PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 141
Ekonometria 29 2010

Stanisław Heilpern
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

ANALIZA WPŁYWU STOPNIA ZALEŻNOŚCI WYPŁAT NA PRAWDOPODOBIEŃSTWO RUINY*

Streszczenie: Praca jest poświęcona niestandardowym procesom zależnego ryzyka. Przyjęte założenie o zależności wypłat jest bardziej realistyczne od założenia o niezależności w klasycznym procesie ryzyka. W opracowaniu badany jest wpływ stopnia zależności na prawdopodobieństwo ruiny. Zaobserwowano brak regularności i monotoniczności w relacjach między stopniem zależności wypłat a prawdopodobieństwem ruiny.

Słowa kluczowe: proces ryzyka, ruina, zależność, funkcje łączące.

1. Wstęp

Praca poświęcona jest badaniu wpływu stopnia zależności wypłat na prawdopodobieństwo ruiny. W odróżnieniu od klasycznego modelu ryzyka, gdzie zakłada się niezależność wypłat, w pracy dopuszcza się ich zależność. Jest to podejście bardziej realistyczne. W praktyce wypłaty są zwykle jednak w większym bądź mniejszym stopniu zależne. Istnieją często czynniki zewnętrzne, np. ekstremalne zjawiska, takie jak powodzie, pożary, trzęsienia ziemi czy karambole na autostradach, wpływające jednocześnie na wszystkie wypłaty, co powoduje ich zależność.

W pracach [Heilpern 2009; Yuen, Guo, Wu 2002; Yuen, Guo, Wu 2006] analizowany był wpływ stopnia zależności zmiennych losowych występujących w rozszerzonym modelu ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny. Można było tam zaobserwować jednak pewną regularność, monotoniczność tej zależności. Ze wzrostem stopnia zależności prawdopodobieństwo ruiny rosło ([Heilpern 2009; Yuen, Guo, Wu 2002]) bądź malało ([Heilpern 2009; Yuen, Guo, Wu 2006]). W naszej pracy, gdzie w odróżnieniu od tych publikacji przyjmuje się zależność wypłat, a struktura ich zależności oparta jest na archimedesowych funkcjach łączących, takiej regular-

* Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2010-2012 jako projekt badawczy nr 3361/B/H03/2010/38.

ności się nie obserwuje. Porządek wartości prawdopodobieństw ruiny zależy istotnie od wartości kapitału początkowego.

Praca jest kontynuacją artykułu [Heilpern 2010]. Dodatkowo został zbadany prosty przypadek dyskretnych wypłat przyjmujących jedynie dwie wartości. Na jego przykładzie pokazano, że również dla nieskończenie dużego kapitału początkowego u nie zachodzi monotoniczna zależność prawdopodobieństwa ruiny od stopnia zależności wypłat.

W pracy będziemy się zajmować ciągłym procesem ryzyka postaci [Rolski i in. 1999; Kaas i in. 2001; Ostasiewicz 2000]:

$$U(t) = u + ct - S(t),$$

gdzie: u – kapitał początkowy,
c – intensywność napływu składki,
$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ – zagregowana wypłata do chwili t.

Przy tym wielkości wypłat X_1, X_2, ... będą zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie, dystrybuancie $F(x)$ i wartości oczekiwanej $m = E(X_i)$. Zakładamy, że proces liczby wypłat $\{N(t), t \geq 0\}$, niezależny od ich wielkości X_i, jest procesem Poissona z intensywnością λ. Interesować nas będzie zagadnienie ruiny. Mówimy, że występuje ruina, gdy wartość procesu $U(t)$ jest ujemna. Rozpatrywać będziemy prawdopodobieństwo ruiny $\psi(u)$ występującej w nieskończonym horyzoncie czasowym, gdy kapitał początkowy jest równy u, tzn.

$$\psi(u) = P(T < \infty | U(0) = u),$$

gdzie: $T = \inf\{t: U(t) < 0\}$ – czas wystąpienia ruiny.

W klasycznej teorii ryzyka [Rolski i in. 1999; Kaas i in. 2001; Ostasiewicz 2000] zakłada się niezależność wypłat X_i. W tej sytuacji prawdopodobieństwo ruiny będziemy oznaczać symbolem ψ_I. W przypadku gdy $c \leq \lambda m$, zajście ruiny jest zdarzeniem pewnym, tzn. $\psi_I(u) = 1$ dla każdej wartości kapitału początkowego u. W naszych rozważaniach przyjmować będziemy warunek $c > \lambda m$. Wtedy dla skrajnych wartości kapitału początkowego otrzymamy następujące wartości prawdopodobieństwa ruiny:

$$\psi_I(0) = \frac{\lambda}{c} m, \; \psi_I(\infty) = \lim_{u \to \infty} \psi_I(u) = 0.$$

Dokładne wzory na prawdopodobieństwo ruiny można podać jedynie dla wypłat dyskretnych [Kaas i in. 2001] oraz wypłat o rozkładzie fazowym [Rolski i in. 1999], obejmującym rozkład wykładniczy oraz kombinacje wypukłe i sploty rozkładów wykładniczych.

2. Zależne wypłaty

W przeciwieństwie do klasycznej wersji modelu ryzyka, dopuścimy w pracy występowanie zależności między zmiennymi losowymi X_i przedstawiającymi wypłaty. Rozpatrzymy dwa przypadki. W pierwszym wyznaczymy prawdopodobieństwo ruiny dla skrajnej sytuacji, gdy wypłaty są ściśle zależne. Natomiast w drugim założymy, że struktura zależności wypłat opisana jest archimedesową funkcją łączącą.

W przypadku ściśle zależnych wypłat zmienne losowe X_i są tą samą dla każdego i zmienną losową X. Wtedy prawdopodobieństwo ruiny $\psi_c(u)$ jest równe [Heilpern 2010]:

$$\psi_c(u) = \int_0^\infty \psi_x(u)dF(x) = \int_0^{c/\lambda} \psi_x(u)dF(x) + \overline{F}\left(\frac{c}{\lambda}\right),$$

gdzie: $\psi_x(u)$ – prawdopodobieństwo ruiny w przypadku gdy wypłaty są deterministyczne i przyjmują wartość x, tzn. zachodzi $P(X_i = x) = 1$.

Między przypadkami niezależnych i ściśle zależnych wypłat zachodzą następujące relacje [Heilpern 2010]:

$$\psi_I(0) \geq \psi_c(0),\ \psi_I(\infty) \leq \psi_c(\infty).$$

Jeśli zachodzi $F(c/\lambda) < 1$, to w powyższych zależnościach otrzymujemy ostre nierówności. Prawdopodobieństwo ruiny dla ściśle zależnych wypłat dla nieskończenie dużego kapitału początkowego jest wtedy, w odróżnieniu od niezależnych wypłat, dodatnie. Z nierówności tych wynika, że dla małego kapitału początkowego prawdopodobieństwo ruiny dla całkowitej zależności wypłat jest nie większe niż prawdopodobieństwo ruiny dla wypłat niezależnych. Natomiast dla dostatecznie dużego kapitału początkowego relacja ta jest odwrotna.

Funkcja łącząca C, opisująca strukturę zależności wypłat $X_1, ..., X_n$ jest w naszej pracy traktowana jako łącznik między łączną funkcją przetrwania $\overline{G}(x_1,...,x_n) =$ $= P(X_1 > x_1,...,X_n > x_n)$ a brzegowymi funkcjami przetrwania $\overline{F}_i(x) = P(X_i > x)$:

$$\overline{G}(x_1,...,x_n) = C(\overline{F}_1(x_1),...,\overline{F}_n(x_n)).$$

Jest to inne podejście, bardziej dla nas wygodne niż standardowe, traktujące funkcję łączącą jako łącznik między dystrybuantami [Nelsen 1999; Frees, Valdez 1998; Heilpern 2007].

W naszej pracy rozpatrywać będziemy archimedesowe funkcje łączące, indukowane generatorem g: $(0, 1] \to R_+$, będącym ciągłą, malejącą funkcją taką, że $\lim_{u\to 0} g(u) = \infty$, $g(1) = 0$. Archimedesowa funkcja łącząca określona jest wzorem

$$C(u_1, ..., u_n) = g^{-1}(g(u_1) + ... + g(u_n)).$$

Generator przemnożony przez stałą nadal będzie generatorem tej samej funkcji łączącej. Funkcja g^{-1} odwrotna do generatora powinna być funkcją całkowicie monotoniczną. Jest więc transformatą Laplace'a pewnej nieujemnej zmiennej losowej Θ o dystrybuancie F_Θ [Frees, Valdez 1998; Heilpern 2007; Oakes 1989]. Dla ustalonej wartości θ tej zmiennej losowej zmienne losowe X_i są wtedy warunkowo niezależne, zachodzi bowiem następująca, ważna z punktu widzenia zastosowań, zależność:

$$\begin{aligned}\overline{G}_\theta(x_1,...,x_n) &= P(X_1 > x_1,...,X_n > x_n \mid \Theta = \theta) = \\ &= P(X_1 > x_1 \mid \Theta = \theta) \cdot ... \cdot P(X_n > x_n \mid \Theta = \theta).\end{aligned}$$

Własność ta umożliwia stosowanie dla ustalonej wartości zmiennej Θ znanych metod klasycznej teorii ruiny opartej na niezależności. Indukowana zmienna losowa Θ generuje warunkowe zmienne losowe $X_{i|\theta}$ o funkcjach przetrwania [Frees, Valdez 1998; Heilpern 2010]

$$\overline{F}(x \mid \theta) = P(X_i > x \mid \Theta = \theta) = \exp(-\theta g(\overline{F}(x))\,.$$

Wartości oczekiwane tych zmiennych losowych są równe

$$m(\theta) = E(X_{i|\theta}) = \int_0^\infty \overline{F}(x \mid \theta) dx\,.$$

Łączną funkcję przetrwania, brzegowe funkcje przetrwania, jak i wartości oczekiwane zmiennych losowych X_i można przedstawić w postaci odpowiednich mieszanek, przykładowo

$$\overline{F}(x) = \int_0^\infty \overline{F}(x \mid \theta) dF_\Theta(\theta)\,.$$

Podobnie można wyznaczyć prawdopodobieństwo ruiny, gdy struktura zależności między wypłatami jest opisana archimedesową funkcją łączącą:

$$\psi(u) = \int_0^\infty \psi(u \mid \theta) dF_\Theta(\theta)\,,$$

gdzie: $\psi(u|\theta)$ – warunkowe prawdopodobieństwo ruiny dla ustalonej wartości zmiennej losowej Θ.

Prawdopodobieństwo to można wyznaczyć, stosując znane metody stosowane w klasycznej teorii ruiny. Indukowaną zmienną Θ możemy interpretować jako wpływ czynnika zewnętrznego na wypłaty.

Wiedząc, że funkcja $m(\theta)$ jest nierosnąca [Heilpern 2010] oraz że dla każdego $\theta \le \theta_0$, gdzie $m(\theta_0) = c/\lambda$, ruina zajdzie z prawdopodobieństwem 1, otrzymujemy [Heilpern 2010]

$$\psi(u) = \int_{\theta_0}^{\infty} \psi(u \mid \theta) dF_{\Theta}(\theta) + F_{\Theta}(\theta_0).$$

Jeśli $F_{\Theta}(\theta_0) > 0$, to $\psi(\infty) > 0$. Dla skrajnych wartość kapitału początkowego u zachodzą następujące zależności między prawdopodobieństwem ruiny $\psi_I(u)$ dla niezależnych wypłat oraz prawdopodobieństwem ruiny $\psi(u)$ dla wypłat, których struktura zależności opisana jest archimedesową funkcją łączącą:

$$\psi_I(0) \geq \psi(0), \ \psi_I(\infty) \leq \psi(\infty).$$

W przypadku ściśle zależnych wypłat i nieskończenie dużych wartości kapitału początkowego nierówność między $\psi_c(\infty)$ oraz $\psi(\infty)$ może zależeć od stopnia zależności między wypłatami (zob. przykład 2). Dla zerowego kapitału początkowego problem istnienia odpowiedniej nierówności jest nierozstrzygnięty. Autor nie jest w stanie ani podać dowodu odpowiednich nierówności, ani podać kontrprzykładu.

W naszej pracy będziemy wykorzystywać funkcję łączącą Claytona. Jest to funkcja łącząca archimedesowa, określona wzorem

$$C_{\alpha}(u_1,...,u_n) = (u_1^{-\alpha} + ... + u_n^{-\alpha})^{-1/\alpha},$$

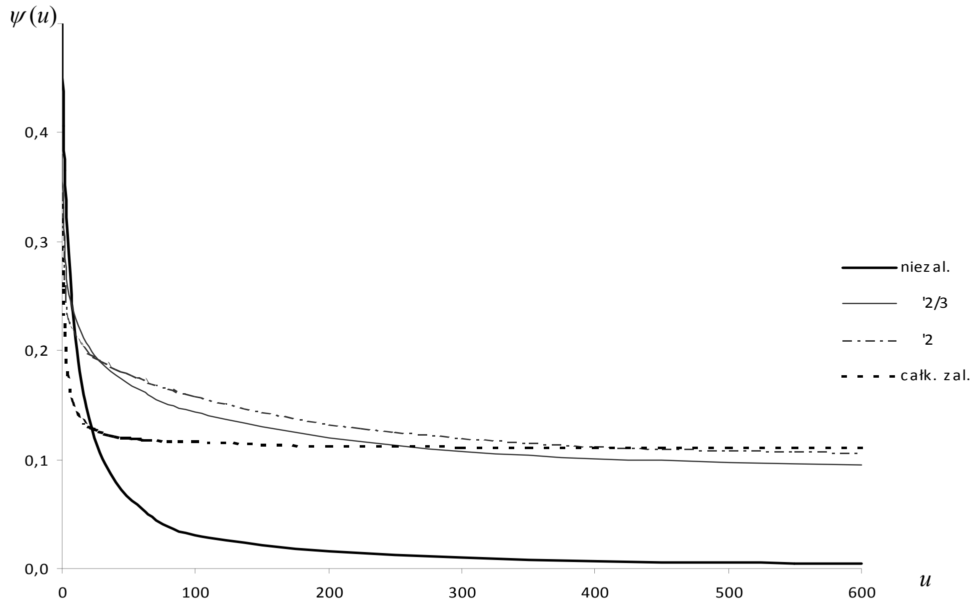
gdzie $\alpha > 0$. Jej generatorem jest funkcja $g(u) = u^{-\alpha} - 1$. Parametr α opisuje nam stopień zależności. Jest on ściśle związany ze współczynnikiem korelacji τ Kendala [Nelsen 1999]:

$$\tau = \frac{\alpha}{\alpha + 2}.$$

Wraz ze wzrostem parametru α rośnie stopień zależności między wypłatami. W granicy, gdy α dąży do zera, otrzymujemy niezależność, a w nieskończoności ścisłą zależność. Funkcja łącząca Claytona C_{α} indukuje nam zmienną losową Θ o rozkładzie gamma Ga($1/\alpha$, 1). Warunkowe rozkłady brzegowe wypłat przyjmują wtedy postać

$$\overline{F}_{\alpha}(x \mid \theta) = \exp(\theta(1 - (\overline{F}(x))^{-\alpha})).$$

Wybór w pracy funkcji łączącej Claytona, wykorzystywanej w przykładach, wynikał jedynie z jej wygodnej postaci. W poniższym przykładzie zaczerpniętym z pracy [Heilpern 2010] przeprowadzimy analizę zależności prawdopodobieństwa ruiny od stopnia zależności wypłat.



Rys. 1. Prawdopodobieństwa ruiny dla różnych wartości stopnia zależności α i kapitału początkowego u

Źródło: [Heilpern 2010].

Przykład 1. [Heilpern 2010] Niech c = 24, λ = 4. Wypłaty będą miały rozkład Pareta o funkcji przetrwania

$$\overline{F}(x) = \left(\frac{3}{x+3} \right)^2,$$

a struktura zależności między wypłatami opisana będzie funkcją łączącą Claytona. Dla ustalonej wartości θ indukowanej zmiennej losowej Θ funkcja przetrwania wypłaty wynosi

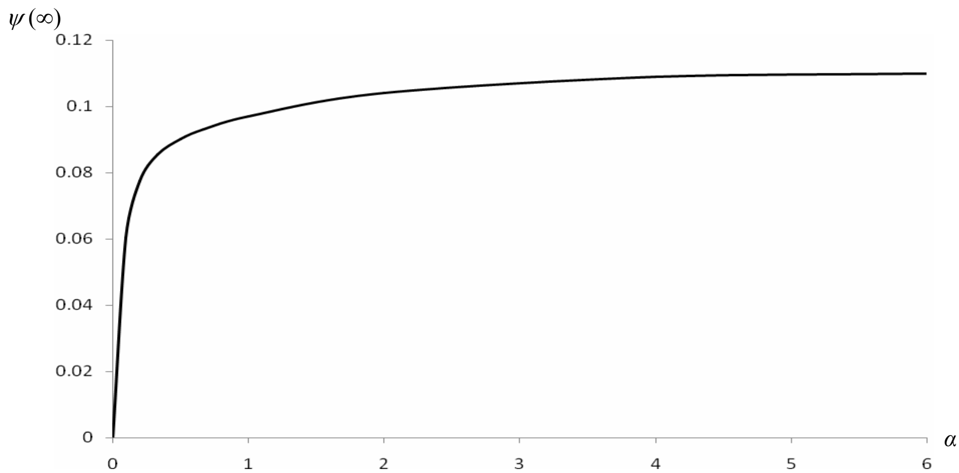
$$\overline{F}_\alpha(x \mid \theta) = \exp\left(\theta \left(1 - \left(\frac{x+3}{3} \right)^{2\alpha} \right) \right),$$

a jej wartość oczekiwana jest równa

$$m_\alpha(\theta) = \int_0^\infty \overline{F}_\alpha(x \mid \theta) dx = \frac{3e^\theta}{2\alpha\theta^{0,5/\alpha}} \Gamma\left(\frac{1}{2\alpha}, \theta \right),$$

gdzie: $\Gamma(a, b) = \int_b^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$ jest niekompletną funkcją gamma. Graniczną wartość θ_0 wyznaczamy, rozwiązując równanie $m(\theta_0) = c/\lambda = 6$.

Na rys. 1 przedstawione są wykresy prawdopodobieństw ruiny $\psi_\alpha(u)$ dla różnych wartości parametru α równych 0; 2/3; 2 oraz ∞. Widzimy, że dla małych wartości kapitału początkowego u „najlepszą" sytuację, czyli najmniejsze prawdopodobieństwo ruiny, mamy dla ścisłej zależności wypłat. Następnie prawdopodobieństwo to rośnie wraz ze spadkiem wartości stopnia zależności, czyli wartości parametru α. Odwrotne zależności obserwujemy dla dużych wartości kapitału początkowego. Wtedy „najlepsza" sytuacja zachodzi dla niezależnych wypłat. Prawdopodobieństwo ruiny wzrasta w miarę wzrostu stopnia zależności do wartości 0,1111 osiągniętej przez ściśle zależne wypłaty (rys. 2).



Rys. 2. Prawdopodobieństwa ruiny dla nieskończonego kapitału początkowego różnych wartości α

Źródło: opracowanie własne na podstawie [Heilpern 2010].

Natomiast dla średnich wartości kapitału początkowego sytuacja nie jest już tak regularna. Nie obserwujemy monotoniczności prawdopodobieństw ruiny. Największe lub najmniejsze prawdopodobieństwa nie muszą być osiągnięte dla skrajnych przypadków: niezależności czy ścisłej zależności. Na przykład dla u = 100 otrzymujemy $\psi_0(100) = 0{,}0310$, $\psi_{2/3}(100) = 0{,}1435$, $\psi_2(100) = 0{,}1583$ oraz $\psi_\infty(100) = 0{,}1160$ oraz następujące relacje między prawdopodobieństwami ruiny $\psi_0(100) < \psi_\infty(100) < \psi_{2/3}(100) < \psi_2(100)$ [Heilpern 2010].

3. Dyskretne wypłaty przyjmujące dwie wartości

Rozpatrzmy teraz przypadek dyskretnych wypłat X_i. Interesować nas będzie najprostsza sytuacja, gdy wypłaty przyjmować będą jedynie dwie wartości x_1 oraz x_2. Odpowiada to sytuacji, gdy wypłaty dzielimy na dwie istotnie różne kategorie. Wartość x_1 zachodzić będzie z prawdopodobieństwem p oraz wartość x_2 z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$. Wtedy oczekiwana wartość wypłaty wynosi

$$m = px_1 + qx_2 = x_1 + qh,$$

gdzie: $h = x_2 - x_1$.

Załóżmy na początku, że wypłaty X_i są niezależne. Wiadomo, że gdy $m \geq \lambda/c$, to ruina zajdzie z prawdopodobieństwem 1, czyli $\psi_I(u) = 1$ dla każdego u. Sytuacja ta zachodzi m.in. wówczas, gdy $x_1 \geq \lambda/c$. W przeciwnym razie prawdopodobieństwo ruiny określone jest wzorem [Kaas i in. 2001]

$$\psi_I(u) = 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{c}m\right) \sum_{k_1=0}^{\lfloor u/x_1 \rfloor} \sum_{k_2=0}^{\lfloor (u-k_1x_1)/x_2 \rfloor} (-z)^{k_1+k_2} e^z \frac{p_1^{k_1}}{k_1!} \frac{p_2^{k_2}}{k_2!},$$

gdzie: $z = \frac{\lambda}{c}(u - k_1x_1 - k_2x_2)_+$, a $\lfloor v \rfloor$ jest największą liczbą całkowitą nie większą niż v.

Dla zerowego kapitału początkowego otrzymujemy

$$\psi_I(0) = \frac{\lambda}{c}(x_1 + hq).$$

Gdy między wypłatami zachodzi ścisła zależność, tzn. dla każdego i mamy tę samą zmienną losową X, rozpatrzymy dwa przypadki. Jeśli $x_2 < \lambda/c$, to prawdopodobieństwo ruiny określone jest wzorem

$$\psi_c(u) = p\,\psi_1(u) + q\,\psi_2(u),$$

gdzie: $\psi_j(u) = 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{c}x_j\right) \sum_{k=0}^{\lfloor u/x_j \rfloor} (-z)^k e^z \frac{1}{k!}$ jest prawdopodobieństwem ruiny dla deterministycznych wypłat: $P(X_i = x_j) = 1$ dla $j = 1, 2$. Dla skrajnych wartości kapitału początkowego u prawdopodobieństwa ruiny są takie same jak dla niezależnych wypłat.

Jeśli $x_1 < \lambda/c \leq x_2$, to otrzymujemy

$$\psi_c(u) = p\,\psi_1(u) + q.$$

Wtedy $\psi_c(0) = \frac{\lambda}{c}x_1p + q$ oraz $\psi_c(\infty) = q$. Dla małych wartości kapitału początkowego prawdopodobieństwo ruiny dla niezależnych wypłat jest wtedy większe od prawdopodobieństwa ruiny dla ściśle zależnych wypłat. Natomiast dla dużych wartości kapitału początkowego mamy zależność przeciwną.

Załóżmy teraz, że struktura zależności wypłat X_i opisana jest archimedesową funkcją łącząca C z generatorem $g(t)$. Wtedy dla ustalonej wartości θ indukowanej zmiennej losowej Θ warunkowa funkcja przetrwania $\overline{F}_i(x\,|\,\theta)$ przyjmuje postać

$$\overline{F}_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad x < x_1 \\ \exp(-\theta g(q)) & \text{gdy} \quad x_1 \le x < x_2 \\ 0 & \text{gdy} \quad x_2 \le x \end{cases}.$$

Otrzymany rozkład jest więc również dwupunktowy. Wartość x_2 przyjmowana jest z prawdopodobieństwem $q(\theta) = \exp(-\theta g(q))$, x_1 z prawdopodobieństwem $p(\theta) = 1 - q(\theta)$, a warunkowa wartość oczekiwana wynosi $m(\theta) = x_1 + hq(\theta)$. Graniczna wartość parametru θ jest wtedy równa

$$\theta_0 = -\frac{1}{g(q)} \ln\left(\frac{c - \lambda x_1}{\lambda h}\right).$$

Przykład 2. Niech struktura zależności wypłat opisana będzie funkcją łączącą Claytona. Wtedy $q(\theta) = \exp(\theta(1 - q^{-\alpha}))$ oraz

$$\theta_0 = \frac{1}{1 - q^{-\alpha}} \ln\left(\frac{c - \lambda x_1}{\lambda h}\right).$$

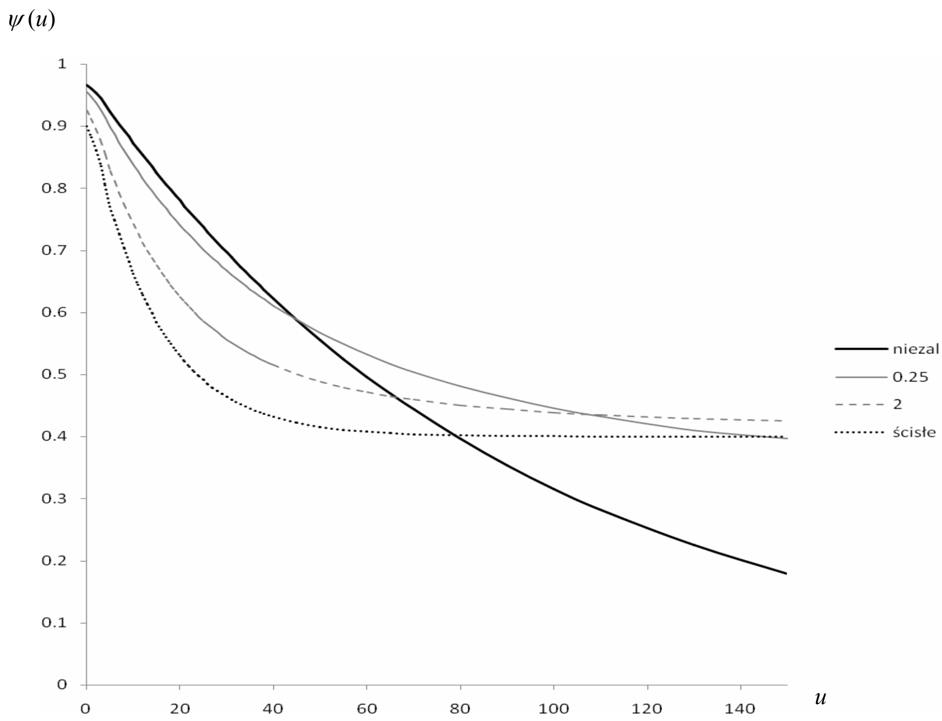
Załóżmy, że $\lambda = 4$, $c = 24$, $x_1 = 5$, $x_2 = 7$ oraz $p = 0{,}6$. Wyznaczymy prawdopodobieństwo ruiny dla różnych wartości parametru α, czyli stopnia zależności, oraz wartości kapitału początkowego u. Wyniki podane są w tab. 1 oraz na rys. 3.

I w tym przypadku możemy zaobserwować pewne odstępstwa od regularności i monotoniczności między wartościami prawdopodobieństw ruiny dla różnych wartości stopnia zależności między wypłatami. Dla małych wartości kapitału początkowego u zależności są podobne jak w przypadku ciągłych wypłat o rozkładzie Pareta (przykład 1). Największe prawdopodobieństwo ruiny otrzymujemy dla niezależnych wypłat. Następnie w miarę wzrostu stopnia zależności wypłat prawdopodobieństwa ruiny maleją i osiągają najmniejszą wartość dla ścisłej zależności (zob. tab. 2). Występuje tu monotoniczność. W tab. 2 zawarte są prawdopodobieństwa ruiny, gdy $u = 0$ dla różnych wartości α. Podane są również wartości współczynnika τ Kendala odpowiadające wartościom parametru α.

Tabela 1. Prawdopodobieństwa ruiny dla różnych wartości α oraz u

u	*α*				
	niezależne	0,25	2	7	ścisła zal.
0	0,9667	0,9556	0,9253	0,9089	0,9000
10	0.8729	0,8380	0,7420	0,6906	0.6623
20	0,7796	0.7406	0,6249	0,5642	0,5293
30	0,6963	0,6672	0,5565	0,4988	0,4637
40	0,6219	0,6109	0,5150	0,4642	0,4314
50	0,5555	0,5669	0,4888	0,4455	0,4154
60	0,4962	0,5320	0,4714	0,4350	0,4076
70	0,4432	0,5038	0,4593	0,4287	0,4037
80	0,3958	0,4808	0,4505	0,4248	0,4018
90	0,3536	0,4617	0,4438	0,4222	0,4009
100	0,3158	0,4457	0,4386	0,4203	0,4004
110	0,2821	0,4322	0,4344	0,4189	0,4002
130	0,2250	0,4104	0,4291	0,4178	0,4001
150	0,1793	0,3965	0,4257	0,4160	0,4000
∞	0,0000	0,2843	0,3927	0,4058	0.4000

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 3. Prawdopodobieństwa ruiny dla różnych wartości *α* i *u*

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2. Prawdopodobieństwa ruiny dla $u = 0$ i różnych wartości α

α	0	0,5	1	2	5	10	30	100	∞
τ	0	0,2	0,333	0,5	0,714	0,833	0,938	0,98	1
$\psi(0)$	0,9667	0,9475	0,9370	0,9253	0,9122	0,9063	0,9021	0,9006	0,9

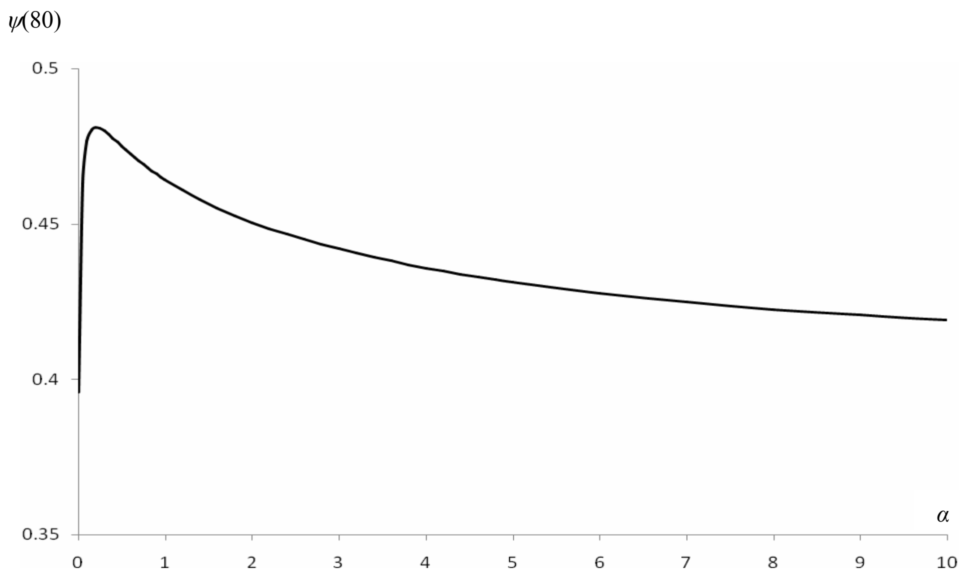
Źródło: opracowanie własne.

Dla średnich wartości kapitału początkowego sytuacja jest podobna jak dla ciągłych wypłat z przykładu 1. Na przykład dla kapitału początkowego $u = 80$ najmniejsze prawdopodobieństwo ruiny wynoszące 0,3958 występuje dla niezależnych wypłat. Wraz ze wzrostem stopnia zależności następuje gwałtowny wzrost prawdopodobieństwa ruiny. Maksimum 0,4811 osiągane jest dla $\alpha = 0{,}2$, a następnie obserwujemy łagodny spadek prawdopodobieństwa ruiny do wartości 0,4018 osiąganej dla ściśle zależnych wypłat, nieco większej niż dla niezależności (zob. tab. 3 i rys. 4). Jak widać, nie ma tutaj monotoniczności.

Tabela 3. Prawdopodobieństwo ruiny, gdy $u = 80$ dla różnych α

α	0	0.1	0.2	1	2	5	10	30	∞
$\psi(80)$	0,3958	0,4766	0,4811	0,4642	0,4505	0,4312	0,4190	0,4082	0,4018

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 4. Prawdopodobieństwo ruiny, gdy $u = 80$ dla różnych α

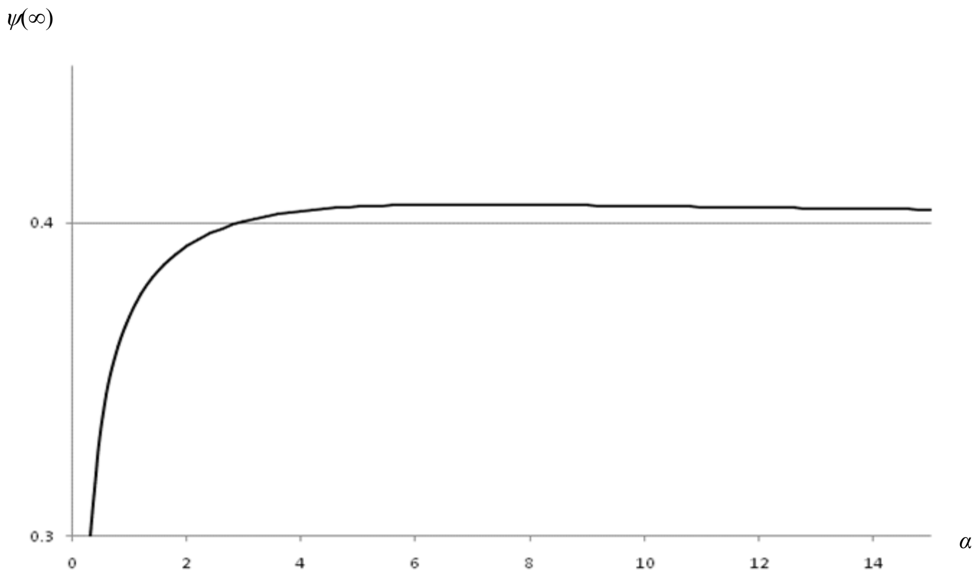
Źródło: opracowanie własne.

W odróżnieniu od ciągłego przypadku, dla nieskończenie dużych wartości kapitału początkowego również obserwujemy brak monotoniczności (zob. tab. 4 i rys. 5). Dla niezależnych wypłat otrzymujemy zerowe prawdopodobieństwo ruiny. Wraz ze wzrostem stopnia zależności prawdopodobieństwo to rośnie i osiąga maksimum równe 0,4058 dla $\alpha \approx 7$. Następnie prawdopodobieństwo ruiny powoli maleje do granicznej wartości 0,4 odpowiadającej ścisłej zależności wypłat.

Tabela 4. Prawdopodobieństwo ruiny, gdy $u = \infty$ dla różnych α

α	0	1	2	4	7	10	20	100	∞
$\psi(\infty)$	0	0,3700	0,3927	0,4038	0,4058	0,4053	0,4034	0,4008	0,4

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 5. Prawdopodobieństwo ruiny, gdy $u = \infty$ dla różnych α

Źródło: opracowanie własne.

4. Podsumowanie

W pracy przeprowadzono analizę zależności prawdopodobieństwa ruiny od stopnia zależności wypłat. Klasyczne założenie dotyczące niezależności wypłat w modelu ryzyka zostało osłabione. Założenie dopuszczające zależność wypłat jest bardziej realistyczne niż klasyczne, mówiące o ich niezależności.

W odróżnieniu od prac [Heilpern 2009; Yuen, Guo, Wu 2002; Yuen, Guo, Wu 2006], badających również wpływ stopnia zależności na prawdopodobieństwo ruiny, gdzie zależność dotyczyła jednak liczby wypłat, w pracy nie zaobserwowano regularności tych relacji. W naszym przypadku na wzrost czy spadek prawdopodobieństwa ruiny wpływa też wartość kapitału początkowego. Fakt ten został przedstawiony wcześniej w pracy [Heilpern 2010], której kontynuacją jest nasza praca, jednak nie zostały tam rozstrzygnięte skrajne przypadki wartości kapitału początkowego. Na przykładzie dyskretnych wypłat przyjmujących jedynie dwie wartości wykazano w pracy brak monotoniczności dla nieskończenie dużych wartości kapitału początkowego.

Przypadek zerowego kapitału początkowego, nierozstrzygnięty w niniejszym artykule, będzie tematem następnej pracy autora.

Literatura

Frees E.W., Valdez E.A., *Understanding relationships using copulas*, „North Amer. Actuarial J." 1998, no. 2, s. 1-25.

Heilpern S., *Funkcje łączące*, Wydawnictwo AE, Wrocław 2007.

Heilpern S., *Probability of ruin for the dependent, twodimensional Poisson process*, „Badania Operacyjne i Decyzje" 2009, nr 1, s. 77-90.

Heilpern S., *Wyznaczanie prawdopodobieństwa ruiny gdy struktura zależności wypłat opisana jest archimedesową funkcją łaczącą*, [w:] W. Otto (red.), *Zagadnienia aktuarialne. Teoria i praktyka*, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 2010, s. 11-20.

Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M., *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer, Boston 2001.

Nelsen R.B., *An Introduction to Copulas*, Springer, New York 1999.

Oakes D., *Bivariate survival models induced by frailties*, JASA 1989, nr 84, s. 487-493.

Ostasiewicz W. (red.) *Modele aktuarialne*, Wydawnictwo AE, Wrocław 2000.

Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J. L., *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Willey & Sons, New York 1999.

Yuen K.C., Guo J.Y., Wu X.Y., *On a correlated aggregate claim model with Poisson and Erlang risk processes*, „Insurance: Mathematics and Economics" 2002, no. 31, s. 205-214.

Yuen K.C., Guo J.Y., Wu X.Y., *On the first time of ruin in the bivariate compound Poisson model*, „Insurance: Mathematics and Economics" 2006, no. 38, s. 298-308.

ANALYSIS OF INFLUENCE OF THE DEGREE OF CLAIMS DEPENDENCE ON THE PROBABILITY OF RUIN

Summary: This paper is devoted to the nonstandard, dependent risk processes. The assumption of the dependence of claims, more realistic than assumption of independence in the classical risk processes, is made. The influence of the degree of dependence of claims on the probability of ruin is investigated. Some nonregularity and nonmonotonicity of the relation between the degree of dependence and the probability of ruin are observed.