloku materiału do połowy szerokości stempla h/a . W rozwiązaniu nie uwzględnia się ciężaru własnego materiału.

Pomiędzy obciążeniami F przypadającymi na jednostkę długości w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku, por. rys. 7.1÷7.6 a odpowiadającymi im naciskami p , zachodzi następująca zależność

$$F = 2ap. \quad (7.1)$$

Przyjmuje się, że blok materiału wykonany jest ze sztywno-idealnie plastycznego (bez wzmocnienia) materiału i znajdujący się w płaskim stanie odkształcenia (PSO). W takim przypadku warunki plastyczności (H-M-H) i Treski mają następującą postać

$$\sigma_1 - \sigma_2 = -2k, \quad (7.2)$$

gdzie: σ_1 i σ_2 – naprężenia główne, takie że ($|\sigma_1| > |\sigma_3| > |\sigma_2|$) oraz k – granica plastyczności przy czystym ścinaniu. Dla warunku (H-M-H) $k = \sigma_p / \sqrt{3}$, dla Treski $k = \sigma_p / 2$, gdzie σ_p – granica plastyczności przy prostym rozciąganiu.

2.1. ZASTOSOWANE METODY OBLICZEŃ

2.1.1. METODA CHARAKTERYSTYK

Rozwiązanie metodą charakterystyk nazywane jest rozwiązaniem ścisłym, gdy spełnia wszystkie warunki kinematyczne i statyczne zadania. W rozpatrywanym zagadnieniu przewężania i przecinania metalicznego bloku materiału rozwiązanie to nie jest ściśle w całym zakresie stosunku h/a .

W rozwiązywaniu tego zagadnienia korzysta się z rezultatów zamieszczonych w pracy [138] i własnych autora, który powtórzył te obliczenia niezależnie [154]. Dla przyjętego modelu ciała sztywno-idealnie plastycznego schemat obszarów plastycznych i linii poślizgu, do którego zastosowano metodę charakterystyk, przedstawia rys. 7.1. Na rysunku tym oznaczone literami linie (α i β) wyznaczają pierwszą i drugą rodzinę charakterystyk. Kierunki charakterystyk są kierunkami działania maksymalnych naprężeń stycznych, więc charakterystyki są liniami maksymalnych naprężeń stycznych. Charakterystyki stają się więc liniami poślizgu lub inaczej mówiąc liniami nieciągłości prędkości odkształcenia. Linie takie można po odpowiednim trawieniu obserwować w odkształconym metalu i ich przebieg pokrywa się dobrze z przebiegiem charakterystyk otrzymanych z rozwiązań teoretycznych [135, 138, 154].

Wielkość nacisku p wyznacza się metodą numerycznego rozwiązania warunku równowagi połowy bloku materiału odciętego wzdłuż pionowej osi symetrii Y . Stąd

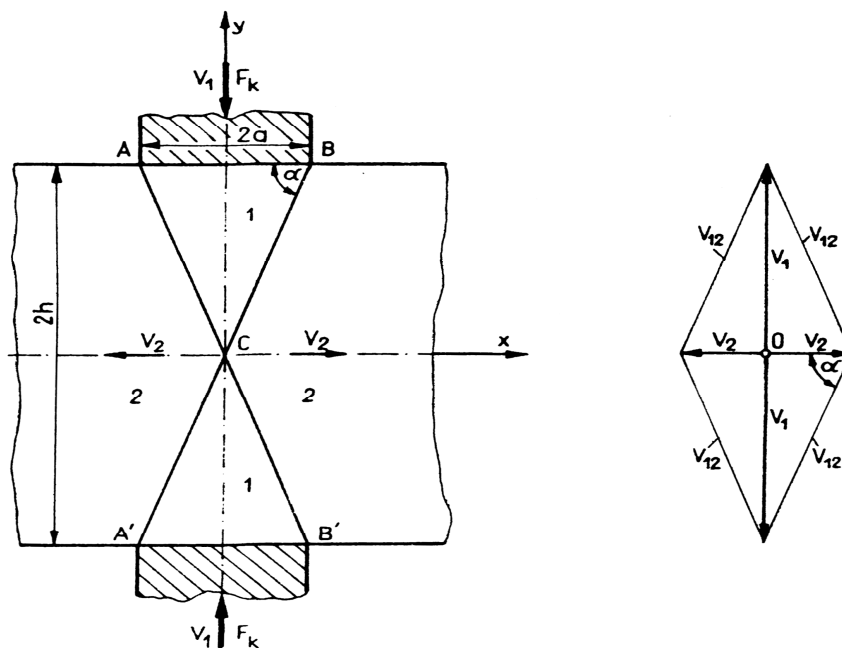
$$\int_{-h}^h \sigma_x dx = 0, \quad (7.3)$$

gdzie: σ_x – składowa tensora naprężenia w kierunku osi X .

Ponieważ stan naprężenia w polu ECDG wyznacza się numerycznie, w tym przypadku nie można podać wzoru na postać nacisku p w zależności od stosunku h/a . Otrzymane rezultaty obliczeń prezentowane są w postaci wykresów. Pełniejszą i bardziej szczegółową analizę tej metody obliczeń można znaleźć w książce [138] i częściowo w innych pracach [31, 47, 104, 135, 138].

2.1.2. METODA KINEMATYCZNIE DOPUSZCZALNYCH PÓŁ PRĘDKOŚCI ODKSZTAŁCENÍ

a) Pierwszy kinematycznie dopuszczalny schemat odkształcenia

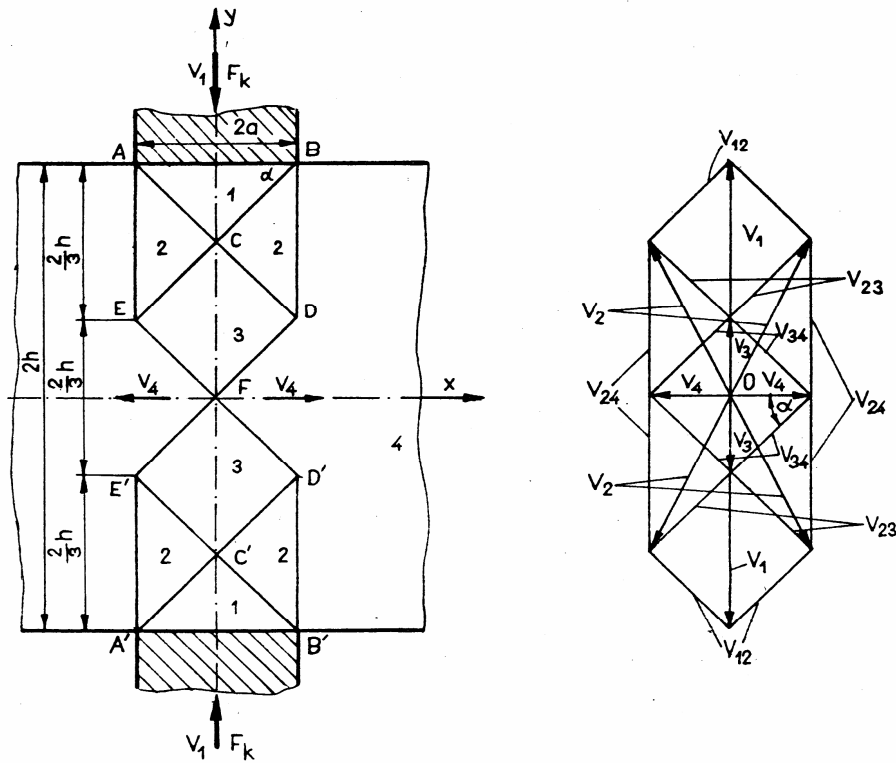


Rys. 7.2. Kinematycznie dopuszczalny schemat odkształcenia oraz odpowiadający schematowi plan (hodograf) prędkości wg [8, 154]

Pierwszy kinematyczny schemat odkształcania, por. rys. 7.2, polega na ścięciu materiału wzdłuż linii ACB' i BCA' , ruchu sztywnych trójkątów ΔABC i $\Delta A'B'C'$ z prędkością równą prędkości przesuwających się stempli V_1 oraz na oddalaniu się sztywnych części bloku materiału na zewnątrz linii ACA' i BCB' z prędkością V_2 . Linie ACB' i BCA'' są liniami poślizgu, a więc także liniami nieciągłości prędkości. Wynikającą z tego schematu pierwszą górną ocenę poszukiwanej granicznej wartości obciążenia F otrzymuje się porównując moc obciążenia naciskiem p na prędkościach V_1 z mocą dysypowaną na liniach ścięcia. Stąd otrzymuje się

$$F_{k1} = 2ak \left[\left(\frac{h}{a} \right)^{-1} + \frac{h}{a} \right]. \quad (7.4)$$

b) Drugi kinematycznie dopuszczalny schemat odkształcania



Rys. 7.3. Kinematycznie dopuszczalny schemat odkształcania oraz odpowiadający schematowi plan (hodograf) prędkości wg [8, 154]

Drugi schemat, jak widać, jest bardziej złożony niż pierwszy. Polega on na ścięciu materiału wzdłuż linii: AE, EFD', D'B', B'C'E', E'FD, DB, BCE, ACD, A'C'D', A'E', ruchu sztywnych trójkątów ΔABC i $\Delta A'B'C'$ z prędkością V_1 , trójkątów ΔAEC , ΔBCD , $\Delta A'C'E'$ i $\Delta B'C'D'$ z prędkością V_2 , czworokątów $\square CEFD$, $\square FD'C'E'$ z prędkością V_3 oraz na rozsuwaniu się sztywnych pól 4 bloku na zewnątrz linii łamanej AEFE'A' i BDFD'B' z prędkością V_4 . Linie ścięć są liniami poślizgu, a więc także liniami nieciągłości prędkości. Wynikającą z tego schematu drugą górną ocenę granicznej wartości obciążenia F otrzymuje się podobnie jak poprzednio z przyrównania mocy nacisku p na prędkościach V_1 z mocą dysypowaną na liniach ścięcia. Stąd

$$F_{k2} = 2ak \left[3 \left(\frac{h}{a} \right)^{-1} + \frac{7}{9} \left(\frac{h}{a} \right) \right]. \quad (7.5)$$

Kinematycznie dopuszczalne schematy odkształcenia muszą spełniać wszystkie kinematyczne warunki procesu, a więc: warunki ciągłości i nieściśliwości materiału oraz prędkościowe warunki na brzegu ciała. W tym przypadku równania równowagi i warunek plastyczności nie muszą być spełnione.

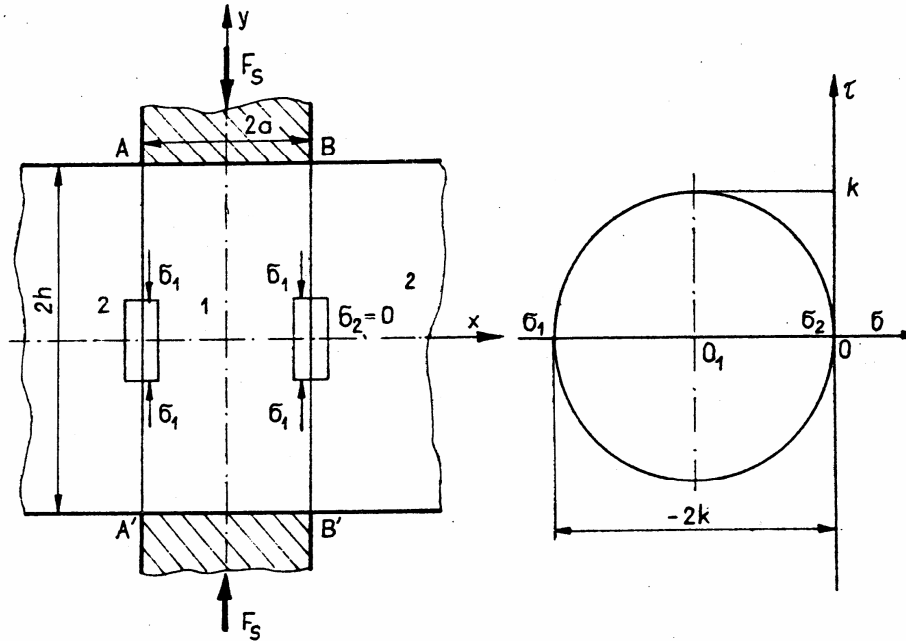
Metodą tą utrzymuje się oszacowanie górne nacisków (obciążeń) w stosunku do nacisków (obciążeń) uzyskanych metodą całkowania numerycznego po charakterystykach [138].

2.1.3. METODA STATYCZNIE DOPUSZCZALNYCH PÓL NAPRĘŻEŃ

Statycznie dopuszczalne pole naprężeń w odkształcanym materiale powinno spełniać warunki równowagi, statyczne warunki brzegowe dla obciążeń oraz nigdzie nie powinien być przekroczony warunek plastyczności. W metodzie tej wykorzystuje się koncepcję linii nieciągłości naprężeń, które nigdy nie mogą się pokrywać z liniami nieciągłości prędkości (linie poślizgu), por. [31, 41, 104, 135, 138, 139]. Metodą tą otrzymuje się oszacowania dolne obciążeń (nacisków) w porównaniu do nacisków (obciążeń) uzyskanych metodą charakterystyk. Z reguły więc obciążenia te (naciski) są mniejsze od nacisków (obciążeń) uzyskanych metodą charakterystyk, a w idealnym przypadku są równe.

a) Pierwszy schemat statycznie dopuszczalnego pola naprężeń

W prostokącie 1 $\square AA'BB'$, por. rys. 7.4 panuje jednorodny stan naprężenia taki, że: $\sigma_1 = -2k$ i $\sigma_2 = 0$. Na zewnątrz tego prostokąta materiał pól 2 jest w stanie wolnym od naprężeń (jest w stanie beznaprężeniowym). Linie proste AA' i BB' są więc liniami nieciągłości naprężeń.



Rys. 7.4. Pierwsze statycznie dopuszczalne pole naprężeń oraz koło Mohra dla stanów naprężenia w polach 1 i 2 wg [104, 154]

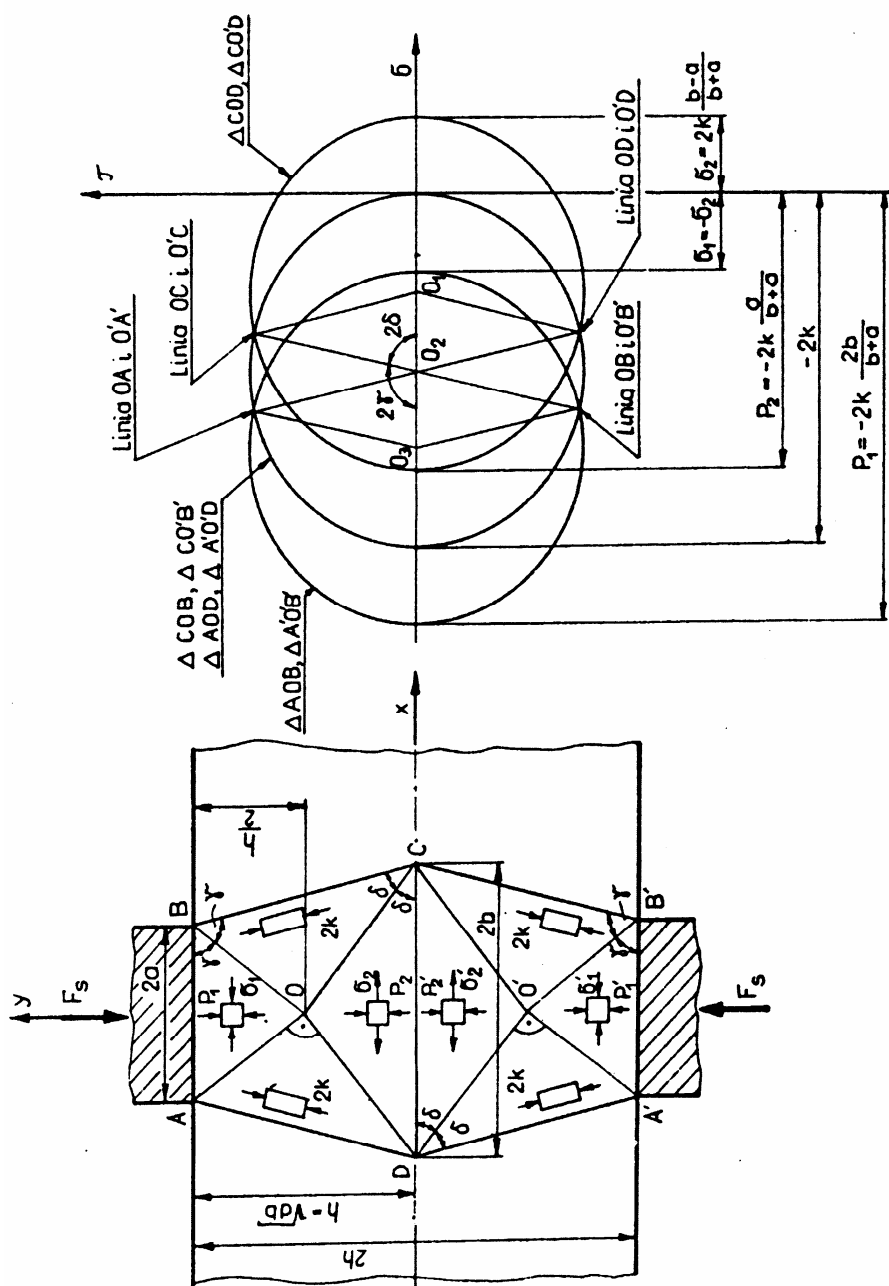
Wynikającą z tego schematu pierwszą dolną ocenę poszukiwanej granicznej wartości obciążenia F otrzymuje się w następującej postaci

$$F_{s1} = 4ak. \quad (7.6)$$

b) Drugi schemat statycznie dopuszczalnego pola naprężeń

Pole to, por. rys. 7.5 zostało przedstawione w pracach [41, 138, 139, 154]. Ma ono kształt trapezu równoramiennego i składa się z czterech trójkątów, w których panuje jednorodny stan naprężenia. Linie: OA, OB, OC, OD, AD, BC, O'A', O'B', O'C, O'D, A'D, B'C są liniami nieciągłości naprężeń. Pola na zewnątrz linii AD, BC, A'D, B'C są w stanie sztywnym (beznapężeniowym), a linie te od tej strony są wolne od naprężeń.

Jeżeli wysokość trapezu równa się $h = 2\sqrt{ab}$, to przy nacisku na linii DC równym $p_1 = 2k \cdot 2b / (a + b)$, wówczas we wszystkich trójkątach trapezu osiągnięty zostanie stan plastyczny. Wówczas linie nieciągłości naprężeń wewnątrz trapezu są jednocześnie dwusiecznymi odpowiednich kątów wierzchołkowych, a środek O trapezu znajduje się w połowie jego wysokości [138].



Rys. 7.5. Drugie statycznie dopuszczalne pole naprężeń oraz koła Mohra odwzorowujące stan naprężeń w jego polach [138, 154]

Stan naprężenia w polach trapezu dogodnie jest przedstawić za pomocą kół Mohra. Każde z kół Mohra ma średnicę równą $2k$, a więc spełniony jest warunek plastyczności dla każdego z nich.

Odpowiadająca temu polu statycznie dopuszczalnych naprężeń druga ocena obciążenia granicznego F określona zostaje z odpowiednich zależności trygonometrycznych. Wynosi ona

$$F_{s2} = 8ak \left[\frac{\left(\frac{h}{a}\right)^2}{4 + \left(\frac{h}{a}\right)^2} \right]. \quad (7.7)$$

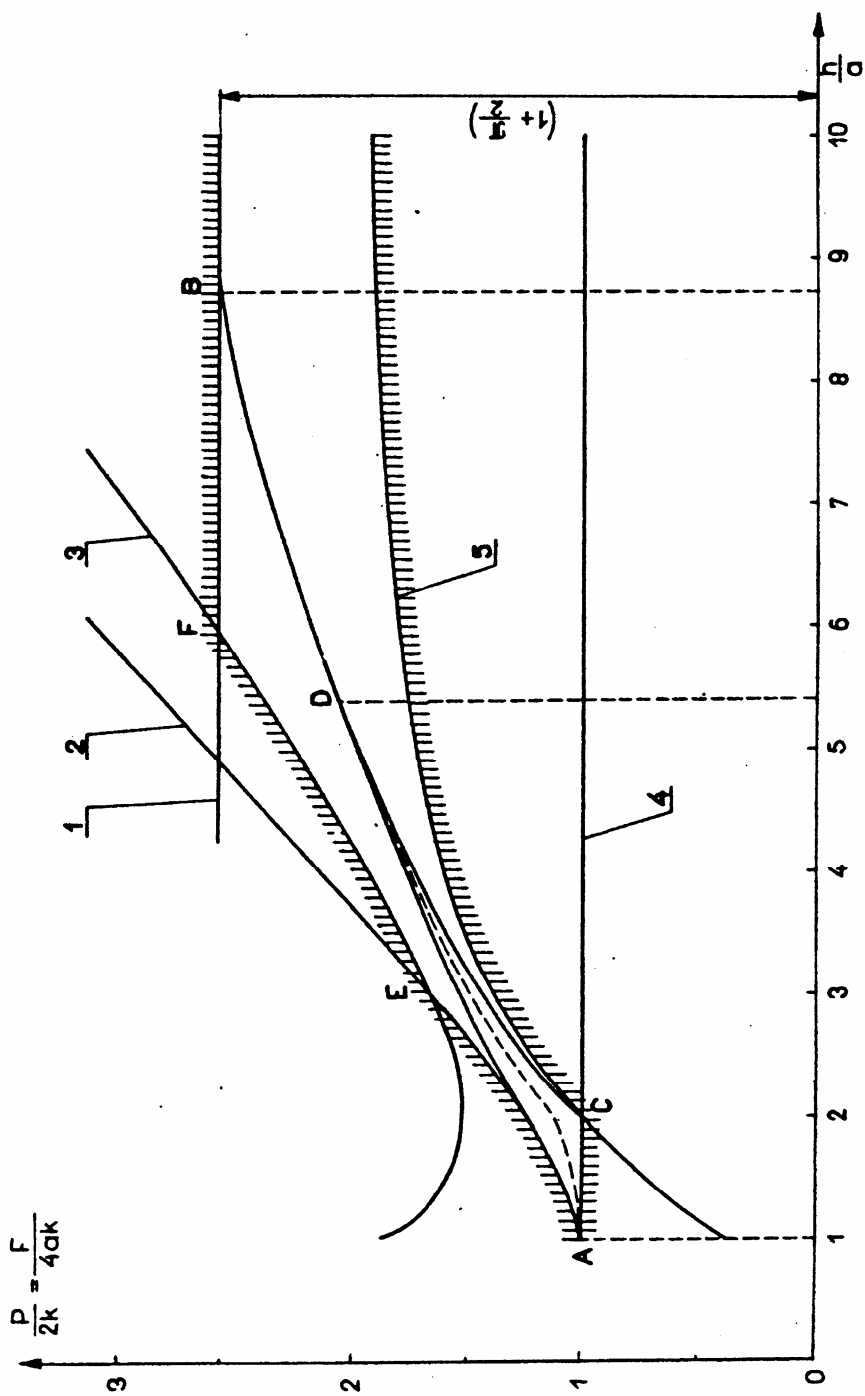
2.2. OMÓWIENIE I ANALIZA OTRZYMANYCH WYNIKÓW

Rezultaty numerycznych i analitycznych obliczeń wynikających z wyprowadzonych zależności (7.1) – (7.8) przedstawiono na rys. 7.6.

1. Krzywą ADB otrzymuje się z rozwiązania zagadnienia metodą charakterystyk korzystając ze wzoru (7.3). Wartości dla krzywej ADB otrzymuje się metodą całkowania numerycznego wyrażenia całkowego (7.3). W przedziale pomiędzy punktami D i B, tzn. dla $(5,30 \leq h/a \leq 8,74)$ rozwiązanie to jest ściśle (pełne), ponieważ spełnia wszystkie warunki statyczne i kinematyczne procesu ścisłania, przewężania i przecinania. Natomiast na lewo od punktu D, tzn. dla $(1 \leq h/a \leq 5,30)$ rozwiązanie jest tylko kinematycznie dopuszczalne dla metody charakterystyk i daje górną ocenę nieznanego rozwiązania ścisłego (pełnego), zaznaczonego poglądowo linią przerywaną. W tym zakresie zbudować można także statycznie dopuszczalne pola naprężeń dające dolną ocenę (linie AC i CD) nieznanego rozwiązania ścisłego [138]. Linię CD otrzymuje się metodą wykreślną konstruując odpowiednie pole statycznie dopuszczalnych naprężeń w oparciu o pola linii charakterystyk [138]. Jak widać, obie te oceny górna i dolna (linie AD i CD) w zakresie $(1 \leq h/a \leq 5,30)$ różnią się niewiele – zaledwie kilka procent. Przyjmując jako rozwiązanie ściśle średnią arytmetyczną między tymi dwoma liniami (zaznaczoną poglądowo linią przerywaną) zmniejsza się błąd oszacowania możliwego rozwiązania ścisłego o połowę.

2. W przypadku, gdy $h/a \geq 8,74$ nacisk graniczny p osiąga wartość określoną wzorem wyprowadzonym przez Prandtla dla przypadku wciskania płaskiego stempla w półprzestrzeń [138]. Wzór ten jest następujący

$$p = k(2 + \pi) \quad (7.8)$$



Rys. 7.6. Wielkość nacisku p i obciążenia F stępła w zależności od ilorazu h/a dla zastosowanych metod obliczeniowych

Linie poziomą 1 otrzymuje się więc jak dla przypadku wciskania płaskiego stempla w półprzestrzeń i oblicza ze wzoru (7.8).

3. Krzywe 2 i 3 otrzymuje się odpowiednio ze wzorów (7.4) i (7.5), które wyprowadzono dla kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości odkształcenia. Są to, jak widać, oszacowania górne krzywej ADB, którą otrzymano z rozwiązania zagadnienia metodą charakterystyk. Są to zarazem oszacowania górne nieznanego rozwiązania ścisłego w zakresie ($1 \leq h/a \leq 5,30$) zaznaczonego poglądowo na rysunku linią przerywaną.

4. Prostą poziomą 4 i krzywą 5 otrzymano odpowiednio ze wzorów (7.6) i (7.7), które wyprowadzono dla przypadku statycznie dopuszczalnych pól naprężeń. Są to, jak widać, oszacowania dolne krzywej ADB, którą otrzymano z rozwiązania zagadnienia metodą charakterystyk. Są to zarazem oszacowania dolne nieznanego rozwiązania ścisłego w zakresie ($1 \leq h/a \leq 5,30$) zaznaczonego poglądowo na rysunku linią przerywaną oraz rozwiązania przedstawionego linią CD otrzymaną z metody konstruując odpowiednie pole statycznie dopuszczalnych naprężeń w oparciu o pola linii charakterystyk [138].

5. Obszar zawarty między zakreskowanymi liniami jest, jak widać, polem oszacowania wyrażeniami (7.4) – (7.8) rozwiązania numerycznego metodą charakterystyk (krzywa ADB) i zarazem krzywej CD otrzymanej w oparciu o charakterystyki dla statycznego pola naprężeń przedstawionego w pracy [138]. Jest to także obszar oszacowania nieznanego rozwiązania ścisłego w zakresie ($1 \leq h/a \leq 5,30$), zaznaczonego poglądowo linią przerywaną.

Jak widać, pole oszacowania nie jest zbyt duże, gdyż największa rozbieżność wyników (w stosunku do rozwiązań metodą charakterystyk – linia ADB). Dla oszacowania kinematycznego rozbieżność wyników wynosi do 20%, a dla oszacowania statycznego do 30%. Należy jednak podkreślić łatwy sposób otrzymania tych oszacowań, w porównaniu do rozwiązań metodą charakterystyk i przeprowadzania obliczeń analitycznych.

2.3. UWAGI I WNIOSKI

1. Nieuwzględnienie umocnienia materiału jest pewnym uproszczeniem w przedstawionych w pracy rozwiązaniach. Pamiętać jednak należy, że procesy przewężania i przecinania dużych bloków z materiałów metalicznych odbywają się w większości na gorąco. Wówczas, jak wiadomo, krzywa umocnienia jest prawie płaska (występuje prawie brak umocnienia materiału, więc można przyjąć, że $h = h_{\tan} = 0$), por. [74, 76, 138].

W przypadku jednak przewężania i przecinania niezbyt grubych bloków metalowych na zimno, wówczas bardziej bliskie rzeczywistych nacisków (obciążeń) granicznych będą te wynikające z kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości odkształcenia (oszacowania górne). Wyniki obliczeń tego obciążenia przedstawiają odpowiednio krzywe: 1, 2 i 3.

2. W procesach przewężania i przecinania bloków z materiałów metalicznych na gorąco, bliższe rzeczywistych obciążeń granicznych będą jednak obciążenia wynikające z dokładnej (ściślej) metody obliczeń, opartej na charakterystykach. Wynika to stąd, jak już wspomniano wcześniej, że dla bardzo wielu materiałów metalicznych w podgrzanym stanie i na gorąco, ich krzywa umocnienia jest wyraźnie płaska, więc ($h \cong 0$ lub $h_{\tan} \cong 0$).

3. Oszacowania dolne rozwiązania metodą charakterystyk (krzywa ADB i krzywa nieznanego rozwiązania ściśłego w zakresie ($1 \leq h/a \leq 5,30$), zaznaczonego poglądowo linią przerywaną) przedstawiają na rys. 7.6 zakresowana prosta 4 i krzywa 5. Oszacowania te stanowią informację dla określenia wielkości obciążeń, przy których blok metalu nie dozna odkształceń plastycznych.

4. Metoda statycznie dopuszczalnych pól naprężeń dająca dolną ocenę obciążenia granicznego będzie natomiast wykazywać większą przydatność w zagadnieniach projektowania wielu elementów maszyn [139]. Dobierając w odpowiedni sposób statycznie dopuszczalne pola naprężeń można znając schemat obciążeń zewnętrznych, optymalnie dobrać kształty i wymiary projektowanych elementów. Na zakończenie tego punktu można dodać, że przedstawione metody obliczeń, oparte na statycznie dopuszczalnych polach naprężeń można stosować również do zagadnień wciskania stempli, np. w grunty, a zatem do projektowania fundamentów. Należy wówczas zamiast warunku plastyczności (H-M-H) lub Treski używać warunku Coulomba-Mohra, por. (2.68) dla gruntów. Będzie to omówione szerzej w następnym punkcie tego rozdziału.

3. ŚCISKANIE I ROZDZIELANIE BLOKÓW WYKONANYCH Z GRUNTÓW LUB MATERIAŁÓW KRUCHYCH I PÓŁKRUCHYCH

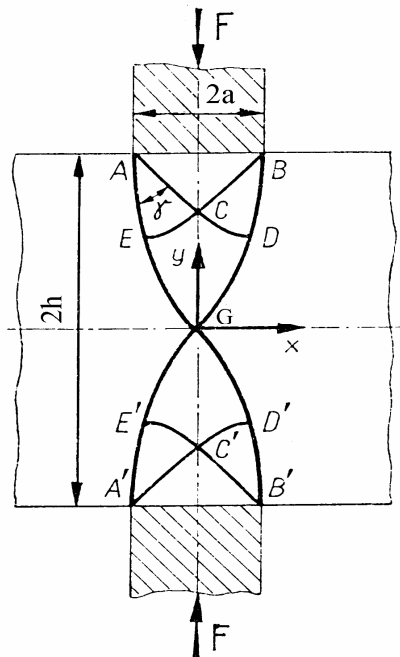
W punkcie 2 przedstawiono i omówiono wybrane metody, stosowane do oszacowania granicznego nacisku (obciążenia) w procesach ściskania, przewężania i przecinania bloków metalicznych przez dwa przeciwbieżne płaskie stemple. W niniejszym punkcie wykorzysta się te metody do procesów ściskania, rozdzielania i kruszenia bloków, wykonanych z materiałów kruchych i niektórych półkruchych. Do analizy problemu użyto warunek plastyczności Coulomba-Mohra, por. [rozdział II, równanie (2.68)] oraz [11, 37-41, 69, 136, 140, 147]. Problemy te stanowią odrębną dziedzinę badań, których zastosowania związane są z takimi zagadnieniami, jak np.: stateczność i nośność podłoża budowlanego czy też kruszenie skał, betonów itp. Wydaje się, że dokonany w ostatnich latach XX wieku znaczny rozwój matematycznej teorii plastyczności i metod numerycznych pozwala obecnie na dobrą analizę tych zagadnień.

Celem obliczeń będzie określenie granicznego nacisku (obciążenia), przy którym rozpoczynają się, np.: procesy osiadania gruntów, osuwania skarpy, rozdzielania lub kruszenia materiału, zapoczątkowanych inicjacją odkształceń plastycznych lub tuż przed ich zapoczątkowaniem (oszacowania dolne).

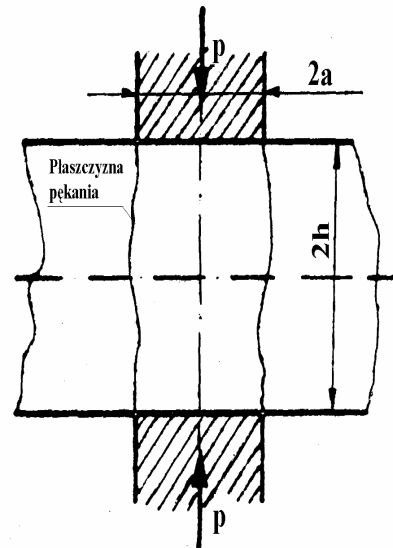
3.1. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA WYJŚCIOWE

Podobnie jak w punkcie 2 rozpatruje się blok materiału o grubości $2h$, który jest ściskany (zgniatany) obustronnie przez dwa zbliżające się płaskie, gładkie i sztywne stemple o szerokości $2a$, przy czym ($a < h$), por. rys. 7.7. Zakłada się jak poprzednio, że proces przebiega w płaskim stanie odkształcenia (PSO), a ściskany materiał spełni warunek stanu granicznego Coulomba-Mohra słuszny dla gruntów, skał, wapieni, betonów i innych, por. wyrażenie (2.68). Rozpatrywane zagadnienie jest symetryczne względem osi X i Y.

a).



b).



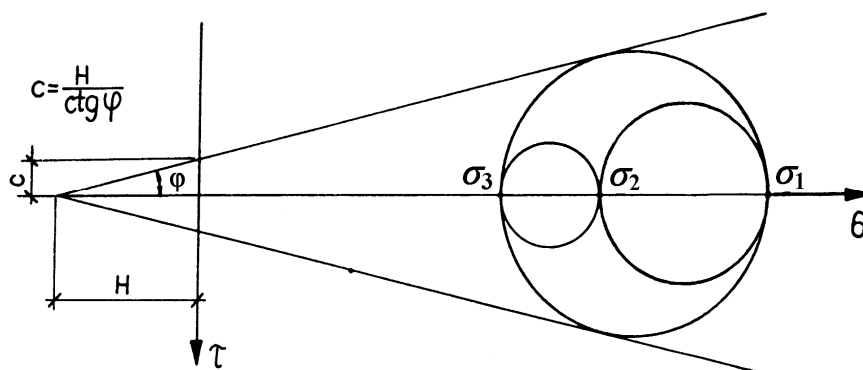
Rys. 7.7. Ściskanie bloku materiału Coulomba-Mohra przez dwa przeciwbieżne płaskie i sztywne stemple, np. a) – schemat [138], b) – pęknięcie skał i betonu [159]

Ogólna postać warunku stanu granicznego Coulomba wyrażona przez naprężenia główne jest następująca [41, 136, 140]

$$\sigma_1 - \sigma_3 = (\sigma_1 + \sigma_3 - 2H) \sin \varphi, \quad (7.9)$$

gdzie: σ_1 i σ_3 – naprężenia główne takie, że ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$).

Interpretację graficzną warunku stanu granicznego Coulomba-Mohra przedstawiono na rys. 7.8. Na rysunku tym wielkości φ , c , H oznaczają odpowiednio: kąt tarcia wewnętrznego, spójność materiału i wytrzymałość materiału na izotropowe rozciąganie. Przyjęto także umowę, że naprężenia ściskające są dodatnie, oraz że ośrodek ciągły (materiał) jest nieważki.



Rys. 7.8. Graficzne odwzorowanie warunku stanu granicznego Coulomba-Mohra na płaszczyźnie naprężeń (σ - τ) wg [41]

3.2. ZASTOSOWANE METODY OBLICZEŃ

3.2.1. METODA CHARAKTERYSTYK

Wartość nacisku p dla wartości kąta tarcia wewnętrznego $\varphi = 10^\circ$ i stosunku h/a zawartego w granicach ($1,19 \leq h/a \leq 14,5$), por. rys. 7.12 wyznaczono w pracy [159]. W rozwiązywaniu tego zagadnienia korzysta się z rezultatów zamieszczonych w pracy [159] i własnych autora, który powtórzył te obliczenia niezależnie [147]. Dla przyjętego modelu ciała Coulomba-Mohra schemat obszarów plastycznych i linii poślizgu, do którego zastosowano metodę charakterystyk jest podobny jak poprzednio i przedstawia rys. 7.1. Doświadczenia pokazują [41, 104, 135, 136, 138, 140, 147, 154], że w takim procesie obszary plastyczne zaczynają się tworzyć od narożnych punktów stempla. Obszary położone na zewnątrz bezpośredniego otoczenia stempla pozostają sztywne i rozsuwają się na zewnątrz w miarę zagłębiania się stempla w głąb materiału.

Wielkość nacisku p wyznacza się jak w poprzednim zagadnieniu metodą numerycznego całkowania wyrażenia całkowego (7.3), wynikającego z warunku równowagi połowy bloku materiału, odciętego wzdłuż pionowej osi symetrii Y. Ponieważ stan naprężenia wyznacza się numerycznie, więc i w tym przypadku nie można podać analitycznego wyrażenia na postać nacisku p w zależności

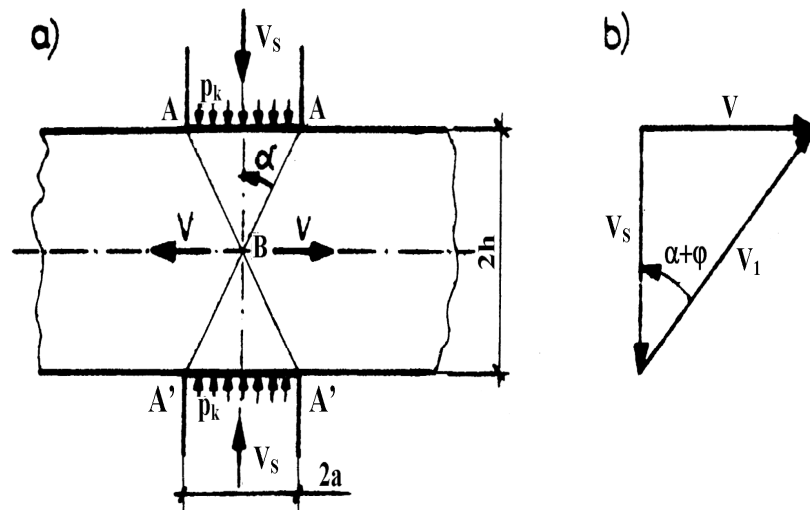
od stosunku h/a . Otrzymane rezultaty obliczeń prezentowane są więc w postaci odpowiednich wykresów. Pełniejszy i bardziej szczegółowy opis i analizę tej metody obliczeń można znaleźć w pracach [41, 136, 138, 140, 147].

Dla wartości $h/a \geq 14,5$ nacisk p , por. rys. 7.12 osiąga wartość maksymalną, wynikającą ze schematu wciskania stempla w półprzestrzeń, przedstawionego po raz pierwszy przez Prandtla. Wartość tego nacisku dla przypadku materiału Coulomba-Mohra wynosi [41, 136, 140, 147]

$$p = \frac{c}{\operatorname{tg} \varphi} \left[\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \exp(\pi \operatorname{tg} \varphi) - 1 \right]. \quad (7.10)$$

3.2.2. METODY NOŚNOŚCI GRANICZNEJ – OSZACOWANIA GÓRNE I DOLNE

a) Pierwszy kinematycznie dopuszczalny schemat odkształcenia



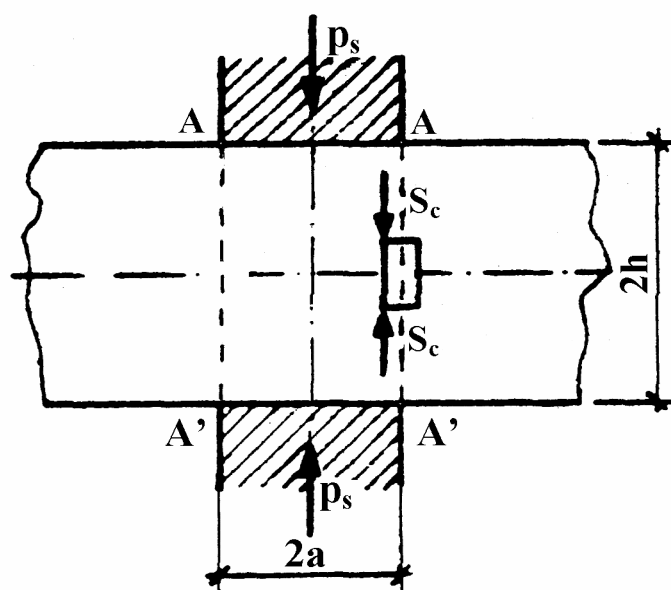
Rys. 7.9. Kinematycznie dopuszczalny schemat odkształcenia a) i odpowiadający mu plan (hodograf) prędkości b) wg [8, 41, 104, 136]

Kinematycznie dopuszczalny schemat odkształcenia przedstawiony na powyższym rys. 7.9 nazywany jest potocznie kinematycznym schematem elementarnym [8, 41, 104, 136].

Wynikająca ze schematu na rys. 7.9 górna ocena granicznej wartości nacisku p otrzymana jest z porównania mocy obciążenia p_k na prędkościach V_s , z mocą dysypowaną na liniach ścięcia AB i A'B (linie nieciągłości prędkości) ma następującą postać

$$p_{k1} = \frac{c \cdot \cos \varphi}{\frac{h}{a} - \sin \varphi} \left[\left(\frac{h}{a} \right)^2 + 1 \right]. \quad (7.11)$$

b) Pierwszy schemat statycznie dopuszczalnego pola naprężeń

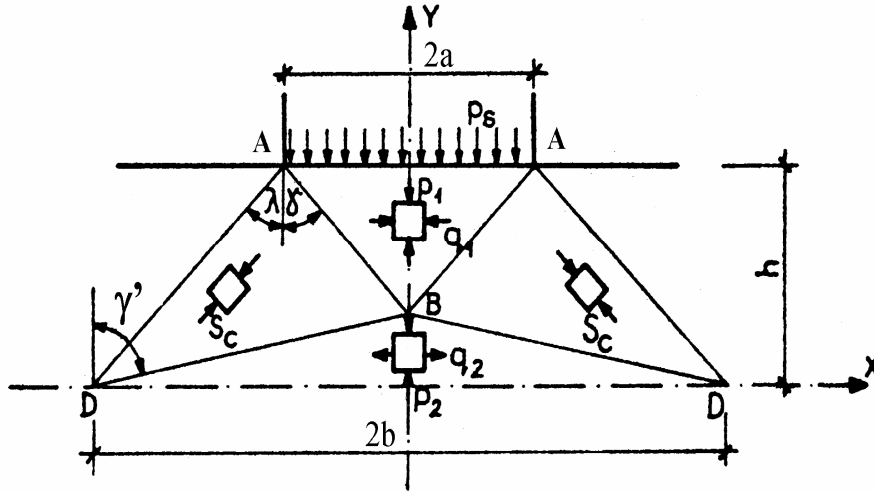


Rys. 7.10. Pierwsze statycznie dopuszczalne pole naprężeń wg [41]

W schemacie tym linie AA' są liniami nieciągłości naprężeń. Wewnątrz prostokąta AA'A'A panuje jednorodny stan naprężenia, a na zewnątrz materiał jest wolny od naprężeń. S_c – naprężenie równe wytrzymałości materiału na jednoosiowe ściskanie. Pierwszą dolną ocenę granicznego nacisku wynikającą z tego pola statycznie dopuszczalnych naprężeń, oblicza się ze wzoru [41]

$$p_{s1} = c \frac{2 \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}. \quad (7.12)$$

c) Drugie statycznie dopuszczalne pole naprężeń



Rys. 7.11. Drugie statycznie dopuszczalne pole naprężeń wg [41, 136, 140]

Pole tego rodzaju było często używane i cytowane w rozpoznanej literaturze, por. np. [41, 136, 140]. W tym statycznie dopuszczalnym polu naprężeń linie AB, AD, BD są liniami nieciągłości naprężeń.

Wynikająca z tego statycznie dopuszczalnego schematu naprężeń druga dolna ocena granicznego nacisku p (drugie oszacowanie dolne), wyraża się następującym wzorem

$$p_{s2} = c \cdot \operatorname{ctg} \varphi \left[\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \frac{\sin(\nu + \lambda)}{\sin(\nu - \lambda)} - 1 \right], \quad (7.13)$$

gdzie z rys. 7.11 i wzoru (7.13) wynikają następujące zależności

$$\gamma = \frac{\nu - \lambda}{2}, \quad \cos \nu = \sin \varphi \cdot \cos \lambda.$$

Wielkość kąta λ dla danego stosunku h/a należy dobrać tak, aby bok DD pola naprężeń leżał wzdłuż poziomej osi symetrii X.

Stąd wynika następująca analityczna relacja

$$\frac{h}{a} = \operatorname{ctg} \gamma + \frac{\sin \gamma' \cdot \cos \gamma'}{\sin^2 \gamma}, \quad (7.14)$$

gdzie: $\gamma' = \frac{\nu + \lambda}{2}$, przy warunku, że $\frac{b}{a} = \frac{\sin^2 \gamma'}{\sin^2 \gamma}$.

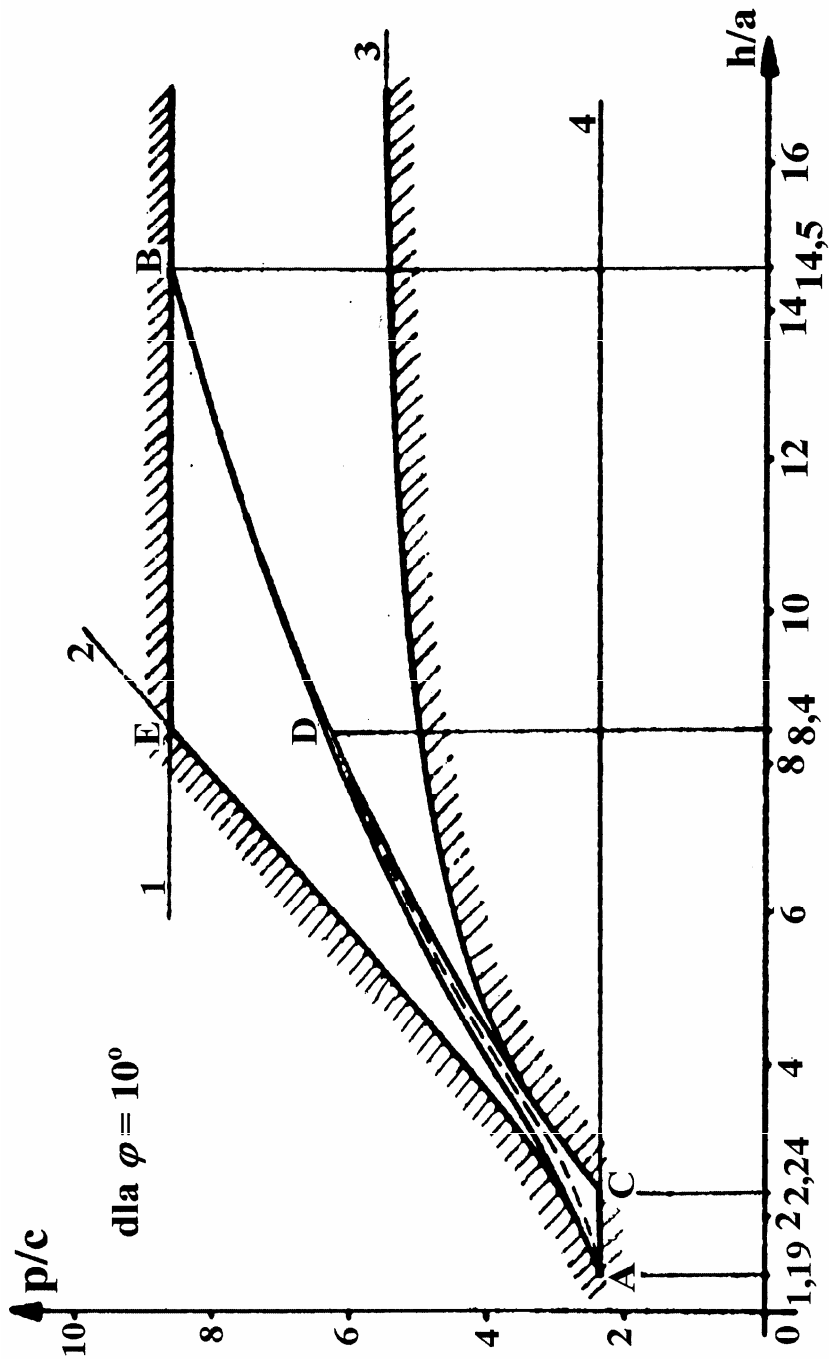
Wzór (7.14) przedstawia warunek na minimalną szerokość b jaką musi mieć blok materiału, aby mógł się w nim zrealizować schemat naprężenia przedstawiony na rys. 7.11. Warunek ten oznacza, że krawędzie AD muszą być wewnątrz bloku materiału [41].

3.3. OMÓWIENIE I ANALIZA OTRZYMANYCH WYNIKÓW

Rezultaty numerycznych i analitycznych obliczeń, wynikających z wyprowadzonych zależności (7.3), (7.9) – (7.13) przedstawiono na rys. 7.12.

1. Krzywą ADB otrzymuje się z rozwiązania zagadnienia metodą charakterystyk korzystając ze wzoru (7.3). Wartości dla krzywej ADB otrzymuje się metodą całkowania numerycznego wyrażenia całkowego (7.3). W przedziale pomiędzy punktami D i B, tzn. dla $(8,4 \leq h/a \leq 14,5)$ rozwiązanie to jest ściśle (pełne), ponieważ spełnia wszystkie warunki statyczne i kinematyczne procesu ściskania, przewężania i przecinania. Natomiast na lewo od punktu D, tzn. dla $(1,19 \leq h/a \leq 8,40)$ rozwiązanie jest tylko kinematycznie dopuszczalne dla metody charakterystyk i daje górną ocenę nieznanego rozwiązania ścisłego (pełnego), zaznaczonego pogładowo linią przerywaną. W tym zakresie zbudować można także statycznie dopuszczalne pola naprężeń, dające dolną ocenę (linie AC i CD) nieznanego rozwiązania ścisłego. Linię CD zaczerpnięto z pracy [159]. Jak widać obie te oceny (linie AD i CD) w zakresie $(1,19 \leq h/a \leq 8,40)$ różnią się niewiele – zaledwie kilka procent. Przyjmując jako rozwiązanie ściśle średnią arytmetyczną (zaznaczoną pogładowo linią przerywaną) zawartą między tymi dwoma rozwiązaniami, oznaczonymi liniami AD i CD, zmniejsza się więc błąd oszacowania ewentualnego rozwiązania ścisłego o połowę.

2. W przypadku, gdy $h/a \geq 14,5$ nacisk graniczny p osiąga wartość określoną wzorem wyprowadzonym po raz pierwszy przez Prandtla, dla przypadku wciskania płaskiego stempla w półprzestrzeń [41, 147, 159]. Linię poziomą 1 otrzymuje się więc jak dla przypadku wciskania płaskiego stempla w półprzestrzeń i oblicza ze wzoru (7.10).



Rys. 7.12. Wielkość nacisku stempla p w zależności od stosunku h/a dla zastosowanych metod obliczeń [147, 159]

3. Krzywą 2 otrzymuje się odpowiednio ze wzoru (7.11), który wyprowadzono dla kinematycznie dopuszczalnego pola prędkości odkształcenia. Jest to, jak widać, oszacowanie górne krzywej ADB, którą otrzymano z rozwiązania zagadnienia metodą charakterystyk ze wzoru (7.3). Są to zarazem oszacowania górne nieznanego rozwiązania ścisłego w zakresie ($1,19 \leq h/a \leq 8,40$) i zaznaczonego poglądowo na rysunku linią przerywaną.

4. Prostą linię poziomą 4 i krzywą 5 otrzymano odpowiednio ze wzorów (7.12) i (7.13), które wyprowadzono dla przypadku statycznie dopuszczalnych pól naprężeń. Są to, jak widać, oszacowania dolne krzywej ADB, którą otrzymano z rozwiązania zagadnienia metodą charakterystyk. Są to zarazem oszacowania dolne nieznanego rozwiązania ścisłego w zakresie ($1,19 \leq h/a \leq 8,40$), zaznaczonego na rysunku poglądowo linią przerywaną.

5. Obszar zawarty między zakreskowanymi liniami jest, jak widać, polem oszacowania wyrażeniami (7.10) – (7.13) rozwiązania otrzymanego numerycznie metodą całkowania po charakterystykach (krzywa ADB) i zarazem krzywej CD, otrzymanej ze statycznie dopuszczalnego pola naprężeń zbudowanego na siatce charakterystyk w pracy [159]. Jest to zarazem obszar oszacowania nieznanego rozwiązania ścisłego, metodą charakterystyk w zakresie ($1,19 \leq h/a \leq 8,40$), zaznaczonego poglądowo linią przerywaną.

Jak widać, pole oszacowania nie jest duże, gdyż największa rozbieżność wyników (w stosunku do rozwiązań metodą charakterystyk – linia ADB) dla oszacowania kinematycznego wynosi do 27%, a dla statycznego do 30%. Należy jednak podkreślić łatwy sposób otrzymania tych oszacowań, w porównaniu do rozwiązań metodą charakterystyk i przeprowadzania obliczeń analitycznych.

3.4. UWAGI KOŃCOWE

1. Przedstawione w p. 3 tego rozdziału rezultaty są pewnego rodzaju syntezą wyników otrzymanych w pracach [41, 136, 140, 147, 159], dotyczących ściskania bloku materiału, spełniającego warunek stanu granicznego (warunek plastyczności) Coulomba-Mohra, [por. rozdział II, wzór (2.68)].
2. Prezentowane na rys. 7.12 wyniki otrzymano z metody rozwiązania numerycznego na charakterystykach i z metod przybliżonych (oszacowania górne i dolne), opartych na kinematycznie dopuszczalnych polach odkształcenia i statycznie dopuszczalnych polach naprężeń.
3. Otrzymanie podobnych rezultatów dla innych materiałów, np. opisanych zmodyfikowanym warunkiem stanu granicznego Coulomba-Mohra czy też warunkiem Griffitha [41] nie powinno nastroczać większych trudności. Należy pamiętać, że w przypadku płaskiego stanu naprężenia (PSO) zmodyfikowany warunek stanu granicznego Coulomba-Mohra i warunek Griffitha mają podobną postać, ale sens występujących w nich parametrów lub stałych materiałowych jest inny.

4. Zgniatanie gruntów, kruszenie i rozdrabnianie skał, betonów i innych materiałów kruchych lub półkruchych stanowią odrębną dziedzinę badań, których zastosowania związane są bezpośrednio z takimi zagadnieniami, jak np. bezpieczeństwo stateczności i nośności podłoża budowlanego, zapobieganie zapadaniu się wyrobisk górniczych pod obiektami budowlanymi. Ważne zastosowanie ma kruszenie skał, betonów lub węgla i innych jako materiałów budowlanych lub opałowych w kotłach energetycznych. Kruszenie wstępne a następnie mielenie, np. węgla na pył przyczynia się do bardziej ekologiczniejszego i pełniejszego jego spalania w nowoczesnych kotłach fluidalnych. Podczas intensywnego procesu kruszenia i rozdrabniania materiałów kruchych należy je zraszać wodą lub stosować wyciągi pyłowe, aby zapobiegać nadmiernemu zapyleniu. Aby zmniejszyć poziom hałasu podczas zgniatania i kruszenia zaleca się, aby napęd urządzeń (pras) zgniatających i kruszących był, np. hydrauliczny, a nie mechaniczny. Można w tym celu umieścić prasy zgniatająco-kruszące w specjalnych pyło- i hałasoszczelnym pomieszczeniach. Zgniatanie i kruszenie wstępne jest czasami niezbędne przed innymi procesami przeprowadzanymi w skali: mili, mikro i nanorozdrabniania cząstek materiałów celem uzyskania bardzo rozdrobnionych struktur (np. mikrostruktur lub nanostruktur) o bardzo dobrych własnościach wytrzymałościowych: mechanicznych, fizykochemicznych i innych.
5. W pracy [41] przedstawiono rezultaty jakie otrzymano za pomocą metod przybliżonych (oszacowania górne i dolne) i rozwiązania numerycznego na charakterystykach dla przypadku warunku stanu granicznego Griffitha. Możliwość dokonania syntezy tych wyników do postaci podobnej jak obecna i przedstawionych na rys. 7.12 nie sprawi większych trudności. Pamiętaj tylko należy, że rezultaty te otrzymano dla kąta tarcia wewnętrznego $\varphi = 20^\circ$. Koniecznej dla osiągnięcia tego celu transformacji współrzędnych należy dokonać uwzględniając podaną w pracy [41] zależność, że $S'_t = 0,8S_t$, gdzie: S'_t i S_t – są odpowiednio wytrzymałością materiału na równomierne jednoosiowe rozciąganie, dla przypadku zmodyfikowanego warunku Coulomba-Mohra i warunku Griffitha.

Podziękowanie

Dziękuję Panu dr. inż. Zbigniewowi Marciniakowi, adiunktowi na Wydziale Mechanicznym za poprawę jakości graficznej niektórych rysunków.

LITERATURA

- [1] ANAND L.: Constitutive equations for the rate-dependent deformation of metals at elevated temperatures, *Transactions of ASME*, 104, 1982, 12-17.
- [2] BANASIAK Cz.: Wpływ anizotropii i umocnienia na twardość blachy stalowej, Rozprawa doktorska, Politechnika Wrocławska, Wrocław 1971.
- [3] BENALLAL A., BIGONI D.: Effects of Temperature and Thermo-Mechanical Couplings on Material Instabilities and Strain Localization of Inelastic Materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 52, 3, 2004, 725-753.
- [4] BERNSZTEJN M.L., ZAJMOWSKI W.A.: *Struktura i własności mechaniczne metali*, WNT, Warszawa 1983.
- [5] BERTRAM A.: A Finite Thermoplasticity Based on Isomorphisms, *International Journal of Plasticity*, vol. 19, 2003, 2027-2050.
- [6] BEVER M.B., HOLT D.L., TITCHENER A.T.: *Stored Energy of Cold Work*, *Progress in the Material Sciences*, 17, Pergamon Press, 1973.
- [7] BRESSAN J.D., WILLIAMS J.A.: The Use of Shear Instability Criterion to Predict Local Necking in Sheet Metal Deformation, *International Journal of Mechanical Science*, vol. 25, no 3, 1983, 155-168.
- [8] CALLADINE C.R.: *Engineering Plasticity*, Pergamon Press, Oxford-London-New York 1969.
- [9] CANDIJA M., BRNIC J.: Associative Coupled Thermoplasticity at Finite Strain with Temperature-Dependent Material Parameters, *International Journal of Plasticity*, vol. 20, 2004, 1851-1874.
- [10] DOBOSIEWICZ J., WOJCZYK K.: Trwałość kolan rurociągów parowych, *Energetyka*, nr 3/88, Katowice 1988, 88-90.
- [11] DRAGON A., MRÓZ Z.: A continuum model for plastic-brittle behavior of rock and concrete, *International Journal of Engineering Science*, vol. 1, issue 17, 1979, 121-137.
- [12] DZIDOWSKI E.S.: Kryteria oceny wpływu technologii wytwarzania i technologii remontów na własności materiałów stosowanych w budowie urządzeń energetycznych, *Materiały I Konferencji Naukowo-Technicznej PIRE'98*, ISBN 83-909539-5-1, Organizator OBR-GRE we Wrocławiu, Kudowa-Zdrój 1998, 51-56.
- [13] DZIDOWSKI E.S.: Mezomechaniczne aspekty niezawodności elementów rurociągów energetycznych wykonanych poprzez gięcie na zimno, *Materiały IV Konferencji Naukowo-Technicznej PIRE 2001*, ISBN 83-909539-3-5, Organizator OBR-GRE Wrocław, Łądek-Zdrój 2001, 103-110.

- [14] DZIDOWSKI E.S.: Problemy i rozwiązania dotyczące niezawodności i jakości procesu gięcia rur cienkościennych o dużych tolerancjach wykonania, Materiały IV Konferencji Naukowo-Technicznej PIRE 2001, ISBN 83-909539-3-5, Org. OBR-GRE Wrocław, Łądek-Zdrój 2001, 91-101.
- [15] DZIDOWSKI E.S., STRAUCHOLD SZ.: Wpływ technologii gięcia rur na zimno na potencjalne uszkodzenia i niezawodność rurociągów energetycznych, Zeszyty Naukowe Politechniki Opolskiej, seria Elektryka, z. 46, Opole 1998, 119-125.
- [16] EL-SEBAIE M.G. AND MELLOR P.B.: Plastic instability conditions in the deep-drawing of a circular blank of sheet metal, International Journal of Mechanical Science, vol. 14, 1972, 535-556.
- [17] ERBEL S., KUCZYŃSKI K., MARCINIAK Z.: Obróbka plastyczna, PWN, Warszawa 1986.
- [18] FORD H.: Advanced Mechanics of Materials, Ellis Horwood Ltd, Chichester 1977.
- [19] FRANZ W.D.: Das Kalt-Biegen von Rohren, Springer-Verlag, Berlin 1961.
- [20] FRANZ W.D.: Numerisch gesteuerte Rohrkaltbiegemaschinen, Werkstatt und Betrieb, Heft 9/69, 1969, 129-145.
- [21] GABRYSZEWSKI Z., GRONOSTAJSKI J.: Mechanika procesów plastycznego kształtowania metali, PWN, Warszawa 1991.
- [22] GABRYSZEWSKI Z.: Teoria sprężystości i plastyczności, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1987.
- [23] GRONOSTAJSKI J.: Obróbka plastyczna metali, Skrypt Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1973.
- [24] GRÜNER P.: Über Rohrbiegeverfahren, Maschinenmarkt, 30/31, 1960, 120-129.
- [25] GYARMATI J.: Non-equilibrium thermodynamics. Field theory and variational principles, Springer-Verlag, Berlin, New York 1970.
- [26] HART E.W., LI .C.Y., YAMADA H. and WIRE G.L.: Phenomenological Theory: A guide to constitutive relations and fundamental deformations properties, In: The Constitutive Equations of Plasticity, Edition Argon, MIT Press, 1975, 149-197.
- [27] HILL R.: A general theory of uniqueness and stability in elasto-plastic solids, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 6, 1958, 302-307.
- [28] HILL R.: Bifurcation and uniqueness in non-linear mechanics of continua, Problem of Continuum Mechanics, N.I. Muskhelishwili Anniversary Volume, SIAM, Philadelphia 1961, 155-164.

- [29] HILL R.: Eigenmodal deformations in elasto-plastic continua, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 15, 1967, 255-262.
- [30] HILL R.: On constitutive inequalities for simple materials -II, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 16, 1968, 315-322.
- [31] HILL R.: *Mathematical Theory of plasticity*, Oxford, Clarendon Press, London 1986.
- [32] HILL R.: On Discontinuous Plastic States, with Special References to Localised Necking in Thin Sheet, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 1, no 2, 1952, 371-386.
- [33] HILL R.: On intransic eigenstates in plasticity with generalized variables, *Mathematical Proceedings of Cambridge Philosophy and Society*, vol. 93, 1983, 177-189.
- [34] HILL R.: On the classical constitutive relations for elastic/plastic solids, *Recent Progress in Applied Mechanics – The Folke Odqvist Volume*, eds. B. Broberg et al., Almquist and Wiksell, Stockholm 1967, 241-249.
- [35] HILL R.: Uniqueness criteria and extremum principles in self-adjoint problem of continuum mechanics, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 10, 1962, 185-194.
- [36] HILL R.: Constitutive dual potentials in classical plasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 35, 1987, 23-33.
- [37] HUECKEL T.: Coupling of elastic and plastic deformations of bulk solids, *Meccanica*, vol. 11, 1976, 227-235.
- [38] HUECKEL T., KÖNIG J.A.: Some problems in elastoplasticity, *Accademia Polacca Delle Scienze, Conferenze 74, Ossolineum, Warszawa 1979*, 1-27.
- [39] HUECKEL T., MAIER G.: Incremental boundary value problems in the presence of coupling of elastic and plastic deformations. A rock mechanics oriented theory, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 13, 1977, 1-15.
- [40] HUECKEL T., MAIER G.: Non-associated and coupled flow rules of elastoplasticity for geotechnical media, Presented on the Proc. 9-th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng. (JCSFE), Tokyo 1977, Speciality Session 7, Constitutive Relations for Soils, 129-142.
- [41] IZBICKI J.R., MRÓZ Z.: *Metody nośności granicznej w mechanice gruntów i skał*, IPPT-PAN, PWN, Warszawa-Poznań 1976.
- [42] JAKOWLUK A.: *Procesy pełzania i zmęczenia w materiałach*, WNT, Warszawa 1993.
- [43] JAKUBOWICZ A., ORŁOŚ Z.: *Wytrzymałość materiałów*, WNT, Warszawa 1970.

- [44] JENTET J.: Determination of the Deep Drawing Capacity of Light Sheet Metal on the Basis of Laboratory Test, Sheet Metal Industry, vol. 38, no. 415, 1961.
- [45] JOHNSON W., MELLOR P.B.: Engineering Plasticity, van Nostrand Reinhold Company, London 1975.
- [46] JONAS J.J., SAKAI T.: Deformation, processing and structure, G. Krauss, ASTM, Metals Park 1984.
- [47] KACZANOW L.N.: Osnovy teorii płaściznosti, Izdatielstwo „Nauka”, Moskwa 1969
- [48] KAMIŃSKI M.: Sprężenie pola odkształceń z polem temperatury w zagadnieniu skręcania cienkościennej rurki, Rozprawy Inżynierskie (Engineering Transactions), vol. 24, 1, Warszawa 1976, 185-199.
- [49] KLEPACZKO J.: O potęgowej postaci mechanicznego równania stanu z uwzględnieniem temperatury, Rozprawy Inżynierskie (Engineering Transactions), 3, 13, 1965, 561-586.
- [50] KORZEMSKI J.W.: Gięcie rur cienkościennych na trzpieniach, Mechanik, 4/68, Warszawa 1968, 207-210.
- [51] KORZEMSKI J.W.: Gięcie rur cienkościennych, WNT, Warszawa 1971.
- [52] KRZYŚ W., ŻYCZKOWSKI M., Sprężystość i plastyczność. Wybór zadań i przykładów, PWN, Warszawa 1962.
- [53] KUCZYŃSKI K.: Przebieg odkształceń i wartości odkształcenia granicznego przy dwuosowym rozciąganiu blach, rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 1969.
- [54] KUDO N., TSUBOUCHI M.: Strain Concetration Due to Heat Generation in Adiabatic Plastic Deformation, Annals of the CIRP, 1971, 211-218.
- [55] KUNZENDORF W.: Technologiczne podstawy gięcia rur na zimno, Obróbka plastyczna, tom IV/68, Zeszyt 1, Poznań 1968.
- [56] LEHMAN Th.: Thermodynamical Foundations of Large Inelastic Deformations of Solid Bodies Including Damage, International Journal of Plasticity, 7, 1991, 79-98.
- [57] LEHMANN Th.: Beanspruchung von Rohrbögen durch Innendruck, Konstruktion, Heft 3, 1959, 111-112.
- [58] LEHMANN Th.: Große elasto-plastische Formänderungen, Ruhr-Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, 1, 1976.
- [59] LITOŃSKI J.: Badanie niestateczności przy plastycznym skręcaniu wykorzystując sprężenie termomechaniczne. Niestateczność lokalna., Rozprawy Inżynierskie (Engineering Transactions), 24, 4, Warszawa 1976, 713-729.

- [60] LITOŃSKI J.: Numeryczna analiza procesów plastycznego skręcania przy uwzględnieniu ciepła generowanego podczas odkształcania, Prace IPPT-PAN (IFTR-Reports), 33/1985, Warszawa 1985, 1-58.
- [61] LITOŃSKI J.: Plastic Flow of a Tube Under Adiabatic Torsion, Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences, Serie des Sciences Techniques, vol. XXV, 1, Warszawa 1977, 1-8.
- [62] LUBLINER J.: On the thermodynamic foundations of non-linear solid mechanics, International Journal of Non-Linear Mechanics, vol. 7, 1972, 237-254.
- [63] LUBLINER J.: Plasticity Theory, New York, Macmillan 1990.
- [64] MACHA E.: A review of energy-based multiaxial fatigue failure criteria, The Archive of Mechanical Engineering, 2001, Vol. XLVIII, No. 1, 71-101.
- [65] MACHA E.: Generalization of strain Criteria of Multiaxial Cyclic Fatigue to Random Loadings, Fortschritt – Berlin, VDI, Reihe 18, No 52, VDI-Verlag, Dusseldorf 1988, 102.
- [66] MACHA E.: Simulation investigations of the position of fatigue fracture plane in materials with biaxial loads, Material – wissenschaft und Werkstofftechnik No 20, 1989, Teil I, Heft 4/89, 132-136, und Teil II, Heft 5/89, 153-163.
- [67] MACHA E., SONSINO C.M.: Energy criteria of multiaxial fatigue failure, Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct., 1999, Vol. 22, 1053-1070.
- [68] MACHA E.: The expected position of fatigue fracture plane according to analytical methods, 6-th Biennial European Conference on Fracture (ECF 6), Amsterdam 1986, 8.
- [69] MAIER G.: A minimum principle for incremental elastoplasticity, with non-associated plastic flow laws, J. Mech. Phys. Solids, vol. 18, Pergamon Press 1970, 319-330.
- [70] MARCINIAK Z.: Mechanika procesów tłoczenia blach, WNT, Warszawa 1961.
- [71] MARCINIAK Z.: Utrata stateczności rozciąganych powłok plastycznych, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 3, Warszawa 1966, 189.
- [72] MARCINIAK Z.: Analiza stateczności cienkościennej powłoki w stanie plastycznym, Rozprawy Inżynierskie, z. 4, Warszawa 1968.
- [73] MARCINIAK Z.: Odkształcenia graniczne przy tłoczeniu blach, WNT, Warszawa 1971.
- [74] MARCINIAK Z.: (red wyd.), Obróbka metali. Jakimi metodami kształtować? Na zimno czy na gorąco a może na półgorąco?, „Mechanik”, Miesięcznik Naukowo-Techniczny SIMP, nr 2, Warszawa 1987.

- [75] MARCINIAK Z., KOŁODZIEJSKI J.: Teoria procesów obróbki plastycznej, Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1983.
- [76] MARCINIAK Z., KONIECZNY A.: Modelling the variation of the yield stress within the temperature range typical for cold and warm metal forming, *Journal of the Mechanics and Works of Technology*, 15, 1987, 15-37.
- [77] MARCINIAK Z., KUCZYŃSKI K.: Limit Strains in the Processes of Stretch-Forming Sheet Metal, *International Journal of the Mechanical Science*, vol. 9, 1967.
- [78] MARKL L.: Fatigue tests of piping components, *Transactions of the ASME*, 74, 1952, 287.
- [79] MAUGIN G.A.: Internal Variables and Dissipative Structures, *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, vol. 15, 1990, 173-192.
- [80] MECKING H., KOCKUS U.F.: Kinetics of flow and strain hardening, *Acta Metallurgica*, vol. 29, 1981.
- [81] MELLOR P.B.: Plastic Instability in Tension, *The Engineer*, no 25, 1969.
- [82] MENDELSON A.: Plasticity-Theory and Applications, Mc Millan Company, New York 1988.
- [83] MERZER A.M.: Modelling of Adiabatic Band Development from Small Deformation, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 30, 5, 1982, 323-338.
- [84] MICHAŁOWSKI Z.: Próba tłočności i wytrzymałości na rozrywanie cienkich blach metoda hydrauliczna, *Zeszyty Instytutu Lotnictwa*, tom 3, nr 3, 1967.
- [85] MIEHE C.: A Theory of Large Strain Isotropic Thermoplasticity Based on Metric Transformation Tensors, *Archive of Applied Mechanics*, vol. 66, issue 1/2, December 4, 1995, 45-64.
- [86] MILLER A.K.: Constitutive equations, Elsevier Science S.A., North-Holland, Amsterdam 1985.
- [87] MINISTERSTWO HUTNICTWA CENTROSTAL – Centrala Zbytu Stali-C.Z.S., Katowice, Stale konstrukcyjne do pracy przy podwyższonych temperaturach, Wydawnictwo Akcydensowe, Warszawa 1981.
- [88] MOORE G.G. AND WALLACE J.F.: The effect of anisotropy on instability in sheet-metal forming, *Journal of the Institute of Metals*, vol. 93, no 2, 1964/1965, 33-38.
- [89] MRÓZ Z.: Non-associated flow laws in plasticity, *Journal de Mecanique*, vol. 2, no 1, Mars, 1963, 21-42.
- [90] MRÓZ Z.: On forms of constitutive laws for elastic-plastic solids, *Archivum Mechaniki Stosowanej (Archives of Mechanics)*, vol. 18, no. 1, Warszawa 1966, 3-35.

- [91] MRÓZ Z., RANIECKI B.: On the Uniqueness Problem in Coupled Thermoplasticity, *International Journal of Engineering Sciences*, no. 14, 1976, 211-221.
- [92] MRÓZ Z., RANIECKI B.: A Derivation of the uniqueness conditions in coupled thermoplasticity, *International Journal of Engineering Sciences*, no. 14, 1976, 395-401.
- [93] NEIMITZ A., DZIOBA I., GRABA M., OKRAJNI J.: Ocena wytrzymałości, trwałości i bezpieczeństwa pracy elementów konstrukcyjnych zawierających defekty, Politechnika Świętokrzyska, Kielce 2008.
- [94] NGUYEN H.V.: Sprzężenia termomechaniczne w procesach dużych odkształceń sprężysto-plastycznych metali, Praca habilitacyjna, Prace IPPT-PAN (IFTR Reports), nr 10/99, Warszawa 1999.
- [95] NOWACKI W.K.: Thermal effects in dynamic plasticity, numerical solution and experimental investigations (thermographic-infrared detection). *Journal de Physique*, 48 (8), 1985, 113-119.
- [96] OKAMOTO T., MATSUOKA T., MAYASKI Y., SUDO C.: Ductile Fracture Strains of Steel Sheet by Hydraulic Bulge Test, *La Metalurgia Italiana*, No. 8, 1968.
- [97] OKRAJNI J., MAREK A., JUNAK G.: Modelowanie procesu odkształcania w warunkach zmęczenia cieplno-mechanicznego, *Zeszyty Naukowe Politechniki Opolskiej - Mechanika*, z. 83, t. 2, 2005, 159-166.
- [98] OKRAJNI J., MUTWIL K., CIEŚLA M.: Chemical pipelines material fatigue, *Journal of Materials and Processing Technology*, 2005, 897-904.
- [99] OKRAJNI J., MAREK A., PLAZA J., ESSLER W.: Zmęczenie cieplno-mechaniczne elementów urządzeń energetycznych, *Energetyka*, Zeszyt nr XIV, ISSN 0013-7294, Katowice 2007, 81-85.
- [100] OKRAJNI J.: Trwałość elementów części ciśnieniowej kotłów w ujęciu obowiązujących norm, *Energetyka*, Zeszyt nr XVIII, ISSN 0013-7294, Katowice 2008, 93-100.
- [101] OKRAJNI J., JUNAK G., MAREK A.: Modelling of Deformation Process under Thermo-Mechanical Fatigue Conditions, *International Journal of Fatigue*, Vol. 30, No. 2, 2008, 324-329.
- [102] OLIFERUK W., ŚWIĄTNICKI W.A. and GRABSKI M.W.: Rate of energy storage and microstructure evolution during the tensile deformation of austenitic steel, *Materials Science and Engineering*, A 161 (1993), Elsevier Science S.A., 1993, 55-63.
- [103] OLIFERUK W.: Proces magazynowania energii i jego strukturalny aspekt podczas jednoosiowego rozciągania stali austenitycznej, Praca habilitacyjna, Prace IPPT-PAN (IFTR-Reports), nr 11/1997, Warszawa 1997.

- [104] OLSZAK W., PERZYNA P., SAWCZUK A.: Teoria plastyczności, PWN, Warszawa 1985.
- [105] PERZYNA P.: Termodynamika materiałów niesprężystych, PWN, Warszawa 1978.
- [106] PERZYNA P.: Instability phenomena and adiabatic shear band localisation in thermoplastic flow processes, *Acta Mechanica*, 106, 1986, 173-205.
- [107] PERZYNA P.: Constitutive modelling of dissipative solids for localisation and structure, [Ed.], *Localisation and fracture phenomena in inelastic solids*, CISM Courses and Lectures, No. 386, Springer-Wien-NewYork, 1998.
- [108] PERZYNA P., DUSZEK M.K.: The localisation of plastic deformation in thermoplastic solids, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 27, 11, 1991, 1419-1443.
- [109] PETRYK H.: Niejednoznaczność i niestateczność procesów deformacji plastycznych, praca habilitacyjna, Prace IPPT-PAN (IFTR Reports), nr 7/87, Warszawa 1987.
- [110] PETRYK H.: On constitutive inequalities and bifurcation in elastic-plastic solids with a yield-surface vertex, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 37, 1989, 265-291.
- [111] PETRYK H.: Thermodynamic stability of equilibrium in plasticity, *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 20, 1995, 132-149.
- [112] PEŁCHERSKI R.B.: The plastic spin concept and the theory of finite plastic deformations with induced anisotropy, *Archives of Mechanics*, 40, Warszawa 1988, 807-818.
- [113] PEŁCHERSKI R.B.: Finite deformation plasticity with strain induced anisotropy and shear banding, *Journal of the Materials Processes and Technology*, 60, 1996, 35-44.
- [114] PEŁCHERSKI R.B.: Opis deformacji plastycznej metali z efektami mikropasm ścinania, praca habilitacyjna, IPPT-PAN (IFTR Reports), Nr 2/1998, Warszawa 1998.
- [115] PIWNIK J.: Analiza osiowo-symetrycznych procesów obróbki plastycznej, praca habilitacyjna, Prace IPPT-PAN (IFTR Reports), nr 44/1985, Warszawa 1985, 1-215.
- [116] PIWNIK J.: Mechanika procesów wyciskania metali, Politechnika Białostocka, Rozprawy Naukowe, nr 6/91, Białystok 1991.
- [117] PLATA M., PIWNIK J.: Theoretical and experimental analysis of seam weld formation in the hot extrusion of aluminium alloys, TCC Report, No 2000/53, Process Development, Aluisse Technology & Management Ltd., Technology Center, CH - 3965 Chippis, Switzerland 2000.

- [118] PRAGER W.: Non-isothermal plastic deformation, Proceedings Koninkl. Nederland Academy Wet., B 61, 1958.
- [119] RANIECKI B.: Jednoznaczność i zasady wariacyjne w termoplastyczności, w tomie „Termoplastyczność”, Ossolineum, Wrocław 1973, 175-222.
- [120] RANIECKI B., SAWCZUK A.: Thermal Effects In Plasticity. Part I. Coupled Theory, Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik, ZAMM, 55, 1975, 333-341.
- [121] RANIECKI B., SAWCZUK A.: Thermal Effects In Plasticity. Part II. Uniqueness and Applications, Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik, ZAMM, 55, 1975, 363-371.
- [122] RANIECKI B.: Zagadnienia stosowanej termoplastyczności, Praca habilitacyjna, Prace IPPT-PAN (IFTR-Reports), nr 29/1977, Warszawa 1977.
- [123] RANIECKI B.: Uniqueness criteria in solids with non-associated plastic flow laws at finite deformations, Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences, Serie des Sciences Techniques, vol. 27, No. 8-9, Warszawa 1979, 391-399.
- [124] RANIECKI B., BRUHNS O.T.: Bounds to bifurcation stress in solids with non-associated plastic flow at finite strain, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 29, No. 2, 1981, 153-172.
- [125] RANIECKI B., ŚLÓDERBACH Z., WIKTOROW W.W.: Badanie własności mechanicznych metali i stopów przy krótkotrwałych obciążeniach w warunkach zmiennych temperatur, Prace IPPT-PAN (IFTR-Reports), nr 68/79, Warszawa 1979.
- [126] RECHT R.F.: Catastrophic Thermoplastic Shear, Journal of the Applied Mechanics, 31, 1964, 189-193.
- [127] RICE J.R.: The localization of plastic deformation, Theoretical and Applied Mechanics, (ed. W. T. Koiter), North-Holland Publishing Company, 1976, 207-220.
- [128] RUDNICKI J.W., RICE J.R.: Condition for the localisation of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 23, 1975, 371-394.
- [129] SAWCZUK A., IZBICKI R.: Podstawy mechaniki ośrodków ciągłych, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1984.
- [130] SEYNA F., GINALSKI J.: Diagnostyka łuków gładkich w głównych rurociągach pary, Dozór Techniczny, nr 2/99, Warszawa 1999, 31-33.
- [131] SEYNA F., GINALSKI J.: Obliczeniowe zasady szacowania zapasu trwałości eksploatacyjnej rurociągów parowych, Dozór Techniczny, nr 3/89 Warszawa 1989.
- [132] SEYNA F., GINALSKI J.: Warunki długotrwałej bezpiecznej eksploatacji rurociągów parowych, Energetyka, nr 6, Katowice 1987, 214-217.

- [133] SIMO J., MIEHE C.: Associative Coupled Thermoelasticity at Finite strains: Formulation, Numerical Analysis and Implementation, *Computer Methods Applied Mechanical Engineering*, vol. 98, 1992, 41-104.
- [134] SKYRZYPEK J., SZUWALSKI K., ŻYCZKOWSKI M.: Nośność rozdzielcza w teorii plastyczności, Politechnika Krakowska, Wydział Mechaniczny, Kraków 1998.
- [135] SOKOŁOWSKI W.W.: *Teoria plastyczności*, PWN, Warszawa 1957.
- [136] SOKOŁOWSKI W.W.: *Statyka ośrodków sypkich*, PWN, Warszawa 1958.
- [137] SWIFT H.W.: Plastic Instability Under Plane Stress, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 1, no 1, 1952.
- [138] SZCZEPIŃSKI W.: *Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej*, PWN, Warszawa 1967.
- [139] SZCZEPIŃSKI W.: *Projektowanie elementów maszyn metodą nośności granicznej*, PWN, Warszawa 1968.
- [140] SZCZEPIŃSKI W.: *Stany graniczne i kinematyka ośrodków sypkich*, PWN, Warszawa 1974.
- [141] SZCZEPIŃSKI W.: The stored energy in metals and concept of residual microstresses in plasticity, *Archives of Mechanics*, vol. 6, no. 53, Warszawa 2001, 615-629.
- [142] ŚLODERBACH Z.: Kryteria rozdwojenia stanów równowagi w uogólnionej termoplastyczności, praca doktorska, *Prace IPPT-PAN (IFTR-Reports)*, nr 37/1980, Warszawa 1980.
- [143] ŚLODERBACH Z.: Generalized coupled thermoelasticity. Part I. Fundamental equations and identities, *Archives of Mechanics*, vol. 3, no. 35, Warszawa 1983, 337-349.
- [144] ŚLODERBACH Z.: Generalized coupled thermoelasticity. Part II. On the uniqueness and bifurcations criteria, *Archives of Mechanics*, vol. 3, no 35, Warszawa 1983, 351-367.
- [145] ŚLODERBACH Z.: Przykłady szacowania stanów lokalizacji deformacji plastycznych, *Rozprawy Inżynierskie (Engineering Transactions)* vol. 2, nr 31, Warszawa, 1983, 179-192.
- [146] ŚLODERBACH Z., SAWICKI T.: Oszacowanie wysokości czaszy kulistej w próbie hydraulicznego wytłaczania dla niektórych prostych warunków utraty stateczności, *Prace IPPT-PAN*, nr 4/84, Warszawa 1984.
- [147] ŚLODERBACH Z., SAWICKI T.: Oszacowania nacisku w procesie ściskania i przecinania bloków z materiału Coulomba przez dwa przeciwbieżne płaskie stemple, *Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej*, nr 51, Nauki Techniczne – Budownictwo, nr 3, Białystok 1985, 83-92.

- [148] ŚLODERBACH Z.: A model of deformation geometry in pipe bending processes, Engineering Transactions, IFTR - PAS (Rozprawy Inżynierskie) vol. 47, issue 1, Warszawa 1999, 3-20.
- [149] ŚLODERBACH Z.: Metody obliczania wyjściowej-początkowej grubości rury przeznaczonej do gięcia, Przegląd Mechaniczny, nr 21/ 98, Warszawa 1998, 9-12 i 17.
- [150] ŚLODERBACH Z.: Wpływ umocnienia i anizotropii normalnej na dopuszczalne wartości odkształceń i naprężeń podczas gięcia rur, Przegląd Mechaniczny, nr 16, Warszawa 1999, 5-11.
- [151] ŚLODERBACH Z., RECHUL Z.: Effect of strain hardening and normal anisotropy on allowable values of strain and stress in pipe-bending processes, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, PTMTiS, no. 4, vol. 38, Warszawa 2000, 843-859.
- [152] ŚLODERBACH Z.: Obliczanie maksymalnych odkształceń i grubości ścianki podczas gięcia rur na podstawie dyrektywy unijno-europejskich i polskich, Przegląd Mechaniczny, nr 2/ 00, Warszawa 2000, 18-23.
- [153] ŚLODERBACH Z.: Obliczanie wyjściowej-początkowej grubości ścianki rury przeznaczonej do gięcia w zależności od średnicy wewnętrznej i zewnętrznej na podstawie Dyrektyw i Norm Unii Europejskiej i Polski, Dóźór Techniczny, nr 5/2001, Warszawa 2001, 107-111.
- [154] ŚLODERBACH Z., SAWICKI T.: Oszacowanie górne i dolne nacisku w procesie przecinania i przewężania bloku metalu przez dwa przeciwbieżne płaskie stemple, Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, nr 45, Nauki Techniczne – Budownictwo, nr 2, Białystok 1984, 59-74.
- [155] ŚLODERBACH Z.: Wybrane zagadnienia mechaniki gięcia łuków gładkich rurociągów, Prace Naukowe Wydziału Mechanicznego Politechniki Wrocławskiej, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2002.
- [156] ŚLODERBACH Z., RECHUL Z.: A Thermodynamic Approach to the Stored Energy Concept, Journal of Technical Physics, vol. XLVII, 2, Warszawa 2006, 83-102.
- [157] TANG N.C.: Plastic-deformation analysis in tube bending, International Journal of Pressure Vessels and Piping, vol. 77, no. 12, October 2000, Publisher: Elsevier, UK, 751-759.
- [158] Warunki UDT (WUDT-UC-WO-O/02:10.2003 – Urządzenia ciśnieniowe. Wymagania ogólne. Obliczenia wytrzymałościowe), wyd. I, Warszawa 2003.

- [159] ZAWADA J.: Doświadczalna weryfikacja rozwiązania teoretycznego dla procesu ściskania bloku materiału pomiędzy stemplami płaskimi, VII Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, Warszawa 1976, 509-519.
- [160] ZDANKIEWICZ M.: Badania procesu gięcia rur na zimno, *Mechanik*, nr 7/70, Warszawa 1970.
- [161] ZDANKIEWICZ M.: Dyrektywa dotycząca urządzeń ciśnieniowych. Omówienie ogólne. Wymagania dotyczące materiałów, *Dozór Techniczny*, nr 1/98, Warszawa 1998.
- [162] ZDANKIEWICZ M.: Dyrektywa dotycząca urządzeń ciśnieniowych. Wymagania dotyczące wytwarzania, *Dozór Techniczny*, nr 2/98, Warszawa 1998, 25-33 i 48.
- [163] ŻYCZKOWSKI M.: The limit load of a thick-walled tube in a general circularly symmetrical case, *Archiwum Mechaniki Stosowanej (Archives of Mechanics)*, 8, 1956, 155-170.
- [164] ŻYCZKOWSKI M.: Wyteżenie materiału w stanach podkrytycznych, *Rozprawy Inżynierskie*, tom VIII, zeszyt 4, 1960.
- [165] ŻYCZKOWSKI M.: Obciążenia złożone w teorii plastyczności, PWN, Warszawa 1973.
- [166] ŻYCZKOWSKI M.: Combined Loading in the Theory of Plasticity, PWN – Nijhoff, Warszawa - Alpen aan den Rijn, 1981.
- [167] ŻYCZKOWSKI M., SZUWALSKI K.: On the termination of the process of finite plastic deformations, *Journal de Mécanique Theoretique Applique*, 1, (1982), Numero special, 175-186.
- [168] ŻYCZKOWSKI M., TRAN L.B.: Interaction curves corresponding to the decohesive carrying capacity of a cylindrical shell under combined loading, *International Journal of Plasticity*, 13, 1997, 551-570.

WARUNKI NIESTATECZNOŚCI W ANALIZIE ODKSZTAŁCEŃ PLASTYCZNYCH

Streszczenie

Książka poświęcona jest analizie metod określania (wyznaczania) oraz zastosowaniu niektórych stanów niestateczności odkształceń plastycznych dla wybranych rodzajów materiałów i elementów konstrukcji. Analizowane stany niestateczności mogą powstać zarówno w procesach quasi-statycznych obciążeń mechanicznych, jak i cieplno-mechanicznych. Najczęściej stany takie mogą wystąpić w technologicznych procesach wytwarzania wyrobów metodami plastycznego kształtowania, podczas rozdrabniania materiałów w warunkach obciążania statycznego i quasi-statycznego elementów konstrukcyjnych, wykonanych z materiałów plastycznych, półkruchych i kruchych. Stany takie wystąpić mogą również podczas właściwej eksploatacji elementów maszyn i urządzeń, podczas której występują plastyczne deformacje. Pod ogólnym pojęciem niestateczności odkształceń plastycznych rozumiemy: stany niejednoznaczności rozwiązań problemu brzegowego termo-sprężysto-plastyczności, bifurkacje stanów równowagi, lokalizacje odkształceń plastycznych w postaci, np. szyjki, bruzdy, płaszczyzny lokalizacji, pasma i płaszczyzny ścinania, stanów lokalizacji odkształceń podczas procesów ścinania, w procesach lokalnie adiabatycznych odkształceń podczas obróbki skrawaniem z dużymi prędkościami czy też stany zarodkowania i inicjacji mikro i makropęknięć, a także inne.

Do parametrów określających krytyczne stany niestateczności odkształceń plastycznych w procesach termo-sprężysto-plastycznych odkształceń w ogólności zaliczamy: wartości krytyczne obciążeń zewnętrznych i naprężeń, funkcji wzmocnienia i stycznych modułów wzmocnienia, wartości krytyczne odkształceń plastycznych i odpowiadające im wartości pracy odkształcenia plastycznego, wartości krytyczne temperatury, wartości kąta gięcia lub skręcania podczas, np. gięcia rur na giętarkach lub skręcania cienko i grubościennych rurek lub prętów, strzałki ugięcia lub głębokości tłoczenia i inne.

Książka składa się z siedmiu rozdziałów powiązanych ze sobą tematycznie w taki sposób, że każdy z nich stanowi także odrębny problem naukowo-badawczy z zakresu mechaniki i techniki. Na końcu pierwszego rozdziału zamieszczony jest Dodatek A, w którym zamieszczono wyprowadzenie podstawowego dowodu twierdzenia tak, aby ułatwić analizę fizycznych aspektów uzyskanych wyników w podstawowym tekście pracy.

W przyszłych badaniach można będzie, opierając się na przedstawionych w monografii rezultatach teoretyczno-analitycznych, pogłębić analizę problemu, wykorzystując numeryczne metody obliczeń oparte na MES, MRS lub MEB.

THE CONDITIONS OF INSTABILITY IN THE PLASTIC DEFORMATIONS ANALYSIS

Summary

This book is dedicated to the application, the methods of description and analysis of some instability states of plastic deformations of selected materials and construction elements.

The analyzed instability states can be formed during the processes of quasi-static mechanical loadings as well as thermo-mechanical. Most often, such states can be formed during technology of plastic formation, during grinding of materials and during static and quasi-static loadings of construction elements, made of plastic, brittle and semi-brittle materials. Such states can also exist during exploitation of machinery elements during plastic deformations.

Under general definition of instability we understand: uniqueness conditions for solution of incremental boundary-value problem of thermo-elastoplasticity, bifurcation of equilibrium states, localizations of plastic deformations as neck, groove, localization planes, shear bands, states in local adiabatic deformations during high speed machine cutting and nucleation and initiation of micro- and macro-cracks and the others.

The parameters describing critical conditions of instability of plastic deformations during elasto-plastic processes include: critical loadings and stresses values, hardening moduli and tangent hardening moduli, critical loadings and equivalent works, critical temperatures, values of bending angles during bending of tubes and rods, press depth and the others.

It is worth to mention here that the present paper aims especially at discussing the ranges of admissible angle of bending and equivalent plastic strain were assigned their top limits adopting the criterion of distributed instability in the process of cold bending of thin- and thick walled metal pipes. A model of deformation during bending of metal tubes on benders with the use of the method of wrapping on revolving template with a mandrel is also presented. This model is represented with three main deformations presented in analytical form. The obtained solution can be classified as kinematically admissible.

The book includes seven chapters presenting separate scientific problems of mechanics. At the end of first chapter the Appendix A is inserted, in which the derivation of the proof of theorem is included in order to facilitate the analysis of physical aspects of the results presented in basic text.

In the future, the analysis of the problems presented in the book can be extended using numerical methods based on MES, MRS or MEB.