

Jacek Juzwiszyn

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

PRĘDKOŚCI WIROWANIA WEKTORÓW EKONOMICZNYCH NA STOŻKACH PRECESJI

Streszczenie: W komentarzach analityków giełdowych często pojawiają się wypowiedzi dotyczące trendów bocznych, skręcania rynku itp. Wypowiedzi te zwykle bywają podparte geometrycznymi dwuwymiarowymi wykresami giełdowymi, na których owe skręcenia są kompletnie niedostrzegalne. Zjawisko skręcenia rynku uwidacznia się dopiero w przestrzeni trójwymiarowej. W długich przedziałach czasu wirujące wektory giełdowe wyznaczają trajektorie wirowe bardzo nieregularne. Dodatkowo – różniące się kierunkami skreću, co znacznie komplikuje próbę opisu ruchu wirowego trendu, jakim w przyszłości może poruszać się wektor x . Chaotyczny charakter tych trajektorii wskazuje na rodzaj ruchu, który można określić mianem tzw. precesji nieregularnej.

Słowa kluczowe: zmodyfikowany model pajęczynowy, stożki precesji, nieregularna precesja rynkowa.

1. Wstęp

Jednym z dwuwymiarowych modeli równowagi ekonomicznej jest tzw. model pajęczyny (*cobweb model*)¹. Okazuje się, że w przypadku „dźwignięcia wymiaru o jeden” do przestrzeni trójwymiarowej $R^3_+ = P \times Q \times T$ trajektorie, jakie tworzą wektory ekonomiczne o składowych: (cena, ilość, czas); (inflacja, bezrobocie, czas), są trajektoriami wirowymi. Płaskie zygzyki widoczne na dwuwymiarowych wykresach modeli pajęczynowych są ortogonalnymi rzutami owych trajektorii wirowych. Kształty ekonomicznych trajektorii wirowych wyglądają tak, jakby były one nawijane na powierzchni bocznej nieregularnych brył obrotowych. Obserwacja kinematyki (wyznaczanych przez rynek nieregularnych brył) wskazuje, że wirują one w R^3_+ tak, jakby były one poddawane prawom ruchu nieregularnej precesji.

¹ Stworzony przez trzech niezależnych twórców: T. Hanau, R. Ricciego, J. Tinbergena.

2. Zmodyfikowany model pajączynowy

W modelu pajączyny przyjmuje się założenie, że konsumenci na dane zdarzenie reagują dokładnie w chwili jego zajścia na rynku. Producenci natomiast reagują na zmiany rynkowe po pewnym czasie, tj. z pewnym opóźnieniem. W skrócie – model pajączynowy wyjaśnia procesy dostosowawcze w warunkach opóźnionej reakcji producentów na zmiany cen. Zmiany, o których mowa, występują wówczas, gdy amplitudy następujących po sobie faz wykazują tendencje spadkowe, w efekcie czego drgania cyklu przyjmują coraz mniejsze wartości, zmierzając do zera. W przypadku tzw. oscylacji tłumionych współczynnik elastyczności cenowej popytu jest większy od współczynnika elastyczności cenowej podaży (krzywa popytu jest bardziej elastyczna od krzywej podaży). Jeżeli np. będziemy brać pod uwagę fakt, że rynek jakiegoś produktu x został wytracony ze stanu równowagi, punkt przecięcia się krzywych popytu i podaży E_0 zacznie zmieniać swoje położenie. Dzieje się tak dlatego, że cena produktu x wzrosła do poziomu P_0 przy ustalonej wielkości podaży i popytu, zrealizowanej na poziomie Q_0 . Wysoka cena produktu x zwykle w takich sytuacjach skłania producentów do zwiększenia wielkości produkcji dobra x w następnym okresie do poziomu Q_1 . Przy cenie produktu x na poziomie P_0 powstaje nadwyżka wielkości podaży nad wielkością popytu, co w efekcie doprowadza do obniżenia ceny produktu x do poziomu P_1 . Punkt o współrzędnych (P_1, Q_1) wyznaczy nowe położenie równowagi chwilowej. Zmniejszenie wielkości ceny nakłoni producentów do zmniejszenia produkcji w następnym okresie do poziomu Q_2 . W takim przypadku mamy do czynienia z niedoborem wielkości podaży względem wielkości popytu, w sytuacji takiej cena dobra x wzrośnie do poziomu P_2 i nastąpi przesunięcie położenia punktu równowagi chwilowej do położenia (P_2, Q_2) . Proces wirowania położenia punktów równowag chwilowych trwa tak długo, aż nie ulegnie krótkotrwałej stabilizacji $(P_n, Q_n) = E_n$. Proces wirowania wektora $x = (p_i, q_i, t_i)$ jest procesem stałym, praktycznie oznacza to, że stany równowag chwilowych są krótkotrwałe. Stabilizowanie się położenia punktu (P_n, Q_n) może być opisane zmiennymi położeniami wykresów funkcji popytu i podaży. W celu uproszczenia analizy procesu płaskiego wirowania wektora x przyjmijmy, że funkcje popytu $d(p_i)$ i podaży $s(p_i)$ są funkcjami liniowymi, gdzie zmienną jest cena p_i , tj. o produkcie (wektorze) x myślimy, że jest to produkt giełdowy (akcja giełdowa lub indeks giełdowy). Ceny i wolumeny tak rozumianego wektora x podlegają bardzo dynamicznym zmianom.

$$\begin{aligned} d(p_i) &= a_d p_i + b_d, \\ s(p_i) &= a_s + p_i + b_s, \\ \frac{dp}{dt} &= p'(t) = c_w [d(p_i) - s(p_i)]. \end{aligned}$$

Załóżmy dodatkowo, że: $a_d < 0$, $a_s > 0$, $b_d > b_s$ i $c_w > 0$.

Trzecie z powyższych równań określane jest mianem postulatu cenowego Walrasa [Juzwiszyn, Rybicki 2006]. Jest to niejednorodne równanie różniczkowe o stałych współczynnikach. Parametr c_w może być nazywany parametrem wirowego dynamizmu rynku. Duża wartość tego parametru świadczy o szybkich zmianach dynamiki cen i wielkości produkcji dobra (por. [Juzwiszyn 2001, s. 133-139]).

Wiadomo, że według Walrasa rynek jest w równowadze ekonomicznej, gdy istnieje równość między popytem i podażą. Ta pozornie statyczna definicja w istocie oparta jest na założeniu o dynamicznym charakterze – postulującym istnienie „sił”, które działają na takie zmienne ekonomiczne, jak ceny i ilości pewnych dóbr. Wzrosty lub spadki cen w postulatcie Walrasa wyrażają nierówności:

$$\frac{dp}{dt} = p'(t) > 0 \Leftrightarrow d(p_t) > s(p_t),$$

$$\frac{dp}{dt} = p'(t) < 0 \Leftrightarrow d(p_t) < s(p_t),$$

$$\frac{dp}{dt} = p'(t) = 0 = p_e \Leftrightarrow d(p_t) = s(p_t).$$

Rynek jest zatem w równowadze dla ceny równowagi p_e , dla której $d(p_e) = s(p_e)$.

Czyli $a_d p_e + b_d = a_s p_e + b_s$, stąd $p_e = \frac{b_s - b_d}{a_d - a_s}$.

Funkcja ceny w modelu Walrasa jest postaci:

$$p(t) = (p_0 - p_e) \exp[c_w(a_d - a_s)t] + p_e, \quad p(0) = p_0 \quad (1)$$

(jeżeli $p_0 = p_e$, to funkcja $p(t) = p_e = \text{const.}$). Jeśli natomiast współczynniki kierunkowe liniowych funkcji popytu i podaży spełniają nierówności:

$$a_d < 0, \quad a_s > 0 \quad \text{i} \quad c_w > 0, \quad \text{to} \quad c_w(a_d - a_s) < 0,$$

wówczas

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp[c_w(a_d - a_s)t] = 0.$$

Stąd

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = (p_0 - p_e) \lim_{t \rightarrow \infty} \exp[c_w(a_d - a_s)t] + p_e = p_e.$$

Wartość granicy funkcji ceny wyjaśnia tzw. dostosowywanie się rynku w czasie do poziomu równowagi chwilowej (por. [Juzwiszyn, Rybicki 2006, s. 55-87]). W modelu rynku zrównoważonego ($d(p_e) = s(p_e)$) powyższa relacja graniczna ma następującą interpretację ekonomiczną. Jeśli cena p_e odbiegała w pewnym okresie od

wyznaczonego poziomu równowagi $p_0 \neq p_e$, to w wyniku oddziaływania rynku będzie ona samoczynnie dążyć do tego poziomu. Funkcja ceny (1) w modelu Walrasa jest rozwiązaniem niejednorodnego równania różniczkowego o stałych współczynnikach (por. [Żylicz 1986, s. 214-231]):

$$\frac{dp}{dt} = p'(t) = c_w(a_d - a_s)p(t) + c_w(b_d - b_s),$$

przy warunkach

$$a = c_w(a_d - a_s) < 0,$$

$$b = c_w(b_d - b_s) > 0, \quad (2)$$

$$p_e = \frac{-b}{a}.$$

Niejednorodne równanie różniczkowe funkcji ceny jest postaci

$$\frac{dp}{dt} = p'(t) = ap(t) + b.$$

Jego rozwiązanie przedstawia ciąg poniższych równości:

$$p(t) = \int b \exp(-\int adt) dt \exp(\int adt) + c \exp(\int adt),$$

$$p(t) = b \int \exp(-at) dt \exp(at) + c \exp(at),$$

$$p(t) = \frac{-b}{a} \exp(-at) \exp(at) + c \exp(at),$$

$$p(t) = \frac{-b}{a} + c \exp(at),$$

$$p(t_0) = p_0, \quad p_0 = c \exp(at_0) - \frac{b}{a},$$

$$\left(p_0 + \frac{b}{a}\right) \exp(-at_0) = c, \quad p(t) = \left(p_0 + \frac{b}{a}\right) \exp(-at_0) \exp(at) - \frac{b}{a},$$

$$p(t) = \left(p_0 + \frac{b}{a}\right) \exp a(t - t_0) - \frac{b}{a}. \quad (3)$$

Jeżeli $t_0 = 0$ i $P(0) = P_0$, to rozwiązanie równania (3) jest postaci:

$$p(t) = \left(p_0 + \frac{b_d - b_s}{a_d - a_s}\right) \exp c_w(a_d - a_s)t - \frac{b_d - b_s}{a_d - a_s}.$$

Rozwiązanie różniczkowego równania jednorodnego ceny

$$\frac{dp}{dt} = p'(t) - ap(t) = 0 \quad (4)$$

jest postaci $p(t) = p_0 \exp(at)$. Łatwo w tym miejscu zauważyć podobieństwo między rozwiązaniem równania (4) i równaniem krzywej zwanej spiralą logarytmiczną, która zadana we współrzędnych biegunowych (r, ϕ) jest określona równaniem

$$r(\phi) = a \exp(\lambda\phi),$$

gdzie: $a, \lambda > 0$, przy czym $\lambda = ctg\psi$, ψ jest stałym kątem, jaki tworzy dowolna półprosta wychodząca z bieguna spirali ze styczną. Jeśli uwzględnimy warunki (2), równanie funkcji ceny przyjmuje postać równania (1). Nierówności (2) są spełnione w modelu wirowo-spiralnym. Oznacza to, że niezależnie od tego, jak duża jest różnica między p_0 a p_e , to zawsze spełniona jest równość graniczna $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p_e$. Cena wytracona z poziomu równowagi p_e powraca, wirując w czasie do poziomu równowagi.

Załóżmy, że istnieją dwie różne funkcje $u(t)$ i $v(t)$, które są rozwiązaniami równania różniczkowego $\frac{dp}{dt} = p'(t) = ap(t) + b$ z warunkami początkowymi $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0$:

$$u(t) = (u_0 - p_e) \exp[c_w(a_d - a_s)t] + p_e,$$

$$v(t) = (v_0 - p_e) \exp[c_w(a_d - a_s)t] + p_e.$$

Granica bezwzględnej różnicy tych funkcji równa jest

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u_0 - v_0| \exp[c_w(a_d - a_s)t] = 0.$$

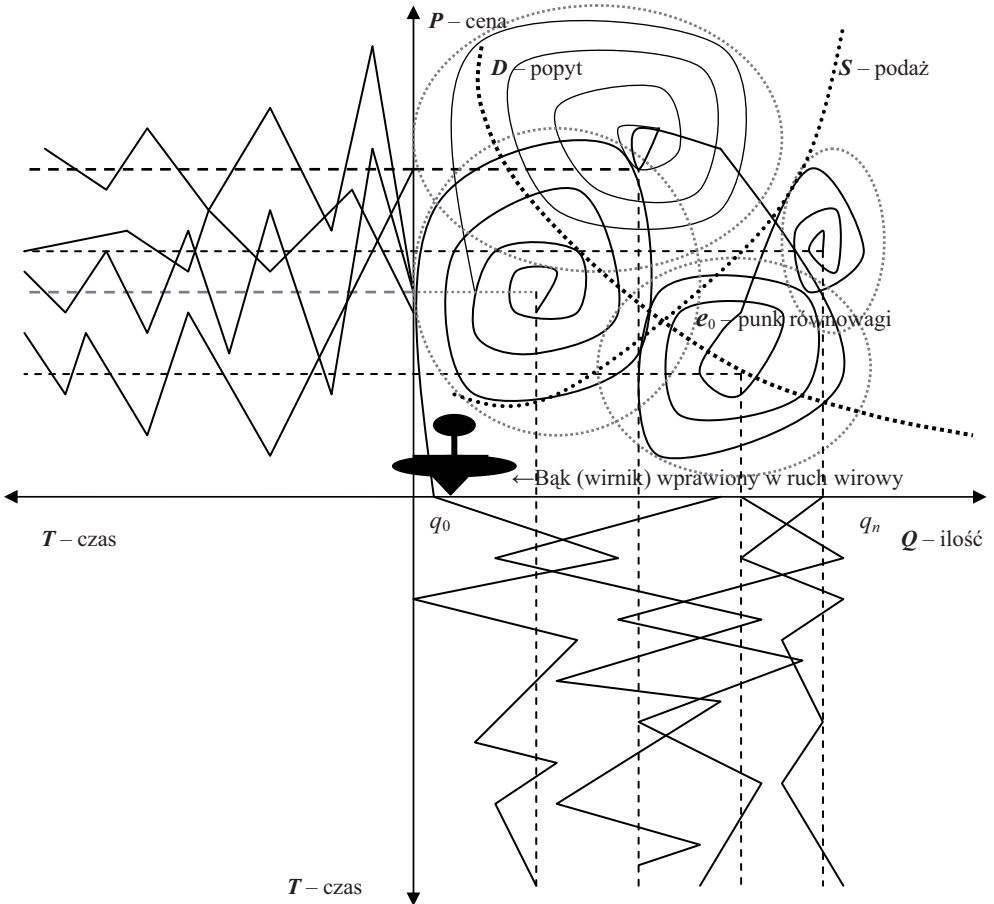
Zatem każde dwa rozwiązania z upływem czasu zblizają się do siebie – ich różnica dużych wartości t maleje do zera. Prawdziwe jest też jednostajne (słabe) oszacowanie tej różnicy

$$|u(t) - v(t)| = |u_0 - v_0| \exp[c_w(a_d - a_s)t] \leq |u_0 - v_0|, \forall t \geq 0,$$

tzn. że różnica wartości funkcji $u(t_0)$ i $v(t_0)$ w punkcie początkowym determinuje wielkość ich różnicy na całej dodatniej półosi czasowej. Dodatkowo można zauważyć, że jeśli $a = c_w(a_d - a_s) > 0$ (jest to tzw. przypadek rynku burzliwego), to dla $p_e \neq p_0$ nie istnieje skończona granica $\lim_{p \rightarrow \infty} p(t)$; wtedy nawet niewielka różnica

między u_0 i v_0 spowoduje znaczny wzrost wartości bezwzględnej różnicy $|u(t) - v(t)|$, gdy $t \rightarrow \infty$. W takiej sytuacji rynek będzie wykazywał bardzo dużą „turbulencyjną” dynamikę cen wektora x (por. [Tadion 1999, s. 13-35]).

Na rysunku 1 został przedstawiony zmodyfikowany model pajęczyny. Jeśli spojrzymy na układy płaskich trajektorii wirowych w dłuższej perspektywie czasowej, to łatwo skojarzymy, że ich kształty są rzutami ortogonalnymi helis nawiniętych na różne stożki precesji regularnej, jakie tworzą swobodnie wirujące ciała sztywne.

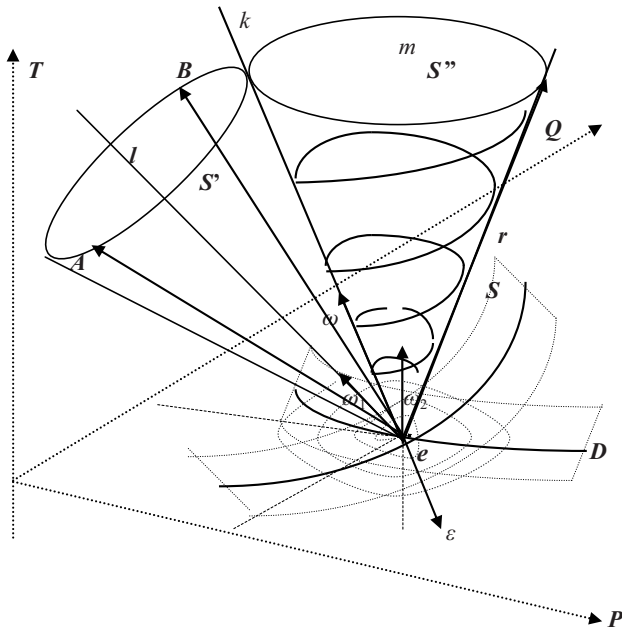


Rys. 1. Trajektorie wirowo-spiralne wyznaczone kinematyką wektora x w zmodyfikowanym modelu pajęczynowym

Źródło: opracowanie własne.

3. Stożki precesji. Nieregularna precesja rynkowa

Jeśli ciało sztywne porusza się w ten sposób, że ruch chwilowy jest w każdej chwili złożeniem dwóch obrotów wokół dwóch przecinających się osi, z których pierwsza l jest nieruchoma w przestrzeni, druga zaś m ma stałe położenie w ciele, przy czym prędkości kątowe $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ tych obrotów są stałe co do wielkości, to taki ruch ciała sztywnego nazywamy precesją regularną (zob. rys. 2). Ponieważ z założenia osie l i m przecinają się w punkcie e , więc ruch chwilowy ciała sztywnego jest obrotem z prędkością kątową $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ wokół osi k przechodzącej przez punkt przecięcia osi l i m . Zauważmy, że ruch chwilowy osi m jest obrotem chwilowym wokół osi l z prędkością kątową $\bar{\omega}_1$ (obrót osi m wokół samej siebie nie wchodzi bowiem w rachubę). Zatem oś m obraca się wokół osi l ze stałą prędkością kątową $\bar{\omega}_1$. Punkt przecięcia e obu osi jest więc nieruchomy i kąt zawarty pomiędzy osiami l i m jest stały. Wynika stąd, że wektor $\bar{\omega}$, a więc i oś obrotu chwilowego k , tworzy stałe kąty z osiami l i m . Oś k zakreśla w przestrzeni obrotowy stożek precesji $S^?$. Ślad osi k w ciele jest również stożkiem obrotowym $S^?$. Tak więc: stożki osi obrotów chwilowych, stały i ruchomy, są stożkami obrotowymi o osiach l i m .



Rys. 2. Stożki precesji regularnej. Obroty ekonomicznego wektora $x = (p_i, q_i, t_i)$ o składowych: cena, ilość, czas, wokół linii równowagi ekonomicznej wyznaczonej i przechodzącej przez oś stożka e w $R^3_+ = P \times Q \times T$. Model równowagi wirowej wektora x

Źródło: opracowanie własne.

Wektor przyspieszenia kąowego $\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}$ możemy wyznaczyć, biorąc pod uwagę fakt, że $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$, łatwo wówczas dojdziemy do wniosku, że $\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2$ (gdyż $\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_1 = 0$). Wektor przyspieszenia kąowego $\vec{\varepsilon}$ jest oczywiście wektorem prostopadłym do wektorów prędkości kąowych: $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$. Znając położenie chwilowej osi obrotu i składowe prędkości kąowej ciała sztywnego wokół tej osi, możemy wyznaczyć wektor prędkości liniowej dowolnego punktu znajdującego się na powierzchni ciała sztywnego (por. [Banach 1947, s. 350-357]).

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_p & \omega_q & \omega_t \\ p & q & t \end{vmatrix}.$$

Wiadomo, że wektor przyspieszenia liniowego $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ jest równy sumie geometrycznej wektora przyspieszenia precesyjnego $\vec{a}_1 = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}$ i wektora przyśpieszenia doosiowego $\vec{a}_2 = \vec{\varepsilon} \times \vec{V} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{V}$. Mając powyższe na

uwadze, wyobraźmy sobie, że stożek kołowy o kącie wierzchołkowym $2\alpha = \frac{\pi}{3}$ i długości tworzącej ściany bocznej równej h toczy się bez poślizgu po poziomej płaszczyźnie OPQ . Oś stożka obraca się ze stałą prędkością kąową precesji wokół pionowej osi OT . Dla stożka tak poruszającego się po płaszczyźnie można wyliczyć zarówno prędkości, jak i przyspieszenia liniowe punktów A i B . Załóżmy dodatkowo, że wierzchołek toczącego się swobodnie stożka znajduje się w punkcie $OPQT$. Długości wektorów OA i OB przyjmują odpowiednio wartości $\vec{r}_A = \frac{1}{2}h(\vec{j} + \vec{k}\sqrt{3})$, $\vec{r}_B = \frac{1}{2}h(\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}\sqrt{3})$, wartości wektorów prędkości kąowych równają się odpowiednio: $\vec{\omega}_1 = \omega_1\vec{k}$, $\vec{\omega} = -\omega_1\vec{j}\sqrt{3}$. Zatem prędkość ruchu wektora A

$$\vec{V}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} \omega_1\sqrt{3}\frac{h}{2} = -\frac{3}{2}\omega_1h\vec{i}, \quad V_A = -\frac{3}{2}\omega_1h.$$

Podobnie można wyliczyć prędkość ruchu wektora B

$$\vec{V}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{vmatrix} \omega_1\sqrt{3}\frac{h}{2} = \omega_1h\left(-\frac{3}{4}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{k}\sqrt{3}\right), \quad V_B = \frac{1}{4}\omega_1h\sqrt{21}.$$

Wartość wektora przyspieszenia kąowego $\vec{\varepsilon}$ stożka wynosi

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \omega_1^2 \sqrt{3} = \omega_1^2 \vec{i} \sqrt{3}, \quad \varepsilon = \omega_1^2 \sqrt{3}.$$

Wartości wektorów przyspieszeń liniowych punktów A i B wynoszą odpowiednio:

$$\vec{a}_{1A} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} \omega_1^2 \sqrt{3} \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \omega_1^2 h (-3\vec{j} + \vec{k} \sqrt{3}),$$

$$\vec{a}_{2A} = \vec{\omega} \times \vec{V}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \omega_1^2 \sqrt{3} \frac{3h}{2} = -\frac{3}{2} \omega_1^2 h (\vec{i} + \vec{k} \frac{\sqrt{3}}{2}),$$

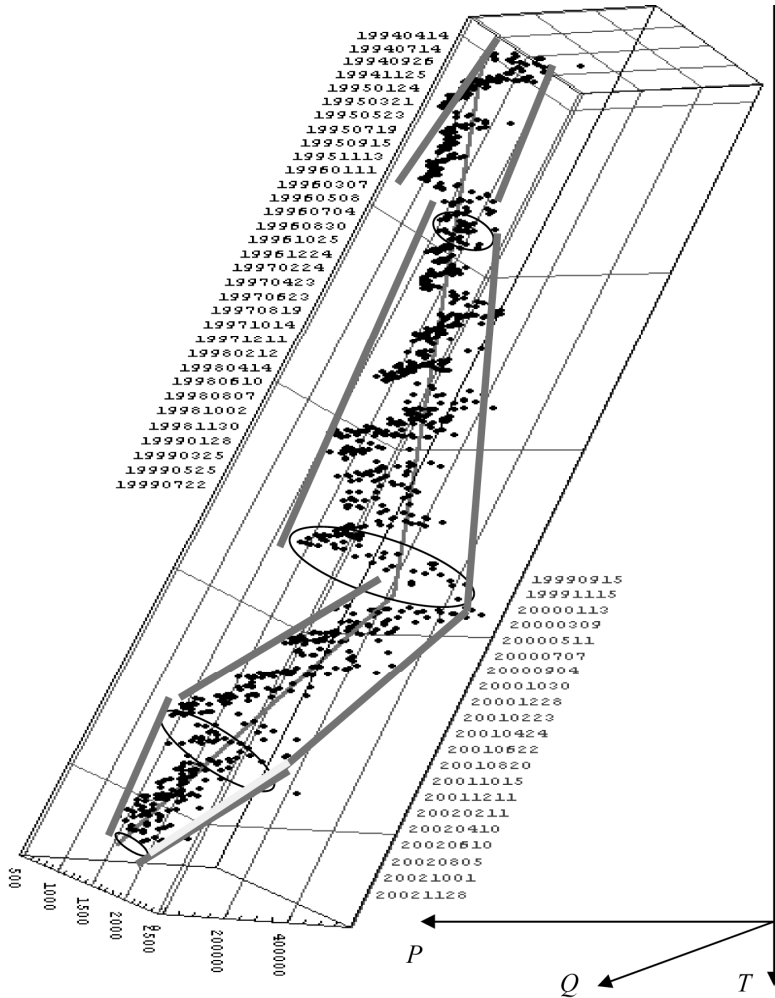
$$\vec{a}_A = \vec{a}_{1A} + \vec{a}_{2A} = -\omega_1^2 l \left(\frac{3}{2} \vec{j} + \vec{k} \sqrt{3} \right),$$

$$\vec{a}_{1B} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \omega_1^2 \sqrt{3} \frac{h}{2} = \frac{3}{4} \omega_1^2 h (-\vec{j} + \vec{k} \sqrt{3}),$$

$$\vec{a}_{2B} = \vec{\varepsilon} \times \vec{V}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{-3}{4} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \omega_1^2 h \sqrt{3} = \frac{-3}{2} \omega_1^2 h (\vec{i} + \vec{k} \frac{\sqrt{3}}{2}),$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{1B} + \vec{a}_{2B} = -\omega_1^2 l \left(\frac{3}{2} \vec{i} + \vec{j} \frac{3}{4} \right).$$

Spójrzmy jeszcze przez chwilę na trajektorię wirową w $\mathbb{R}^3_+ = P \times Q \times T$, jaką wyznaczył wektor x (indeksu WIG20) o składowych (p_i, q_i, t_i) .



Rys. 3. Trójwymiarowa trajektoria wirowa indeksu WIG20 GPW w Warszawie, wyznaczająca powierzchnie boczne brył obrotowych (stożków)

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych: www.bossa.pl z okresu od 14.04.1994 r. do 26.11. 2002 r.

4. Zakończenie

Łatwe do obliczenia wartości zarówno prędkości, jak i przyspieszeń liniowych dowolnych punktów A i B leżących na powierzchni stożka precesji regularnej, wyznaczonego przez oś obrotu wirującego ciała sztywnego, mogą być wykorzystywane tylko wówczas, jeśli trajektoria wirowa wyznaczy stożek w R^3_+ . Z sytuacją taką, w której trajektoria wirowa wektora x wyznacza idealną powierzchnię stożka, mamy

jednak do czynienia niezwykle rzadko. Powierzchnie wyznaczone przez trajektorie wirową są zbliżone do powierzchni stożków. W długich przedziałach czasu wirujące wektory wyznaczają trajektorie wirowe bardzo nieregularne. Dodatkowo – różniące się kierunkami skrętu, co znacznie komplikuje próbę opisu ruchu wirowego trendu, jakim w przyszłości może poruszać się wektor x . Chaotyczny charakter tych trajektorii wskazuje na rodzaj ruchu, który można określić mianem tzw. precesji nieregularnej, oczywiście precesji nieregularnej ciała nieszywnego! Powierzchnia boczna bryły, która powstaje w wyniku chaotycznego, z założenia gładkiego wirowania wektora x , ma kształt nieregularnego giędkowego „rękawa” i jest pełna przeróżnych obszarów wklęsłości i wypukłości. Złożoność przedstawionej powyżej dynamiki chaotycznego wirowania wektora x wydaje się bardziej skomplikowana niż problem stabilności naszego Układu Słonecznego, którego rozwiązania podjął się Poincare. Badając złożoność ruchu, zrozumiał, iż popełnił poważną pomyłkę w nagrodzonej przez króla Szwecji Oskara II pracy dotyczącej mechaniki nieba. Błąd został szybko poprawiony. Tym samym pojęcie chaosu zostało lepiej zrozumiane, a sam proces lepszego opisu chaosu trwa po dziś dzień.

Literatura

- Banach S. (1947), *Mechanika*, Spółdzielnia Wydawnicza Czytelnik, Warszawa.
- Jakimowicz A. (2010), *Źródła niestabilności struktur rynkowych*, PWN, Warszawa.
- Juzwiszyn J. (2001), *O obrotach sfer finansowych*, *Ekonomia Matematyczna* 5, red. A. Smoluk, AE, Wrocław.
- Juzwiszyn J., Rybicki W. (2006), *Niektóre modele matematyki ubezpieczeniowej i finansowej. Praktyka statystyki*, AE, Wrocław.
- Tadion J. (1999), *Rozszyfrować rynek*, Wydawnictwo WIG Press, Warszawa.
- Żylicz T. (1986), *Wykłady z równań różniczkowych i różnicowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa.

SPEEDS OF WHIRLING OF ECONOMIC VECTORS ON CONES OF THE PRECESSION

Summary: In commentaries of Stock Exchange analysts there are statements concerning side trends, market screwing, etc. These statements are usually based on geometrical two-dimensional Stock Exchange graphs, on which the screwing is not discernible. The phenomenon of screwing the market is seen only in three-dimensional space. In long time intervals, whirling stock exchange vectors outline rotary trajectories in a very irregular way. Additionally, they differ in directions of the turn which complicates the attempt of the description of a gyratory movement of the trend very much, with which x vector can move in the future. Chaotic character of these trajectories shows the type of the move which can be described as t. relation of the irregular precession.

Key words: modified model cobwebby, cones of precession, precession irregular market.