

**Alina Bojan**

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

---

## WYKORZYSTANIE MODELI WARUNKOWEJ HETEROSKEDASTYCZNOŚCI DO WYZNACZANIA PRAWDOPODOBIENSTWA NIEWYPŁACALNOŚCI SPÓŁEK ZA POMOCĄ ZPP ORAZ KMV

---

**Streszczenie:** W artykule scharakteryzowano główne założenia stosowane w stosunkowo nowej i niezbadanej metodzie mierzenia prawdopodobieństwa niewypłacalności spółek, opartej na modelu Zero-Price Probability. Do wyznaczenia PD używa on możliwych trajektorii cen akcji opisanych procesem GARCH, a otrzymanych poprzez symulacje Monte Carlo. Na przykładzie wybranych spółek sprawdzono możliwości predykcyjne ZPP, a otrzymane wyniki porównano z rezultatami uzyskanymi z popularnego modelu KMV. Pozwoliło to odpowiedzieć na dwa zasadnicze pytania: czy nowa metodologia zaproponowana przez Fantazziniego prowadzi do dokładniejszych oszacowań niż KMV i czy w ogóle może być ona przydatnym narzędziem do pomiaru ryzyka na rynku polskim.

**Słowa kluczowe:** ZPP, modele GARCH, KMV, prawdopodobieństwo upadku, mierzenie ryzyka kredytowego.

### 1. Wstęp

Ocena prawdopodobieństwa niewypłacalności przedsiębiorstw jest jednym z częściej podejmowanych zagadnień w obszarze finansów. Spektakularne upadki znanych, dużych firm jedynie wzmagają zainteresowanie tym tematem i przyczyniają się do dalszego rozwoju metodologii mierzenia ryzyka kredytowego.

Bezspornie przełomowy w tej dziedzinie okazał się artykuł Roberta Mertona z 1974 roku, w którym zaproponował, aby wartość kapitału własnego była traktowana jako opcja kupna na aktywa firmy. Pociągnęło to za sobą kolejne prace, które do mierzenia ryzyka kredytowego zaczęły wykorzystywać obserwowane na rynkach finansowych ceny akcji. Jednym z najbardziej znanych jest model KMV, krytykowany jednak między innymi ze względu na problem z oszacowaniem zmienności aktywów firmy oraz mało realne założenie o log-normalnym rozkła-

dzie cen akcji. Tych wad nie ma model Zero-Price Probability, który zaproponowali D. Fantazzini, M.E. De Giuli i M. Maggi, bazujący jedynie na cenach akcji.

W artykule scharakteryzowano główne założenia stosowane w obu wspomnianych modelach, przy czym największy nacisk położono na przedstawienie ZPP, który jest stosunkowo nową i niezbadaną metodą. Odchodzi się w nim od teorii wyceny opcji modelem Blacka-Scholesa. Do wyznaczenia prawdopodobieństwa upadku Zero-Price Probability model używa zasymulowanych za pomocą metody Monte Carlo i opisanych procesem GARCH możliwych trajektorii kształtowania się cen akcji. Głównym celem przeprowadzonych badań jest ocena możliwości predykcyjnych obu modeli: KMV oraz ZPP. Porównanie wyników pozwoli również odpowiedzieć na główne pytanie, czy nowa metodologia, wykorzystująca modele warunkowej heteroskedastyczności, zaproponowana przez Fantazziniego, może prowadzić do dokładniejszych oszacowań niż KMV.

## 2. Model KMV

Model KMV jest jedną z najbardziej popularnych metod służących do oceny niewypłacalności przedsiębiorstw notowanych na giełdzie. Powstał w 1989 roku na gruncie podejścia zaproponowanego przez R. Mertona, który zauważył, że kapitał własny może być traktowany jako opcja kupna na aktywa firmy [Saunders 2002].

Podstawowym krokiem w metodologii KMV jest estymacja rynkowej wartości firmy oraz jej zmienności z wykorzystaniem do tego celu danych o cenie i zmienności kapitału własnego, a także o wartości długu. Aby wyznaczyć interesujące zmienne, stosuje się tu równanie wyceny opcji Blacka-Scholesa:

$$E = AN(d_1) - De^{-rT}N(d_2),$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{A}{D}\right) + \left(r + \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{A}{D}\right) + \left(r - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}} = d_1 - \sigma_A\sqrt{T},$$

gdzie:  $E$  – wartość rynkowa kapitału własnego,  
 $A$  – wartość rynkowa aktywów firmy,  
 $\sigma_A$  – zmienność rynkowej wartości aktywów firmy,  
 $D$  – wartość długu,  
 $r$  – stopa wolna od ryzyka,  
 $T$  – czas do wykupu długu firmy.

Aby rozwiązać problem zbyt dużej liczby niewiadomych, wykorzystuje się dodatkowo teoretyczną relację, która istnieje pomiędzy fluktuacjami wartości kapitału własnego bezpośrednio obserwowalnymi na rynku a nieobserwowalną zmiennością w wartości aktywów [Crosbie, Bohn 2003]:

$$\sigma_E E = \frac{\partial E}{\partial A} \sigma_A A = N(d_1) \sigma_A A.$$

Metodą iteracyjną można wówczas oszacować implikowaną wartość aktywów firmy, a także ich zmienność, służące następnie do wyznaczenia prawdopodobieństwa niewypłacalności (Probability of Default) [Wójciak 2007]:

$$PD = P \left( \varepsilon \leq \frac{\ln\left(\frac{A_0}{B}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma_A}{2}\right)t}{\sigma_A \sqrt{t}} \right) = P(\varepsilon \leq DD) = N(DD),$$

gdzie:  $\sigma_E$  – zmienność kapitału,

$DD$  – Distance to Default,

$B$  – Default Point (zobowiązania krótkoterminowe + połowa długoterminowych).

### 3. Model ZPP

Model ZPP jest stosunkowo nową metodą służącą do oceny wartości firmy oraz prawdopodobieństwa jej upadku. Zaproponowali go D. Fantazzini, M.E. De Giuli i M. Maggi w drugiej połowie 2007 roku jako alternatywę dla modelu KMV. Zgodnie z tą metodologią Probability of Default można wyznaczyć jako:

$$P_r [E_T \leq 0] \text{ lub } P_r [P_T \leq 0],$$

gdzie  $E_T$  jest równe iloczynowi liczby akcji i ich ceny.

Podobnie jak w modelach strukturalnych punkt niewypłacalności (Point of Default) jest równoważny z niemożnością pokrycia długu aktywami firmy w momencie jego zapadalności. Jednak do zalet ZPP należy:

- odejście od problemu nieobserwowalnej wartości rynkowej aktywów oraz ich zmienności;
- nie jest wymagane dokonywanie założeń odnośnie do zachowania się aktywów (nie wykorzystuje rozkładu log-normalnego jak wszystkie strukturalne modele, ale najbardziej odpowiedni dla analizowanych danych);
- możliwość otrzymania prawdopodobieństwa niewypłacalności na dowolny moment w czasie (nie jest uzależniony od wartości księgowych).

ZPP szacuje Distance to Default właśnie na podstawie wartości kapitału własnego, który to jest bezpośrednio obserwowalny w przypadku firm znajdujących się na giełdzie.

Problem braku informacji na temat rynkowej wartości aktywów rozwiązany został poprzez traktowanie ich jako warunkowego roszczenia akcjonariuszy i obligatariuszy na odpowiednie instrumenty podstawowe znajdujące się w obrocie ryn-

kowym, a więc: akcje oraz obligacje [Fantazzini i in. 2007]. Wartość takiego rozszczenia przedstawić można w następujący sposób:

$$G(g(S_1(T), S_2(T)); T),$$

gdzie:  $G(\cdot)$  – jednowymiarowa funkcja wypłaty odnosząca się do instrumentu pochodnego,

$g(\cdot)$  – dwuwymiarowa funkcja opisująca, w jaki sposób oba instrumenty podstawowe generują przepływy pieniężne,

$S_i(T)$  – cena papieru wartościowego,  $i = 1$  oznacza kapitał,  $i = 2$  dotyczy obligacji,

$T$  – termin zapadalności (*maturity*).

Na tej podstawie wartość firmy wyznacza się za pomocą równania:

$$A_T = G(E_T, B_T; T) = \max(E_T + B_T, 0) I_{[(E_T \geq 0), (0 \leq B_T \leq D)]},$$

gdzie:  $B_T$  – cena obligacji w czasie  $T$ ,

$E_T$  – to cena akcji w czasie  $T$ ,

$I$  – współczynnik, który przyjmuje wartość 1, gdy  $E_T \geq 0$  i  $0 \leq B_T, D$ , w innym wypadku równa się 0,

$D$  – wartość długu.

Ponieważ rozwiązanie tego równania jest niezwykle skomplikowane i dodatkowo utrudnione przez takie czynniki, jak brak normalności rozkładów lub płynności na rynku obligacji, model korzysta z teorii *copula*. Funkcję wypłaty rozważanego rozszczenia warunkowego wyrazić można za pomocą formuły:

$$A_t = g(E_t, B_t; T) = P(t, T) \int_0^\infty \int_0^\infty G(E_T, B_T; T) q(E_T, B_T | F_T) dE_T dB_T,$$

gdzie  $q(E_T, B_T | F_T)$  to funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa neutralnego względem ryzyka, a  $P(t, T)$  to niezależny od  $E_T$  i  $B_T$ , wolny od ryzyka, czynnik dyskontujący [Fantazzini i in. 2007].

Stosując twierdzenie Sklara, powyższe równanie przedstawić można jako:

$$A_t = P(t, T) \int_0^\infty \int_0^\infty G(E_T, B_T; T) c_{E, B}(F_E, F_B | F_T) f_E(E | F_T) f_B(B | F_T) dE_T dB_T,$$

gdzie  $c_{E, B}$  to funkcja gęstości *copula*, a  $f_E$  i  $f_B$  to gęstości marginalne dla cen akcji i obligacji.

Poważnym utrudnieniem w tym podejściu jest jednak niedostępność instrumentów pochodnych na obligacje większości przedsiębiorstw oraz brak płynności na rynku samego instrumentu bazowego, co utrudnia wyznaczenie prawdopodobień-

stwa neutralnego względem ryzyka. Dlatego też, aby sprowadzić problem do sytuacji rzeczywistej, zakłada się obiektywny łączny rozkład prawdopodobieństwa dla akcji i obligacji. W przypadku braku płynności na rynku obligacji lub też braku ich emisji ceny obligacji można wyrazić jako stopę procentową z ryzykiem. Wówczas poprzednia funkcja na wycenę wartości firmy może być przekształcona do postaci:

$$A_t' = P(t, T) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} G(E_T, B_T(i_T); T) c_{E,i}(F_E, F_i | F_t) f_E(E | F_t) f_i(i | F_t) dE_T di_T.$$

Jeśli założymy dodatkowo, że zarówno  $B_T$ , jak i  $P_i(t, T)$  są znane w czasie  $t$ , to do wyznaczenia wartości firmy potrzebny jest jedynie rozkład cen akcji:

$$A_t'' = P_i(t, T) \int_0^{\infty} G(E_T, B_T; T) f_E(E | F_t) dE_T,$$

a korzystając z metody Monte Carlo równanie na wartość spółki można ostatecznie przedstawić jako:

$$\tilde{A}_t = P_i(t, T) \frac{1}{N} \sum_i^N G(\tilde{E}_{i,T}, B_T; T).$$

Cała metodologia opiera się więc na wykorzystaniu cen akcji i obligacji dla danej firmy. Wymaga to istnienia płynnego rynku obligacji korporacyjnych, co jest sytuacją rzadko spotykaną. W przypadku Polski rynek ten praktycznie nie istnieje, więc ocena ryzyka takich spółek jest niemożliwa.

Jeśli celem analizy jest jedynie oszacowanie prawdopodobieństwa niewypłacalności firmy, zastosować można ostatnią uproszczoną wersję, która bazuje jedynie na cenach akcji.

Stosuje się w niej następujące założenia:

- Prawdopodobieństwo niewypłacalności to prawdopodobieństwo, że cena spadnie poniżej poziomu 0.
- $E_T$  jest z przedziału  $(-\infty; \infty)$ , zamiast więc logarytmicznej stopy zwrotu, analizowane są zmiany w poziomie cen  $D_t = P_t - P_{t-1}$ .

Podjęcie to dopuszcza możliwość wstąpienia negatywnej wartości zarówno aktywów, jak i kapitału własnego w ujęciu księgowym. Aby było to możliwe, za pomocą ZPP modeluje się właśnie różnice w poziomie cen, zamiast stosować ogólnie przyjęte podejście wykorzystujące stopy zwrotu. Wówczas cena akcji  $P_T$  definiowana jest jako zmienna ucięta:  $P_T = \max(P_T, 0)$ .

Określenie procesu kształtowania się cen akcji badanego przedsiębiorstwa jest pierwszym, podstawowym krokiem w modelu ZPP.

Rozważa się tu warunkowy model dla różnicy w poziomach cen:

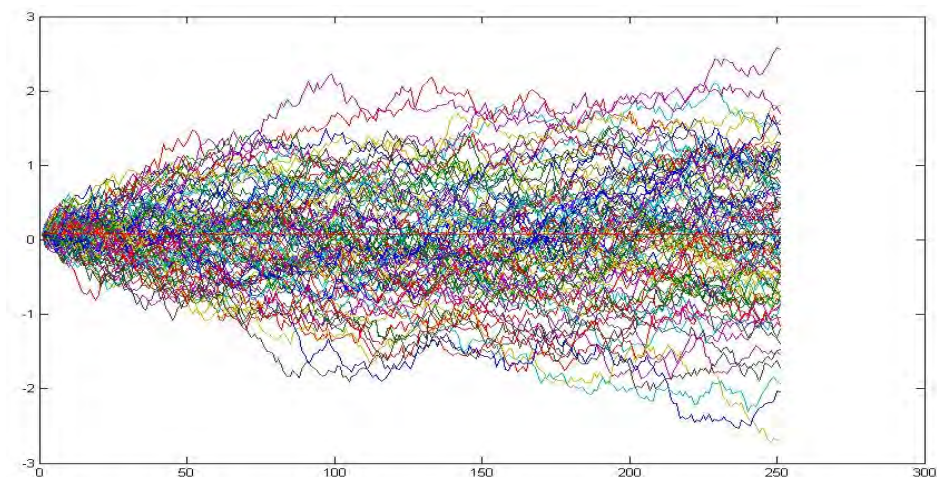
$$D_t = E[D_t | \mathfrak{F}_{t-1}] + \varepsilon_t = H_t^{1/2} \eta_t,$$

gdzie  $\eta_t \sim \text{i.i.d.}(0,1)$ , a  $H_t^{1/2}$  to warunkowe odchylenie standardowe.

Następnie, używając wyestymowanego modelu, symuluje się dużą liczbę  $N$  trajektorii cen aż do czasu  $t + T$  z wykorzystaniem metody Monte Carlo, aby odzwierciedlić szoki w procesie. Prawdopodobieństwo niewypłacalności  $PD$  to po prostu ilość razy spośród  $N$ , gdy cena dotknęła bądź przekroczyła barierę wzdłuż wyznaczonej trajektorii.

#### 4. Przykład empiryczny

Aby ocenić przydatność modelu ZPP, przeprowadzono analizę z wykorzystaniem danych o wybranych spółkach notowanych na GPW w Warszawie. Jako przykład dokładniej przedstawione zostaną wyniki dla firmy Swarzędz, która ogłosiła upadłość w połowie 2010 roku. Jako kontrast zaprezentowane zostaną również rezultaty otrzymane dla nadal działającej na rynku spółki Atlanta (Atlantapl).



**Rys. 1.** Wynik 100 symulacji trajektorii cen dla firmy Swarzędz od czerwca 2009 do maja 2010

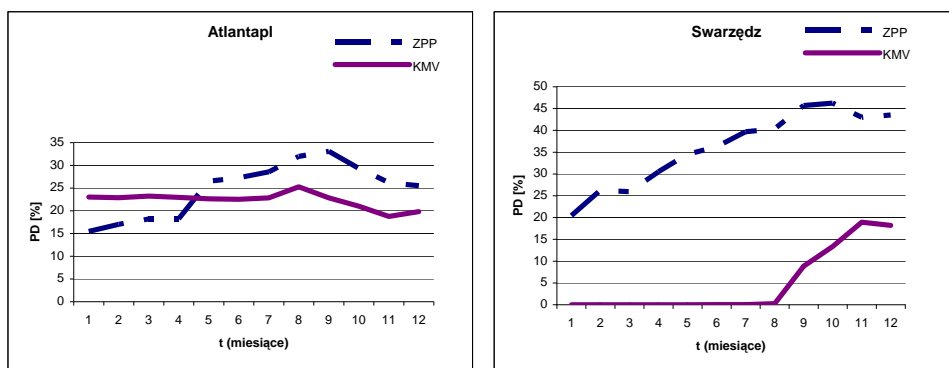
Źródło: opracowanie własne.

Wszystkie estymacje przeprowadzono w horyzoncie 1 roku, a więc 250 dni handlowych na giełdzie. Sprawdzeniu podlegały również zmiany prawdopodobieństwa niewypłacalności w ciągu roku. Ponieważ spółka Swarzędz złożyła wniosek o upadłość w maju 2010 roku, analiza była przeprowadzona na podstawie danych do maja 2009 roku. Podobny okres przyjęto dla przypadku drugiej firmy. Do wyzna-

czenia PD modelem KMV wykorzystano dane z kwartalnych raportów finansowych spółek, a do określenia punktu niewypłacalności posłużono się najczęściej stosowanym założeniem, że jest ono równe wartości zobowiązań krótkoterminowych powiększonych o połowę zobowiązań długoterminowych. Aby móc wyznaczyć PD dla ZPP, dokonano estymacji modelu GARCH. Dla firmy Swarzędz najlepszy okazał się model ARMA(2,2)-GARCH(1,1) z rozkładem  $t$ -Studenta, a dla Atlanty ARMA(1,0)-GARCH(1,1) również z rozkładem  $t$ -Studenta. Były one lepiej dopasowane do danych niż modele klasy GJR czy T-GARCH, które biorą pod uwagę efekt dźwigni. Wszystkie obliczenia przeprowadzono w programie Matlab.

Znając postać modelu, dokonano symulacji kształtowania się cen w ciągu kolejnego roku (dla  $N = 1000$ ) dla każdego miesiąca w rozważanym rocznym horyzoncie. Wartości ujemne, jak wcześniej wspomniano, są możliwe i liczba ich wystąpień jest bezpośrednio wykorzystywana do określenia prawdopodobieństwa upadku spółki.

Ostatecznie można było wyznaczyć wartości  $PD$ , które przedstawione zostały na rys. 2.



**Rys. 2.** Oszacowania prawdopodobieństwa niewypłacalności metodą ZPP oraz KMV

Źródło: opracowanie własne.

Analizując powyższe rezultaty, można zauważyć, że oba modele wychwyciły moment zwiększającego się ryzyka kredytowego spółki Swarzędz, będącej w trakcie procesu upadłościowego. ZPP wskazuje jednak na dużo wyższe zagrożenie niż KMV. Jego reakcja na zmieniający się trend była również szybsza. Bazując jedynie na danych o cenie akcji, ZPP zanotował również znaczny wzrost zagrożenia w przypadku drugiej spółki, podczas gdy KMV zachowywał się stabilnie. Odcięcie się od wartości księgowych, tj. dług firmy i wiara w efektywność rynku, miały tu na pewno duże znaczenie.

## 5. Wnioski

Na podstawie przeprowadzonych badań można zaobserwować, że model Zero-Price Probability daje ogólnie wyższe oszacowania PD niż model KMV. Dzieje się tak jednak zarówno dla firm upadłych, jak i tych nadal działających na rynku, dlatego do jego wyników należy podchodzić dość ostrożnie. Wykorzystanie modeli warunkowej heteroskedastyczności jest pomysłem ciekawym, jednakże wymaga on, aby rynek był w pełni dojrzały, a występujące na nim wahania obrazowały faktyczną sytuację firmy. W innym wypadku oszacowania prawdopodobieństwa upadku są niestabilne.

Użycie modeli GARCH do estymacji zmienności w tak długim czasie jak rok również wzbudza spore wątpliwości. Bazuje się bowiem na błędach, których znaczenie zwiększa się z okresu na okres.

Podsumowując, widać, że model ZPP potrafi odwzorować zwiększające się zagrożenie firmy i na pewno warto rozważać go jako alternatywną metodę dla KMV. Pamiętać jednak należy, iż szczególnie mocno zależy on od efektywności rynku, gdyż uwzględnia jedynie dane z niego płynące i zakłada, że wszystkie istotne informacje odzwierciedlone są w cenach. Ten warunek nie jest spełniony szczególnie na rynkach podobnych do polskiego, dlatego możliwości adaptacyjne modelu Zero-Price-Probability w praktyce są mocno ograniczone. Z podobnym problemem spotykamy się jednak w modelu KMV, dlatego oba modele można stosować, ale wyniki należy analizować ostrożnie. Dodatkowo należy pamiętać, że model ZPP może być niestabilny, gdy mamy do czynienia z danymi pochodzącymi od spółek, charakteryzującymi się bardzo dużymi wahaniami.

## Literatura

- Crosbie P., Bohn J., *Modeling Default Risk. Modeling Methodology*, Moody's KMV Company, 2003, s. 9-17.
- Fantazzini D., De Giuli M.E., Maggi M., A New Approach for Firm Value and Default Probability. Estimation beyond the Merton Models, SSRN Paper, 2007, s. 4-9.
- Saunders A., *Credit Risk Measurement: New Approaches to Value at Risk and other Paradigms*, John Wiley & Sons Inc., 2nd revised edition, New York 2002, s. 21-27
- Wójciak M., *Metody oceny ryzyka kredytowego*, PWE, Warszawa 2007, s. 84.



---

## **THE APPLICATION OF CONDITIONAL HETEROSCEDASTIC MODELS TO THE ESTIMATION OF COMPANIES DEFAULT PROBABILITY WITH THE USE OF ZPP AND KMV**

**Summary:** The article presents the main assumptions applied in quite new and not deeply examined method used to predict the companies default which is based on Zero-Price Probability Model. In order to determine Probability of Default, ZPP uses Monte Carlo simulation to get share price trajectories which are described as a GARCH process. On the basis of selected firms, the power of this framework was investigated and results were compared to the outcome of popular KMV model. Thanks to this the answer for two main questions could be given: does a new methodology allow to get more precise estimation than KMV does and can it be a useful tool for risk measurement?