

**Katarzyna Ostasiewicz**

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

---

## DWA TYPY HISTEREZY W MODELACH EKONOMICZNO-SPOŁECZNYCH I POKREWNYCH

---

**Streszczenie:** Ogólnie rzecz biorąc, zjawisko histerezy polega na zależności stanu danego układu nie tylko od wpływu bodźców zewnętrznych, ale także od jego własnej historii. Często efekt ten jest niemal niezauważalny. Istnieją jednak dziedziny, w których odgrywa on pierwszorzędną rolę i musi zostać uwzględniony w ich realistycznym opisie. W jednej kategorii zjawisk efekt histerezy prowadzi do możliwości utknięcia układu w „pułapce”: społecznej, ekologicznej lub ekonomicznej, co może być właściwością bardzo niepożądaną z punktu widzenia ludzkiego uczestnika, zwłaszcza w przypadku gdy jest takiej możliwości nieświadomy. W drugiej kategorii zjawisk mogą pojawić się cykliczne oscylacje współzależnych wielkości. W niniejszej pracy przedstawiono pokrótce obydwie efekty – „pułapki” oraz oscylacji, na przykładach układów fizycznych, ekologicznych i społeczno-ekonomicznych.

**Słowa kluczowe:** histereza, model Brocka–Durlaufa, model Goodwina.

### 1. Wstęp

Słowo „histereza” pochodzi od greckiego *hystérēsis*, oznaczającego „brak”, „niedostatek”. W literaturze fizycznej, ekologicznej, a ostatnio również i społeczno-ekonomicznej pojęcie histerezy jest używane na określenie zjawiska opóźnionej reakcji danego układu na zmieniające się warunki zewnętrzne. Dotyczy to procesów quasi-równowagowych, czyli takich, w których czynniki zewnętrzne zmieniają się na tyle powoli w porównaniu z reakcją wyróżnionego układu, że pomimo zmian środowiska zewnętrznego układ zawsze zdąży zareagować na te zmiany na tyle szybko, by osiągnąć w danych warunkach stabilny stan stacjonarny. Stabilnym stanem stacjonarnym nazywamy taki stan układu, w którym może on trwać, nie ewoluując w czasie. Prototypem takiej histerezy jest histereza magnetyczna, zaobserwowana doświadczalnie i wyjaśniona teoretycznie na przełomie XIX i XX w. Później zauważono, że podobne zjawisko pojawia się również w układach innego typu, np. ekologicznych czy społeczno-ekonomicznych [4; 14; 20; 25].

W ekonomicznym piśmiennictwie można napotkać użycie pojęcia histerezy na określenie zjawisk nieco odmiennego rodzaju. W zasadzie rozumienie histerezy jest tu podobne, jako „zależność od ścieżki, po jakiej badany system zmierza w kierunku

równowagi” lub jako „długotrwałe efekty przejściowych działań” [7], w procesach charakteryzujących się tzw. długą pamięcią [18]. Histereza tego typu obserwowana jest głównie w zjawiskach zatrudnienia i bezrobocia, a jej przejawem mogą być charakterystyczne oscylacje w czasie. Wzajemne zależności pomiędzy procesami ekonomicznymi nigdy nie są natychmiastowe, a przesunięcie w czasie wpływu jednych procesów na inne zależy od inercji tych procesów [22]. Jeśli dwa zjawiska powiązane są ze sobą określonym rodzajem ujemnego sprzężenia zwrotnego, to oscylują w czasie, przy czym oscylacje jednego z nich są względem drugiego „opóźnione” (określane jest to zazwyczaj *przesunięciem w fazie*). Stabilne oscylacje tego rodzaju określane są mianem *równowagi cyklicznej* [21]. Właśnie to zjawisko, przesuniętych w fazie oscylacji, występujące nie tylko w ekonomii, lecz także we wszystkich innych dziedzinach, w fizyce i przyrodzie, będzie przedmiotem szczególnego zainteresowania w niniejszej pracy.

Istnienie tych dwóch typów histerezy wpisuje się w historyczną już dyskusję dotyczącą natury rynku. Od lat 20. ubiegłego wieku współistniały dwa rodzaje teorii ekonomicznych, przyjmujące zupełnie odmienne założenia wyjściowe. Teorie statycznej równowagi zakładały, że rynek spontanicznie osiąga stan równowagi, a jego dynamika wynika jedynie z ewentualnych zewnętrznych gwałtownych bodźców. Współistniejące teorie przyjmowały cykliczność zjawisk rynkowych, a tacy ekonomiści, jak A. Lowe zajmowali się opisem cykli ekonomicznych. Z czasem jasne się stało, że te dwa podejścia, równowagowe i cykliczne, powinny zostać połączone (np. teoria F. Hayka cykli ekonomicznych oparta na współzależnych stanach równowagi) (por. np. [11]). Zatem w istniejących teoriach ekonomicznych powinno znaleźć się miejsce dla histerezy w obydwu powyżej opisanych znaczeniach. Pierwszy typ histerezy może pojawiać się w zjawiskach równowagowych, natomiast drugi – w zjawiskach cyklicznych.

W niniejszej pracy przedstawione zostaną obydwa rodzaje histerezy w trzech rodzajach układów: fizycznym, ekologicznym oraz społeczno-ekonomicznym.

## 2. Histereza w układach osiągających stan równowagi

Histereza tego typu występuje w opisie niektórych zjawisk, dla których zmiany „tła” są na tyle powolne, że pozwalają na osiąganie stanu równowagi. Ewolucja takiego układu odbywa się poprzez przechodzenie przez serię stanów równowagowych. Histereza w tego typu układach przejawia się w silnej zależności stanu, jaki osiąga układ, od jego historii. Przy takim samym poziomie pewnego czynnika zewnętrznego układ może być w jednym z dwóch stanów, często jakościowo odmiennych, w szczególności z punktu widzenia użyteczności dla człowieka. Na to, który z nich osiągnie, decydujący wpływ mają stany, które go do obecnej sytuacji doprowadziły. Pierwowzorem tego typu histerezy jest histereza magnetyczna, doskonale znana z dziedziny fizyki.

## 2.1. Histereza magnetyczna

W zewnętrznym polu magnetycznym atomy pewnych materiałów (nazywanych magnetykami) dążą do ustawiania się zgodnie z kierunkiem pola, podobnie jak igła kompasu w ziemskim polu magnetycznym. Niech  $N$  oznacza liczbę wszystkich atomów, a  $s_i$  – ustawienie  $i$ -tego atomu, mogące przybierać dwie wartości:  $s_i \in \{-1, +1\}$  (przeciwnie do zwrotu osi wybranego układu współrzędnych lub zgodnie z nim). Średnie namagnesowanie,  $m$ , zdefiniujemy jako:

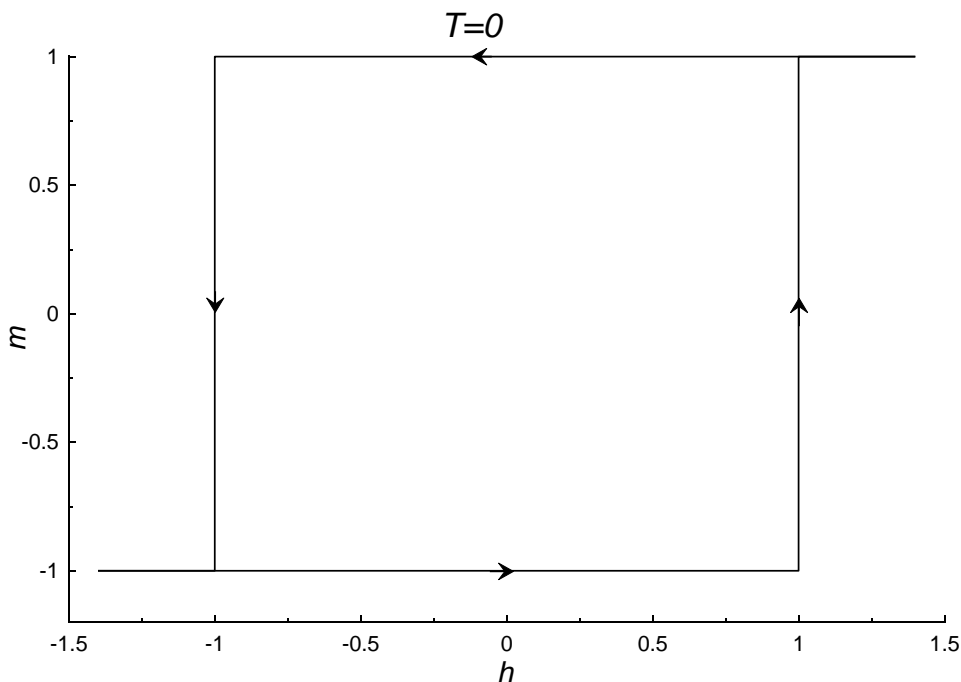
$$m = \frac{1}{N} \sum_i s_i. \quad (1)$$

Zauważmy, że wartość bezwzględna namagnesowania jest zawsze mniejsza lub równa jeden:  $m \in (-1, 1)$ .

Gdyby dążenia do ustawiania się zgodnie z zewnętrznym polem magnetycznym nie zakłócały inne czynniki, wówczas namagnesowanie materiału dla dowolnie słabego pola dodatniego wynosiłoby  $(+1)$ , a dla pola ujemnego  $(-1)$ . Ważną rolę odgrywają jednak również wzajemne oddziaływania atomów oraz drgania cieplne (temperatura).

Wzajemne oddziaływania atomów powodują, iż jeśli zmieniamy wartość pola magnetycznego, oznaczaną jako  $h$ , od wartości dodatnich, poprzez zero, do wartości ujemnych, przy przejściu przez zero atomy nie od razu ustawiają się zgodnie z nowym kierunkiem pola zewnętrznego. Dodatnia wartość namagnesowania utrzymuje się aż do pewnej granicznej wartości ujemnego pola, przy której następuje „przeskok” namagnesowania do wartości ujemnej. Podobny efekt obserwuje się przy zmienianiu wartości pola od wartości ujemnych, poprzez zero, do wartości dodatnich. Zmiana namagnesowania z wartości ujemnej do wartości dodatniej następuje dopiero przy pewnej granicznej wartości dodatniego pola magnetycznego. Właśnie to zjawisko, „opóźnienie” zmiany namagnesowania względem zmiany pola zewnętrznego, określane jest efektem histerezy magnetycznej. W obrębie tzw. pętli histerezy magnetycznej namagnesowanie materiału, przy takim samym polu zewnętrznym, zależy od jego historii (por. rys. 1).

W sposób obrazowy można to przedstawić następująco. Zgodnie z prawami fizyki, cały układ dąży do osiągnięcia minimum globalnego tzw. *potencjału*. Potencjał ma jednak dwa lokalne minima, odpowiadające dodatniemu i ujemnemu namagnesowaniu, rozdzielone barierą. Sytuację taką, w której istnieją dwa alternatywne stany, w których układ może trwać przez dłuższy czas, nazywamy *bistabilnością*. W dodatnim polu zewnętrznym minimum odpowiadające dodatniemu namagnesowaniu jest głębsze, a w ujemnym – minimum odpowiadające namagnesowaniu ujemnemu. Załóżmy, że początkowo układ znajduje się w polu dodatnim i w minimum odpowiadającym dodatniemu namagnesowaniu. Gdy wartość pola zmniejsza się, przechodzi przez zero i staje się ujemna, wówczas „dodatnie” minimum przestaje być głębsze od „ujemnego” i korzystniejsze dla układu byłoby znaleźć się w tym drugim. Jednak oba minima rozdzielone są barierą, która jest nie do przeskoczenia.



**Rys. 1.** Pętla histerezy magnetycznej w zerowej temperaturze

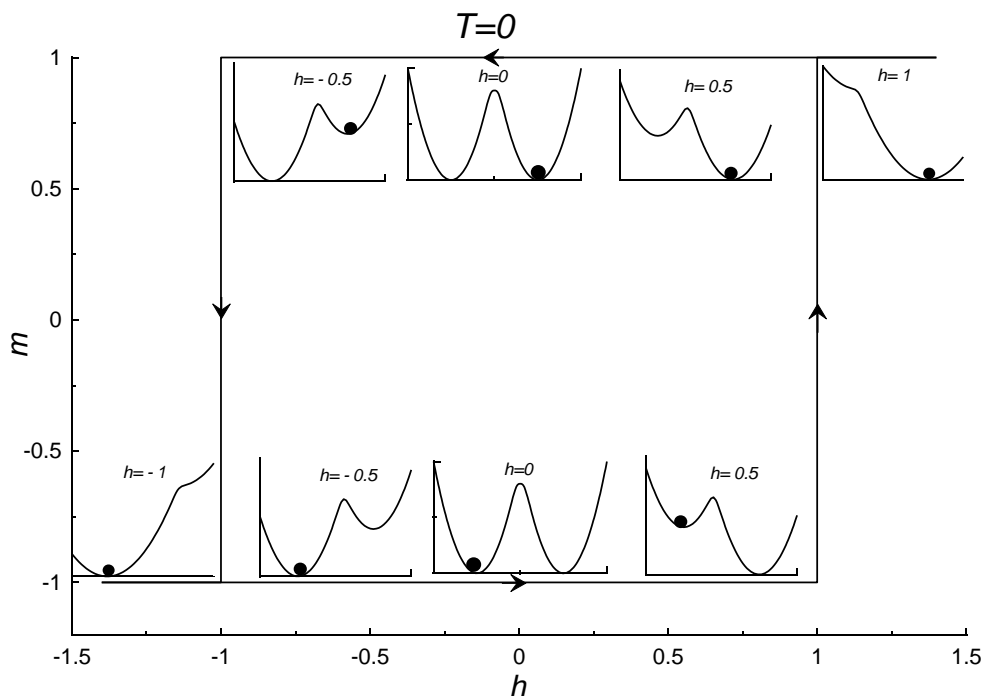
Źródło: opracowanie własne.

Układ zostaje „uwięziony” w mniej korzystnym stanie. Dopiero gdy bezwzględna wartość pola zwiększy się na tyle, by bariera znikła, możliwy będzie „przeskok” układu do „ujemnego”, korzystniejszego minimum (por. rys. 2).

Kolejnym czynnikiem, wywierającym wpływ na zachowanie atomów, jest temperatura. Wartość temperatury oznaczana jest przez  $T$ , a jej odwrotność  $-\beta$ . Ogólnie rzecz biorąc, wzrost temperatury skutkuje nasileniem chaotycznych drgań, powodujących losowe przeskoki ustawienia pojedynczych atomów. W efekcie zmienia się również całkowite namagnesowanie materiału. Pętla histerezy w niezerowej temperaturze staje się węższa, a „przeskoki” pomiędzy ujemnym i dodatnim namagnesowaniem (i na odwrót) mniej gwałtowne. Gdy temperatura jest dostatecznie wysoka, chaotyczne przeskoki atomów są na tyle silne, że zewnętrzne pole nie wywiera na nie już żadnego wpływu, a namagnesowanie, niezależnie od wartości pola, jest równe zero.

Czas reakcji atomów na zmiany zewnętrznego pola jest bardzo krótki. Praktycznie mamy więc na ogół do czynienia z tzw. stanami stacjonarnymi, tzn. takimi, w których namagnesowanie  $m$  osiąga ustaloną wartość i już nie zmienia się w czasie:

$$\frac{dm}{dt} = 0. \quad (2)$$



**Rys. 2.** Kształt potencjału w zależności od pola magnetycznego i stan układu, zależny od historii  
 Źródło: opracowanie własne.

Namagnesowanie w stanach stacjonarnych, definiowanych poprzez (2), oznaczane będzie przez gwiazdkę w górnym indeksie,  $m^*$ .

Wartość namagnesowania w stanie stacjonarnym dla dowolnej wartości pola zewnętrznego i dowolnej wartości temperatury można otrzymać z równania Curie-Weissa:

$$m^* = \tanh[\beta(h + Jm^*)], \quad (3)$$

gdzie  $J$  jest stałą oddziaływania pomiędzy atomami.

Z równania Curie-Weissa otrzymujemy wykresy histerezy dla dowolnej temperatury (dla której histereza jeszcze istnieje).

## 2.2. Histereza w układach ekologicznych

Prostym modelem matematycznym stosowanym w ekologii, w którym widoczny jest efekt histerezy, jest pojedyncze równanie różniczkowe opisujące zmiany w czasie poziomu pewnej wielkości  $x$  [20]:

$$\frac{dx}{dt} = a - bx + rs(x), \quad (4a)$$

gdzie

$$s(x) = \frac{x^p}{x^p + h^p} \quad (4b)$$

natomiast  $a$ ,  $b$ ,  $r$ ,  $p$  oraz  $h$  oznaczają parametry charakteryzujące układ. Wielkość  $a$  jest parametrem określającym ilościowo czynnik środowiskowy powodujący wzrost  $x$ ,  $b$  zaś jest współczynnikiem zaniku. Wielkości parametrów  $r$ ,  $h$  oraz  $p$  należy ustalić w zależności od modelowanej sytuacji. Dla  $r = 0$  mamy w tym modelu pojedynczy stan równowagi, przy  $x = a/b$ . Dla  $r \neq 0$  mogą istnieć dwa stany równowagi. Wraz ze zmieniającym się  $a$  wystąpi wówczas efekt histerezy. Przeskok pomiędzy alternatywnymi stanami stabilnymi nastąpi wokół wartości  $h$  i będzie tym gwałtowniejszy, im większa będzie wartość  $p$ .

Liczne badania terenowe pokazały, że w układach przyrodniczych faktycznie zdarzają się nagle – i niebezpieczne, z punktu widzenia stabilności ekosystemów – przeskoki pomiędzy alternatywnymi stanami stabilnymi [20; 25]. Szczególnie groźne następstwa efekt histerezy może mieć dla użytkowników ekosystemów, którzy nie są go świadomi. Na przykład, jeśli zanieczyszczenie danego ekosystemu do poziomu  $B$  nie powodowało jeszcze jego degradacji, a dopiero przekroczenie tego progu spowodowało nagle załamanie funkcji systemu, to – jeśli w układzie występuje efekt histerezy – nie wystarczy cofnąć poziomu zanieczyszczenia do poziomu  $B$ , przy którym wyjściowo ekosystem jeszcze funkcjonował. Konieczne będzie zmniejszenie tego poziomu do wielkości  $A$ ,  $A < B$ , przy czym wartości  $A$  nie potrafimy z góry określić [20].

### 2.3. Histereza w układach społeczno-ekonomicznych

Na gruncie badań społeczno-ekonomicznych histereza typu magnetycznego pojawiła się dzięki modelowi Brocka–Durlaufa [3; 4]. Model ten, stworzony przez ekonomistę i psychologa, dotyczy sytuacji binarnych wyborów. Służyć może do opisywania wielu sytuacji podejmowania decyzji, zarówno politycznych czy społecznych, jak i konsumenckich czy gospodarczych. Wykazano [17], że dynamiczna wersja tego modelu, zamiast oryginalnej notacji posługującej się funkcją użyteczności, może być sprowadzona do znanych z psychologii społecznej modeli decyzyjnych opartych na regułach wyboru (np. model Hołysta-Kacperskiego [13; 14] czy model Nowaka-Latane [15; 16]). Posłużymy się tutaj zatem prostszym formalizmem reguł decyzyjnych.

Nowatorstwo modelu Brocka–Durlaufa polega na uwzględnieniu oddziaływań społecznych przy podejmowaniu decyzji. Wybory ludzi jako konsumentów czy wyborców często postrzegane były jako decyzje racjonalne, podejmowane według reguły rachunku kosztów i korzyści [6]. Wiele badań przeczy jednakże takiemu założeniu. Ludzie wydają się w o wiele większym stopniu, niż często dotąd zakładano, podlegać społecznym wpływom nawet przy dokonywaniu takich wyborów, które, racjonalnie rzecz biorąc, powinny od oddziaływań z innymi ludźmi nie zależeć [1; 9;

19]. Jeśli uwzględnimy dodatkowo skłonność większości osób do trwania konsekwentnie przy swoich uprzednich wyborach, otrzymamy model decyzyjny (dotyczący sytuacji wyboru binarnego) przedstawiony poniżej [17].

Niech decyzja  $i$ -tej jednostki, w postaci wyboru jednej z dwóch możliwych opcji, podjęta w czasie  $t$  oznaczona będzie symbolem  $s_i^t$ , przy czym  $s_i^t = \pm 1$ . Przyjmujemy tu oznaczenie identyczne z oznaczeniem użytym w (1), gdyż w obu przypadkach zmienna ta przybiera wartości  $\pm 1$ , a dalsze analogie zostaną pokazane później. Przyjmijmy, że decyzja podejmowana w chwili  $t$  zależy w ogólnym przypadku od decyzji podjętej w chwili poprzedniej,  $t - 1$ . Zależność ta dopuszcza pewien stopień nieprzewidywalności:

$$s_i^t = \begin{cases} s_i^{t-1} & \text{z prawdopodobieństwem } P_+ \\ -s_i^{t-1} & \text{z prawdopodobieństwem } P_- \end{cases} \quad (5)$$

przy czym  $P_+ + P_- = 1$ .

Specyfika prezentowanego modelu polega na określeniu prawdopodobieństw  $P_+$  (pozostania przy uprzedniej decyzji) i  $P_-$  (zmiany decyzji).

Zapiszemy prawdopodobieństwo  $P_{\pm}$  jako funkcję wielkości, nazywanej w psychologii społecznej *funkcją wpływu*,  $I_i^{\pm}$ . Prezentowany tutaj model decyzyjny definiowany jest przez wybór funkcji wpływu w ogólnej postaci:

$$I_i^{\pm} = -hs_i^{t-1} - b_i - g(\{s_j^{t-1}\}), \quad (6)$$

gdzie  $h$  jest parametrem reprezentującym obiektywną korzyść (np. ekonomiczną lub polityczną),  $b_i$  określa siłę „konserwatywności” jednostki, czyli wpływ, jaki jej własny poprzedni wybór ma na wybór bieżący, natomiast wyraz  $g(\{s_j^{t-1}\})$  opisuje wpływ, jaki na wybór jednostki w danej chwili wywierają wybory pozostałych jednostek,  $\{j\}$ , z chwili poprzedniej,  $t - 1$ .

W najprostszym przypadku przyjmuje się:

$$g(\{s_j^{t-1}\}) = Js_i^{t-1}m^{t-1}, \quad (7)$$

gdzie  $J$  jest parametrem określającym siłę wzajemnych oddziaływań pomiędzy jednostkami, a  $m_{t-1}$  (zgodnie z definicją (1)) średnim wyborem wszystkich osób w chwili poprzedniej. Przyjęcie takiej postaci funkcji oddziaływania społecznego jest równoznaczne z założeniem, że żadna z osób nie oddziałuje na daną osobę silniej niż pozostałe oraz że akces każdej kolejnej osoby do danej opcji ma taki sam wpływ (tzn. różnica pomiędzy popieraniem danego wyboru przez 5 lub 6 osób jest taka sama, jak pomiędzy popieraniem go przez 1000 i 1001 osób). Taka właśnie postać członu oddziaływania przyjmowana jest w modelu Brocka–Durlaufa.

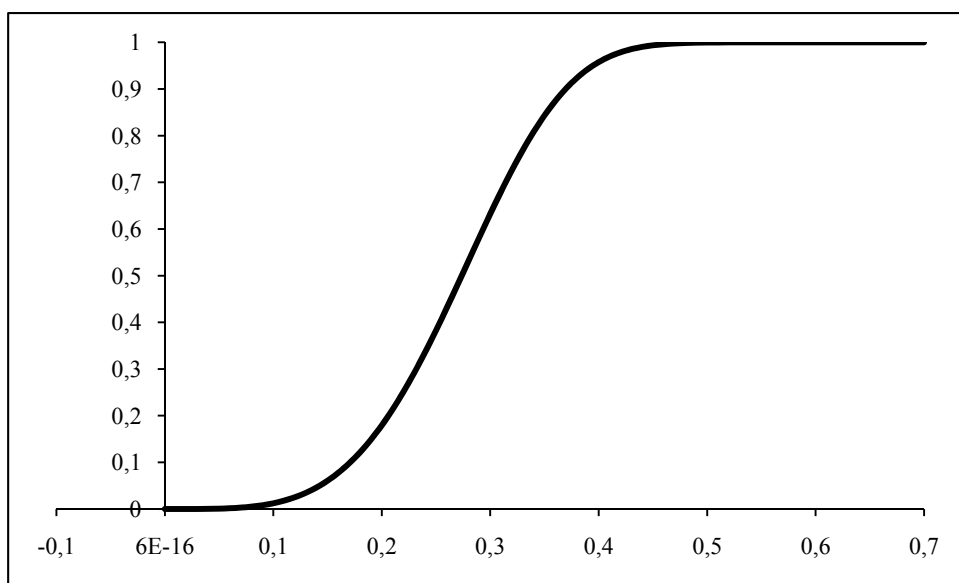
Sądzić można, że różnica pomiędzy, dajmy na to, 1 a 2 procentami jednostek wybierających daną opcję jest dla naśladowcy bardziej znacząca niż różnica pomiędzy 49 a 50 procentami. Zatem prawdopodobnie bardziej realistyczne jest przyjęcie nieliniowej funkcji opisującej wzajemne oddziaływanie:

$$g(\{s_j^{t-1}\}) = Js_i^{t-1}u(m^{t-1}), \quad (8)$$

gdzie  $u(x)$  może mieć postać na przykład funkcji Weibulla o postaci:

$$u(x) = C \left[ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{x}{d} \right)^a \right] \right],$$

gdzie  $C$ ,  $d$  oraz  $a$  są parametrami. Wybierając odpowiednio wartości tych parametrów, można uzyskać różnorodność nieliniowych funkcji, w szczególności również i takie, które dla skrajnie małych i skrajnie dużych wartości argumentów są słabo zmienne, a których szybki wzrost następuje dla pośrednich wartości argumentów (por. rys. 3).



**Rys. 3.** Przykładowa funkcja, która może być użyta do modelowania oddziaływań międzyludzkich. Jest to funkcja Weibulla z wartościami parametrów:  $C = 1$ ,  $d = 0,3$ ,  $a = 4$

Źródło: opracowanie własne.

Prawdopodobieństwa  $P_{\pm}$  określane są jako funkcje wielkości  $I_i^{\pm}$ :

$$P_{+} = F(-I_i^{\pm}) \quad (9a)$$

$$P_{-} = 1 - F(-I_i^{\pm}), \quad (9b)$$

gdzie  $F$  jest dystrybuantą pewnej zmiennej losowej  $E$ , której gęstość prawdopodobieństwa oznaczana będzie przez  $f$ .

Przedstawienie prawdopodobieństwa utrzymania poprzedniej decyzji za pomocą dystrybuanty pewnej zmiennej losowej ma swoje uzasadnienie. Skoro prawdopodobieństwo utrzymania decyzji wynosi  $F(-I_i^{\pm})$  to, z definicji dystrybuanty, wynosi ono:



$$P_+ = P(E \leq -I_i^t) = P(I_i^t + E \leq 0). \quad (10)$$

Jednostka utrzymuje swój poprzedni wybór, gdy funkcja wpływu, uzupełniona o realizację pewnej zmiennej losowej, ma znak ujemny, natomiast wybór zmienia w przeciwnym wypadku.

Zmienna losowa  $E$  ma charakter „szumu”, nadając probabilistyczny charakter wyborom, które w wypadku jej nieobecności (formuła (10) z pominięciem wyrazu  $E$ ):

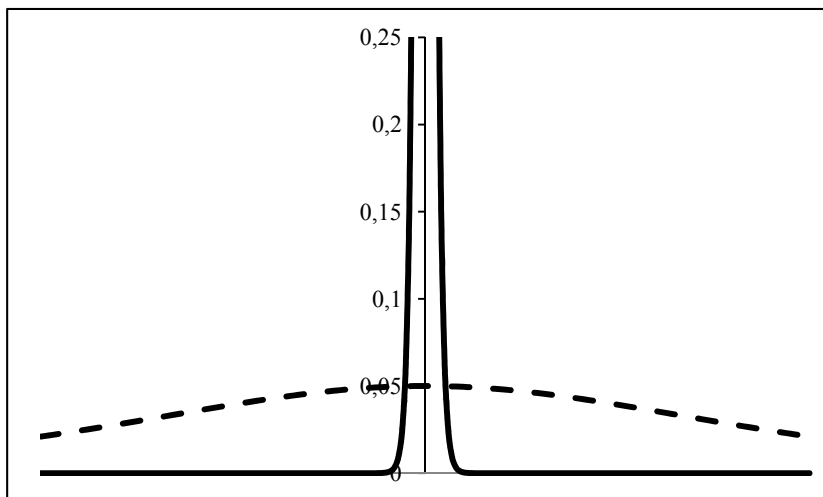
$$P_+ = P(I_i^t \leq 0),$$

byłyby deterministyczne.

W modelu Brocka–Durlaufa przyjmuje się dystrybuantę w postaci funkcji logistycznej:

$$F(x) = \frac{1}{1 + \exp[-\beta x]}, \quad (11)$$

z wartością średnią 0 oraz odchyleniem standardowym równym  $\frac{1}{3} \frac{\pi^2}{\beta^2}$ . Wartość parametru  $\beta$  jest odpowiedzialna za stopień nieprzewidywalności wyborów jednostek. Wraz z  $\beta \rightarrow \infty$  wybory jednostek stają się deterministyczne (por. rys. 4).



**Rys. 4.** Wykres gęstości prawdopodobieństwa logistycznej zmiennej losowej dla dwóch wartości parametru:  $\beta = 10$  (linia ciągła) oraz  $\beta = 0,2$  (linia przerywana)

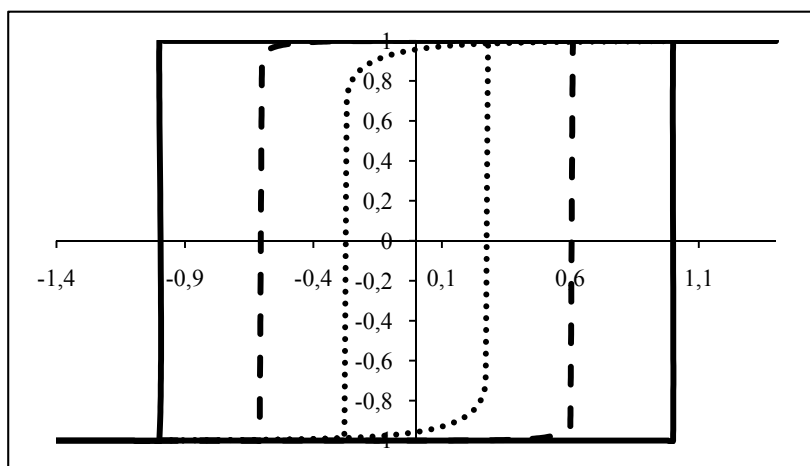
Źródło: opracowanie własne.

Można pokazać [4; 17], że w przypadku modelu określonego przez (5)-(7), (9), (11) jego stany stacjonarne (definiowane przez (2)) stanowią rozwiązania następującego równania:

$$m^* = \tanh[\beta(h + Jm^*)].$$

Jak widać, powyższe równanie ma postać identyczną do równania Curie-Weissa, opisującego zależność namagnesowania od pola zewnętrznego (por. równanie (3)). Rolę zewnętrznego pola magnetycznego odgrywa w tym równaniu parametr  $h$ , stałą oddziaływania pomiędzy atomami – stała  $J$ , natomiast temperatury – odwrotność parametru  $\beta$ . Również interpretacja parametru  $\beta$  jest analogiczna. W modelu fizycznym temperatura (czyli odwrotność  $\beta$ ) wprowadza nieuporządkowanie do układu atomów, natomiast w modelu decyzyjnym wzrost  $1/\beta$  powoduje (por. rys. 4) zwiększenie nieprzewidywalności jednostkowych decyzji.

Z powodu identyczności równań opisujących stany stacjonarne, również i w modelu definiowanym przez (5)-(7), (9), (11) wystąpi histereza. W przypadku ściśle deterministycznym,  $\beta \rightarrow \infty$ , będzie ona wyglądała identycznie jak w przypadku zerowej temperatury, czyli jak na rys. 1. W przypadku częściowej nieprzewidywalności (czyli losowości i/lub ukrytych czynników) kształt histerezy będzie się zmieniał (por. rys. 5). Podobnie jak w przypadku układów ekologicznych mamy wówczas do czynienia z sytuacją „pułapki”, tym razem społecznej. Nawet gdy czynniki zewnętrzne ( $h$ ) zmieniają się tak, że obiektywnie korzystniej byłoby zmienić społeczną postawę i zwrócić się ku odmiennemu wyborowi, zbiorowość tkwi w „pułapce” swoich przeszłych wyborów, dopóki okoliczności zewnętrzne nie zmienią się wystarczająco, by przewyciężyć tę inercję. Zwróćmy uwagę, że wzrost losowości odgrywa tu dwojaką rolę. Z jednej strony, powoduje szybsze uwolnienie zbiorowości z „pułapki” (węższa pętla histerezy). Z drugiej strony jednakże powoduje jednocześnie, że po uwolnieniu z „pułapki” większy odsetek zbiorowości wciąż decyduje się na wybór mniej korzystny z zewnętrznego punktu widzenia, a osiągnięcie konsensu wymaga znacznie większej obiektywnej korzyści.



Rys. 5. Histeresa średniego wyboru względem obiektywnej korzyści zewnętrznej dla różnych wartości parametru  $\beta$ :  $\beta \rightarrow \infty$  (linia ciągła),  $\beta = 5$  (linia kreskowana),  $\beta = 2$  (linia kropkowana)

Źródło: opracowanie własne.

Przyjęcie oddziaływania (8) w postaci innej niż liniowa może prowadzić do znacznie bardziej bogatych możliwości: istnienia więcej niż dwóch możliwych stanów stacjonarnych i skomplikowanych pętli histerezy o kształtach niespotykanych na gruncie fizyki statystycznej [17].

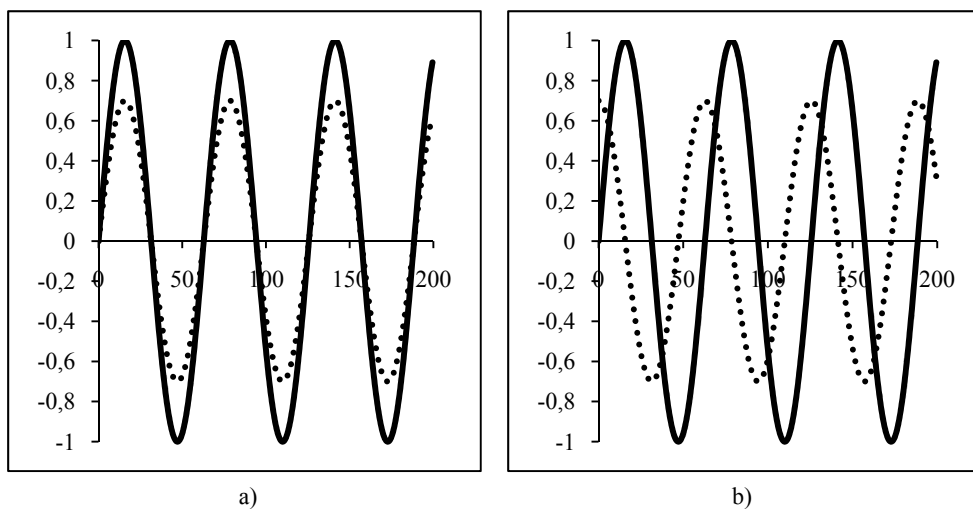
### 3. Histereza w zjawiskach cyklicznych i quasi-cyklicznych

Opóźnienia w reagowaniu na przyczyny sprawcze, spowodowane inercją układu, są powszechnie spotykane. W zasadzie każda reakcja następuje z jakimś opóźnieniem i tylko od skali czasowej tego zjawiska zależy, czy jest to istotny czynnik, który należy brać pod uwagę przy opisie czy modelowaniu. W specyficznym przypadku współzależności dwóch zjawisk zachodzących w podobnych skalach czasowych efekty te mogą doprowadzić do cykliczności bądź quasi-cykliczności, przy czym oscylacje jednego ze zjawisk są względem oscylacji drugiego z nich opóźnione.

#### 3.1. Oscylacje w układach elektrycznych

Prostym przykładem dwóch współzależnych zjawisk, których oscylacje są względem siebie nawzajem opóźnione, są napięcie i natężenie w obwodzie prądu zmiennego. Jeśli do danego obwodu, w którym znajduje się tylko opornik, przyłożymy źródło napięcia zmiennego, zmieniającego się z częstością  $\omega$ :

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t), \quad (12a)$$



**Rys. 6.** Oscylacje napięcia (linia ciągła) i natężenia (linia kropkowana) w układzie elektrycznym prądu zmiennego a) bez kondensatora i b) z kondensatorem

Źródło: opracowanie własne.

wówczas natężenie prądu zmieniać się będzie według zależności:

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t). \quad (12b)$$

W tej sytuacji natężenie prądu jest w zgodnej fazie z napięciem, gdyż jego maksymalna wartość przypada na tę samą chwilę czasu co wartość maksymalna przyłożonego napięcia (por. rys. 6a).

Jeśli do obwodu włączymy dodatkowo kondensator, to przy przyłożonym napięciu zmieniającym się w czasie zgodnie z równaniem (12a), uzyskane natężenie prądu płynącego przez obwód będzie opisane następującą zależnością czasową:

$$I(t) = I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (12c)$$

W tym przypadku natężenie prądu jest przesunięte w fazie względem napięcia, gdyż w momencie, gdy napięcie osiąga swoją wartość maksymalną, natężenie prądu ma wartość zerową, a swoje maksimum osiągnie dopiero po czasie równym  $\Delta t = \frac{\pi}{2\omega}$  (por. rys. 6b).

### 3.2. Model „drapieżnik-ofiara”

Przesunięte względem siebie cykle, opisywane już bardziej skomplikowanymi niż harmoniczne zależnościami, wynikają z prostego modelu, nazywanego obecnie modelem Lotki–Volterry. Pojawił się on po raz pierwszy na początku ubiegłego wieku w kontekście autokatalitycznych reakcji chemicznych. Już wkrótce potem, w latach 20., został zastosowany do opisu układów przyrodniczych, skąd wzięła się druga nazwa, pod którą równania Lotki–Volterry są szeroko znane: model „drapieżnik-ofiara” [5].

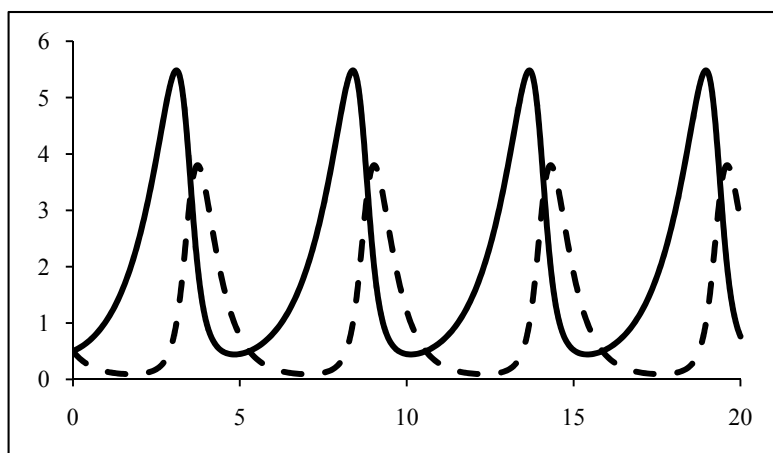
W modelu „drapieżnik-ofiara” zakłada się, że ofiary (zwierzęta roślinożerne) dysponują nieograniczonym źródłem pożywienia i ich rozród, przy nieobecności drapieżników, prowadziłby do eksponencjalnego wzrostu populacji, z pewnym współczynnikiem  $\alpha$ . Jednocześnie polowania drapieżników powodują zmniejszanie się populacji ofiar, a intensywność polowań zależna jest od częstotliwości „spotkań” drapieżników i ofiar, a zatem od liczebności zarówno pierwszych jak i drugich, z pewnym współczynnikiem  $\beta$ . Zatem równanie opisujące dynamikę ofiar przedstawia się następująco:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy. \quad (13)$$

Drapieżniki z kolei rozmnażają się w zależności od dostępności pożywienia, a więc częstotliwości spotkań z ofiarami, z pewnym współczynnikiem  $\delta$ . Ich populacja zmniejsza się, ze współczynnikiem  $\gamma$ , na skutek śmierci naturalnej. Zatem równanie opisujące dynamikę populacji drapieżników ma następującą postać:

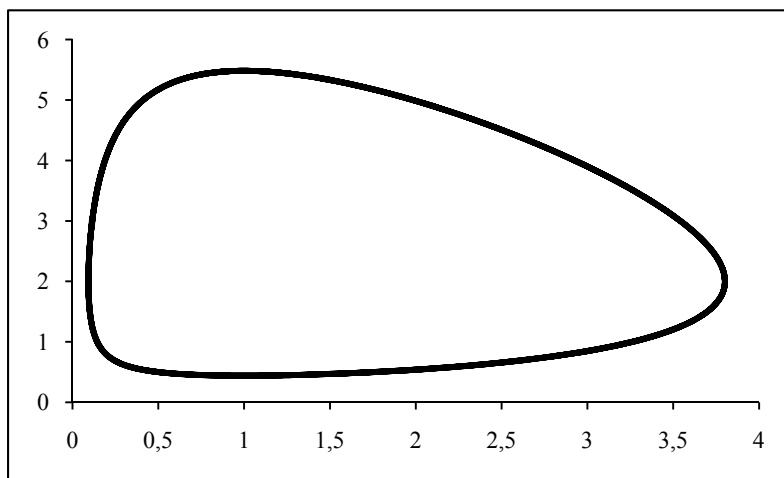
$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y. \quad (14)$$

Równania (13)-(14) tworzą wspólnie model Lotki–Volterry. Nie istnieje ich ogólne rozwiązanie w postaci analitycznej, choć linearyzacja tych równań prowadzi



**Rys. 7.** Zależność od czasu wielkości populacji ofiar (linia ciągła) oraz drapieżników (linia przerywana) dla wartości parametrów:  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 2$ ,  $\delta = 1$

Źródło: opracowanie własne.



**Rys. 8.** Wzajemna zależność wielkości populacji ofiar (oś pionowa) od wielkości populacji drapieżników (oś pozioma) dla wartości parametrów:  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 2$ ,  $\delta = 1$

Źródło: opracowanie własne.

do rozwiązań podobnych do oscylacji harmoniczych (w których rozwiązanie opisujące populację drapieżników jest opóźnione w fazie w stosunku do populacji ofiar o  $\pi/2$ ), a dokładne rozwiązania, uzyskiwane w sposób numeryczny, również mają charakter periodyczny.

Na rysunku 7 przedstawiono przykładowe rozwiązanie układu (13)-(14), wykazujące charakterystyczny periodyczny charakter. Rysunek 8 prezentuje zależność pomiędzy obydwoma zmiennymi modelu. Jak widać, zależność ta ma kształt zdeformowanej elipsy. Kształt taki został nazwany przez Z. Hellwiga [12] *elipsydą*.

### 3.3. Model Goodwina

Model Goodwina [8] został zaprezentowany przez jego twórcę w 1967 r. jako model cykli ekonomicznych (zarobków i bezrobocia). Matematycznie jest on równoważny modelowi drapieżnik-ofiara. Od drugiej połowy ubiegłego wieku model Goodwina był przez ekonomistów modyfikowany i udoskonalany [23; 26; 27], by lepiej odzwierciedlać dane dotyczące rynku pracy.

Pokrótkie przedstawimy tu podstawowe przesłanki modelu Goodwina.

Niech  $\sigma$  oznacza stałą intensywność kapitału, czyli stosunek kapitału do produktu:  $\sigma = k/q$ , gdzie  $k$  oznacza kapitał, a  $q$  – produkt. Odwrotność,  $1/\sigma$ , określa produktywność kapitału, czyli wielkość dochodu generowanego przez każdą jednostkę kapitału zainwestowanego. Niech wydajność pracy,  $a$ , zdefiniowana będzie jako:

$$a = \frac{q}{l}, \quad (15)$$

gdzie  $l$  jest zatrudnieniem. Zakłada się, iż wydajność pracy oraz siła robocza,  $n$ , rosną eksponencjalnie, z wykładnikami równymi odpowiednio  $\alpha$  oraz  $\beta$ :

$$a = a_0 e^{\alpha t}, \quad \alpha > 0, \quad (16)$$

$$n = n_0 e^{\beta t}, \quad \beta > 0. \quad (17)$$

Udział siły roboczej w wypracowanym produkcie,  $u$ , wynosi:

$$u = \frac{w}{a}, \quad (18)$$

gdzie  $w$  oznacza dochody, natomiast pozostałość,  $1 - u$ , będzie zyskiem posiadaczy kapitału. Zakłada się, że cały dochód pracowniczy zostaje skonsumowany, natomiast cały zysk kapitalistów – zainwestowany. Zatem stopa wzrostu kapitału będzie wynosiła

$$\dot{k} = (1 - u)q$$

lub w alternatywnej postaci:

$$\frac{\dot{k}}{k} = (1 - u) \frac{q}{k} = \frac{1-u}{\sigma}. \quad (19)$$

Intensywność  $\sigma$  jest stała, więc  $\dot{\sigma} = 0$ . Zmiany  $q$  muszą zatem kompensować zmiany  $k$ . Czyli

$$\frac{\dot{q}}{q} = \frac{1-u}{\sigma}. \quad (20)$$

Korzystając z zależności

$$\frac{\dot{f}}{f} = \frac{\dot{g}}{g} - \frac{\dot{h}}{h} \quad \text{gdzie} \quad f = \frac{g}{h}, \quad (21)$$

oraz przekształcając (15) ze względu na  $l$  otrzymujemy

$$\frac{\dot{l}}{l} = \frac{1-u}{\sigma} - \alpha. \quad (22)$$

Stopa zatrudnienia jest stosunkiem zatrudnienia do całkowitej siły roboczej:  $v = l/n$ . Zatem, ponownie korzystając z (21), dostajemy

$$\frac{\dot{v}}{v} = \frac{1}{\sigma}(1-u) - \alpha - \beta. \quad (23)$$

W modelu Goodwina stosowana jest linearyzowana postać krzywej Phillipsa, co oznacza, że zależność pomiędzy dochodami a stopą zatrudnienia ma następującą postać:

$$\frac{\dot{w}}{w} = -\gamma + \rho v, \quad (24)$$

gdzie  $\gamma$  oraz  $\rho$  są parametrami.

Korzystając z (18) i (21), otrzymujemy

$$\frac{\dot{u}}{u} = -\gamma + \rho v - \alpha. \quad (25)$$

Dostajemy zatem układ równań (23), (25), formalnie równoważny z równaniami modelu drapieżnik-ofiara. Występujące w tych równaniach parametry mają zupełnie odmienną interpretację, jednakże otrzymywane rozwiązania mają charakter periodyczny, identycznie jak rozwiązania równań Lotki–Volterra.

Dane dotyczące różnych krajów (np. Australii, Kanady, Włoch, Węgier i innych) potwierdzają przypuszczenie, że zmiany zatrudnienia i inflacja faktycznie odbywają się w cyklach (np. [10; 24]). W celu teoretycznego ujęcia i wyjaśnienia tych zjawisk zaproponowany został model Goodwina oraz późniejsze jego wersje (np. [23; 26; 27]). Oferują one formuły modelujące współzależność tych zjawisk. Formuły te nie mają charakteru czysto fenomenologicznego, ale raczej parametry ich – np. opisujące elipsoidę bezrobocie-inflacja oraz długość cyklu – można szacować, opierając się na dostępnych danych dotyczących gospodarki danego kraju. Takiej weryfikacji empirycznej modelu dokonali przykładowo A.B. Atkinson [2] oraz D. Harvie [10]. V. Vadasz [24] porównał zgodność dopasowania do modelu Goodwina oraz do modeli pochodnych dla węgierskiej gospodarki planowanej sprzed przemiany ustrojowej.

#### 4. Podsumowanie

W niniejszej pracy przedstawione zostały pokrótce dwa typy histerezy, którą można zaobserwować w układach społecznych, ekonomicznych i ekologicznych.

Pierwszy typ histerezy dotyczy zjawisk, w których osiągnięcie optymalnego stanu jest opóźnione z powodu historii układu, który utkwiał w pewnym rodzaju „pułapce”.

Pomimo zmian zewnętrznych, faworyzujących już stan alternatywny, układ nie jest w stanie wydostać się z pułapki.

Drugi typ histerezy polega na inercji zjawisk względem przyczyn powodujących ich dynamikę. Objawia się to często opóźnieniem cykliczności jednego ze współzależnych zjawisk względem drugiego (przesunięcie w fazie).

Pierwszy typ opóźnionej reakcji układu przedstawiony został w trzech różnych kontekstach: fizycznym, ekologicznym oraz społeczno-ekonomicznym. Odmienne rodzaje założeń i odmienne formalizmy matematyczne prowadzą do podobnych jakościowo pętli histerezy. Modele te mogą służyć wyjaśnieniu zjawisk obserwowanych w wielu badanych układach – z jednej strony gwałtownych zmian, z drugiej – inercji.

Drugi rodzaj opóźnienia został omówiony na przykładzie cykli ekonomicznych inflacji i bezrobocia, formalnie identycznych z cyklami ekologicznymi współlistniejących populacji drapieżców i zjadanych przez nich ofiar.

Obydwa typy opóźnień są niewątpliwie na tyle rozpowszechnione w otaczającym nas świecie, że próby dalszego ich zgłębiania i rozwijanie modeli uwzględniających występowanie histerezy okażą się z pewnością korzystne dla zrozumienia zjawisk rozgrywających się w środowisku przyrodniczym i ludzkim.

## Literatura

- [1] Arthur W.B., *Out-of-equilibrium economics and agent-based modeling*, [w:] L. Tesfatsion, K.L. Judd (red.), *Handbook of Computational Economics*, vol. 2, Elsevier, 2006, s. 1551-1564.
- [2] Atkinson A.B., The timescale of economic models: How long is the long run?, „The Review of Economic Studies” 1969, vol. 36, s. 137-152..
- [3] Brock W.A., Durlauf S.N., *Interaction based models*, [w:] J.J. Heckman, E. Leamer (red.), *Handbook of Econometrics*, vol. 5, Elsevier Science B.V., Amsterdam 2001, s. 3297-3380.
- [4] Durlauf S.N., *How can statistical mechanics contribute to social sciences?*, „Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA” 1999, vol. 96, s. 10582.
- [5] Edelstein-Keshet L., *Mathematical Models in Biology*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004.
- [6] Fishburn P.C., *The Foundations of Expected Utility*, Theory and Decision Library, Vol. 31, D. Reidel, Dordrecht 1982.
- [7] Giegiel A., *Deprecjacja kapitału ludzkiego, a efekty histerezy bezrobocia w Polsce*, Uniwersytet w Białymstoku, 2008.
- [8] Goodwin R.M., *A growth cycle*, [w:] C.H. Feinstein (red.), *Socialism, Capitalism and Economic Growth*, Cambridge University Press, Cambridge 1967.
- [9] Granovetter M., *Economic action and social structure*, „American Journal of Sociology” 1985, vol. 91 (3), s. 481-510.
- [10] Harvie D., *Testing Goodwin: Growth cycles in ten OECD countries*, „Cambridge Journal of Economics” 2000, vol. 24, s. 349-376.
- [11] Heilbroner R.L., *Wielcy ekonomiści: czasy, życie, idee*, PWE, Warszawa 1993.
- [12] Hellwig Z., *Wykrywanie sprzężeń zwrotnych w gospodarce za pomocą nieliniowego współczynnika korelacji*, „Ekonomista” 1993, nr 2.



- [13] Hołyst J.A., Kacperski K. et al., *Social impact models of opinion dynamics*, „Annual Reviews of Computational Physics” 2001, vol. 9, s. 253-273.
- [14] Hołyst J.A., Kacperski K., Schweitzer F., *Phase transitions in social impact models of opinion formation*, „Physica” A 2000, vol. 285, s. 199-210.
- [15] Latane B., *The psychology of social impact*, „American Psychologist” 1981, vol. 36 (4), s. 343-356.
- [16] Nowak A., Szamrej J., Latane B., “From Private Attitude to Public Opinion: A Dynamic Theory of Social Impact”, *Psychological Review* **97**, 362–376, 1990.
- [17] Ostasiewicz K., Tyc M.H., Radosz A., Magnuszewski P., Goliczewski P., Hetman P., Sendzimir J., *Multistability of impact, utility and threshold concepts of binary choice models*, „Physica” A 2008, vol. 387, s. 6337.
- [18] Papell D.H., Murray C.J., Ghiblawi H., *The structure of unemployment*, „Review of Economics and Statistics” 2000, vol. 82, s. 309-315.
- [19] Rosser J.B., Jr., *On the complexities of complex economic dynamics*, „Journal of Economic Perspectives” 1999, vol. 13 (4), s. 169-192.
- [20] Scheffer M., Carpenter S. et al., *Catastrophic shifts in ecosystems*, „Nature” 2001, vol. 413, s. 591-596.
- [21] Siedlecki J., *Równowaga w wzrost gospodarczy*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2000.
- [22] Siedlecki J., Siedlecka U., *Histeresa procesów ekonomicznych*, [w:] *Metody badania gospodarki narodowej*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej nr 513, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław 1990, s. 179-184.
- [23] Sportelli M.C., *A Kolmogoroff generalized predator-prey model of Goodwin’s growth cycle*, „Journal of Economics” 1995, vol. 61, s. 35-64.
- [24] Vadasz V., *Economic Motion: An Economic Application of the Lotka–Volterra Predator-Prey Model*, Franklin and Marshall College Archives, Undergraduate Honors Thesis, 2007.
- [25] Van de Koppel J., Rietkerk M., Weissing F.J., *Catastrophic vegetation shifts and soil degradation in terrestrial grazing systems*, „Trends in Ecology & Evolution” 1997, vol. 12, s. 352-356.
- [26] Van der Ploeg F., *Growth cycles, induced technical change, and perpetual conflict over the distribution of income*, „Journal of Macroeconomics” 1987, vol. 9, s. 1-12.
- [27] Wolfstetter E., *Fiscal policy and the classical growth cycle*, „Journal of Economics” 1982, vol. 42, s. 375-393.

## TWO TYPES OF HYSTERESIS IN ECONOMIC-SOCIOLOGICAL AND RELATED MODELS

Generally, hysteresis phenomenon means dependence of the state of the system not only on outer variables but on the former state of the system itself. Very often, this effect is nearly invisible. However, there is a range of phenomena in which it plays an important role and has to be taken into account in their realistic description. In one category of phenomena hysteresis effect leads the system to be “trapped” in a certain state: social, ecological or economical. This may be a very dangerous property of the system, especially from the point of view of its human participant. The more so, the less conscious of such possibility he is. In the other category of phenomena there may appear oscillations of two mutually dependent variables. In this paper both of these effects, “traps” and oscillations, are briefly presented on examples of three kinds of systems: physical, ecological and socio-economical.