

AKADEMIA EKONOMICZNA
im. Oskara Langego we Wrocławiu
Wydział Zarządzania i Informatyki

Grzegorz Kowalewski

**OBSERWACJE NIETYPOWE
W REGRESJI LINIOWEJ**

praca doktorska

napisana pod kierunkiem

prof. dr hab. Krzysztofa Jajugi

Wrocław 1994

Spis treści

WSTĘP	4
1. OBSERWACJE NIETYPOWE W REGRESJI LINIOWEJ I ICH WPŁYW NA OCENY NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW	7
1.1. Wprowadzenie. Podejście opisowe i stochastyczne w statystyce	7
1.2. Określenie obserwacji nietypowych w regresji	10
1.3. Analiza wrażliwości ocen estymatorów	19
1.3.1. Funkcja wpływu	20
1.3.2. Punkt załamania	22
2. DIAGNOSTYKA OBSERWACJI NIETYPOWYCH	26
2.1. Wprowadzenie	26
2.2. Metody diagnostyki obserwacji nietypowych w regresji liniowej	28
2.2.1. Proste metody diagnostyki	28
2.2.2. Metoda oparta na resztach t -normalizowanych	31
3. ODPORNA ESTYMACJA REGRESJI	41
3.1. Wprowadzenie	41
3.2. M -estymatory	42
3.3. L -estymatory	48
3.4. R -estymatory	53
4. SYMULACYJNE BADANIE ESTYMATÓRÓW ODPORNYCH	57
4.1. Wprowadzenie	57
4.2. Algorytm	58

4.3. Opis badań symulacyjnych	61
4.4. Wyniki badań symulacyjnych	72
5. ZASTOSOWANIA EKONOMICZNE	78
5.1. Wprowadzenie	78
5.2. Jednowskaźnikowy model teorii portfela papierów wartościowych	80
ZAKOŃCZENIE	112
DODATEK A. DANE DO PRZYKŁADÓW 1-6	114
DODATEK B. WYNIKI BADAŃ SYMULACYJNYCH	116
DODATEK C. STOPY ZWROTU AKCJI I WIG-U	185
LITERATURA	190

Wstęp

Już dawno w różnych dziedzinach życia zwrócono uwagę na możliwość wystąpienia obserwacji nietypowych. Stosowano różne sposoby uniknięcia niekorzystnych skutków spowodowanych przez te obserwacje. Najczęściej eliminowano obserwacje nietypowe ze zbioru obserwacji. Na przykład w dyscyplinach sportowych, w których ocena zawodnika jest średnią ocen zaproponowanych przez kilku sędziów wprowadzono odporny estymator średniej. Aby uniknąć ewentualnego wpływu nietypowych obserwacji (np. tendencyjnych ocen niektórych sędziów) na ostateczną ocenę, przy obliczaniu średniej nie uwzględnia się ocen skrajnych: najmniejszej i największej, czyli stosuje się p -ucięty estymator średniej (por. rozdział 3). Wyznaczenie obserwacji nietypowych nie zawsze jest jednak łatwe (tak jak w podanym przykładzie).

Także w regresji liniowej, od samego początku jej stosowania, zdawano sobie sprawę z istnienia obserwacji nietypowych i w różny sposób próbowano poradzić sobie z ich występowaniem. W 1805 roku w swej pierwszej publikacji dotyczącej metody najmniejszych kwadratów w odniesieniu do regresji liniowej A. N. Legendre [75] pisał: "Jeśli wśród tych reszt niektóre są zbyt duże, aby mogły być uznane za dopuszczalne, wówczas obserwacje, które odpowiadają tym resztom powinny być odrzucone, jako pochodzące z eksperymentów obciążonych dużymi błędami; a nieznanne wartości będą określone na podstawie pozostałych obserwacji, które w efekcie dadzą o wiele mniejsze reszty".

Występowanie obserwacji nietypowych zmienia i wypacza kształt zależności między zjawiskami. Ma to ogromne negatywne znaczenie przy podejmowaniu decyzji czy prognozowaniu na podstawie takich zależności.

W szeregach czasowych informacja o pojawieniu się obserwacji nietypowych na końcu szeregu jest szczególnie ważna. Jest to sygnał, że zmienia się tendencja. Obserwacja nietypowa jest wtedy punktem zwrotnym w badanym zjawisku.

Nietypowość obserwacji może wynikać z różnych przyczyn, m. in. z błędnego pomiaru, błędów przy wprowadzaniu danych, czy też nieprecyzyjnego zdefiniowania badanej zbiorowości.

Podstawą oceny obserwacji pod kątem ich nietypowości jest analiza merytoryczna. Zazwyczaj pozwala ona wyłapać obserwacje nietypowe. Jeśli jednak analiza merytoryczna nie daje rezultatów, należy wtedy zastosować analizę formalną (statystyczną).

Praca ta poświęcona jest problemom występowania obserwacji nietypowych w regresji liniowej. Przedstawiono obecny stan wiedzy na ten temat.

Zakres pracy obejmuje dwa różne metodologicznie podejścia w przewyżczeniu niekorzystnego efektu działania obserwacji nietypowych w analizie regresji. Pierwszy sposób polega na analizie *ex post* wyznaczonej regresji. Po oszacowaniu regresji, stosuje się metody diagnostyki obserwacji nietypowych w celu wykrycia tych obserwacji; następnie usuwa się te obserwacje ze zbioru danych i jeszcze raz szacuje się linię regresji bez wykrytych obserwacji nietypowych.

Drugi sposób polega na wykorzystaniu do szacowania regresji estymatorów odpornych. Mają one za cel jednocześnie odnalezienie obserwacji nietypowych i oszacowanie regresji w taki sposób, aby obserwacje nietypowe nie miały znaczącego wpływu na estymację.

W rozdziale 1 uporządkowałem definicje obserwacji nietypowych. Przedstawiłem znane z literatury i zaproponowałem własne określenie obserwacji nietypowych.

Rozdział 2 poświęcony jest formalnym metodom diagnostyki obserwacji nietypowych. Opisane są proste metody diagnostyki (analiza wykresu korelacyjnego, analiza poszczególnych zmiennych regresyjnych, klasyfikacja wielowymiarowa i analiza

reszt). Nie spełniają one należycie swego zadania. Dlatego też przedstawiono metodę opartą na resztach t -normalizowanych. Zaproponowałem tutaj algorytm postępowania przy wykrywaniu obserwacji nietypowych za pomocą reszt t -normalizowanych.

W kolejnym rozdziale zaprezentowane są znane z literatury trzy klasy estymatorów odpornych: M -, L - i R -estymatory. Wszystkie te estymatory opierają się na wartościach reszt. Ponieważ stosowanie reszt w analizie obserwacji nietypowych nie jest najlepsze, zaproponowałem modyfikacje tych estymatorów i przedstawiłem własną propozycję estymatora odpornego: estymator L_G , który (jak się okaże w następnych rozdziałach) charakteryzuje się dobrymi wynikami.

W celu porównania omawianych estymatorów odpornych (znanych z literatury i zaproponowanych przeze mnie) przeprowadziłem szereg eksperymentów komputerowych. Rozdział 4 zawiera opis tych badań. Wyniki zostały zamieszczone w dodatku B. Eksperymenty symulacyjne zostały wykonane przeze mnie za pomocą samodzielnie opracowanych i oprogramowanych algorytmów. Również program, który posłużył do analizy przykładów empirycznych został opracowany samodzielnie.

Ostatni rozdział poświęcony jest zastosowaniom opisanych wcześniej metod diagnostyki obserwacji nietypowych i estymatorów odpornych w naukach ekonomicznych. Przedstawiono przykład zastosowania estymatorów odpornych w teorii portfela papierów wartościowych.

Rozdział 1

Obserwacje nietypowe w regresji liniowej i ich wpływ na oceny najmniejszych kwadratów

1.1. WPROWADZENIE.

PODEJŚCIE OPISOWE I STOCHASTYCZNE W STATYSTYCE

Na wstępie należy zaznaczyć, że w każdym badaniu statystycznym, a zatem również w regresji można przyjąć jedno z dwóch podejść. Są to: podejście stochastyczne i podejście opisowe.

W podejściu stochastycznym zakłada się, że zbiór badanych obiektów stanowi próbę losową pobraną z pewnego znacznie większego zbioru obiektów, zwanego populacją. Przy tym w podejściu stochastycznym populacja może być zbiorem nieskończonym lub skończonym, ale o dużej liczebności. Zbiór badanych obiektów (czyli próba) reprezentuje populację. W podejściu stochastycznym rozpatrywane zmienne są zmiennymi losowymi. Podejście to może wynikać z nieograniczoności populacji lub z jej bardzo dużej liczebności, dużo większej niż liczebność próby losowej.

W drugim przedstawianym podejściu, opisowym, o losowości próby nic się nie zakłada. Rozpatrywane zmienne nie są losowe, lecz są zmiennymi w zwykłym sensie. Innymi słowy, w podejściu opisowym badaczka nie interesują ewentualne właściwości stochastyczne zbioru obserwacji. Dla badacza jest to po prostu zbiór danych, którego właściwości analizuje, nie wchodząc w naturę powstania tych danych.

Jednym z ważnych czynników rzutujących na przyjęcie przez badacza określonego podejścia w badaniu statystycznym jest sposób otrzymywania danych. W praktyce istnieją dwa ogólne sposoby otrzymywania danych. Po pierwsze, mogą one być rezultatem eksperymentu zaplanowanego i wykonanego przez człowieka. Po drugie, źródłem danych może być sprawozdawczość statystyczna, gdzie dane są rezultatem działania niezależnego od badacza.

Pierwszy sposób otrzymywania obserwacji spotyka się przede wszystkim w naukach doświadczalnych, np. w biologii, fizyce, naukach rolniczych. Wtedy istnieje możliwość powtórzenia eksperymentu w dokładnie takich samych warunkach. Nie ma natomiast możliwości powtórzenia eksperymentu przy stosowaniu drugiego sposobu otrzymywania obserwacji, polegającego na korzystaniu z istniejących danych statystycznych. Ten drugi sposób jest spotykany przede wszystkim w analizie zjawisk społeczno-ekonomicznych.

Podejście stochastyczne wolno przyjąć przede wszystkim w przypadku badań eksperymentalnych, tzn. gdy istnieje możliwość powtórzenia badania w takich samych warunkach. Wtedy zbiór obserwacji może być traktowany jako próba losowa, pobrana z populacji liczącej nieskończenie wiele obserwacji.

Podejście opisowe przyjmuje się z reguły wtedy, gdy mamy do czynienia z drugim z wymienionych wyżej sposobów otrzymywania obserwacji, tzn. gdy ich źródłem jest sprawozdawczość statystyczna.

W przypadku przyjęcia podejścia opisowego badacza interesują przede wszystkim podstawowe charakterystyki opisujące badany zbiór obserwacji, na przykład wektor średnich, macierz korelacji, funkcja regresji. Mają one zazwyczaj przejrzystą interpretację geometryczną.

Należy wyraźnie podkreślić, że traktowanie zmiennych jako losowe jest uzasadnione tylko wtedy, gdy badany zbiór obiektów jest próbą losową. Często jednak w badaniach empirycznych, a zwłaszcza ekonomicznych, rozpatrywany zbiór obiektów jest

jednocześnie całą populacją. Wtedy populacja jest skończona, próba jest równa populacji, czyli badanie jest wyczerpujące. W takiej sytuacji bardziej uzasadnione jest przyjęcie podejścia opisowego.

W pracy będziemy zajmować się regresją liniową postaci

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.1)$$

gdzie:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} - \text{wektor obserwacji zmiennej objaśnianej},$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix} - \text{macierz obserwacji zmiennych objaśniających (mamy } m$$

= $k-1$ zmiennych objaśniających i wyraz wolny),

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_k \end{bmatrix} - \text{wektor parametrów regresji},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} - \text{wektor błędów (odchyłeń)}.$$

Po wyznaczeniu regresji (1.1) metodą najmniejszych kwadratów (MNK) otrzymujemy równanie:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\mathbf{a}, \quad (1.2)$$

gdzie:

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \dots \\ \hat{y}_n \end{bmatrix} - \text{wektor wartości teoretycznych zmiennej objaśnianej modelu (1.1),}$$

$$\mathbf{a} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X} \mathbf{y} - \text{wektor ocen parametrów modelu (1.1).}$$

Różnice między wartościami empirycznymi a teoretycznymi zmiennej objaśnianej są nazywane resztami, czyli

$$e_i = y_i - \hat{y}_i \quad (1.3)$$

jest i -tą resztą, gdzie $i = 1, 2, \dots, n$.

Przez i -tą obserwację uważa się w pracy wektor

$$(\mathbf{y}_i \ \mathbf{x}_i) = [y_i \ 1 \ x_{i2} \ \dots \ x_{ik}] \quad (1.4)$$

składający się z i -tej obserwacji zmiennej objaśnianej oraz i -tych obserwacji zmiennych objaśniających.

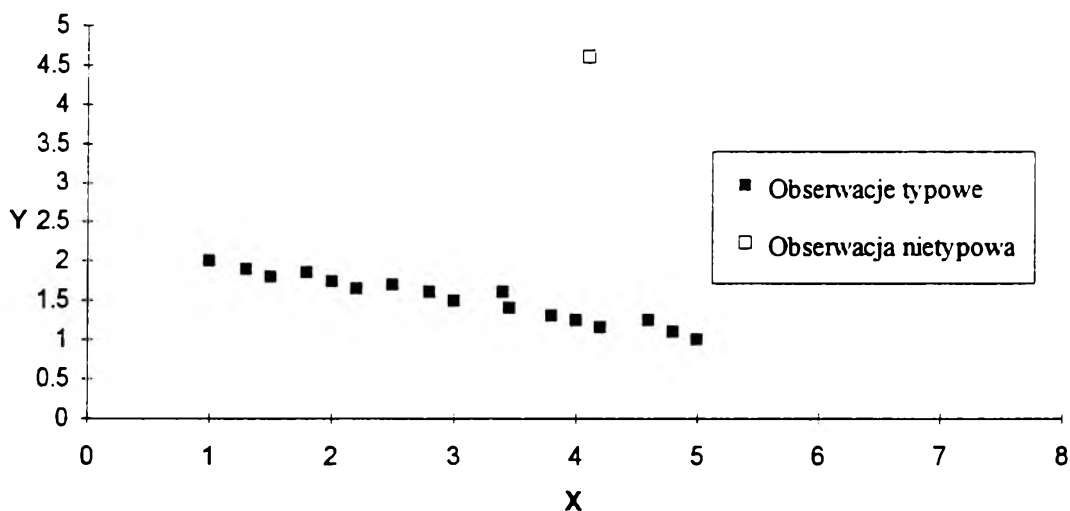
1.2. OKREŚLENIE OBSERWACJI NIETYPOWEJ W REGRESJI

W literaturze statystycznej (por. np. D. S. Moore, G. P. McCabe [81]) przez obserwację nietypową (ang. *outlier*) rozumie się indywidualną obserwację, która nie pasuje do konfiguracji całego zbioru obserwacji (podejście opisowe). Inaczej zaś jest określona obserwacja nietypowa w regresji. Przez obserwację nietypową w regresji (ang. *outlier in the regression*) rozumie się taką obserwację, dla której otrzymujemy dużą resztę (D. S. Moore, G. P. McCabe [81] s. 185). Tak określoną obserwację nietypową w regresji z jedną zmienną objaśniającą przedstawiono w przykładzie pierwszym¹ zobrazowanym na rys. 1.1. Dla obserwacji oznaczonej symbolem \square otrzymamy dużą resztę (stosując do estymacji metodę najmniejszych kwadratów) w stosunku do reszt dla pozostałych obserwacji.

¹Dane do tego przykładu jak i do następnych znajdują się w dodatku A.

W regresji wyróżnia się jeszcze inny rodzaj obserwacji, które zwane są obserwacjami wpływowymi (ang. *influential observations*). W literaturze (np. D. S. Moore, G. P. McCabe [81], P. J. Rousseeuw, A. M. Leroy [92]) nie są one uważane za obserwacje nietypowe. Obserwację uważa się za wpływową jeśli w wyniku nieznacznej zmiany jej wartości (przesuwania jej) lub usunięcia z danych znacznie zmienia się położenie linii regresji (D. S. Moore, G. P. McCabe [81] s. 185).

Rys. 1.1



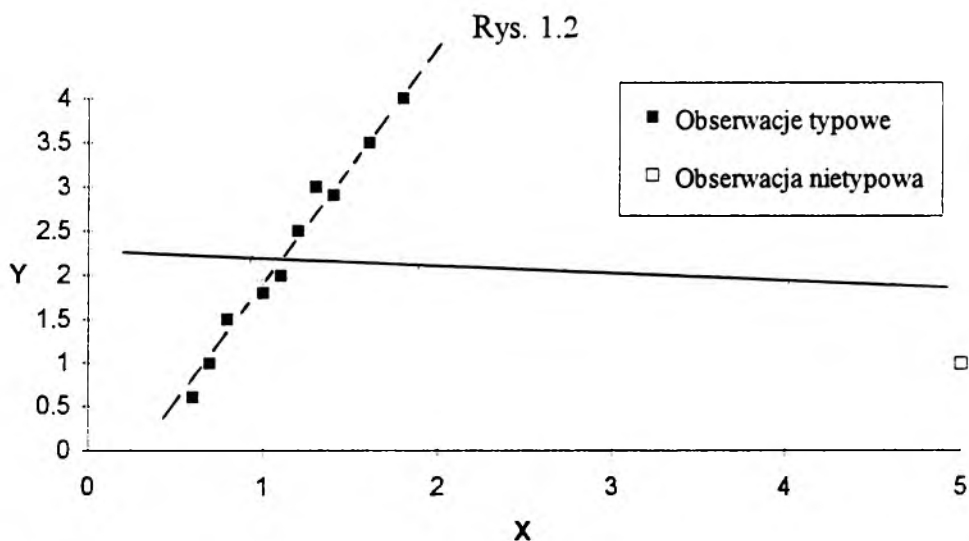
W przykładzie drugim² przedstawiono obserwację wpływową w regresji z jedną zmienną objaśniającą (patrz rys. 1.2). Linia regresji oszacowana dla wszystkich obserwacji (oznaczona na rys. 1.2 linią ciągłą) jest następująca:

$$\hat{y} = -0.046x + 2.232. \quad (1.5)$$

Gdy usuniemy z danych obserwację oznaczoną symbolem □, linia regresji również oszacowana metodą najmniejszych kwadratów (oznaczona na rys. 1.2 linią przerywaną) zmienia radykalnie swoje położenie i jest następująca:

²Dane do przykładu są zamieszczone w tab. A.3 w dodatku A.

$$\hat{y} = 2.784x - 0.921. \quad (1.6)$$



Określenie obserwacji nietypowej w regresji nie jest zgodne z ogólną definicją obserwacji nietypowej. Może bowiem występować obserwacja, która nie pasuje do liniowej konfiguracji pozostałych obserwacji a jednocześnie nie powoduje to powstania dużej reszty. Ilustracją takiej sytuacji jest omawiany wcześniej przykład drugi (rys. 1.2). Obserwacja oznaczona symbolem \square na pewno nie przystaje do pozostałych lecz reszta (otrzymana po oszacowaniu metodą najmniejszych kwadratów) dla tej obserwacji jest mniejsza od reszt otrzymanych dla niektórych pozostałych obserwacji.

Przyjęcie zaś definicji obserwacji wpływowej jako nietypowej też budzi poważne wątpliwości. Definicja obserwacji wpływowej jest względna, gdyż zależy od metody estymacji. Zastosowanie metody odpornej do estymacji regresji (patrz rozdział 4) powoduje, że obserwacja, która była wpływowa przy estymacji np. metodą najmniejszych kwadratów, przestaje być obserwacją wpływową, ponieważ jej wartość nie wpływa (lub wpływa w bardzo małym stopniu) na wyniki estymacji linii regresji.

W związku z powyższymi uwagami proponuję następujące określenie obserwacji nietypowej, przy czym uwzględniam tutaj dwa podejścia w analizie danych statystycznych.

Określenie obserwacji nietypowej ze względu na rozkład (wielowymiarowy)

- podejście stochastyczne:

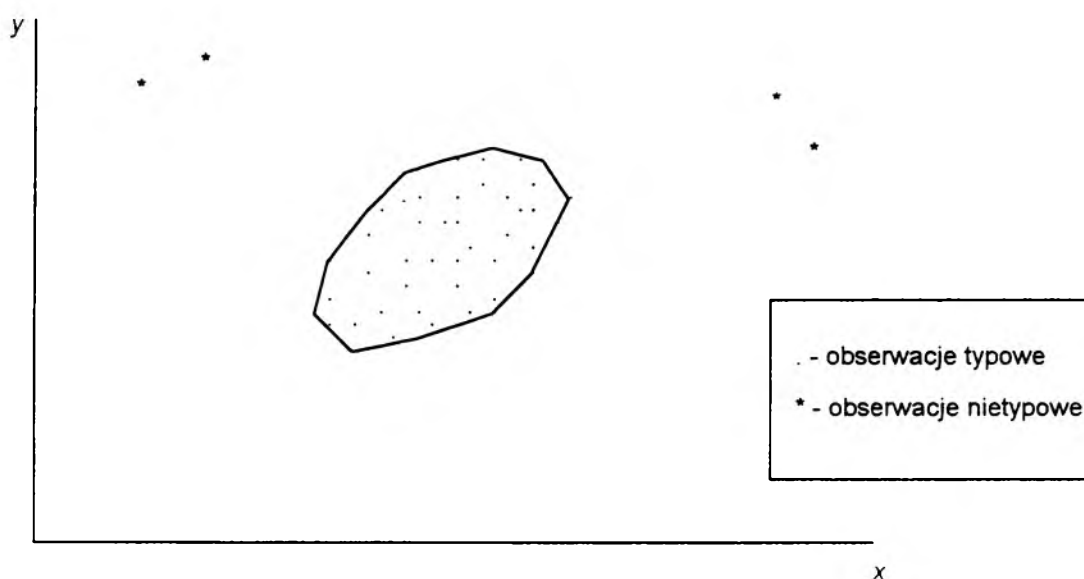
Obserwację nazywamy nietypową, wtedy gdy pochodzi z innej populacji (o innym rozkładzie) niż reszta obserwacji.

- podejście opisowe:

Obserwację nazywamy nietypową, wtedy gdy nie pasuje ona do konfiguracji całego zbioru obserwacji, nie mieści się w wypukłym otoczeniu³ pozostałych obserwacji.

Zilustrowano to na rys. 1.3.

Rys. 1.3



Określenie obserwacji nietypowej w regresji liniowej

- podejście stochastyczne:

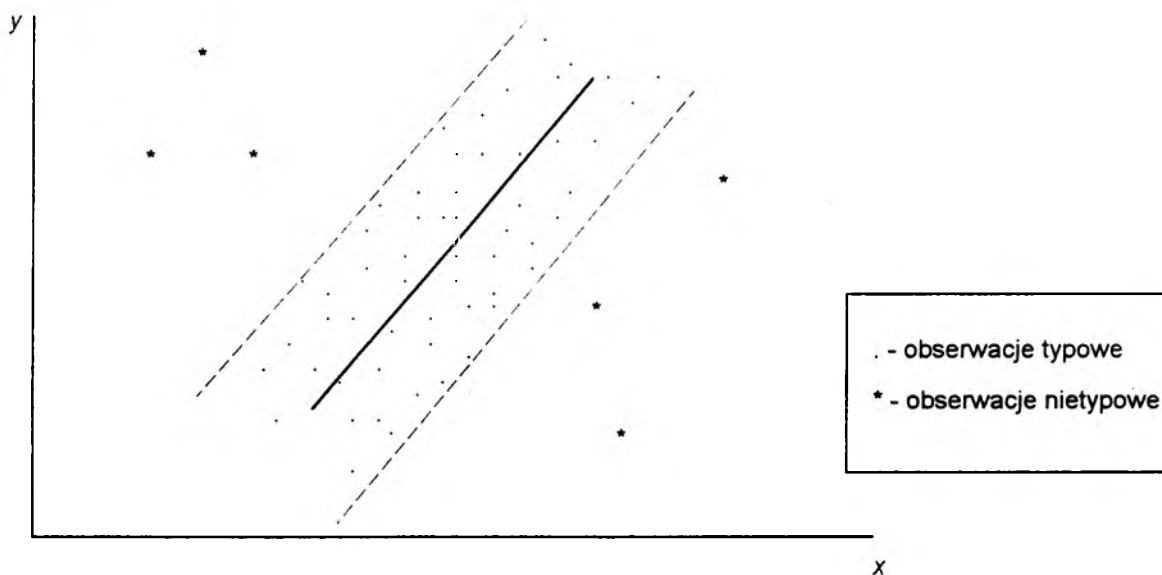
Obserwację nazywamy nietypową w regresji, wtedy gdy należy do populacji o innym warunkowym rozkładzie Y względem X . Nietypowość ze względu na regresję to szczególny przypadek nietypowości ze względu na rozkład (w podejściu stochastycznym).

³Wypukłe otoczenia obiektów tworzymy łącząc hiperodcinkami wszystkie obiekty.

- podejście opisowe:

Obserwację nazywamy nietypową w regresji, wtedy gdy nie pasuje ona do linii regresji. To nieprzystawanie do linii regresji pokazano na rys. 1.4. Obserwacje nietypowe nie mieszczą się w pewnym otoczeniu linii regresji. Sposób określenia tego otoczenia zostanie przedstawiony w rozdziale 2.

Rys. 1.4



Obserwację uznamy za typową, wtedy gdy nie jest ona obserwacją nietypową.

Zgodnie z określeniem obserwacji nietypowej (w sensie podejścia opisowego) zarówno na rys. 1.1 jak i na rys. 1.2 obserwacje oznaczone symbolem \square są rozumiane jako obserwacje nietypowe.

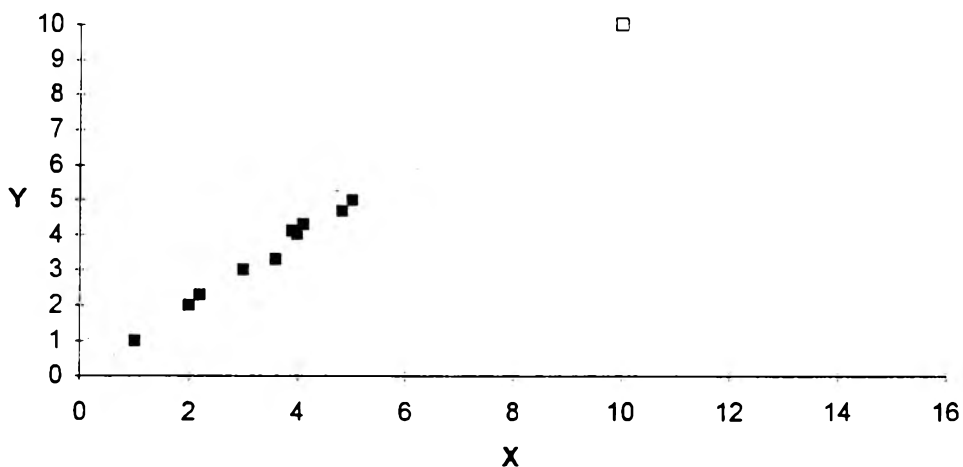
W przykładzie trzecim⁴ zilustrowanym na rys. 1.5 przedstawiono sytuację, w której jedna z obserwacji oznaczona symbolem \square jest oddalona od pozostałych. Jest ona obserwacją nietypową ze względu na rozkład wielowymiarowy. Nie jest to jednak

⁴Dane do przykładu są zamieszczone w tab. A.4 w dodatku A.

obserwacja nietypowa ze względu na regresję, ponieważ leży na przedłużeniu linii regresji.

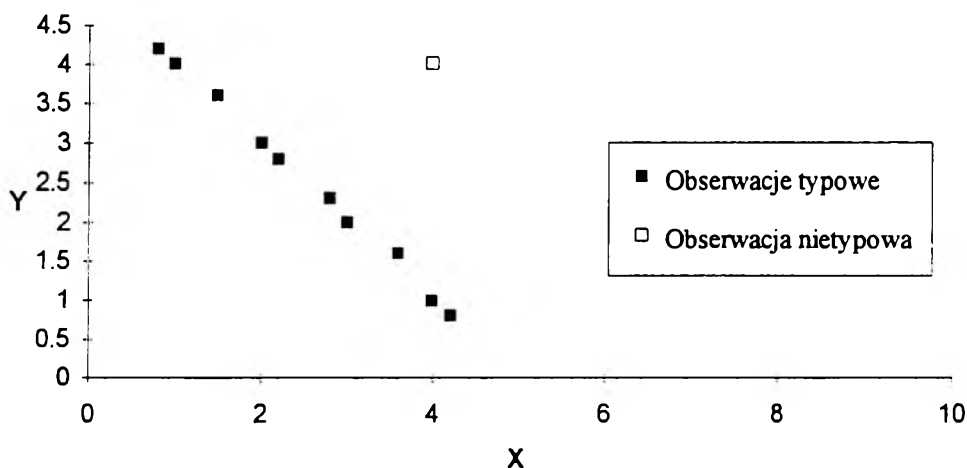
Natomiast w przykładzie czwartym⁵ zilustrowanym na rys. 1.6 przedstawiono sytuację, w której oznaczona symbolem □ obserwacja dla każdej ze zmiennych nie przyjmuje wartości odbiegających od pozostałych. Jest ona jednak obserwacją nietypową ze względu na regresję, ponieważ odbiega zasadniczo od położenia linii regresji wyznaczonej dla pozostałych obserwacji. Jest też obserwacją nietypową ze względu na rozkład wielowymiarowy.

Rys. 1.5



⁵Dane do przykładu są zamieszczone w tab. A.5 w dodatku A.

Rys. 1.6



Porównując podane wyżej określenia obserwacji nietypowych ze względu na rozkład i w regresji można wyciągnąć następujące wnioski dotyczące regresji z jedną zmienną objaśniającą:

- Jeśli obserwacja jest typowa ze względu na rozkłady brzegowe zmiennych (objaśnianej i objaśniającej), to obserwacja ta może być zarówno obserwacją typową jak i nietypową w regresji (patrz rys. 1.6).

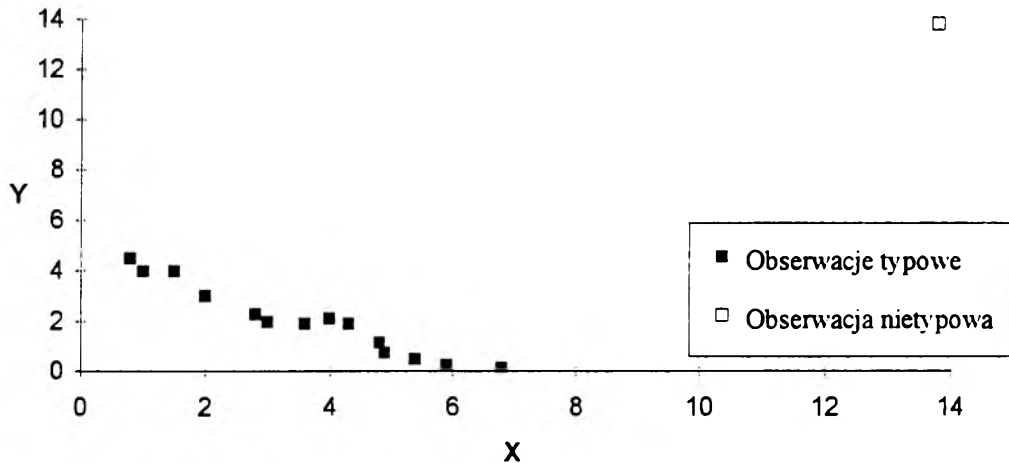
- Jeśli obserwacja jest nietypowa ze względu na rozkład zmiennej objaśnianej i jednocześnie typowa ze względu na rozkład zmiennej objaśniającej, to obserwacja ta jest obserwacją nietypową w regresji (patrz rys. 1.1).

- Jeśli obserwacja jest nietypowa ze względu na rozkład zmiennej objaśniającej i jednocześnie typowa ze względu na rozkład zmiennej objaśnianej, to obserwacja ta jest obserwacją nietypową w regresji (patrz rys. 1.2).

- Jeśli obserwacja jest nietypowa ze względu na rozkłady brzegowe zmiennych (objaśnianej i objaśniającej), to obserwacja ta może być zarówno obserwacją typową (patrz rys. 1.5) jak i nietypową w regresji (patrz przykład piąty⁶ zilustrowany na rys. 1.7).

⁶Dane do przykładu są zamieszczone w tab. A.2 w dodatku A.

Rys. 1.7



Porównując zaś określenia obserwacji nietypowych i wpływowych w regresji z literatury z podanym przeze mnie określeniem obserwacji nietypowych w regresji można dojść do wniosku, że zaproponowane przeze mnie określenie obserwacji nietypowych zawiera zarówno obserwacje nietypowe jak i wpływowe. Jest więc rozszerzeniem literaturowego pojęcia obserwacji nietypowych o obserwacje wpływowe. Zaproponowana przeze mnie definicja określa obserwację nietypową od strony przyczyny, która leży u podstaw jej zaliczenia do grona obserwacji nietypowych. Definicje literaturowe określają obserwacje nietypowe i wpływowe od drugiej strony, od strony skutków, które one wywołują.

Obserwacje nietypowe mogą zatem powodować następujące niekorzystne skutki:

- relatywnie duże reszty przy stosowaniu metody najmniejszych kwadratów (przykład pierwszy, patrz rys. 1.1),
- znaczną zmianę wartości ocen parametrów linii regresji po usunięciu obserwacji nietypowej ze zbioru danych (przykład drugi, patrz rys. 1.2).

Może zdarzyć się wystąpienie obu tych skutków jednocześnie. Sytuację taką zaprezentowano w przykładzie piątym (patrz rys. 1.7).

W literaturze statystycznej występuje jeszcze jedno określenie o podobnym znaczeniu do nietypowości - niejednorodność zbioru obserwacji. Przytoczymy tutaj z literatury (patrz K. Jajuga [52]) definicje zbiorów jednorodnych dla obu przyjętych podejść w badaniu statystycznym i porównamy z pojęciem nietypowości.

Określenie jednorodności (eliptycznej) zbioru obserwacji ze względu na rozkład

- podejście stochastyczne:

Zbiór obserwacji jest (eliptycznie) jednorodny, gdy może być traktowany jako próba losowa pochodząca z jednej populacji (o rozkładzie eliptycznym).

- podejście opisowe:

Zbiór obserwacji jest (eliptycznie) jednorodny, gdy rozpatrywany jako zbiór punktów w przestrzeni wielowymiarowej tworzy w niej zwartą figurę (o kształcie zbliżonym do hiperelipsoidy) wraz z wnętrzem.

Określenie jednorodności zbioru obserwacji w liniowej regresji

- podejście stochastyczne:

Zbiór obserwacji jest jednorodny w sensie liniowej regresji, gdy może być traktowany jako próba losowa pochodząca z jednej populacji o rozkładzie, dla którego regresja (tzn. wektor średnich rozkładu warunkowego) jest funkcją liniową.

- podejście opisowe:

Zbiór obserwacji jest jednorodny w sensie liniowej regresji, gdy rozpatrywany jako zbiór punktów w przestrzeni wielowymiarowej tworzy w niej zwartą figurę o takim kształcie, że figura ta może być dobrze aproksymowana m -wymiarową hiperpłaszczyzną (gdzie m jest liczbą zmiennych objaśniających).

Pojęcie jednorodności, zwłaszcza w podejściu opisowym, jest ściśle związane z pojęciem odległości: jeśli zbiór jest jednorodny, wówczas odległości wszystkich obserwacji od pewnej charakterystyki zbioru są niewielkie. W przypadku jednorodności eliptycznej tą charakterystyką zbioru jest wektor średnich, a stosowana jest odległość Mahalanobisa. W przypadku jednorodności w sensie regresji liniowej tą charakterystyką

zbioru jest hiperpłaszczyzna, zwana hiperpłaszczyzną regresji, a stosowana jest dowolna odległość Minkowskiego (np. euklidesowa lub "miejska") obserwacji od tej hiperpłaszczyzny, mierzona wzdłuż osi zmiennej objaśnianej.

Porównując pojęcie obserwacji nietypowych z określeniem zbioru niejednorodnego ze względu na rozkład, należy zauważyć ich zbieżność. W liniowej regresji zaś (zwłaszcza w podejściu opisowym) pojęcie niejednorodności jest zgodne z określeniem nietypowości preferowanym w literaturze statystycznej. Jeżeli bowiem niejednorodność będziemy mierzyć za pomocą odległości od hiperpłaszczyzny regresji to obserwacje nietypowe posiadają wtedy duże reszty. Pojęcie niejednorodności nie uwzględnia więc obserwacji wpływowych. Zbiór obserwacji w regresji będzie jednorodny, mimo że wystąpią obserwacje wpływowe (przykład drugi, patrz rys. 1.2).

Ważnym problemem związanym z obserwacjami nietypowymi jest określenie, ile może być obserwacji nietypowych. Samo pojęcie nietypowości kojarzy się z małą liczebnością. *Słownik języka polskiego* określa nietypowy jako "rzadko występujący" (M. Szymczak [100] t. 2, s. 366). Oczywiście obserwacji nietypowych musi być mniej niż 50 % wszystkich obserwacji. Jeśli bowiem mamy więcej obserwacji nietypowych, to sytuację należy odwrócić i te obserwacje uznać za typowe a pozostałe za nietypowe. Większa frakcja obserwacji nietypowych może także świadczyć, że występują dwie lub więcej klas regresji liniowych, tzn. że obserwacje uznane za nietypowe tworzą inne linie regresji. W takim wypadku najpierw powinno się przeprowadzić klasyfikację (ze względu na regresję liniową) a dopiero później szacować dla poszczególnych klas funkcji regresji i dla klas przeprowadzać badanie pod kątem obserwacji nietypowych.

1.3. ANALIZA WRAŻLIWOŚCI OCEN ESTYMATORÓW

W literaturze wymienia się różne pożądane własności estymatorów. Przykładowo J. Jakubczyc [56] podaje następujące własności "dobrych" estymatorów: nieobciążoność.

efektywność, minimaksowość, dopuszczalność, niezmienniczość, zgodność, odporność. Dobry estymator powinien się charakteryzować także małą wrażliwością na występowanie w danych obserwacji nietypowych. Oznacza to, że powinien być stabilny w sensie względnie małych reakcji ocen parametrów na małe zmiany w zbiorze obserwacji. Do badania tego typu wrażliwości wykorzystuje się dwie koncepcje. Jedną z nich jest określona mianem funkcji wpływu. Drugą jest oparta o pojęcie tzw. punktu załamania.

1.3.1. Funkcja wpływu

Koncepcja funkcji wpływu (ang. *influence function* lub *influence curve*) została opracowana przez F. R. Hampela [39]. Ideą konstrukcji funkcji wpływu jest mierzenie skutków wprowadzania nowych obserwacji na wartość estymatora. Jest ona określona w następujący sposób:

Niech T będzie estymatorem określonym dla zbioru obserwacji \mathbf{Z} a F - empiryczną dystrybuantą \mathbf{Z} ($T(F) = T$). Wówczas możemy analizować własności estymatora T badając reakcje $T(F)$ na zakłócenia F . Polega to na oddzieleniu w zbiorze \mathbf{Z} obserwacji "złych" o małym prawdopodobieństwie (frakcji) ε i dystrybuancie Δ_{-} od "dobrych" o frakcji $1 - \varepsilon$ i dystrybuancie F . W związku z tym konstruuje się mieszaną dystrybuantę $F_{\varepsilon} = (1 - \varepsilon)F + \varepsilon\Delta_{-}$. Przy powyższych określeniach⁷ funkcję wpływu IF definiuje się w sposób następujący:

$$IF(T, \mathbf{Z}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{T(F_{\varepsilon}) - T(F)}{\varepsilon}, \quad (1.7)$$

jeżeli ta granica istnieje dla zbioru \mathbf{Z} .

⁷Precyzyjniej określone założenia są podane np. w pracy F. R. Hampela i in. [25].

Funkcje wpływu dla miar położenia: średniej arytmetycznej, p -uciętej średniej⁸ i mediany zostały pokazane na rys. 1.8.

Funkcje wpływu są wykorzystywane do badania asymptotycznych własności estymatorów, ich porównywania oraz konstruowania odpornych modyfikacji znanych metod estymacji. Funkcję wpływu IF wykorzystuje się także do określania kierunku i siły zależności ocen parametrów od pojedynczych obserwacji.

Na podstawie funkcji wpływu definiuje się tzw. maksymalną wrażliwość (ang. *gross-error-sensitivity*) określoną jako maksimum funkcji wpływu:

$$\gamma^*(T, F) = \max_{\mathbf{z}} \|IF(T, \mathbf{Z})\|, \quad (1.8)$$

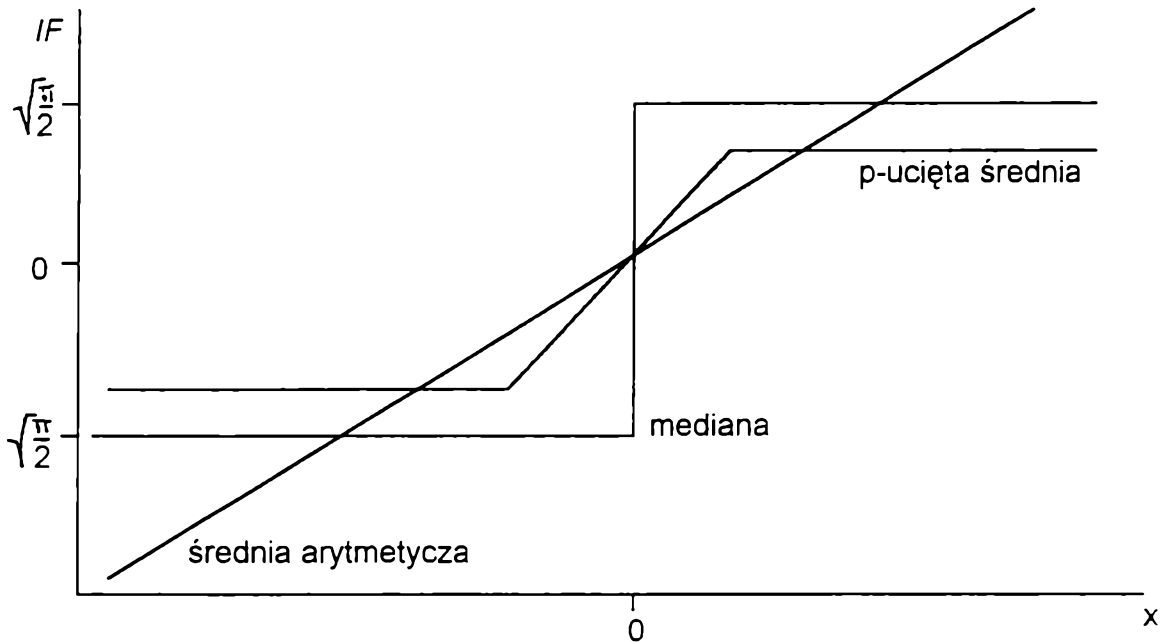
gdzie:

$\gamma^*(T, F)$ - maksymalna wrażliwość,

$\| \cdot \|$ - norma.

⁸Średnia ta jest obliczana w następujący sposób: najmniejsze i największe p obserwacje nie są brane pod uwagę przy liczeniu średniej.

Rys. 1.8



W związku z ideą funkcji wpływu powstała koncepcja tzw. estymatorów o ograniczonej wpływowości (lub inaczej o ograniczonej funkcji wpływu) (ang. *bounded - influence estimators*). Estymatory takie posiadają pożądaną odporność w sensie wartości funkcji wpływu. Estymatory takie rozważali m. in. W. S. Krasker i R. E. Welsch [71] oraz F. R. Hampel [39].

1.4.2. Punkt załamania

Inną charakterystyką opisującą wrażliwość estymatora na występowanie obserwacji nietypowych jest tzw. punkt załamania (ang. *breakdown point*) zaproponowany również przez F. R. Hampela [38]. Punkt załamania estymatora określa się następująco:

Niech T oznacza, tak jak poprzednio, estymator a Z' - zniekształcony (zanieczyszczony) zbiór obserwacji Z powstały przez zastąpienie pewnych l (wektorów) obserwacji przez wartości dowolne (tzn. jak najbardziej nietypowe). Wtedy

$$\text{bias}(l; T, \mathbf{Z}) = \sup_{\mathbf{Z}'} \|T(\mathbf{Z}) - T(\mathbf{Z}')\|, \quad (1.9)$$

będzie maksymalnym obciążeniem spowodowanym przez zniekształcony (zakłócony) zbiór obserwacji \mathbf{Z}' , przy czym supremum jest liczone po wszystkich możliwych \mathbf{Z}' . Jeśli $\text{bias}(l; T, \mathbf{Z})$ jest nieskończone, to znaczy, że l obserwacji nietypowych może powodować dowolną wartość estymatora T . Punktem załamania $\varepsilon^*(T, \mathbf{Z})$ estymatora T jest wartość

$$\varepsilon^*(T, \mathbf{Z}) = \min \left\{ \frac{l}{n}; \text{bias}(l; T, \mathbf{Z}) \text{ jest nieskończony} \right\}. \quad (1.10)$$

Innymi słowy, punkt załamania jest to najmniejsza frakcja obserwacji nietypowych w zbiorze wszystkich obserwacji, która powoduje, że estymator $T(\mathbf{Z}')$ przyjmuje wartości dowolnie dalekie od $T(\mathbf{Z})$. Własność odporności posiadają takie estymatory, dla których punkt załamania jest większy od zera a możliwie bliski 0.5. Dla przykładu średnia arytmetyczna ma punkt załamania równy 0, dla p -uciętej średniej punkt załamania wynosi p/n a dla mediany 0.5. W regresji punkt załamania dostarcza nam informacji przy jakiej maksymalnej frakcji obserwacji nietypowych szacowanie parametrów linii regresji jest jeszcze użyteczne, tzn. dobrze opisuje badaną strukturę.

W regresji (z jedną zmienną objaśniającą) szacowanej metodą najmniejszych kwadratów wystarczy jedna obserwacja nietypowa aby ocena jednego parametru przyjęła dowolną wartość a dwie obserwacje nietypowe mogą spowodować otrzymanie obu dowolnych ocen parametrów. Punkt załamania dla metody najmniejszych kwadratów wynosi

$$\varepsilon^*(T, \mathbf{Z}) = \frac{1}{n} \quad (1.11)$$

i dąży do zera wraz ze wzrostem liczby obserwacji do nieskończoności. Dlatego też punkt załamania wynosi 0%.

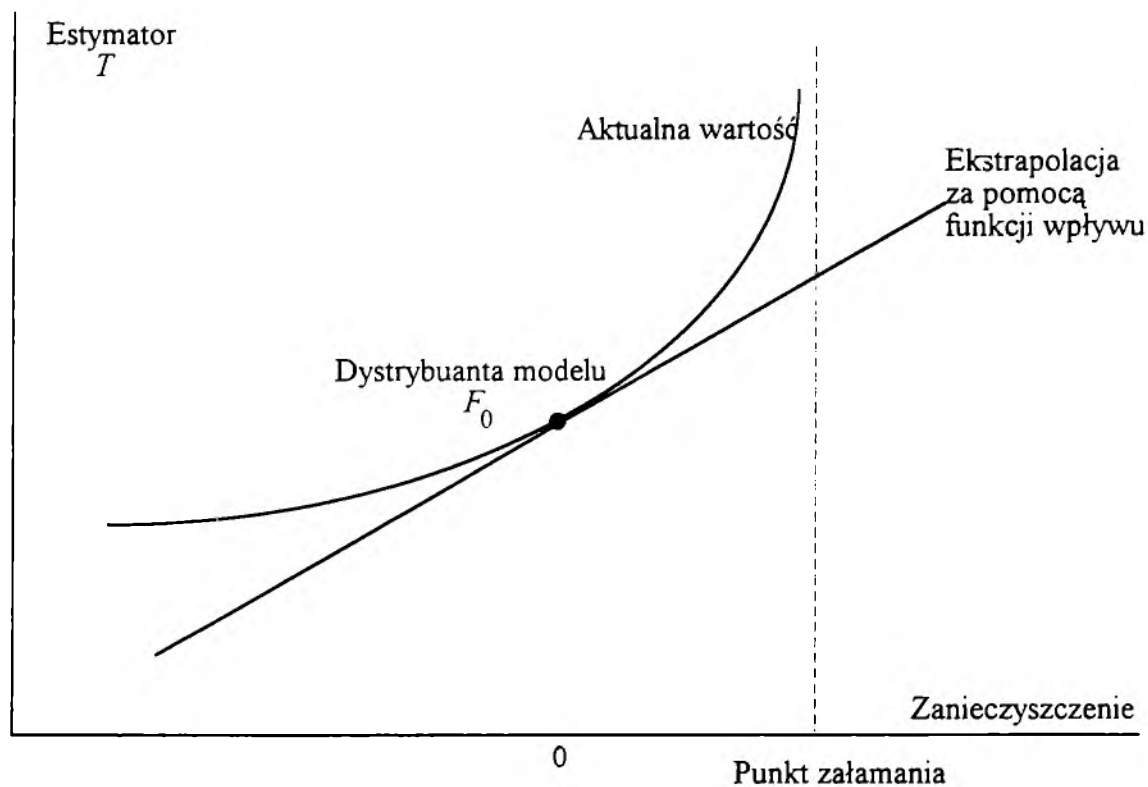
W związku z ideą punktu załamania powstała koncepcja estymatorów o jak największej wartości punktu załamania (jak najbliższej 0.5). Estymatory takie oparte są najczęściej na statystykach pozycyjnych, np. na medianie (patrz rozdział 3).

Różnica między koncepcjami funkcji wpływu i punktu załamania jest zasadnicza (patrz rys. 1.9). Funkcja wpływu odpowiada na pytanie, jaki wpływ na estymację będzie miała pojedyncza obserwacja nietypowa ($\epsilon \rightarrow 0$). Koncepcja punktu załamania zaś odpowiada na pytanie, ile maksymalnie może być obserwacji nietypowych ($\epsilon \rightarrow 0.5$), aby estymator nie załamał się, abyśmy otrzymali adekwatne oceny parametrów, co oznacza, że obserwacje nietypowe nie mają znaczącego wpływu na estymację. Można powiedzieć, że punkt załamania mierzy globalną niezawodność estymatora na występowanie obserwacji nietypowych.

Te dwa podejścia zobrazujemy na przykładzie uginającego się mostu: funkcja wpływu mierzy efekt nieskończenie małych zniekształceń mostu, punkt załamania informuje jak duże musi być zniekształcenie aby most zawalił się.

Badanie własności odporności estymatorów za pomocą analizy odpowiadających im funkcji wpływu oraz punktów załamania stanowi nowy trend w dziedzinie diagnostyki procedur i danych statystycznych.

Rys. 1.9. Ekstrapolacja estymatora



Istnieją dwa różne metodologicznie podejścia w przewyżczeniu niekorzystnego efektu działania obserwacji nietypowych w analizie regresji. Pierwszy sposób polega na analizie *ex post* oszacowanej regresji. Po oszacowaniu regresji, stosuje się metody diagnostyki obserwacji nietypowych w celu wykrycia tych obserwacji; następnie usuwa się te obserwacje ze zbioru danych i jeszcze raz szacuje się linię regresji bez wykrytych obserwacji nietypowych. Metody diagnostyki obserwacji nietypowych są omówione w rozdziale 2.

Drugi sposób polega na wykorzystaniu do szacowania regresji estymatorów odpornych (patrz rozdział 3).

Rozdział 2

Diagnostyka obserwacji nietypowych

2.1. WPROWADZENIE

Diagnostyka obserwacji nietypowych dostarcza następujących informacji (I. Konarzewska [62]):

- o wiarygodności wniosków, które można wyciągnąć na podstawie oszacowanej linii regresji,
- o celowości dalszego wnioskowania na podstawie ocen charakteryzujących się dużą niestabilnością przy usuwaniu z próby pojedynczych obserwacji,
- o występowaniu w zbiorze obserwacji punktów nietypowych, znacznie odległych od pozostałych, co daje podstawę do określenia przedziałów wartości zmiennych objaśniających modelu, dla których nie należy uogólniać wniosków płynących z regresji.

Zastosowanie statystycznych metod diagnostyki obserwacji nietypowych powinna poprzedzać analiza merytoryczna pod kątem występowania obserwacji nietypowych. Przykładem niech będzie model konsumpcji Polski w latach 1961-1985 (omawiany w pracy I. Konarzewskiej [62]):

$$\hat{y} = a_1 + a_2x_2 + a_3x_3, \quad (2.1)$$

gdzie:

- y - konsumpcja z dochodów osobistych ludności,
- x₂ - dochody ludności,

x_3 - przyrost bezwzględny dochodów ludności w roku bieżącym w stosunku do roku poprzedniego.

Dane do przykładu są zamieszczone w tab. 2.1.

Tabela 2.1

rok	y	x_2	x_3
1961	1276.55	1433.80	74.11
1962	1319.05	1477.09	43.29
1963	1380.55	1549.57	72.48
1964	1441.07	1624.51	74.94
1965	1525.16	1723.13	98.62
1966	1614.45	1846.88	123.75
1967	1692.87	1930.76	83.88
1968	1799.50	2047.53	116.77
1969	1878.27	2134.40	86.87
1970	1952.49	2197.55	63.15
1971	2089.44	2402.67	205.12
1972	2273.32	2694.10	291.43
1973	2467.15	2972.34	278.24
1974	2633.85	3183.18	210.84
1975	2938.42	3501.49	318.31
1976	3193.14	3735.95	234.46
1977	3402.53	3971.41	235.46
1978	3435.39	4023.10	51.69
1979	3547.04	4147.16	124.06
1980	3651.20	4275.89	128.73
1981	3503.70	4455.30	179.41
1982	2989.50	3684.80	770.50
1983	3176.00	3734.90	50.10
1984	3295.10	3837.80	102.90
1985	3361.00	4031.23	193.43

Z powodu drastycznego spadku dochodów rok 1982 zdecydowanie odbiega od pozostałych. W związku z tym już na podstawie tylko tych informacji należy uznać ten rok za nietypowy i nie brać pod uwagę przy analizie konsumpcji Polski.

2.2. METODY DIAGNOSTYKI OBSERWACJI NIETYPOWYCH W REGRESJI LINIOWEJ

2.2.1. Proste metody diagnostyki

Najprostszym sposobem wykrywania obserwacji nietypowych (nie tylko w regresji) jest analiza wykresu rozrzutu obserwacji. Niestety może ona być stosowana efektywnie wtedy, gdy w regresji występuje tylko jedna zmienna objaśniająca. W przypadku regresji wielorakiej stosuje się wprawdzie wykresy par wszystkich zmiennych występujących w modelu, jednak liczba wykresów rośnie bardzo szybko przy wzroście liczby zmiennych (przy m zmiennych będzie dokładnie $\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$ wykresów). Analiza takich wykresów nie daje pewności wykrycia wszystkich obserwacji nietypowych, może bowiem występować obserwacja nietypowa widoczna dopiero w przestrzeni trójwymiarowej lub w jeszcze większym wymiarze.

Prostym sposobem wykrywania obserwacji nietypowych jest analiza poszczególnych zmiennych występujących w modelu pod kątem występowania obserwacji nietypowych. Można łatwo stwierdzić czy istnieją obserwacje nietypowe ze względu na każdą ze zmiennych oddzielnie występujących w modelu (por. np. E. Trybuś [102]). Jednak to, że obserwacja jest nietypowa dla którejś ze zmiennych nie implikuje tego, że jest ona nietypowa ze względu na regresję. Taka sytuacja została już pokazana w przykładzie trzecim (patrz rozdział 1, rys. 1.5). Obserwacja oznaczona symbolem \square jest nietypowa ze względu na obie zmienne X i Y . Nie jest to jednak obserwacja nietypowa w regresji. Sytuacja odwrotna jest również możliwa. To, że nie ma obserwacji nietypowych ze względu na każdą zmienną osobno, nie oznacza, że nie ma obserwacji nietypowych w regresji. Ilustracją tego jest omawiany już w rozdziale 1 przykład czwarty (patrz rys. 1.6).

Obserwacja oznaczona symbolem □ nie jest nietypowa ze względu na każdą zmienną z osobna. Jest jednak obserwacją nietypową w regresji.

Innym sposobem wykrywania obserwacji nietypowych może być zastosowanie metod klasyfikacji wielowymiarowej (przykładowo taksonomii wrocławskiej K. Florka i innych [30]). Przydzielą one do osobnych klas obserwacje nietypowe. Metody klasyfikacji wielowymiarowej mają jednak jedną wadę. Mogą wydzielać w oddzielne klasy obserwacje, które nie są nietypowe w regresji, bowiem metody te wyodrębniają obserwacje nietypowe ze względu na rozkład wielowymiarowy. Przykład takiej sytuacji jest zilustrowany na rys. 1.5. Obserwacja oznaczona symbolem □ jest obserwacją typową w regresji. Może jednak przez metody klasyfikacji wielowymiarowej zostać wydzielona do oddzielnej klasy¹ z powodu oddalenia od pozostałych obserwacji.

Sposobem uniknięcia wad metod klasyfikacji wielowymiarowej jest dokonanie podziału zbioru obserwacji na klasy, a następnie wyznaczenie osobnej regresji liniowej dla każdej klasy. Mamy wtedy do czynienia również z klasyfikacją wielowymiarową ale ze względu na regresję liniową.

K. Jajuga [52] przedstawia metodę klasyfikacji ze względu na regresję liniową. Metoda ta jest naturalnym uogólnieniem metody najmniejszych kwadratów i polega na minimalizacji wyrażenia:

$$\sum_{j=1}^l (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}_j \mathbf{a}_j)^T (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}_j \mathbf{a}_j), \quad (2.2)$$

gdzie:

l - liczba klas,

\mathbf{X}_j - macierz obserwacji zmiennych objaśniających dla obserwacji należących do j -tej klasy,

\mathbf{y}_j - wektor obserwacji zmiennej objaśnianej dla obserwacji należących do j -tej klasy,

¹To zależy od metryki.

\mathbf{a}_j - wektor współczynników regresji dla j -tej klasy obserwacji.

Wektory współczynników regresji liniowej dla poszczególnych klas obserwacji dane są wzorem:

$$\mathbf{a}_j = (\mathbf{X}_j^T \mathbf{X}_j)^{-1} \mathbf{X}_j^T \mathbf{y}_j. \quad (2.3)$$

Jak widać, wektor współczynników regresji j -tej klasy powstaje przez wyznaczenie regresji metodą najmniejszych kwadratów na podstawie obserwacji należących do tej klasy. W praktyce oczywiście klasyfikacja obserwacji jest nieznaną, przeto wzór (2.3) nie może być zastosowany w sposób bezpośredni. Można natomiast zastosować następujący algorytm iteracyjny:

1. Wyznacza się (w dowolny sposób) klasyfikację początkową zbioru obserwacji.
2. W każdej iteracji algorytmu wyznaczane są kolejno:
 - wektory współczynników regresji dla poszczególnych klas;
 - kwadraty reszt;
 - nową klasyfikację zbioru obserwacji otrzymaną za pomocą następującej reguły: i -ta obserwacja jest przydzielana do j -tej klasy, gdy kwadrat reszty i -tej obserwacji dla tej klasy jest najmniejszy w stosunku do innych klas.
3. Procedurę iteracyjną kontynuuje się do momentu, gdy klasyfikacje otrzymane w dwóch kolejnych iteracjach są takie same.

Metoda klasyfikacji ze względu na regresję ma jednak poważną wadę. Można ją stosować tylko wtedy gdy występuje co najmniej tyle obserwacji nietypowych co parametrów regresji. Można ją stosować, zwłaszcza wtedy gdy stwierdzimy w inny sposób, że występuje dużo obserwacji nietypowych.

Często stosowanym sposobem wykrywania obserwacji nietypowych jest analiza reszt modelu. Można by się było spodziewać, że obserwacje o relatywnie wysokich bezwzględnych wartościach reszt są nietypowe. Sytuacja taka jest przedstawiona w przykładzie pierwszym (patrz rozdział 1, rys. 1.1). Może jednak występować obserwacja

nietypową w regresji, dla której reszta jest mała. Była już o tym mowa w rozdziale 1. Reszty modelu nie mogą więc być jednoznacznym kryterium uznawania obserwacji za nietypowe.

2.2.2. Metoda oparta na resztach t -normalizowanych

Istotną przyczyną stosowania diagnostyki regresji pod kątem wykrywania obserwacji nietypowych jest fakt, że nie wszystkie obserwacje w zbiorze wszystkich obserwacji odgrywają jednakową rolę w określaniu wartości ocen parametrów. W regresji liniowej hiperpłaszczyzna regresji może być określona przez kilka obserwacji, a pozostałe obserwacje mogą być bardzo mało istotne. Bardzo często właśnie obserwacje nietypowe decydują o położeniu linii regresji. Przedstawiono to już w przykładzie drugim (patrz rozdział 1, rys. 1.2). Obserwacja nietypową istotnie wpłynęła tutaj na położenie linii regresji. Narzędziem stosowanym do wykrywania takich obserwacji jest macierz rzutowania (ang. *hat matrix*).

Macierz rzutowania (wektora y na podprzestrzeń rozpiętą na kolumnach macierzy X) określona jest w następujący sposób:

$$H = X(X^T X)^{-1} X^T, \quad (2.4)$$

gdzie:

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & h_{nn} \end{bmatrix} - \text{macierz rzutowania.}$$

Ponieważ

$$\hat{y} = X(X^T X)^{-1} X^T y, \quad (2.5)$$

zatem

$$\hat{y} = Hy, \quad (2.6)$$

lub inaczej

$$\hat{y}_i = \sum_{j=1}^n h_{ij} y_j. \quad (2.7)$$

Z wzoru (2.4) widać, że macierz rzutowania zależy tylko od wartości występujących w macierzy obserwacji zmiennych objaśniających X .

Elementy diagonalne $h_{ii} \equiv h_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) tej macierzy odgrywają ważną rolę w diagnostyce obserwacji nietypowych w regresji. Wielkość i -tego elementu głównej przekątnej macierzy rzutowania (czyli h_i) określa bowiem wpływ i -tej obserwacji na oceny parametrów regresji.

Dla ilustracji roli elementów diagonalnych macierzy rzutowania na estymację, zauważmy, korzystając z (2.7), że jeśli dodamy przyrost Δy_i do y_i przy założeniu, że wszystkie inne składowe wektora y nie ulegną zmianie, czyli

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \Delta y_i \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

to przyrost wartości teoretycznej zmiennej objaśnianej dla i -tej obserwacji wynosi:

$$\Delta \hat{y}_i = h_i \Delta y_i, \quad (2.9)$$

czyli jest wprost proporcjonalny do odpowiedniego elementu z głównej przekątnej macierzy H .

Aby przyjrzeć się lepiej wpływowi danej obserwacji na estymację, usuniemy na chwilę ze zbioru wszystkich obserwacji i -tą obserwację. Oznaczmy odpowiednio:

$$\mathbf{X}(i) = \begin{bmatrix} 1 & x_{1,2} & x_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{i-1,2} & x_{i-1,k} \\ 1 & x_{i+1,2} & x_{i+1,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n,2} & x_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \dots \\ \mathbf{x}_{i-1} \\ \mathbf{x}_{i+1} \\ \dots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} - \text{macierz obserwacji zmiennych objaśniają-}$$

cych bez i -tej obserwacji,

$\mathbf{a}(i)$ - wektor ocen parametrów regresji oszacowanej dla zbioru obserwacji bez i -tej obserwacji.

Wykorzystując formułę usuwania kolumn Shermana-Morrisona-Woodbury'ego (por. C. R. Rao [87]) można napisać:

$$(\mathbf{X}^T(i)\mathbf{X}(i))^{-1} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1} + \frac{(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_i^T\mathbf{x}_i(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}}{1-h_i}. \quad (2.10)$$

Korzystając z powyższego wzoru możemy pokazać (dokładne obliczenia zamieszczone są w pracy R. G. Millera [78]) jak zmienia się wektor ocen parametrów \mathbf{a} pod wpływem usunięcia i -tej obserwacji ze zbioru wszystkich obserwacji (oczywiście, gdy $h_i \neq 1$) (D. A. Belsley, E. Kuh, R. E. Welsch [12]):

$$\mathbf{a}(i) = \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_i^T}{1-h_i}e_i, \quad (2.11)$$

gdzie e_i jest i -tą resztą otrzymaną metodą najmniejszych kwadratów dla wszystkich obserwacji (także z i -tą obserwacją).

Analogicznie można uzyskać wzory na różnicę między wartościami teoretycznymi zmiennej objaśnianej spowodowaną usunięciem i -tej obserwacji:

$$\mathbf{X}\mathbf{a}(i) = \hat{\mathbf{y}} - \frac{\mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_i^T}{1-h_i}e_i, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{x}_i\mathbf{a}(i) = \hat{y}_i - \frac{\mathbf{x}_i(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_i^T}{1-h_i}e_i = \hat{y}_i - \frac{h_i}{1-h_i}e_i, \quad (2.13)$$

Wzór (2.11) mówi, że usunięta obserwacja (y_i, \mathbf{x}_i) zmienia wartość oceny estymatora \mathbf{a} o wektor proporcjonalny do $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_i^T$. Stałą proporcji jest wyrażenie

$\frac{e_i}{1-h_i}$. Pozostałe dwa wzory (2.12) i (2.13) wyrażają tę samą zależność. Z ostatniego

wzoru można wyciągnąć jednocześnie wniosek, że do określenia wpływu i -tej obserwacji na \hat{y}_i wystarczy znać resztę e_i i element diagonalny h_i odpowiadający tej obserwacji.

Ponieważ macierz rzutowania jest macierzą symetryczną i idempotentną, elementy z głównej przekątnej h_i (gdzie $i = 1, \dots, n$) przyjmują wartości z przedziału $[0, 1]$. Z innych własności macierzy rzutowania (patrz niżej) można ograniczyć tę rozpiętość do przedziału $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$. Im bliższe jedności są wartości h_i , tym większe mogą być zmiany w estymacji regresji, nawet gdy odpowiednia reszta e_i jest mała. Tak więc usunięcie obserwacji, dla której h_i jest duże, może znacznie zmienić rezultaty estymacji metodą najmniejszych kwadratów.

Elementy diagonalne macierzy rzutowania mogą być także interpretowane jako odległości między i -tą obserwacją zmiennej objaśniającej x_i a wektorem średnich dla tych zmiennych \bar{x} . Rozpatrzmy przykład prostego modelu z jedną zmienną objaśniającą. Wtedy elementy diagonalne macierzy rzutowania przyjmują wartości:

$$h_i = \frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2}. \quad (2.14)$$

Wzór ten określa odległość między x_i a \bar{x} . Różnica między elementami diagonalnymi macierzy rzutowania a kwadratem odległości Mahalanobisa jest następująca:

$$MD_i^2 = (n-1) \left(h_i - \frac{1}{n} \right), \quad (2.15)$$

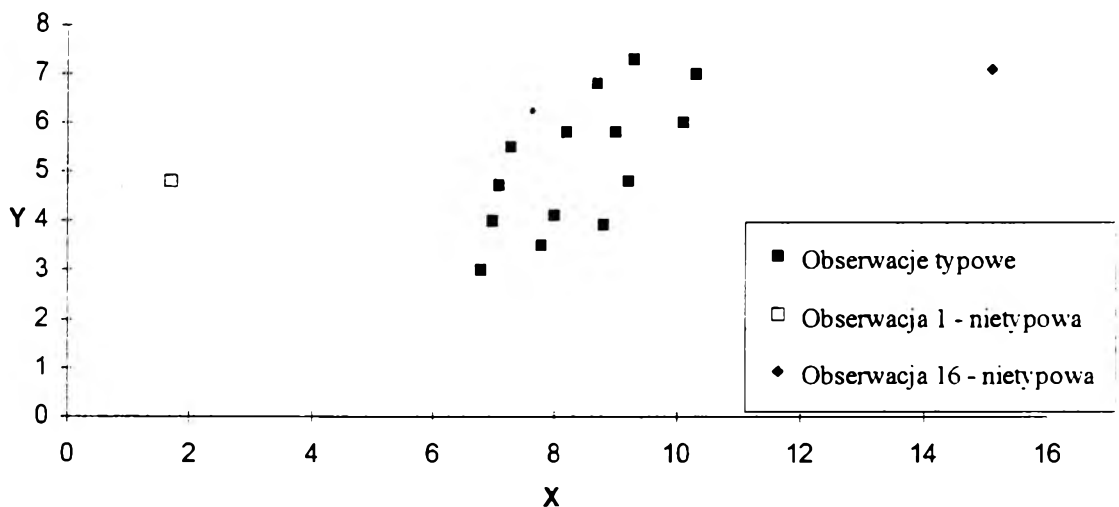
gdzie MD_i^2 jest kwadratem odległości Mahalanobisa.

Elementy głównej przekątnej macierzy \mathbf{H} informują jak bardzo dana obserwacja różni się od średniej.

Najmniejszą wartość równą $\frac{1}{n}$ wartość diagonalna h_i może przyjąć gdy i -ta obserwacja jest równa średniej. Wielkości h_i bliskie jedności mogą wystąpić gdy dana obserwacja jest bardzo oddalona od średniej i jednocześnie od wszystkich innych obserwacji. Widać zatem, iż wartości diagonalne macierzy rzutowania są szczególnie czułe na pojedyncze obserwacje nietypowe. W przypadku wystąpienia dwóch lub więcej takich obserwacji wartości h_i nie będą już tak duże.

Własność tę przedstawiono w przykładzie szóstym² zilustrowanym na rys. 2.1. W przykładzie tym jest szesnaście obserwacji, z których dwie: pierwsza i ostatnia (szesnasta) są obserwacjami nietypowymi (obserwacje uporządkowano według rosnącej wartości zmiennej objaśniającej). Odpowiednie wartości diagonalne z macierzy rzutowania dla tych obserwacji wynoszą: $h_1 = 0.485$ i $h_{16} = 0.485$. Gdy jednak rozpatrywano zbiór obserwacji tylko z jedną obserwacją nietypową uzyskano znacznie większe wartości diagonalne macierzy rzutowania $h_1 = 0.736$ (gdy usunięto ze zbioru obserwacji ostatnią obserwację) i $h_{16} = 0.736$ (dla zbioru obserwacji bez pierwszej obserwacji).

Rys. 2.1

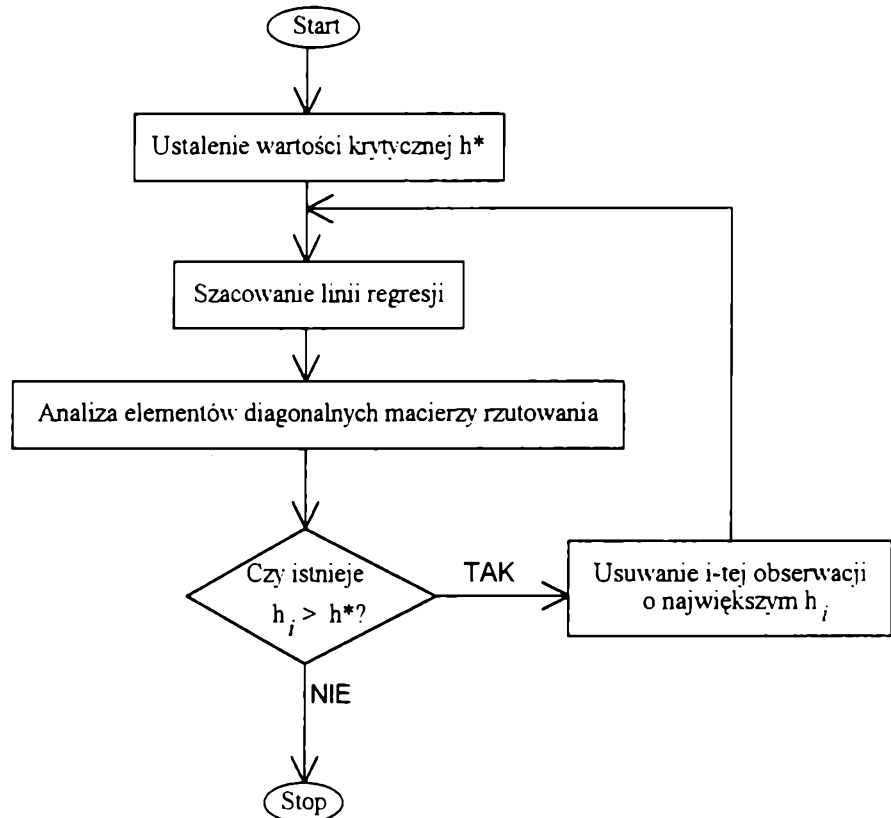


²Dane do przykładu znajdują się w dodatku A w tab. A.6.

W związku z tą własnością postępowanie przy wykrywaniu obserwacji nietypowych za pomocą macierzy rzutowania powinno być przeprowadzone według schematu zobrazowanego na rys. 2.2.

Rys. 2.2.

Schemat postępowania przy wykrywaniu obserwacji nietypowych za pomocą macierzy rzutowania



Najtrudniejszym elementem tego postępowania jest określenie krytycznego poziomu h_i , który informuje o tym, że i -ta obserwacja jest nietypowa. W literaturze proponuje się różne zasady określania wartości krytycznej h^* . Ponieważ przeciętna wartość h_i wynosi $\frac{m}{n}$ (gdy mamy m zmiennych objaśniających w modelu przy n obserwacjach) D. C. Hoaglin i R. E. Welsch [46] zaproponowali poziom krytyczny h^* wynoszący $2\frac{m}{n}$, zaś P. F. Velleman i R. E. Welsch [103] wyższy poziom równy trzem

przeciętnym wartościom $3\frac{m}{n}$. P. J. Huber [49] podzielił możliwy przedział wartości h_i na

trzy części i przyjął

- $h_i \in \left[\frac{1}{n}, 0.2 \right]$ jako bezpieczne,

- $h_i \in (0.2, 0.5]$ jako ryzykowne,

- $h_i \in (0.5, 1]$ jako niedopuszczalne.

Jeśli h_i przyjmie wartość 1, wtedy \hat{y}_i jest równe y_i i w konsekwencji reszta jest równa zero ($e_i = 0$). Innymi słowy jeśli $h_i = 1$, to oszacowana linia regresji przechodzi przez i -tą obserwację. Kiedy więc h_i jest duże, bliskie jedności, wtedy i -ta reszta jest niemal równa zero. Chociaż więc i -ta reszta otrzymana podczas estymacji metodą najmniejszych kwadratów jest bliska zero, nie można jednoznacznie stwierdzić czy ta obserwacja jest nietypowa. Jednocześnie jeśli $h_i = 1$, to, po wyeliminowaniu i -tej obserwacji ze zbioru obserwacji nie jest możliwe w ogóle oszacowanie modelu za pomocą metody najmniejszych kwadratów (macierz X jest wtedy osobliwa).

Analiza reszt i elementów diagonalnych macierzy rzutowania to metody diagnostyki obserwacji nietypowych, które wykrywają wszystkie niekorzystne skutki spowodowane przez obserwacje nietypowe (relatywnie duże reszty i znaczne zmiany położenia linii regresji po usunięciu obserwacji nietypowej ze zbioru wszystkich obserwacji). Proponuje się więc połączenie dwóch powyższych sposobów wykrywania obserwacji nietypowych. W tym celu można zastąpić reszty otrzymane metodą najmniejszych kwadratów przez tzw. reszty standaryzowane (ang. *standardized residuals*, *internally studentized residuals* R. D. Cook, S. Weisberg [24]):

$$e_i^s = \frac{e_i}{s\sqrt{1-h_i}}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.16)$$

gdzie:

e_i^s - reszta standaryzowana dla i -tej obserwacji,

$e_i = y_i - \hat{y}_i$ jest i -tą resztą otrzymaną metodą najmniejszych kwadratów,

s - odchylenie standardowe reszt, czyli

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^n e_i^2}. \quad (2.17)$$

Jeszcze lepiej zastąpić wielkość normującą - odchylenie standardowe reszt przez odchylenie standardowe reszt regresji oszacowanej na podstawie zbioru obserwacji bez i -tej obserwacji ze względu na to, że na wielkość odchylenia standardowego może mieć wpływ obserwacja nietypowa; czyli

$$s(i) = \sqrt{\frac{1}{n-1-k} \sum_{l \neq i} e(l)_l^2}, \quad (2.18)$$

gdzie:

$s(i)$ - odchylenie standardowe reszt regresji oszacowanej na podstawie zbioru obserwacji bez i -tej obserwacji,

$$l = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n,$$

$e(i)_l$ - l -ta reszta regresji obliczona na podstawie zbioru obserwacji bez i -tej obserwacji.

Otrzymamy wtedy reszty zwane resztami t -normalizowanymi (lub t -resztami, znormalizowanymi resztami t -Studenta, resztami studentyzowanymi) (ang. *studentized residuals*, *externally studentized residuals* R. D. Cook, S. Weisberg [24], *jackknifed residuals* P. J. Rousseeuw, A. M. Leroy [92], *cross-validatory residuals* A. C. Atkinson [5]):

$$e_i^* = \frac{e_i}{s(i)\sqrt{1-h_i}}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.19)$$

gdzie:

e_i^* - reszta t -normalizowana dla i -tej obserwacji.

Reszty t -normalizowane są normalizowane przez odchylenie standardowe reszt $s(i)$ i korygowane elementami diagonalnymi macierzy rzutowania. Reszty t -normalizowane

zawdzięczają swoją nazwę temu, że reszty te mają rozkład t -Studenta o $n - k$ stopniach swobody³.

Obserwacje mające duże reszty t -normalizowane można już ostatecznie uznać za nietypowe w regresji. Istnieje jeszcze tylko problem ustalenia, kiedy reszta t -normalizowana jest duża. Proponuję aby i -tą obserwację uznać za nietypową wtedy, gdy ma co do wartości bezwzględnej największą resztę i spełnia jeden z następujących warunków:

$$e_i^* < g(Q_1 - 3Q), \quad (2.20)$$

$$e_i^* > g(Q_3 + 3Q), \quad (2.21)$$

gdzie:

Q_1 - pierwszy kwartył reszt t -normalizowanych,

Q_3 - trzeci kwartył reszt t -normalizowanych,

Q - odchylenie ćwiartkowe reszt t -normalizowanych obliczane według wzoru:

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}, \quad (2.22)$$

g - stała ($g > 0$).

Stać g reguluje nam graniczny poziom reszt t -normalizowanych. Jeśli spodziewamy się co najwyżej jednej obserwacji nietypowej ustalamy wysoki poziom tej stałej (np. $g = 3$). Gdy spodziewamy się większej liczby obserwacji nietypowych ($n_0 \geq 2$), poziom tej stałej ustalamy na niższym poziomie (np. $g = 1$). Jest to spowodowane własnością macierzy rzutowania, o której była mowa wcześniej, a która ma wpływ także na wartości reszt t -normalizowanych.

Przy określaniu obserwacji nietypowych należy postępować iteracyjnie. Schemat tego postępowania jest przedstawiony na rys. 2.3.

³przy odpowiednich założeniach (patrz np. D. A. Belsley, E. Kuh, R. E. Welsch [13]).

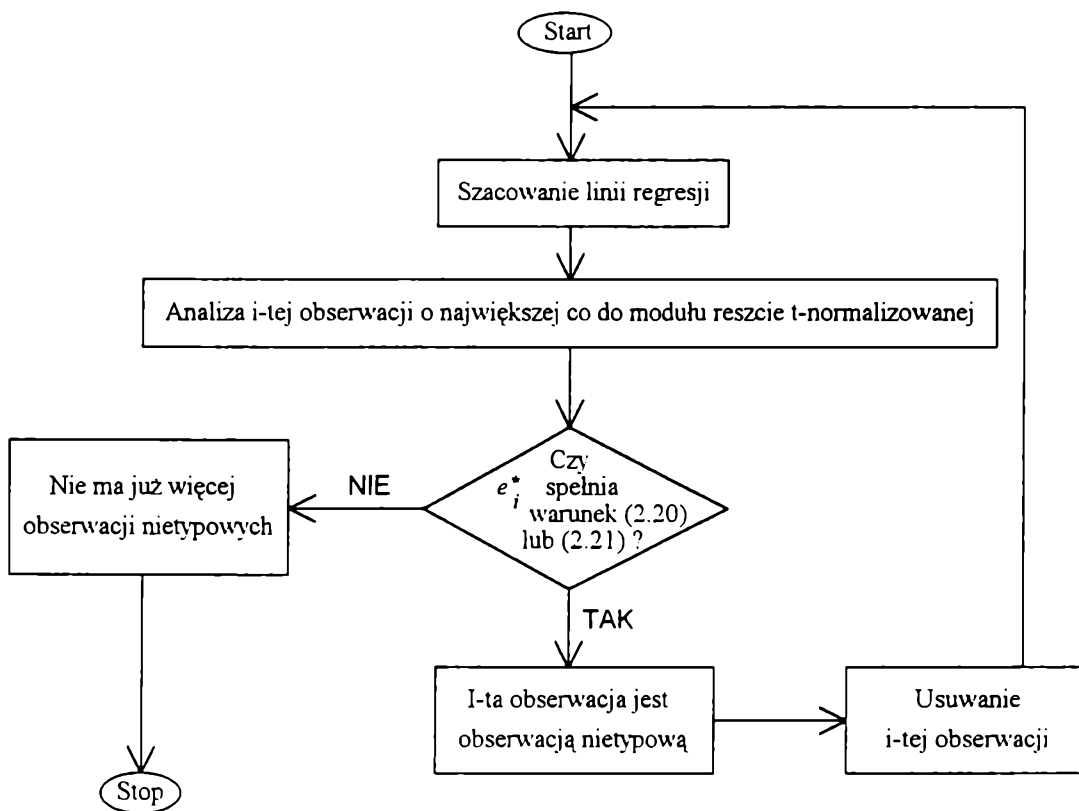
W każdej iteracji eliminuje się tylko jedną obserwację nietypową ze względu na omawianą wcześniej własność macierzy rzutowania.

Postępujemy w ten sposób tak długo, aż dla wszystkich obserwacji reszty t -normalizowane mieszczą się w przedziale

$$[g(Q_1 - 3Q), g(Q_3 + 3Q)]. \quad (2.23)$$

Rys. 2.3.

Schemat postępowania przy wykrywaniu obserwacji nietypowych za pomocą reszt studentyzowanych



Rozdział 3

Odporna estymacja regresji

3.1. WPROWADZENIE

Klasyczne metody estymacji regresji stosuje się w odniesieniu do całego zbioru obserwacji, traktując je jako pochodzące z jednej populacji. Ignorowany jest więc całkowicie fakt występowania obserwacji nietypowych, nie przystających do pozostałych, takich, co do których istnieją przypuszczenia, że pochodzą z innej populacji.

Najczęściej stosowana w analizie regresji metoda najmniejszych kwadratów jest nieodporna na występowanie obserwacji nietypowych. Gdy występują obserwacje nietypowe, wyniki otrzymane za pomocą tej metody nie odzwierciedlają ogólnej liniowej zależności występującej między zmiennymi.

Inne podejście (w odróżnieniu do diagnostyki regresji) w przewyżczeniu niekorzystnego efektu działania obserwacji nietypowych w analizie regresji polega na zastosowaniu do szacowania regresji estymatorów odpornych (ang. *robust estimators*), przy czym odporność jest tu rozumiana w wąskim zakresie jako odporność tylko na obserwacje nietypowe¹.

Koncepcja estymatorów odpornych opiera się na podziale zbioru obserwacji na tzw. rdzeń zbioru oraz podzbiór obserwacji nietypowych. O istotnych właściwościach

¹Estymator odporny w szerszym sensie jest niewrażliwy na odchylenia od założeń, przy których został uzyskany (H. Theil [85]).

zbioru obserwacji decyduje przede wszystkim (lub wyłącznie) rdzeń zbioru. Dlatego też w analizie regresyjnej powinny być uwzględnione w pierwszym rzędzie obserwacje należące do rdzenia.

Metod odpornej estymacji powstało w ostatnim czasie sporo. Ich przegląd zaprezentowano m. in. w pracach P. J. Rousseeuwa, A. M. Leroy'a [92] i D. C. Hoaglina i innych [45]. W pracy F. R. Hampela i in. [40] wyróżnione są trzy główne klasy estymatorów odpornych w regresji:

1. *M*-estymatory,
2. *L*-estymatory,
3. *R*-estymatory.

Pierwsze litery pochodzą odpowiednio od Maksimum wiarygodności, Liniowej kombinacji statystyk pozycyjnych oraz Rangowania obserwacji. W dalszej części tego rozdziału przedstawimy te rodziny estymatorów.

W literaturze wymienia się jeszcze 4 inne klasy estymatorów: *A*-estymatory (D. A. Lax [73]), *D*-estymatory (wprowadzone przez J. Wolfowitza [108]), *P*-estymatory (M. V. Johns [54]) i *S*-estymatory (P. J. Rousseeuw i V. Yohai [93]). Pierwsze litery pochodzą odpowiednio od Asymptotycznej wariancji, minimalnego Dystansu, uogólnienia estymatorów Pitmana i Skalowania statystyki. Nie są one jednak z różnych powodów jeszcze stosowane. Dlatego też zostały pominięte w naszych rozważaniach.

3.2. *M*-ESTYMATORY

W 1973 r. P. J. Huber [48] wprowadził koncepcję *M*-estymatorów (oznaczanych przez α_M) w regresji. Zakłada się w niej, że poszczególnym obserwacjom przyporządkowuje się wagi interpretowane jako "stopnie typowości" obserwacji. W regresji wagi te skonstruowane są w ten sposób, że obserwacje o resztach bliskich zeru mają wagi wysokie, natomiast w miarę zwiększania się bezwzględnych wartości reszt

wagi maleją do zera.

W M -estymatorach minimalizuje się funkcję

$$\sum_{i=1}^n \rho(e_i), \quad (3.1)$$

gdzie ρ jest (wypukłą i różniczkowalną) funkcją wagową. Wobec tego:

$$\sum_{i=1}^n \rho(y_i - \mathbf{x}_i \alpha_M) = \min_{\alpha} \sum_{i=1}^n \rho(y_i - \mathbf{x}_i \alpha). \quad (3.2)$$

Estymator α_M jest równocześnie określony przez funkcję ψ będącą pochodną funkcji ρ ($\psi = \rho'$):

$$\sum_{i=1}^n \psi(y_i - \mathbf{x}_i \alpha_M) \mathbf{x}_i^T = 0. \quad (3.3)$$

W tab. 3.1 zaprezentowano 5 często stosowanych funkcji $\rho(t)$. Na rys. 3.1a, 3.1c, 3.1e, 3.1g i 3.1i przedstawiono wykresy tych funkcji a na rys. 3.1b, 3.1d, 3.1f, 3.1h, 3.1j wykresy odpowiadających im funkcji $\psi(t)$.

Jeśli funkcja $\rho(t)$ przyjmie postać $\frac{t^2}{2}$ (pierwszy punkt w tab. 3.1), to otrzymamy estymator klasycznej metody najmniejszych kwadratów. Równania (3.3) po podstawieniu $\psi(t) = t$ redukują się do równań normalnych klasycznej metody najmniejszych kwadratów:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{x}_i \alpha) \mathbf{x}_i^T = 0. \quad (3.4)$$

Drugi punkt z tab. 3.1 odpowiada estymatorowi najmniejszych absolutnych odchyłeń α_A , którego twórcą w obecnym kształcie jest R. Edgeworth (1887 r.). Tutaj minimalizuje się

$$\sum_{i=1}^n |e_i| = \sum_{i=1}^n |y_i - \mathbf{x}_i \alpha_A|. \quad (3.5)$$

Estymator ten, podobnie jak estymator najmniejszych kwadratów, przyporządkowuje wszystkim resztom te same wagi, nie jest więc *sensu stricto* estymatorem odpornym. Wspomina się więc o nim w tym miejscu tylko z tego powodu,

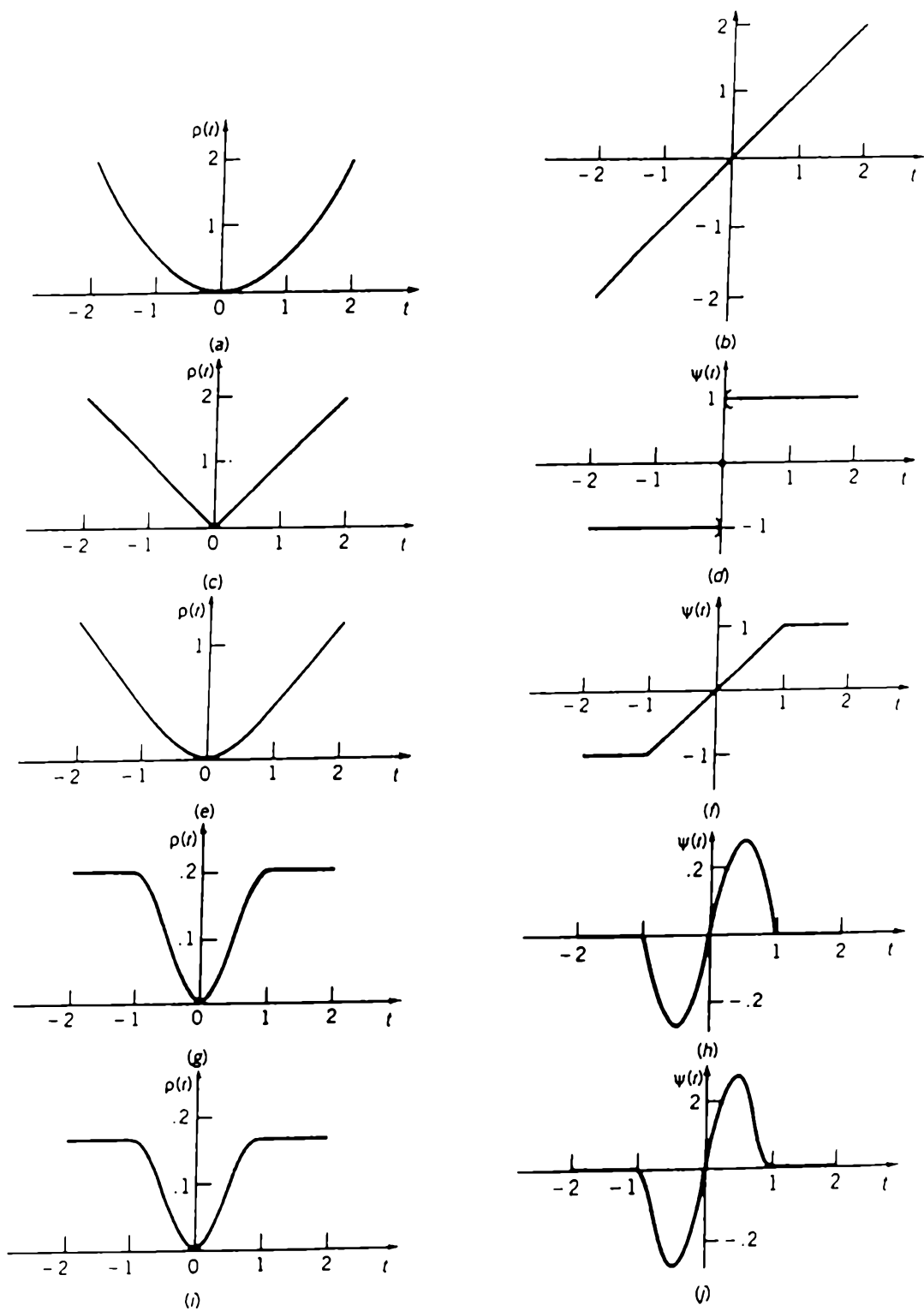
ponieważ jest on bardziej odporny od estymatora najmniejszych kwadratów. Jest to spowodowane tym, że w metodzie najmniejszych absolutnych odchyłeń duże reszty mają mniejsze wartości niż w metodzie najmniejszych kwadratów.

Tabela 3.1

Lp.	$\rho(t)$	$\psi(t)$	Zakres t
1	$\frac{t^2}{2}$	t	$ t < \infty$
2	$ t $	$\text{sgn}(t)$	$ t < \infty$
3	$\frac{t^2}{2}$	t	$ t \leq H$
	$H t - \frac{k^2}{2}$	$H\text{sgn}(t)$	$ t > H$
4	$A^2 \left[1 - \cos\left(\frac{t}{A}\right) \right]$	$A \sin\left(\frac{t}{A}\right)$	$ t \leq \pi A$
	$2A^2$	0	$ t > \pi A$
5	$\frac{B^2}{6} \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{t}{B} \right)^2 \right]^3 \right\}$	$t \left[1 - \left(\frac{t}{B} \right)^2 \right]^2$	$ t \leq B$
	$\frac{B^2}{6}$	0	$ t > B$

Źródło: D. C. Hoaglin i in. [45] s. 293.

Pozostałe trzy punkty tab. 3.1 są już typowymi M -estymatorami. Stałe H , A , B w tych przypadkach są często nazywane stałymi regulującymi (ang. *tuning constants*). Kiedy typ funkcji ψ jest określony, stała regulująca określa własności towarzyszące estymatorowi: efektywność, funkcję wpływu, wrażliwość na duże reszty.



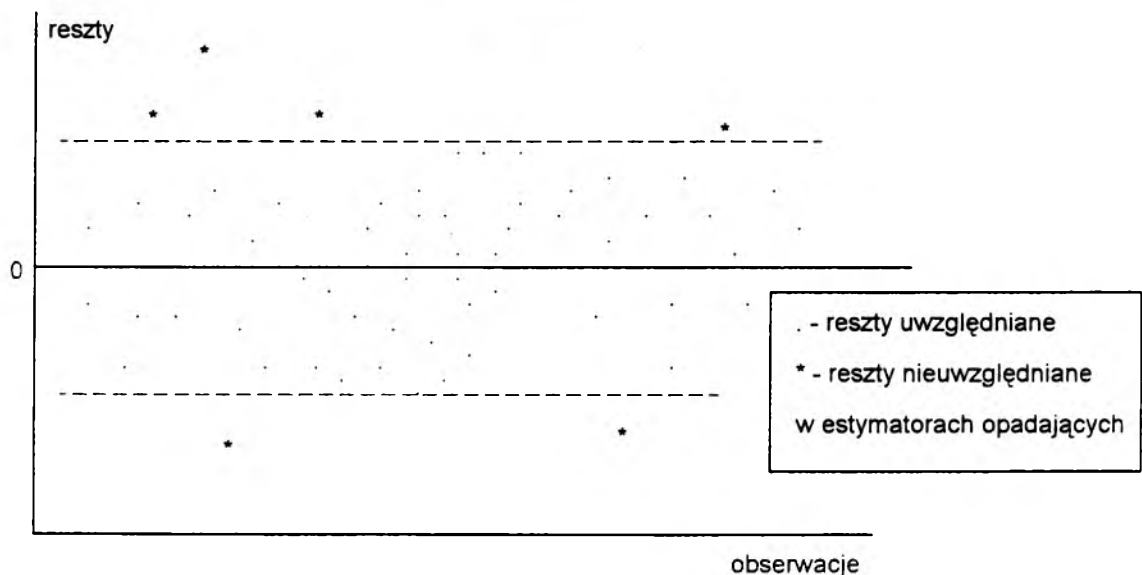
Rys. 3.1. Funkcje $\rho(t)$ i $\psi(t)$ z tab. 3.1. Przyjęto $H = 1$, $A = \frac{1}{\pi}$ i $B = 1$.

Źródło: D. C. Hoaglin i in. [45] s. 294.

Trzeci estymator (a właściwie rodzina estymatorów zależna od parametru k) został wprowadzony przez P. J. Hubera. Ta klasa estymatorów obejmuje dwa wcześniejsze estymatory: gdy $k = \infty$ (wtedy $\psi(t) = t$) jest to estymator najmniejszych kwadratów, gdy $k = 0$ (wtedy $\psi(t) = \text{sgn}(t)$) jest to estymator najmniejszych absolutnych odchyłeń.

Czwarty estymator został zaproponowany przez D. F. Andrews [2]. Ostatni estymator zwany estymatorem podwójnej wagi (ang. *biweight estimator*) został wprowadzony przez J. W. Tukey'a [10]. Estymatory te należą do klasy estymatorów opadających (ang. *redescending estimators*), ponieważ funkcje ψ tych estymatorów są zbieżne do zera gdy wartość bezwzględna argumentu jest większa od zadanej (przez stałe A i B) liczby dodatniej. Oznacza to, że na estymację nie mają wpływu reszty przekraczające pewien ustalony próg. Działanie estymatorów opadających zostało przedstawione na rys. 3.2.

Rys. 3.2



Reszty (jak już wspomniano w rozdziale pierwszym) nie są dobrym wskaźnikiem nietypowości obserwacji, ponieważ nie uwzględniają obserwacji wpływowych. Dlatego też proponuję w M -estymatorach zamiast funkcji wagowej reszt rozpatrywać funkcję

wagową przedstawionych w rozdziale 2 reszt standaryzowanych (ze względów technicznych (obliczeniowych) trudno byłoby zastosować w M -estymatorach lepsze reszty t -normalizowane). Zatem w takiej sytuacji w M -estymatorach minimalizuje się funkcję

$$\sum_{i=1}^n \rho(e_i^s), \quad (3.6)$$

gdzie e_i^s - reszta standaryzowana.

Tak skonstruowany estymator uwzględnia także obserwacje wpływowe. Wynika to z ważenia reszt standaryzowanych wartościami z głównej przekątnej macierzy rzutowania.

W literaturze (por. np. F. R. Hampel i in. [40]) wymienia się również klasę W -estymatorów. Estymatory te są jednak tylko alternatywną formą M -estymatorów. Zastąpmy funkcję $\psi(t)$ przez $t w(t)$ w równaniu (3.3). W ten sposób zdefiniujemy funkcję wag

$$w(t) = \frac{\psi(t)}{t}. \quad (3.7)$$

Oznaczmy: $w_i = w(y_i - \mathbf{x}_i \alpha)$. Teraz równania (3.3) przyjmą postać

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{x}_i \alpha) w_i \mathbf{x}_i^T = \mathbf{0}. \quad (3.8)$$

Rozwiązanie (nie zawsze jest ono jedno) równania (3.8) oznaczane jako α_{W^*} jest nazywane W -estymatorem. Nazwa tego estymatora pochodzi od Wag, ponieważ równanie (3.8) może być uważane jako "równanie normalne" dla ważonej metody najmniejszych kwadratów w regresji. Zapiszmy jeszcze równanie (3.8) w inny sposób:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T w_i \mathbf{x}_i \alpha = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^T w_i y_i. \quad (3.9)$$

Gdy zapiszemy wagi w postaci macierzowej:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & \dots \\ \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & w_n \end{bmatrix},$$

wtedy równanie (3.9) przyjmie postać:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X} \alpha = \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{y}. \quad (3.10)$$

Rozwiązanie dla M - i W -estymatorów jest takie same, ponieważ równania (3.3) i (3.8) są dwoma różnymi formami jednego równania.

Zastosowanie M - (czy W -) estymatorów jest trudne, ponieważ rozwiązanie równań (3.3) czy (3.8) jest trudne numerycznie. W tym sensie estymator W jest jedną z procedur numerycznych w rozwiązywaniu równania (3.3) czyli dla M -estymatora.

3.3. L-ESTYMATORY

L-estymatory zostały wprowadzone do regresji przez P. J. Bickela [13]. Estymatory te opierają się na zasadzie uciniania (ang. *trimming*). Zasada ta polega na odrzuceniu obserwacji, co do których istnieje przypuszczenie, że są nietypowe i estymowaniu tylko z zastosowaniem pozostałych obserwacji (R. Koenker i G. Bassett [60]).

Aby określić te estymatory, dla stałej $p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ definiuje się

$$\psi_p(t) = \begin{cases} p-1, & \text{gdzie } t < 0 \\ p, & \text{gdzie } t \geq 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\rho_p(t) = t\psi_p(t) = \begin{cases} t(p-1), & \text{gdzie } t < 0 \\ tp, & \text{gdzie } t \geq 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

J. F. Claerbout i F. Muir [21] interpretują funkcję ρ jako p -ty kwantyl. W regresji p -ty kwantyl $\alpha(p)$ jest definiowany jako taka wartość α , która jest rozwiązaniem równania

$$\sum_{i=1}^n \rho_p(y_i - x_i \alpha) = \min. \quad (3.13)$$

L -estymatory są definiowane jako p -ucięte estymatory najmniejszych kwadratów (ang. *p-trimmed least squares estimators*) $\alpha_L(p)$ w następujący sposób: usuwamy każdą obserwację powyżej kwantyla $\alpha(1 - p)$ i obliczamy estymator najmniejszych kwadratów bez usuniętych obserwacji.

Przykład takiego estymatora podają D. Ruppert i R. J. Carroll w pracy [94]. Wprowadzają oni p -ucięty estymator najmniejszych kwadratów $\alpha_L(p)$ dla $p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, który porządkuje obserwacje na podstawie obliczonych reszt z początkowym estymatorem α_0 . Usuwane są obserwacje o $[np]$ najmniejszych i $[np]$ największych resztach (symbol $[]$ oznaczają tutaj część całkowitą). Estymator $\alpha_L(p)$ jest estymatorem najmniejszych kwadratów po usunięciu $2[np]$ obserwacji.

Zasadę działania estymatora D. Rupperta i R. J. Carrola pokażemy na przykładzie pierwszym² (patrz rozdział 1, rys. 1.1). Przyjmiemy, że estymatorem początkowym α_0 jest estymator najmniejszych kwadratów a $p = \frac{1}{16}$. Ponieważ $n = 16$, zatem odrzucimy dwie obserwacje: jedną o najmniejszej, a drugą o największej reszcie. Linia regresji po oszacowaniu za pomocą estymatora początkowego α_0 jest następująca:

$$\hat{y} = -0.96591x + 1.972195. \quad (3.14)$$

Reszty są przedstawione w tab. 3.2.

Odrzucamy obserwacje oznaczone gwiazdką: dwunastą - nietypową (o największej reszcie) oraz szesnastą - typową (o najmniejszej reszcie) i jeszcze raz szacujemy linię regresji metodą najmniejszych kwadratów. Otrzymujemy następującą ostateczną linię regresji:

$$\hat{y} = -0.211705x + 2.145282. \quad (3.15)$$

Ponieważ reszty nie są dobrym wskaźnikiem nietypowości obserwacji, dlatego też proponuję w L -estymatorach zastąpić zwykle reszty resztami t -normalizowanymi

²Dane do przykładu znajdują się w dodatku A.

(omawianymi w rozdziale 2). Zatem w p -uciętym estymatorze najmniejszych kwadratów $\alpha_L(p)$ D. Rupperta i R. J. Carrolla usuwane będą obserwacje o $[np]$ najmniejszych i $[np]$ największych resztach t -normalizowanych dla początkowego estymatora α_0 (który jest estymatorem najmniejszych kwadratów).

Tabela 3.2

i	e_i
1	0.12440
2	0.05337
3	0.00167
4	-0.02901
5	-0.35969
6	-0.10174
7	-0.18242
8	-0.05344
9	-0.24379
10	-0.30515
11	-0.33583
12	* 2.92383
13	-0.36651
14	-0.22788
15	-0.40856
16	* -0.48924

Porównajmy wyniki otrzymane dla zwykłych i t -normalizowanych reszt dla danych z przykładu drugiego (patrz rozdział 1, rys. 2) dla estymatora D. Rupperta i R. J. Carrolla. Podobnie jak poprzednio przyjmiemy, że estymator początkowy α_0 jest estymatorem najmniejszych kwadratów a $p = \frac{1}{11}$ (w przykładzie jest jedenaście obserwacji). Linia regresji po oszacowaniu za pomocą estymatora początkowego α_0 jest następująca:

$$\hat{y} = -0.045822x + 2.232370. \quad (3.16)$$

Reszty (zwykłe i t -normalizowane) są przedstawione w tab. 3.3.

Gdy stosujemy zwykłe reszty do diagnostyki odrzucamy obserwacje pierwszą i

dziesiątą. Nie odrzucamy więc obserwacji jedenastej - nietypowej (patrz rys. 1.2). Gdybyśmy nawet przyjęli $p = \frac{2}{11}$ (odrzucamy wtedy cztery z jedenastu wszystkich obserwacji: dwie największe i dwie najmniejsze) i tak obserwacja nietypowa będzie brana pod uwagę przy ponownym szacowaniu linii regresji.

Tabela 3.3

i	e_i	e_i^*
1	* -1.60488	-1.61718
2	-1.20029	-1.12210
3	-0.69571	-0.61511
4	-0.38655	-0.33320
5	-0.18197	-0.15548
6	0.32262	0.27583
7	0.82720	0.72533
8	0.73178	0.63638
9	1.34095	1.24265
10	* 1.85011	* 1.89506
11	-1.00326	* -22.09538

Gdy zastosujemy zaś reszty t -normalizowane po wstępnej estymacji eliminujemy obserwacje dziesiątą (typową) i jedenastą (nietypową). Zatem od razu likwidujemy wpływ tej obserwacji na dalszą estymację regresji.

Ponieważ omawiane wyżej L -estymatory ucinają zawsze tyle samo obserwacji o największych jak i o najmniejszych resztach, może powodować to eliminowanie obserwacji typowych (tak jak w podanych przykładach). Proponuję więc inny estymator (L_G -estymator) ucinający tylko obserwacje nietypowe. Algorytm estymacji jest iteracyjny i opiera się na wspomnianej w rozdziale poprzednim procedurze wykrywania obserwacji nietypowych (patrz schemat zaprezentowany na rys. 2.3):

1. Oblicza się estymator początkowy α_0 metodą najmniejszych kwadratów.
2. Na podstawie obliczonych reszt t -normalizowanych dla danego estymatora sprawdza się warunki (2.20) i (2.21) występowania obserwacji nietypowych:

Jeśli żaden z tych warunków nie jest spełniony, oznacza to, że nie ma już

obserwacji nietypowych. W przeciwnym wypadku usuwana jest obserwacja o największej co do wartości bezwzględnej reszcie t -normalizowanej e_i^* i obliczany jest ponownie estymator najmniejszych kwadratów bez usuniętej obserwacji. Następnie przechodzimy ponownie do punktu drugiego procedury. Postępujemy w ten sposób tak długo, aż dla wszystkich obserwacji reszty t -normalizowane mieszczą się w przedziale

$$[g(Q_1 - 3Q), g(Q_3 + 3Q)]. \quad (3.17)$$

L_G -estymator jest odporny do momentu gdy liczba obserwacji nietypowych jest mniejsza od $\frac{1}{4}$ wszystkich obserwacji. Wynika to z zastosowania kwartyli do określania granicznego poziomu typowości. L_G -estymator ma dodatkowo tę zaletę, że jako jedyny estymator odporny pokazuje, które obserwacje są nietypowe. Spełnia więc dodatkowo funkcję diagnostyczną.

Zasadę działania L_G -estymatora pokażemy na omawianym przykładzie drugim.

Przyjmujemy, że estymator początkowy α_0 jest estymatorem najmniejszych kwadratów a $g = 3$. Linia regresji po oszacowaniu estymatorem początkowym α_0 była już wyznaczana - patrz wzór (3.16). Reszty t -normalizowane też były już obliczane (patrz tab. 3.3).

Największa co do wartości bezwzględnej reszta t -normalizowana odpowiada jedenastej obserwacji (nietypowej). Nie mieści się ona w przedziale (3.17), który dla tych reszt jest następujący:

$$[-11.680, 10.489]. \quad (3.18)$$

Zatem obserwację jedenastą uznajemy za nietypową, usuwamy ją z danych i jeszcze raz szacujemy linię regresji. Teraz jest ona następująca:

$$\hat{y} = 2.783883x - 0.921465. \quad (3.19)$$

W kolejnym kroku obliczamy reszty t -normalizowane (patrz tab. 3.4).

Teraz największa co do modułu reszta t -normalizowana odpowiada siódmej

obserwacji. Jednak reszta ta mieści się w przedziale (3.17), który dla tych reszt jest następujący:

$$[-7.723, 7.118]. \quad (3.20)$$

Tabela 3.4

i	e_i^*
1	-1.17873
2	-0.18773
3	1.47196
4	-0.40009
5	-0.93920
6	0.51756
7	* 2.78039
8	-0.49828
9	-0.22583
10	-0.71922

Zatem obserwację siódmą uznajemy za obserwacją typową, co oznacza, że nie ma już więcej obserwacji nietypowych.

Tak więc ostateczna linia regresji dla tego przykładu, to linia ostatnio szacowana i przedstawiona we wzorze (3.19) a jedyna obserwacja nietypowa to obserwacja jedenasta.

Do L -estymatorów zalicza się także metody estymacji oparte na medianie. Do grupy tych estymatorów należy metoda najmniejszej mediany kwadratów (ang. *least median of squares*) zaproponowana przez P. J. Rousseeuwa [91]. Jest to jedna z metod charakteryzujących się największą odpornością na występowanie obserwacji nietypowych. W metodzie tej klasyczne kryterium minimalizacji sumy kwadratów reszt regresji zastąpiono kryterium minimalizacji mediany kwadratów reszt regresji, czyli wyznacza się minimum następującego wyrażenia:

$$\text{med}_i e_i^2, \quad (3.21)$$

gdzie med oznacza medianę.

W metodzie tej uwolnienie się od wpływu obserwacji nietypowych następuje przez

wzięcie mediany kwadratów reszt, tzn. środkowego co do wielkości kwadratu reszty.

Metoda najmniejszej mediany kwadratów jest więc skrajnym przykładem L -estymatora. Bierze się pod uwagę tylko jedną, środkową wartość.

Metoda ta jest bardzo odporna na obserwacje nietypowe. Punkt załamania dla metody najmniejszej mediany kwadratów wynosi

$$\varepsilon^*(T, \mathbf{z}) = \frac{(n+1)/2}{n} \quad (3.22)$$

i zbliża się do 50% przy liczbie obserwacji dążącej do nieskończoności.

3.4. R-ESTYMATORY

Klasa R-estymatorów zaproponowana przez L. A. Jaeckela [50] minimalizuje sumę ważoną reszt, w której wagami są rangi:

$$D(\mathbf{e}) = \sum_{i=1}^n w_n(R_i) e_i. \quad (3.23)$$

gdzie $R_i = R(e_i) = R(y_i - \mathbf{x}_i \alpha)$ jest rangą reszty e_i w zbiorze wszystkich reszt $\{e_1, \dots, e_n\}$, a $w_n(k)$ jest niemalejącą funkcją różną od zera spełniającą warunek

$$\sum_{k=1}^n w_n(k) = 0. \quad (3.24)$$

W efekcie R -estymator w regresji minimalizuje rozproszenie reszt.

Niech $e_{(1)} < e_{(2)} < \dots < e_{(n)}$ oznaczają reszty uporządkowane. Wtedy

$$D(\mathbf{e}) = \sum_{i=1}^n w_n(R_i) e_i = \sum_{k=1}^n w_n(k) e_{(k)} \quad (3.25)$$

może być rozpatrywana jako miara rozrzutu reszt. Ponieważ $w(k)$ jest funkcją niemalejącą i spełniającą równanie (3.24), dla największej reszty $e_{(n)}$ $w(n)$ ma wartość dodatnią, podczas gdy dla najmniejszej reszty $e_{(1)}$ wartość $w(1)$ jest ujemna. Tak więc suma w równaniu (3.25) zwykle składa się z nieujemnych składników. Gdy np. weźmiemy wagi F. Wilcoxona [107]

$$w_n(k) = \frac{k}{n+1} - \frac{1}{2}, \quad (k = 1, \dots, n),^3 \quad (3.26)$$

mamy $w_n(k) = -w_n(n+1-k)$; tak więc

$$\sum_{k=1}^n w_n(k) e_{(k)} = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} w_n(n+1-k) (e_{(n+1-k)} - e_{(k)}). \quad (3.27)$$

Zwykle $\sum_{i=1}^n w_n(R_i) e_i$ jest funkcją reszt wolniej rosnącą niż $\sum_{i=1}^n e_i^2$ ale szybciej rosnącą od $\sum_{i=1}^n |e_i|$.

Dla danego D , odpowiedni estymator α_D jest to takie α , dla którego $D(y - X\alpha)$ jest minimalizowana.

Analogicznie do M -estymatorów proponuję w R -estymatorach zastąpić zwykłe reszty resztami standaryzowanymi (podobnie jak poprzednio ze względów technicznych (obliczeniowych) nie zastosowano reszt t -normalizowanych). W tym wypadku klasa R -estymatorów minimalizuje sumę ważoną reszt standaryzowanych:

$$\sum_{i=1}^n w_n(R_i^s) e_i^s, \quad (3.28)$$

gdzie $R_i^s = R(e_i^s)$ jest rangą reszty standaryzowanej e_i^s w zbiorze wszystkich reszt standaryzowanych $\{e_1^s, \dots, e_n^s\}$.

Tak skonstruowany R -estymator uwzględnia także obserwacje wpływowe, dla których zwykłe reszty są małe.

Omawiane klasy estymatorów różnią się dość znacznie między sobą. Cechą wspólną M - i R -estymatorów i metody najmniejszej mediany kwadratów (L_M -estymator) są trudności numeryczne przy rozwiązywaniu problemu za ich pomocą. Nie ma takich trudności dla pozostałych L -estymatorów. Rozwiązanie za ich pomocą bowiem, to iteracyjne stosowanie metody najmniejszych kwadratów: dla estymatora D. Rupperta i R. J. Carrolla dwukrotnie stosujemy MNK a dla L_G -estymatora iteracji jest n_0+1 (gdzie n_0

³Przykładowo dla 19 obserwacji otrzymujemy wagi od -0.45 do 0.45 co 0.05.

oznacza liczbę obserwacji nietypowych).

Rozdział 4

Symulacyjne badanie estymatorów odpornych

4.1. WPROWADZENIE

W ostatnich latach coraz większego znaczenia w regresji zaczynają nabierać badania symulacyjne. Przez symulację rozumie się "dokonywanie - na podstawie danego modelu i przy użyciu elektronicznych maszyn cyfrowych - odpowiednich masowych obliczeń, które pozwalają następnie zorientować się w sprawności modelu" (Z. Pawłowski [83] s. 302). Jednym z ważniejszych kierunków zastosowań metod symulacyjnych jest badanie własności estymatorów odpowiadających wyróżnionym metodom estymacji. Postępowanie symulacyjne polega wtedy na tym, iż zakłada się pewien model oraz wartości jego parametrów. Następnie wielokrotnie generuje się próby odpowiadające temu modelowi i na ich podstawie oblicza się wartości ocen parametrów. Jeżeli liczba takich prób jest duża (np. rzędu kilkudziesięciu), to można na tej podstawie ocenić rozkład estymatorów parametrów. "Porównując tak oszacowany rozkład z prawdziwą wartością parametru można wyciągnąć wnioski o ewentualnym obciążeniu, wariancji itp." (Z. Pawłowski [83] s. 304). Zwykle rozpatruje się próby o różnej liczbie obserwacji (np. $n = 10, 20, 30, 50, 100$), co pozwala stwierdzić, jak zmieniają się własności estymatorów w miarę zwiększania liczebności próby.

Dla weryfikacji przydatności empirycznej przedstawionych w poprzednim rozdziale metod estymacji przeprowadziłem szereg eksperymentów symulacyjnych. Do badania wybrałem różne estymatory.

Po pierwsze wybrałem estymator najmniejszych kwadratów (MNK), jako jedyny przedstawiciel estymatorów nieodpornych w celu porównania wyników z estymatorami odpornymi.

Z tego powodu do badania nie wybrałem estymatora najmniejszych absolutnych odchyleń ponieważ nie jest on estymatorem odpornym.

W następnej kolejności wybrałem przedstawicieli wszystkich klas estymatorów odpornych. Klasę M -estymatorów reprezentuje estymator P. J. Hubera (M_H -estymator) oraz zaproponowana przeze mnie jego modyfikacja z resztami standaryzowanymi (M_{HS} -estymator).

Klasę L -estymatorów reprezentują aż trzy estymatory: D. Rupperta i R. J. Carrolla z resztami t -normalizowanymi (L_S -estymator), estymator zaproponowany przeze mnie (L_G -estymator) oraz estymator najmniejszej mediany kwadratów (L_M -estymator).

Klasę R -estymatorów reprezentuje typowy estymator z wagami Wilcoxon'a (R_H -estymator) oraz zaproponowana przeze mnie jego modyfikacja dla reszt standaryzowanych (R_{HS} -estymator).

Tak więc do eksperymentów symulacyjnych wybrałem osiem estymatorów.

4.2. ALGORYTM

Rozwiązanie problemu estymacji za pomocą estymatorów odpornych zazwyczaj nie jest możliwe w sposób analityczny¹. W naszym przypadku dotyczy to wszystkich M i R -estymatorów oraz metody najmniejszej mediany kwadratów. Trzeba więc dla tych

¹To znaczy nie ma rozwiązania danego za pomocą odpowiedniego wzoru matematycznego.

estymatorów zastosować algorytm komputerowy, który znajduje przybliżone rozwiązanie problemu. Algorytm ten jest następujący (P. J. Rousseuw, A. M. Leroy [92]):

Dla k obserwacji (w przestrzeni k -wymiarowej) oznaczonych jako $J = \{i_1, \dots, i_k\}$ wyznaczamy hiperpłaszczyznę² i oznaczamy wektor parametrów tej hiperpłaszczyzny jako \mathbf{a}_j . Każde rozwiązanie \mathbf{a}_j nazwiemy próbnym estymatorem. Dla każdego próbnego estymatora \mathbf{a}_j określimy funkcję odpowiadającą danemu estymatorowi dla wszystkich obserwacji. Przykładowo dla metody najmniejszej mediany kwadratów obliczymy

$$\text{med}_{i=1, \dots, n} (y_i - \mathbf{x}_i \mathbf{a}_j)^2, \quad (4.1)$$

gdzie med oznacza medianę.

Spośród wszystkich próbnych estymatorów (J_1, J_2, \dots, J_l , gdzie $l = \binom{k}{n}$) wybieramy ten z najmniejszą wartością funkcji odpowiadającej danemu estymatorowi (przykładowo dla metody najmniejszej mediany kwadratów szukamy najmniejszą wartość wyrażenia (4.1) dla wszystkich J , czyli J_1, J_2, \dots, J_l).

Ilustrację przedstawionej idei algorytmu zaprezentowano dla przykładu w przestrzeni dwuwymiarowej na rys. 4.1.

Dla tych danych $n = 9$ i $k = 2$. Algorytm rozważa wszystkie pary punktów. My ograniczymy objaśnienia tylko do trzech kombinacji (f, g), (f, h) i (g, h). Rozpoczynamy od punktów f i g . Hiperpłaszczyzna (tutaj jest to linia) przechodząca przez punkty f i g jest rozwiązaniem układu równań:

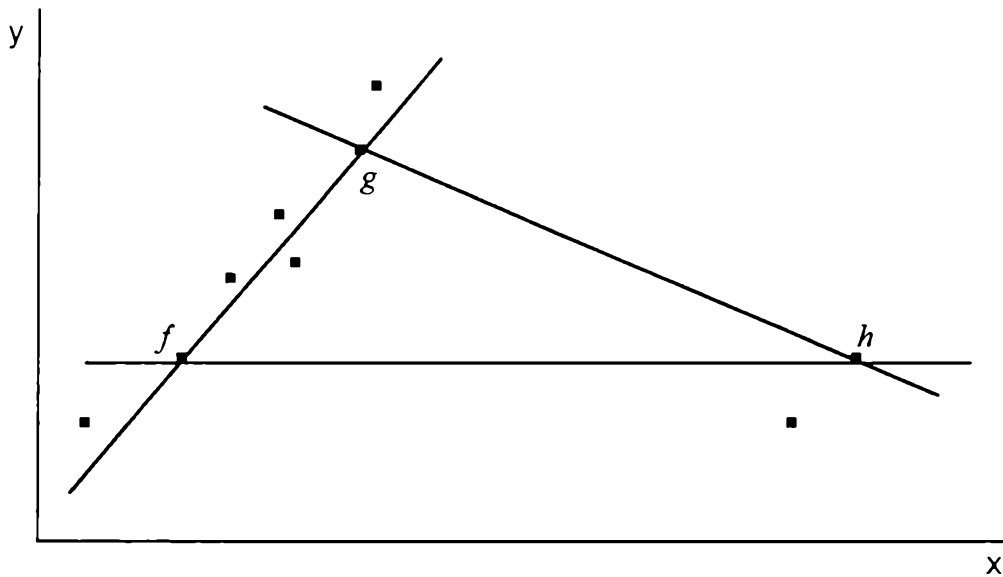
$$\begin{cases} y_f = a_1^0 + a_2^0 x_f \\ y_g = a_1^0 + a_2^0 x_g \end{cases} \quad (4.2)$$

gdzie (x_f, y_f) i (x_g, y_g) są odpowiednio współrzędnymi punktów f i g . Rezultatem próbnej estymacji jest wektor $\begin{bmatrix} a_1^0 \\ a_2^0 \end{bmatrix}$. Następnie dla wszystkich 9 punktów są obliczane wyrażenia

²Aby określić hiperpłaszczyznę w przestrzeni k -wymiarowej potrzeba k punktów (w przestrzeni dwuwymiarowej potrzeba dwóch punktów do wyznaczenia prostej).

odpowiadające estymatorom (przykładowo dla metody najmniejszej mediany kwadratów obliczamy reszty dla tej linii dla wszystkich punktów a następnie obliczamy medianę kwadratów reszt i porównujemy ją z najmniejszą wartością znaną dla wcześniejszych punktów). Podobnie postępujemy dla prostych przechodzących przez punkty f i h oraz g i h . Powtarzając tę procedurę dla każdej pary punktów otrzymujemy najlepszą czyli najmniejszą wartość (zadanej) funkcji.

Rys. 4.1



Algorytm ten jest wprawdzie bardzo pracołłonny, rozpatruje bowiem $\binom{k}{n}$ estymatorów próbnych, jednak przy obecnej prędkości działania komputerów dla niezbyt dużych modeli (liczba obserwacji i zmiennych) jest możliwy do zastosowań.

W związku z zastosowaniem omawianego algorytmu w M i R -estymatorach oraz metodzie najmniejszej mediany kwadratów estymatory te są dużo bardziej czasochłonne (zwłaszcza dla dużych przykładów) w stosunku do pozostałych estymatorów: MNK i L -estymatorów: L_S i L_G .

4.3. OPIS BADAŃ SYMULACYJNYCH

W badaniach przyjęto liczbę obserwacji $n = 12, 25, 50$, liczbę obserwacji nietypowych $n_0 = 0, 1, 2$ (dla wyżej wymienionych wartości n) oraz 4 (tylko dla 12 obserwacji), 10 (tylko dla 25 obserwacji) i 20 (tylko dla 50 obserwacji) oraz liczbę zmiennych objaśniających równą 1. Poszczególne eksperymenty różniły się:

- sytuacją regresyjną;
- liczebnością próby;
- zakłóceniem.

Przez sytuację regresyjną rozumiem konkretne wartości współczynników regresji oraz przedziały zmienności zmiennej objaśniającej dla obserwacji typowych oraz liczbę i położenie obserwacji nietypowych. Rozpatrywałem piętnaście sytuacji regresyjnych:

Sytuacja 1: linia regresji: $y = 0.5x + 1 + \varepsilon$, dla $x \in [2, 10]$;

nie ma obserwacji nietypowych (patrz rys. 4.2).

Sytuacja 2: linia regresji: $y = 0.5x + 1 + \varepsilon$, dla $x \in [2, 10]$;

oraz jedna obserwacja typowa spoza wyżej wymienionego przydziału:
(20, 11) (patrz rys. 4.3).

Sytuacja 3: linia regresji: $y = 0.5x + 1 + \varepsilon$, dla $x \in [2, 10]$;

jedna obserwacja nietypowa: (3, 5) (patrz rys. 4.4).

Sytuacja 4: linia regresji: $y = 0.5x + 1 + \varepsilon$, dla $x \in [2, 10]$;

jedna obserwacja nietypowa: (3, 8) (patrz rys. 4.5).

Sytuacja 5: linia regresji: $y = 0.5x + 1 + \varepsilon$, dla $x \in [2, 10]$;

jedna obserwacja nietypowa: (3, 12) (patrz rys. 4.6).

Sytuacja 6: linia regresji: $y = 2x + 1 + \varepsilon$, dla $x \in [1, 4]$;

jedna obserwacja nietypowa: (3.5, 3.5) (patrz rys. 4.7).

Sytuacja 7: linia regresji: $y = 2x + 1 + \varepsilon$, dla $x \in [1, 4]$;

jedna obserwacja nietypowa: (6, 3.5) (patrz rys. 4.8).

Sytuacja 8: linia regresji: $y = 2x + 1 + \varepsilon$, dla $x \in [1, 4]$;

jedna obserwacja nietypowa: (9, 3.5) (patrz rys. 4.9).

Sytuacja 9: linia regresji: $y = -x + 7 + \varepsilon$, dla $x \in [1, 6]$;

jedna obserwacja nietypowa: (5, 5) (patrz rys. 4.10).

Sytuacja 10: linia regresji: $y = -x + 7 + \varepsilon$, dla $x \in [1, 6]$;

jedna obserwacja nietypowa: (8, 8) (patrz rys. 4.11).

Sytuacja 11: linia regresji: $y = -x + 7 + \varepsilon$, dla $x \in [1, 6]$;

jedna obserwacja nietypowa: (12, 12) (patrz rys. 4.12).

Sytuacja 12: linia regresji: $y = 0.5x + 1 + \varepsilon$, dla $x \in [2, 10]$;

dwie obserwacje nietypowe: (3, 7), (3.5, 7.5) (patrz rys. 4.13).

Sytuacja 13: linia regresji: $y = 2x + 1 + \varepsilon$, dla $x \in [1, 4]$;

dwie obserwacje nietypowe: (5, 4), (5.5, 4.5) (patrz rys. 4.14).

Sytuacja 14: linia regresji: $y = 0.5x + 1 + \varepsilon$, dla $x \in [2, 10]$;

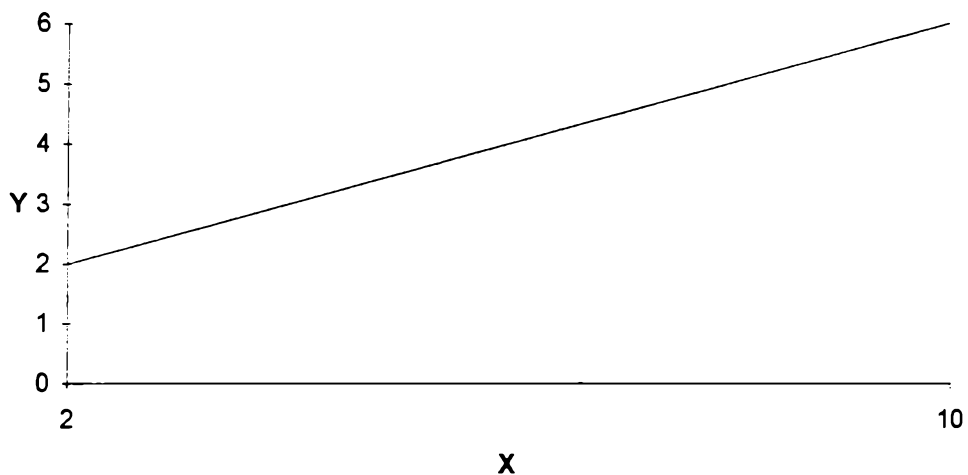
dwie obserwacje nietypowe: (3, 7), (12, 3) (patrz rys. 4.15).

Sytuacja 15: linia regresji: $y = -x + 7 + \varepsilon$, dla $x \in [1, 6]$;

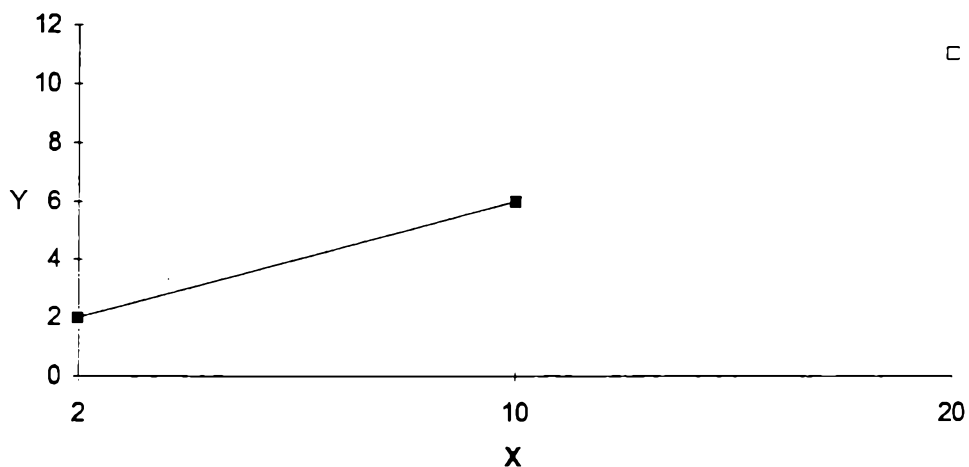
4 (dla $n = 12$), 10 (dla $n = 25$) i 20 (dla $n = 50$) obserwacji nietypowych o przeciętnym położeniu: (8, 8) i odchyleniu równym 0.1 (patrz rys. 4.16).

Przyjęto następujący poziom stałych regulujących: dla M_H - i M_{H_S} -estymatora stała H wynosi 1; dla L_G -estymatora przyjęto stałą g równą 3, gdy występuje jedna obserwacja nietypowa (sytuacje 1-11) i 1 gdy występuje więcej obserwacji nietypowych (sytuacje 12-15); dla L_S -estymatora przyjęto poziom stałej ucinającej $p = \frac{1}{n}$ dla opisanych wyżej sytuacji 1-11 i 14, $p = \frac{2}{n}$ dla sytuacji 12-13 oraz w sytuacji 15 $p = \frac{4}{n}$ dla $n = 12$, $p = \frac{10}{n}$ dla $n = 25$ i $p = \frac{20}{n}$ dla $n = 50$.

Rys. 4.2

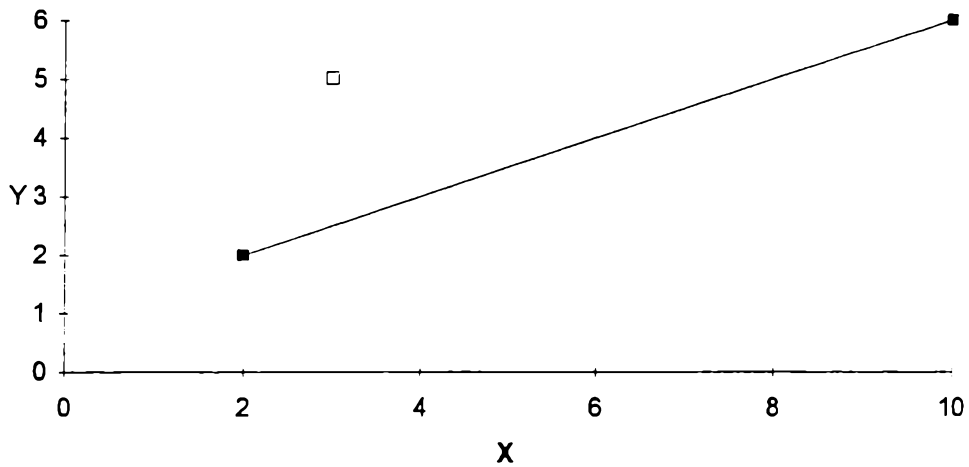


Rys. 4.3

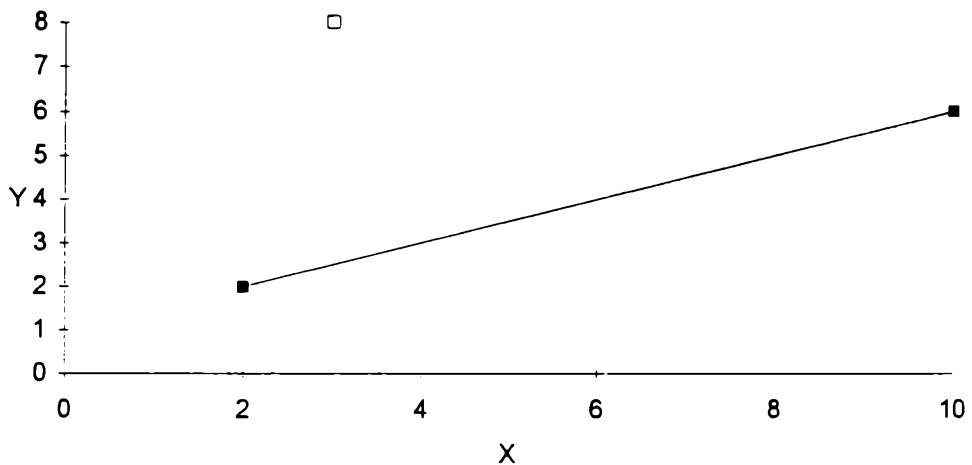


W dwóch pierwszych sytuacjach regresyjnych nie ma obserwacji nietypowych. Pozwoli to sprawdzić jak estymatory odporne działają, gdy brak jest obserwacji nietypowych. Druga sytuacja różni się od pierwszej tym, że dodatkowo jedna obserwacja typowa wychodzi poza zadany zakres.

Rys. 4.4



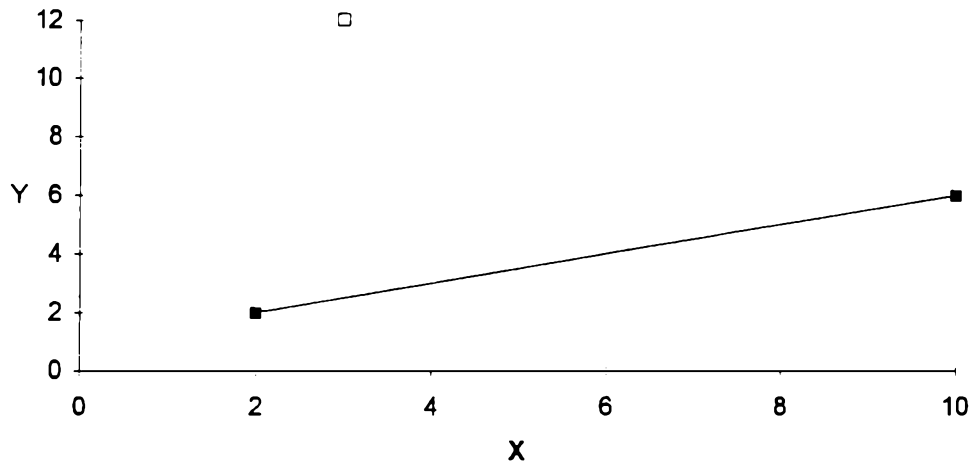
Rys. 4.5



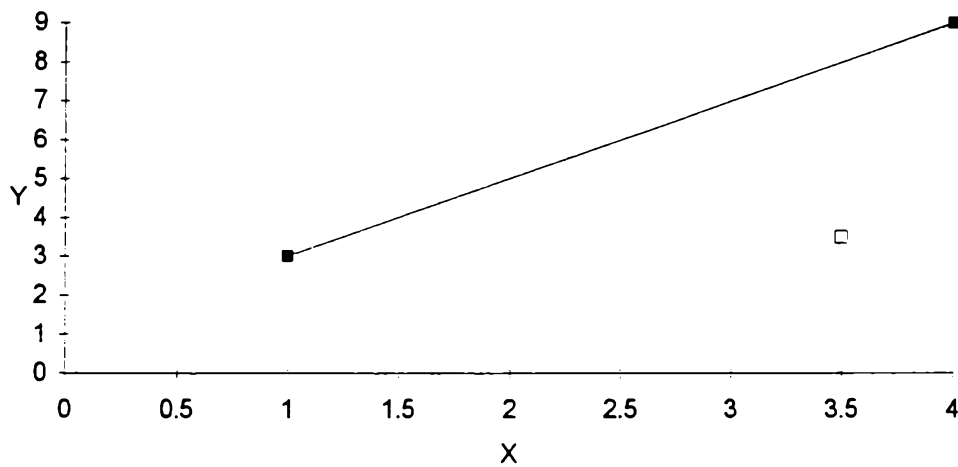
W kolejnych dziewięciu sytuacjach regresyjnych (sytuacje oznaczone numerami 3-11) występuje jedna obserwacja nietypowa. W pierwszych trzech z tych sytuacji (sytuacje 3-5) obserwacja nietypowa jest oddalona od linii regresji ze względu na zmienną objaśnianą. Sytuacje te różnią się między sobą oddaleniem obserwacji nietypowej od linii

regresji od obserwacji będącej najbliższej linii regresji (sytuacja trzecia) do obserwacji będącej najdalej (sytuacja piąta).

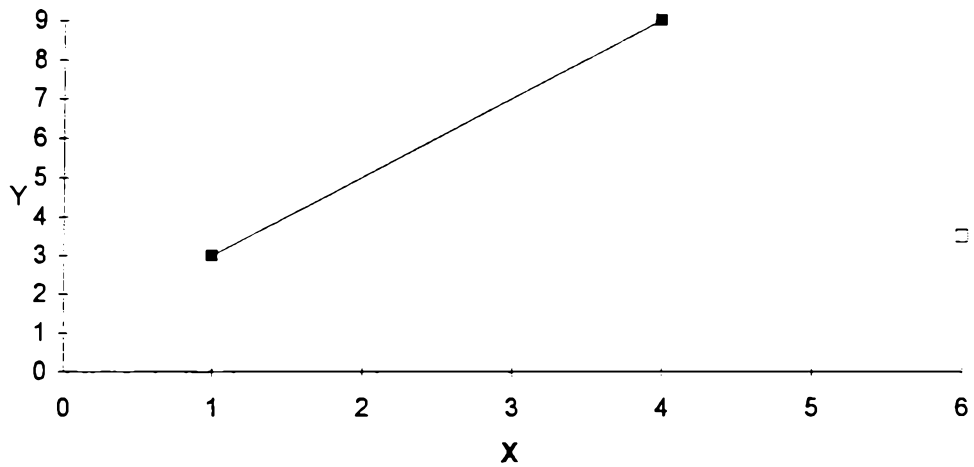
Rys. 4.6



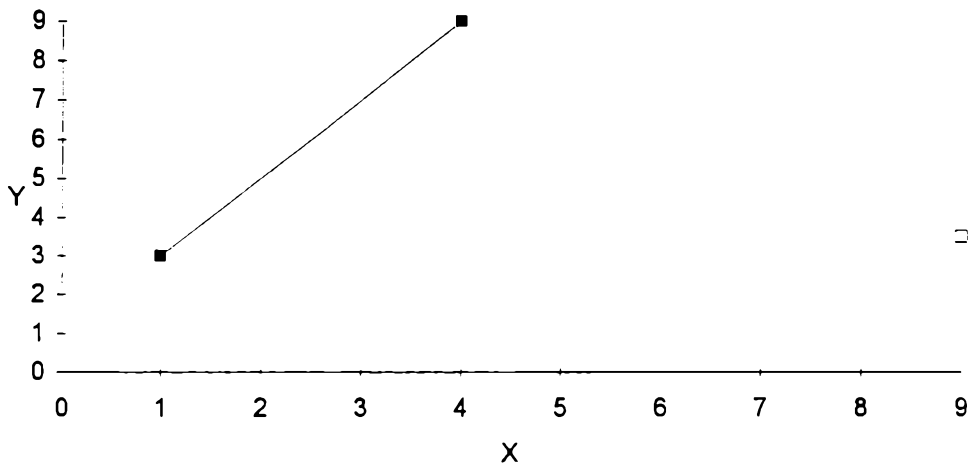
Rys. 4.7



Rys. 4.8

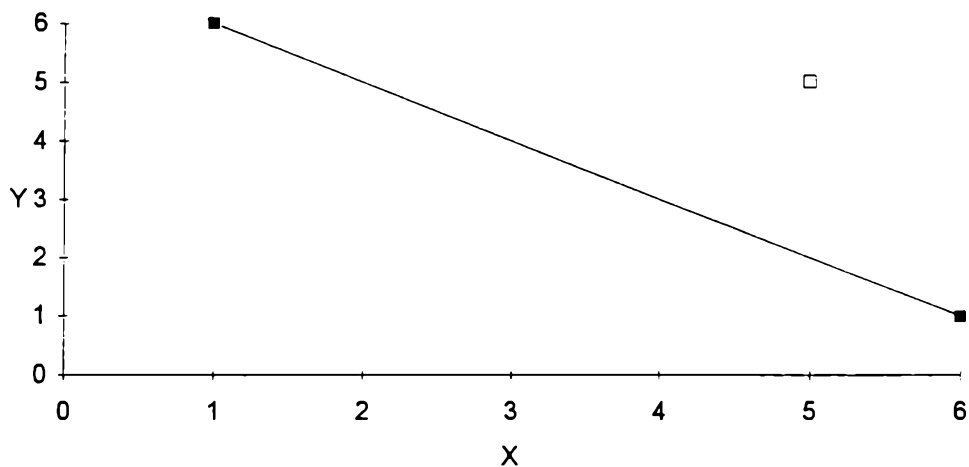


Rys. 4.9

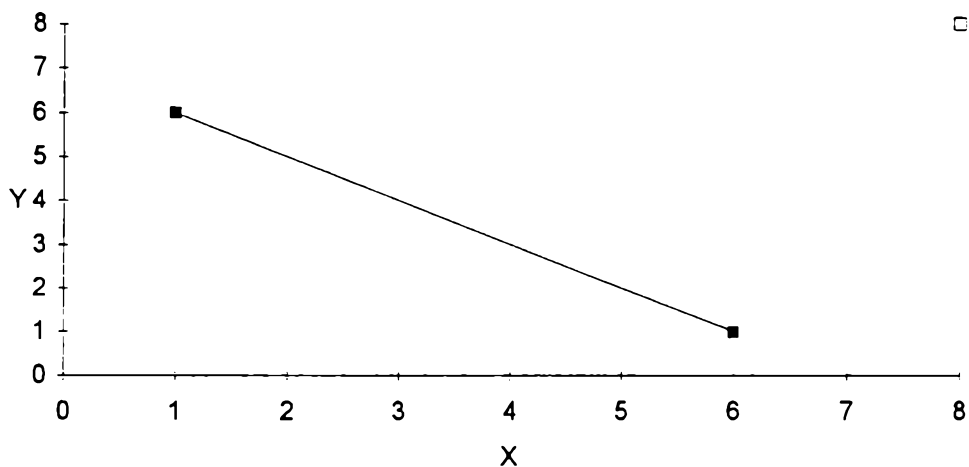


W sytuacjach o numerach 6-8 obserwacja nietypowa jest oddalona od linii regresji ze względu na zmienną objaśniającą. Sytuacje te różnią się między sobą oddaleniem obserwacji nietypowej od linii regresji od obserwacji będącej najbliżej linii regresji (sytuacja szósta) do obserwacji będącej najdalej (sytuacja ósma).

Rys. 4.10

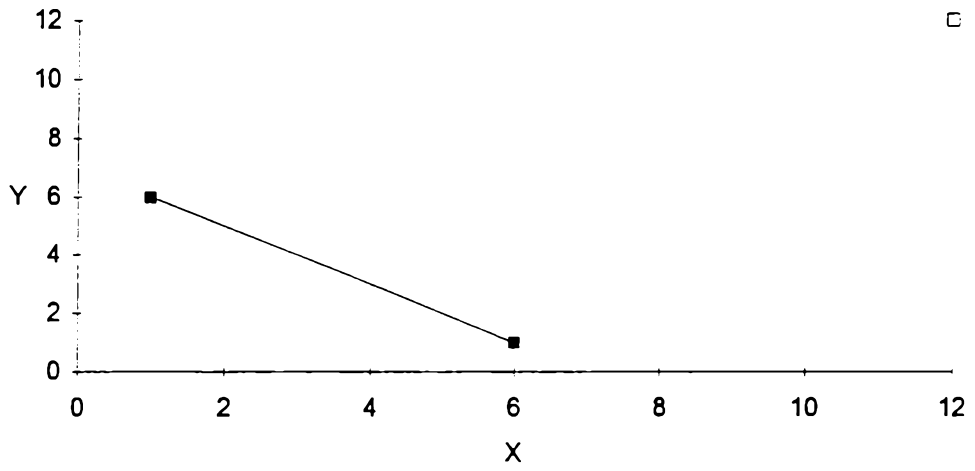


Rys. 4.11

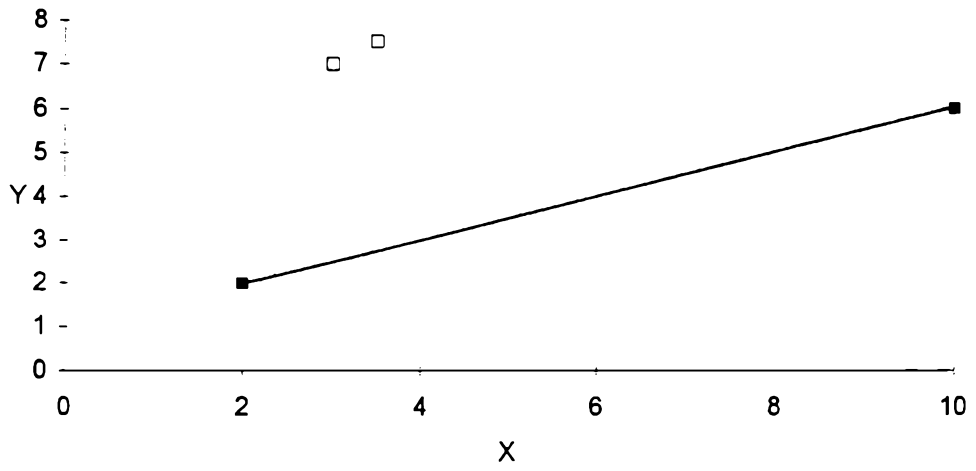


W sytuacjach 9-11 obserwacja nietypowa jest oddalona od linii regresji zarówno ze względu na zmienną objaśnianą jak i objaśniającą. Sytuacje te różnią się między sobą oddaleniem obserwacji nietypowej od linii regresji od obserwacji będącej najbliżej linii regresji (sytuacja dziewiąta) do obserwacji będącej najdalej (sytuacja jedenasta).

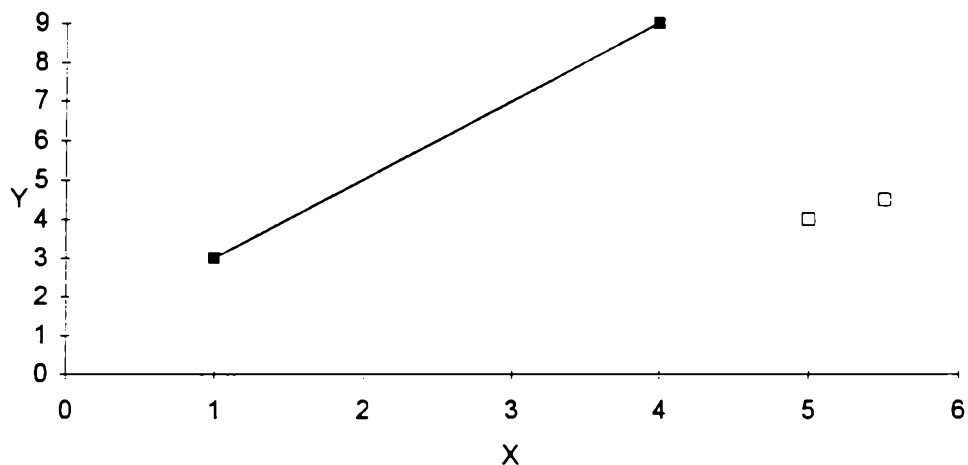
Rys. 4.12



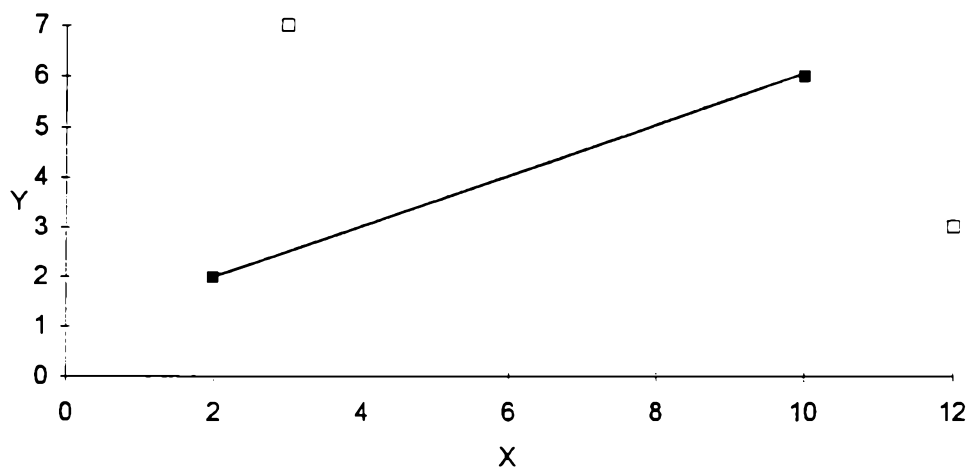
Rys. 4.13



Rys. 4.14



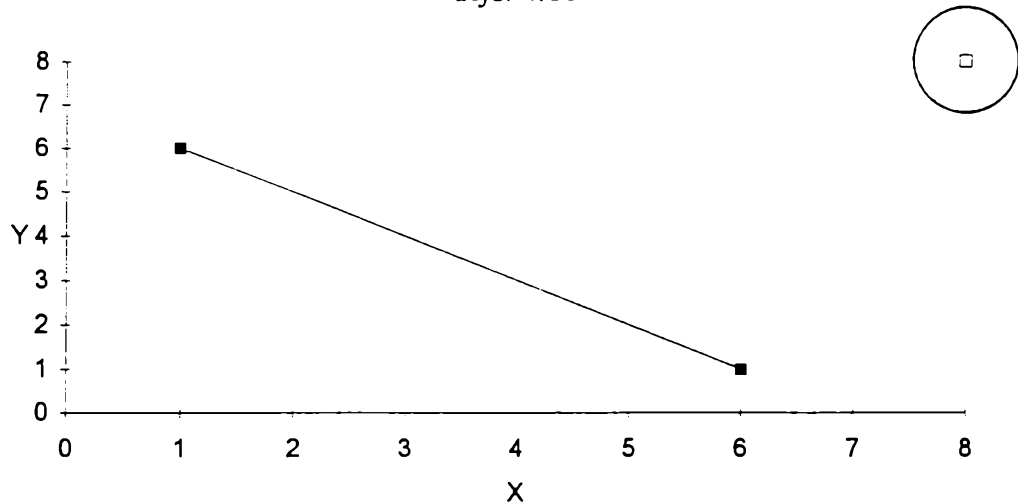
Rys. 4.15



W sytuacjach 12-14 występują dwie obserwacje nietypowe. Sytuacja dwunasta jest analogiczna do sytuacji czwartej. Różnica polega na zastąpieniu jednej obserwacji nietypowej dwoma o podobnym położeniu. Sytuacja trzynasta jest analogiczna do sytuacji siódmej. Różnica, tak jak poprzednio, polega na zastąpieniu jednej obserwacji nietypowej dwoma o podobnym położeniu. W sytuacji czternastej obserwacje nietypowe

są rozdzielone: jedna jest oddalona ze względu na zmienną objaśnianą, druga - zmienną objaśniającą.

Rys. 4.16



W sytuacji piętnastej (ostatniej) występuje większa frakcja obserwacji nietypowych (ok. 40%). Sytuacja ma podobne położenie linii regresji i obserwacji nietypowych do sytuacji dziesiątej. Różnica polega na zastąpieniu jednej obserwacji nietypowej pięcioma dla 12 obserwacji, dziesięcioma dla 25 obserwacji i dwudziestoma dla 50 obserwacji o podobnym położeniu.

Zakłócenie w poszczególnych eksperymentach wynikało ze sposobu przeprowadzania eksperymentu. Generowano wartości typowe zmiennej objaśniającej z rozkładu jednostajnego na zadanym przedziale zmienności. Następnie wyznaczano według modelu (wynikającego z sytuacji regresyjnej) teoretyczne wartości zmiennej objaśnianej i dodawano zakłócenie. Wartości zakłócenia otrzymano z rozkładu normalnego o średniej 0 i odpowiednim odchyleniu standardowym. W badaniach stosowano 3 różne wartości odchylenia standardowego: 0.1, 0.5 i 1.

W sumie zatem przeprowadzono 15 (liczba sytuacji regresyjnych) x 3 (różne liczebności próby) x 3 (różne rozkłady zakłóceń) = 135 eksperymentów symulacyjnych. W każdym przeprowadzono 50 powtórzeń ($L = 50$).

W celu weryfikacji przydatności metody wyznaczono następujące wielkości:

- średnie (w powtórzeniach) wartości współczynników regresji (tzn. parametru kierunkowego i wyrazu wolnego) według wzorów:

$$a = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L a_l, \quad (4.3)$$

gdzie:

a - średnia wartość parametru kierunkowego regresji liniowej,

L - liczba powtórzeń ($L = 50$),

a_l - parametr kierunkowy regresji liniowej w l -tym powtórzeniu ($l = 1, 2, \dots, L$);

$$b = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L b_l, \quad (4.4)$$

gdzie:

b - średnia wartość wyrazu wolnego regresji liniowej,

b_l - wyraz wolny regresji liniowej w l -tym powtórzeniu ($l = 1, 2, \dots, L$);

- błędy średniokwadratowe (w powtórzeniach) oszacowań współczynników regresji według wzorów:

$$s(a) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\alpha - a_l)^2}, \quad (4.5)$$

gdzie:

$s(a)$ - błąd parametru kierunkowego regresji liniowej,

α - teoretyczna wartość parametru kierunkowego;

$$s(b) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\beta - b_l)^2}, \quad (4.6)$$

gdzie:

$s(b)$ - błąd wyrazu wolnego regresji liniowej,

β - teoretyczna wartość wyrazu wolnego;

- średnia (w powtórzeniach) liczba źle sklasyfikowanych obserwacji nietypowych (dotyczy tylko L_G -estymatora ze względu na to, że tylko on posiada własności diagnostyczne) wyznaczana według wzoru:

$$\bar{n}_0 = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L |n_0 - n_l|, \quad (4.7)$$

gdzie:

\bar{n}_0 - średnia liczba źle sklasyfikowanych obserwacji nietypowych,

n_0 - zadana liczba obserwacji nietypowych,

n_l - liczba obserwacji nietypowych w l -tym eksperymencie, czyli liczba obserwacji, które zostały uznane za nietypowe przez L_G -estymator.

4.4. WYNIKI BADAŃ SYMULACYJNYCH

Wyniki badań symulacyjnych przedstawione są w dodatku B w tab. B.1-B.135, przy czym:

- w tab. B.1-B.9 są wyniki eksperymentów dla pierwszej sytuacji regresyjnej;
- w tab. B.10-B.18 są wyniki eksperymentów dla drugiej sytuacji regresyjnej;
- w tab. B.19-B.27 są wyniki eksperymentów dla trzeciej sytuacji regresyjnej;
- w tab. B.28-B.36 są wyniki eksperymentów dla czwartej sytuacji regresyjnej;
- w tab. B.37-B.45 są wyniki eksperymentów dla piątej sytuacji regresyjnej;
- w tab. B.46-B.54 są wyniki eksperymentów dla szóstej sytuacji regresyjnej;
- w tab. B.55-B.63 są wyniki eksperymentów dla siódmej sytuacji regresyjnej;
- w tab. B.64-B.72 są wyniki eksperymentów dla ósmej sytuacji regresyjnej;
- w tab. B.73-B.81 są wyniki eksperymentów dla dziewiątej sytuacji regresyjnej;
- w tab. B.82-B.90 są wyniki eksperymentów dla dziesiątej sytuacji regresyjnej;
- w tab. B.91-B.99 są wyniki eksperymentów dla jedenastej sytuacji regresyjnej;

- w tab. B.100-B.108 są wyniki eksperymentów dla dwunastej sytuacji regresyjnej;
- w tab. B.109-B.117 są wyniki eksperymentów dla trzynastej sytuacji regresyjnej;
- w tab. B.118-B.126 są wyniki eksperymentów dla czternastej sytuacji regresyjnej;
- w tab. B.127-B.135 są wyniki eksperymentów dla piętnastej sytuacji regresyjnej.

Po analizie otrzymanych wyników nasuwają się następujące spostrzeżenia:

W sytuacji pierwszej, w której nie występowały obserwacje nietypowe, dla wszystkich estymatorów uzyskano zbliżone wyniki (średnie wartości ocen parametrów i nieznaczne błędy średniokwadratowe) do MNK. Tylko w przypadku największego zakłócenia (równego 1) dla R_{HS} - i M_{HS} -estymatorów średnie wartości ocen parametrów odbiegają dość znacznie od wartości teoretycznych, w związku z tym występują też duże błędy. L_G -estymator zawsze "zauważył", że nie ma obserwacji nietypowych (średnia liczba źle sklasyfikowanych obserwacji nietypowych wynosi 0) niezależnie od wielkości zakłócenia.

Podobne wyniki uzyskano dla sytuacji drugiej. Obserwacja typowa oddalona od pozostałych nie została zakwalifikowana do grona obserwacji nietypowych ($n_0 = 0$). Na podstawie tych dwóch sytuacji można wyciągnąć wniosek, że estymatory odporne w regresji dość dobrze radzą sobie w sytuacjach, gdy nie występują obserwacje nietypowe.

W sytuacji trzeciej, w której występuje jedna obserwacja nietypowa, otrzymano już znaczące różnice w wynikach między MNK a pozostałymi estymatorami (oprócz R_{HS} -estymatora), mimo że obserwacja nietypowa nie jest zbyt oddalona od pozostałych. Średnie wartości ocen parametrów są znacząco bliższe wartościom teoretycznym oraz są mniejsze błędy średniokwadratowe. Wraz ze wzrostem wielkości zakłócenia wzrasta (od 0 do 1) ilość źle sklasyfikowanych obserwacji nietypowych w L_G -estymatorze.

W sytuacji czwartej, w której obserwacja nietypowa została bardziej oddalona od linii regresji w stosunku do sytuacji trzeciej, otrzymano pogorszenie wyników MNK i R_{HS} -estymatora w stosunku do poprzedniej sytuacji. Pozostałe estymatory mają wyniki

na tym samym co poprzednio dobrym poziomie. Zmniejszył się w stosunku do poprzedniej sytuacji przedział źle sklasyfikowanych obserwacji nietypowych $[0, 0.74]$.

W sytuacji piątej, w której jeszcze bardziej oddalono obserwację nietypową w stosunku do poprzednich sytuacji wyniki są podobne do sytuacji czwartej. Tylko dla R_{II} -estymatora można zauważyć gorsze wyniki. Liczba źle sklasyfikowanych obserwacji nietypowych w L_G -estymatorze wyraźnie spadła: nie przekracza teraz 0.08 (czyli tylko 4 razy z 50 powtórzeń źle została zakwalifikowana obserwacja nietypowa).

Sytuacja szósta charakteryzowała się jedną obserwacją nietypową ale w zakresie obu zmiennych (objaśnianej i objaśniającej). M_{HS} - i R_{WS} -estymatory mają średnie wartości ocen parametrów całkowicie różne od teoretycznych. Najlepsze wyniki uzyskano dla L_M i L_G -estymatorów ($\bar{n}_0 \in [0, 0.98]$), przy czym dla małego zakłócenia bliższy wartościom teoretycznym jest L_G -estymator, dla większego L_M -estymator.

Sytuacja siódma różniła się od poprzedniej oddaleniem obserwacji nietypowej tym razem jednak po osi x . Wyniki nie odbiegały jednak bardzo od poprzednich. Najgorsze zanotowano dla M_{HS} -estymatora. Ze względu na większe oddalenie obserwacji nietypowej od linii regresji poprawił się wskaźnik źle sklasyfikowanych obserwacji nietypowych; w tej sytuacji nie przekracza 0.38.

W sytuacji ósmej jeszcze bardziej oddalono obserwację nietypową w stosunku do poprzedniej sytuacji. Zdecydowanie złe wyniki uzyskano dla M_H , M_{HS} , R_W i R_{WS} -estymatorów przy czym najgorzej z nich wypada M_{HS} -estymator. Liczba źle sklasyfikowanych obserwacji dla L_G -estymator wzrosła w stosunku do sytuacji siódmej ($\bar{n}_0 \in [0, 0.48]$).

Sytuacja dziewiąta charakteryzowała się jedną obserwacją nietypową ale w zakresie zmienności obu zmiennych regresyjnych. Wyniki uzyskane dla tej sytuacji są dość dobre dla wszystkich estymatorów. Jednak najgorsze wyniki uzyskano dla R_{WS} -estymatora. Liczba źle sklasyfikowanych obserwacji mieściła się w przedziale $[0, 1]$.

W sytuacji dziesiątej oddalono w stosunku do sytuacji poprzedniej obserwację nietypową zarówno ze względu na zmienną objaśnianą jak i objaśniającą. Pogorszyły się oszacowania MNK i polepszyły pozostałych estymatorów, z których znowu najgorzej wypadł R_{HS} -estymator. Zmniejszyła się w stosunku do sytuacji dziewiątej średnia liczba źle sklasyfikowanych obiektów. Teraz nie przekracza 0.7.

Sytuacja jedenasta była podobna do poprzedniej. Oddalono tylko jeszcze bardziej obserwację nietypową. Pogłębiły się tendencje widoczne w sytuacji dziesiątej, tzn. jeszcze bardziej pogorszyły się wyniki dla MNK i jeszcze bardziej polepszyły się wyniki dla pozostałych estymatorów, za wyjątkiem R_{HS} -estymatora, dla którego wyniki były gorsze nawet od MNK.

Sytuacja dwunasta rozpoczyna sytuację z dwoma obserwacjami nietypowymi. Sytuacja ta jest analogiczna do sytuacji czwartej. Zastąpiono tylko jedną obserwację nietypową dwoma. Wyniki, które uzyskano nie odbiegają znacząco od tych z sytuacji czwartej oczywiście za wyjątkiem MNK, dla której wyniki były zauważalnie gorsze. Wzrosła średnia ilość źle sklasyfikowanych obserwacji nietypowych w L_G -estymatorze. W tym przypadku waha się ona w zależności od wielkości zakłócenia jak i liczebności obserwacji między 0.46 a 1.42.

Sytuacja trzynasta była analogiczna do siódmej. Wyniki też są podobne. Najbliższe teoretycznym wartości ocen parametrów uzyskano dla L_M -estymatora; zdecydowanie najdalsze dla M -estymatorów P. J. Hubera zarówno w wersji ze zwykłymi jak i standaryzowanymi resztami. Dla L_G -estymatora \bar{n}_0 zawierała się w przedziale [0.5, 1.92].

W sytuacji czternastej obserwacje nietypowe są rozdzielone: jedna jest oddalona ze względu na zmienną objaśnianą, druga - zmienną objaśniającą. Tylko estymatory z grupy L (czyli (L_M, L_S) i L_G -estymatory) mają zbliżone wartości ocen parametrów do wartości teoretycznych. Pozostałe estymatory mają wyniki, na które wpłynęły obserwacje nietypowe.

Sytuacja ostatnia (piętnasta) zawierała większą liczbę obserwacji nietypowych (ok. 40%). W tej sytuacji najlepsze wyniki uzyskano dla L_M -estymatora; gorsze ale zbliżone uzyskano jednak dla M_{HS} - i R_{WS} -estymatorów. Gdy liczba obserwacji nietypowych wynosi 4, liczba źle sklasyfikowanych obserwacji nietypowych zawiera się w przedziale [2.2, 3.2]; jeśli $n_0 = 10$ wtedy \bar{n}_0 jest nie dużo mniejsze od 5; podobnie dla dwudziestu obserwacji nietypowych.

Wraz ze wzrostem zakłócenia, jak można było się spodziewać, pogarszały się wyniki dla wszystkich badanych estymatorów. Przy zwiększaniu zaś liczby wszystkich obserwacji w zasadzie (jest kilka wyjątków) oceny parametrów są bliższe wartościom teoretycznym.

Z przeprowadzonych badań można wyciągnąć następujące ogólne wnioski dotyczące estymatorów:

Najlepsze wyniki lub jedne z najlepszych uzyskiwano zawsze dla L_M -estymatora.

Estymatory z resztami standaryzowanymi (R_{WS} - i M_{HS} -estymatory) nie sprawdzają się w sytuacjach, w których występuje mała frakcja obserwacji nietypowych. Sądzę że jest to spowodowane gorszymi właściwościami reszt standaryzowanych w stosunku do reszt t -normalizowanych. Zastosowanie jednak w R_{WS} - i M_{HS} -estymatorach reszt t -normalizowanych znacząco wydłużyłoby działanie i tak bardzo pracochłonnego (czasochłonnego) algorytmu tych estymatorów.

L_G -estymator okazał się dość dobrym estymatorem odpornym. "Odkrył", że nie ma obserwacji nietypowych w pierwszych dwóch sytuacjach. W przypadku wystąpienia jednej obserwacji nietypowej przy małym zakłóceniu estymator ten bezbłędnie "rozpoznaje" obserwację nietypową. Dla dwóch obserwacji nietypowych L_G -estymator najlepiej sobie "radzi" przy największym zakłóceniu. Niekorzystne wyniki otrzymano za pomocą tego estymatora tylko dla ostatniej sytuacji, gdzie występuje duża frakcja obserwacji nietypowych (ok. 40%). Jest to jednak zrozumiałe. L_G -estymator opiera się w swojej konstrukcji na kwartylach. Tak więc frakcja obserwacji nietypowych

przekraczająca 25% wszystkich obserwacji powoduje, że wyniki otrzymane w takiej sytuacji znacząco odbiegają od oczekiwanych.

Rozdział 5

Zastosowania ekonomiczne

5.1. WPROWADZENIE

Należy podkreślić, że obserwacje nietypowe bardzo często występują w badaniach empirycznych w ekonomii. W zasadzie wszędzie tam, gdzie stosuje się metody regresyjne, mogą wystąpić obserwacje nietypowe. W takich przypadkach należy więc stosować omówione w rozdziale 2 metody diagnostyki obserwacji nietypowych lub omówione w rozdziale 3 estymatory odporne.

Szczególnie obecnie w Polsce nasila się występowanie obserwacji nietypowych. Można wymienić dwie główne przyczyny tego faktu.

Pierwszą przyczyną jest wpływ czynników politycznych na sytuację ekonomiczną. Rząd, parlament lub inne władze uchwalają prawa lub podejmują decyzje wpływające na sytuację ekonomiczną. Częste zmiany rządów i nowe wybory powodują częste zmiany polityki gospodarczej państwa. Zazwyczaj powoduje to ustalanie prawa nieoczekiwanie, bez wcześniejszych zapowiedzi i odpowiednich przygotowań. Objawia się to nierzadkimi przypadkami występowania obserwacji nietypowych. Wymieńmy kilka przykładów.

W badaniach marketingowych jednym z ważniejszych elementów badania jest analiza popytu. Ten typ badania powinien być prowadzony przez każdą firmę sprzedającą swoje produkty na rynku. Wprowadzenie 5 lipca 1993 r. podatku od towarów i usług,

tw. VAT-tu, spowodowało, iż czerwiec stał się miesiącem nietypowym pod względem popytu na większość towarów.

Każda zmiana taryfy celnej powoduje istotną zmianę sytuacji polskich importerów. Dotyczy to szczególnie firm sprowadzających towary z Dalekiego Wschodu. Nowa taryfa zastaje towary w drodze do Polski. Często powoduje nieopłacalność całego przedsięwzięcia. Podobne uwagi dotyczą dewaluacji złotego.

Wprowadzenie obowiązku posiadania gaśnic w samochodach spowodowało powstanie ogromnego popytu na gaśnice. Zmieniło to diametralnie sytuację czterech polskich producentów gaśnic.

Zmiany w polskiej gospodarce powodują ogromne zmiany w strukturze płac. Regresyjne modele płac muszą uwzględniać te zmiany. Dopiero wtedy "budowa tego rodzaju modeli ma poważne znaczenie poznawcze z punktu widzenia ekonomicznego. Estymacja modelu daje podstawę do formułowania uzasadnionych sądów na temat wpływu poszczególnych wyróżnionych czynników na poziom zarobków." (Z. Pawłowski [82] s. 396).

Drugą ważną przyczyną pojawiania się obserwacji nietypowych jest występowanie nieoczekiwanych wydarzeń.

Wszelkiego rodzaju strajki co jakiś czas nawiedzające nasz kraj powodują dezorganizację produkcji. Stosując analizę produkcji dla ostatnich kilku lat należy brać ten fakt pod uwagę.

Występowanie nieoczekiwanych wydarzeń odbija się szczególnie mocno na rynku papierów wartościowych. Na wartość inwestycji w akcje obracane na giełdzie papierów wartościowych szczególnie mocno wpływają nieoczekiwane wydarzenia. Przykładem niech będzie kradzież 5 mld zł przeznaczonych na wypłaty dla pracowników Swarzędza. Wiadomość o tym zdarzeniu spowodowała raptowny spadek kursu akcji Swarzędza na najbliższej po tym wydarzeniu sesji giełdowej.

Nie zawsze jednak łatwo jest zauważyć obserwacje nietypowe. Estymatory odporne dają możliwość automatycznego wykrycia obserwacji nietypowych i wyeliminowania ich negatywnego wpływu na szacowaną linię regresji.

W dalszej części rozdziału przedstawię przykład zastosowania estymatorów odpornych w teorii portfela papierów wartościowych.

5.2. JEDNOWSKAŹNIKOWY MODEL TEORII PORTFELA PAPIERÓW WARTOŚCIOWYCH

Twórcą klasycznej teorii portfela papierów wartościowych jest H. M. Markowitz [75]. Praktyczne zastosowanie tej teorii, np. wyznaczenie zbioru możliwych portfeli, a w dalszej kolejności portfeli efektywnych przy dużej liczbie akcji, nie jest proste. Fakt ten powoduje, że stosowanie teorii portfela w klasycznej postaci jest zwykle utrudnione. W związku z tym zaproponowano modele upraszczające klasyczną teorię portfela akcji. Jednym z nich jest tzw. model jednowskaźnikowy, zaproponowany przez W. Sharpe'a [95].

Model jednowskaźnikowy opiera się na założeniu, że kształtowanie się stóp zwrotu akcji zależy od sytuacji na całym rynku papierów wartościowych. Sytuacja na rynku papierów wartościowych jest najlepiej opisywana za pomocą wskaźnika rynku, zwanego indeksem giełdowym. Indeks giełdy może być bowiem traktowany jako pewne przybliżenie portfela rynkowego, którego skład jest taki jak skład rynku.

Zależność stopy zwrotu akcji od stopy zwrotu indeksu giełdy (portfela rynkowego) przedstawia się za pomocą następującego liniowego równania regresji:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_G + \varepsilon_i, \quad (5.1)$$

gdzie:

R_i – stopa zwrotu i -tej akcji,

R_G – stopa zwrotu indeksu giełdy (wskaźnika rynku),

α_i, β_i – parametry regresji dla i -tej akcji.

Stopa zwrotu akcji (inaczej zwana stopą zysku, stopą dochodu) w okresie t określona jest następująco:

$$R_t = \frac{(P_t - P_{t-1}) + D_t}{P_{t-1}}, \quad (5.2)$$

gdzie:

R_t – stopa zwrotu akcji osiągnięta w t -tym okresie,

P_t – cena akcji w t -tym okresie,

D_t – dywidenda wypłacona w t -tym okresie.

Równanie regresji (5.1) jest to tzw. linia charakterystyczna papieru wartościowego (ang. *security characteristic line*). W równaniu tym podstawową rolę odgrywa współczynnik β_i , w finansach zwany współczynnikiem beta. Współczynnik beta akcji wskazuje, o ile procent w przybliżeniu wzrośnie stopa zwrotu akcji, gdy stopa zwrotu wskaźnika rynku (indeksu giełdy) wzrośnie o 1%. Wynika z tego, że współczynnik beta akcji wskazuje, w jakim stopniu stopa zwrotu akcji reaguje na zmiany stopy zwrotu wskaźnika rynku, czyli na zmiany zachodzące na rynku. W tym zatem sensie współczynnik beta traktowany jest jako miara ryzyka rynkowego.

Współczynnik beta może przyjmować różne wartości. Ważne są następujące przypadki:

1) $\beta_i = 0$ oznacza, że stopa zwrotu i -tego papieru wartościowego nie reaguje na zmiany rynku; wobec tego papier wartościowy wolny jest od ryzyka rynku - takim papierem jest obligacja emitowana przez rząd, której stopa zwrotu jest równa stopie zwrotu wolnej od ryzyka;

2) $0 < \beta_i < 1$ oznacza, że stopa zwrotu i -tej akcji w małym stopniu reaguje na zmiany zachodzące na rynku; taka akcja nazywana jest akcją defensywną;

3) $\beta_i = 1$ oznacza, że stopa zwrotu i -tej akcji zmienia się w takim samym stopniu jak stopa zwrotu rynku; w szczególności, portfel rynkowy ma współczynnik beta równy 1;

4) $\beta_i > 1$ oznacza, że stopa zwrotu i -tej akcji w dużym stopniu reaguje na zmiany zachodzące na rynku; taka akcja nazywana jest akcją agresywną.

W krajach rozwiniętych współczynniki beta wielu akcji analizowane są przez inwestorów. Są one publikowane w czasopismach finansowych.

W poniższym przykładzie analizowane są akcje notowane na rynku podstawowym Giełdy Papierów Wartościowych (GPW) w Warszawie co najmniej od roku. Są to: BIG, BRE, ELEKTRIM, EXBUD, IRENA, KABLE, KROSNO, MOSTOSTAL EXPORT, MOSTOSTAL WARSZAWA, OKOCIM, POLIFARB CIESZYN, PRÓCHNIK, SOKOŁÓW, SWARZĘDZ, TONSIL, UNIVERSAL, VISTULA, WBK, WEDEL, WÓLCZANKA i ŻYWIEC.

Pod uwagę wzięto kursy akcji z okresu od pierwszego notowania na giełdzie dla każdej ze spółek do 10 października 1994 roku¹.

Ze względu na krótki okres funkcjonowania GPW analizowane były miesięczne stopy zwrotu firm. Z tego samego powodu przy wyznaczaniu stopy zwrotu według wzoru (5.2) pominięto wartość dywidendy. Zatem stopę zwrotu wyznaczymy według wzoru:

$$R_t = \frac{(P_t - P_{t-1})}{P_{t-1}}, \quad (5.3)$$

gdzie indeks t oznacza kolejne miesiące.

Aby uniknąć przypadkowości nie rozpatrywano jako reprezentanta tylko ostatniej sesji giełdowej w miesiącu ale ostatnie sesje giełdowe w każdej dekadzie miesiąca². W

¹Niektóre spółki giełdowe dokonały podziału (splitu) akcji. W związku z tym dla tych spółek dokonano przeliczenia kursu tak, aby był on porównywalny w ciągu całego czasu notowania na giełdzie.

celu bardziej precyzyjnego określenia stopy zwrotu akcji w danym miesiącu została ona obliczona jako średnia arytmetyczna trzech stóp zwrotu, osiągniętych:

- w okresie między końcem drugiej dekady poprzedniego miesiąca a końcem drugiej dekady danego miesiąca;

- w okresie między końcem trzeciej dekady poprzedniego miesiąca a końcem trzeciej dekady danego miesiąca;

- w okresie między końcem pierwszej dekady danego miesiąca a końcem pierwszej dekady następnego miesiąca, czyli

$$R_t^* = \frac{1}{3} \left(\frac{P_t^{20} - P_{t-1}^{20}}{P_{t-1}^{20}} + \frac{P_t^{30} - P_{t-1}^{30}}{P_{t-1}^{30}} + \frac{P_{t+1}^{10} - P_t^{10}}{P_t^{10}} \right) \quad (5.4)$$

gdzie:

R_t^* - średnia dla miesiąca t stopa zwrotu akcji,

P_t^{10} - cena akcji na ostatniej sesji w pierwszej dekadzie miesiąca t ,

P_t^{20} - cena akcji na ostatniej sesji w drugiej dekadzie miesiąca t ,

P_t^{30} - cena akcji na ostatniej sesji w miesiącu t .

W ten sposób otrzymano szeregi czasowe stóp zwrotu 21 akcji, od maja 1991 do września 1994 o różnej długości od 41 dla pierwszej piątki GPW: EXBUDU, KABLI, KROSNA, PRÓCHNIKA i TONSILU, 38 dla WÓLCZANKI i SWARZĘDZA, 35 dla ŻYWCA, 33 - WEDLA, 31 - IRENY i OKOCIMIA, 29 - ELEKTRIMU, 27 - MOSTOSTALU EXPORT, 26 - UNIVERSALU, 25 - BIGU, 23 - BRE, 16 - POLIFARBU CIESZYN, 14 - WBK, 13 - SOKOŁOWA do 11 dla MOSTOSTALU WARSZAWA i VISTULI. W podobny sposób zostały obliczone również stopy zwrotu indeksu GPW, czyli Warszawskiego Indeksu Giełdowego (WIG-u) - są to względne przyrosty wartości indeksu. Obliczone stopy zwrotu są przedstawione w dodatku C w tab. C.1 - C.4, przy czym:

²Jeśli spółka miała zawieszona notowania na takiej sesji, brano pod uwagę ostatnie notowanie przed tym terminem.

- w tab. C.1 są zamieszczone stopy zwrotu WIG-u, BIGU, BRE, ELEKTRIMU, EXBUDU i IRENY;

- w tab. C.2 są zamieszczone stopy zwrotu KABLI, KROSNA, MOSTOSTALU EXPORT i WARSZAWA, OKOCIMIA i POLIFARBU CIESZYN;

- w tab. C.3 są zamieszczone stopy zwrotu PRÓCHNIKA, SOKOŁOWA, SWARZĘDZA, TONSILU, UNIVERSALU i VISTULI;

- w tab. C.4 są zamieszczone stopy zwrotu WBK, WEDLA, WÓLCZANKI i ŻYWCA.

Obliczone na podstawie tych danych linie charakterystyczne papierów wartościowych przedstawiono w tab. 5.1 - 5.21. Ze względu na otrzymane w poprzednim rozdziale wyniki symulacji komputerowych, zaprezentowano wyniki tylko dwóch estymatorów odpornych: L_G^3 i L_M oraz dla porównania MNK.

Wykresy korelacyjne stóp zwrotu wszystkich omawianych akcji do WIG-u są przedstawione na rys. 5.1 - 5.21. Zaznaczono na nich symbolem \square obserwacje nietypowe wyróżnione przez L_G -estymator (jeżeli występują).

³Przyjęto poziom stałej regulującej g równy 1.

Rys. 5.1

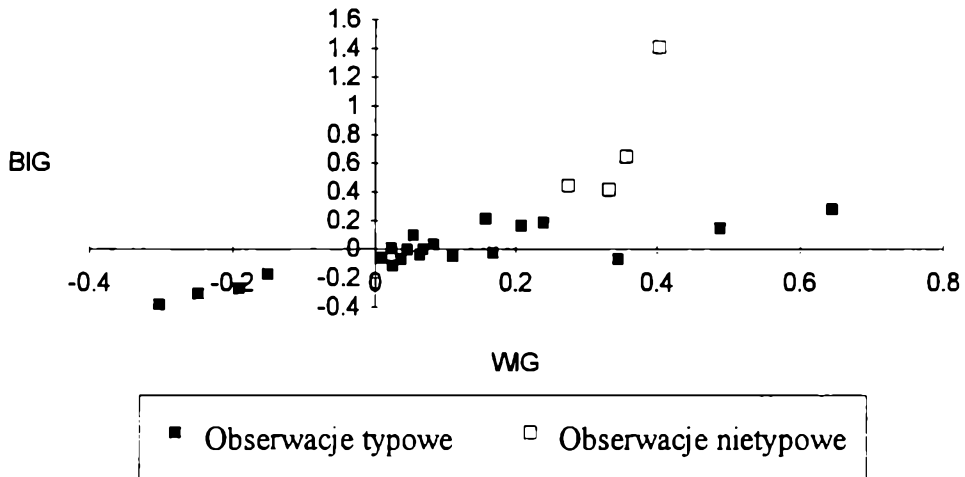


Tabela 5.1

Estymator	LINIA CHARAKTERYSTYCZNA BIGU	Observacje nietypowe dla L_G -estymatora (w nawiasie data)
MNK	$\hat{R}_{BIG} = -0.0417 + 1.086R_{WIG}$	11 (7.93), 12 (8.93), 17 (1.94), 23 (7.94)
L_M -estymator	$\hat{R}_{BIG} = -0.0656 + 0.967R_{WIG}$	
L_G -estymator	$\hat{R}_{BIG} = -0.0771 + 0.633R_{WIG}$	

Porównując linie charakterystyczne otrzymane za pomocą estymatorów odpornych z MNK dla BIGU można zauważyć, że zarówno L_M jak i L_G -estymator zmniejszyły wpływ obserwacji o największych stopach zwrotu BIGU, przy czym L_G -estymator był tutaj bardziej radykalny.

L_G -estymator wyodrębnił 4 obserwacje nietypowe; wszystkie one (i tylko one) charakteryzują się stopą zwrotu większą od 0.4. Przyczyną maksymalnych dopuszczalnych wzrostów w sierpniu 1993 r. (12 obserwacja) była wiadomość o objęciu przez BIG akcji z nowej emisji ŁBR, co oznaczało przejęcie tego banku.

Lipiec 1993 r. i styczeń 1994 r. są miesiącami nietypowymi dla co trzeciej spółki notowanej wtedy na giełdzie. Wszystkie spółki miały wtedy największe w swojej historii wzrosty kursów (nawet podwojenie kursu w ciągu miesiąca).

Rys. 5.2

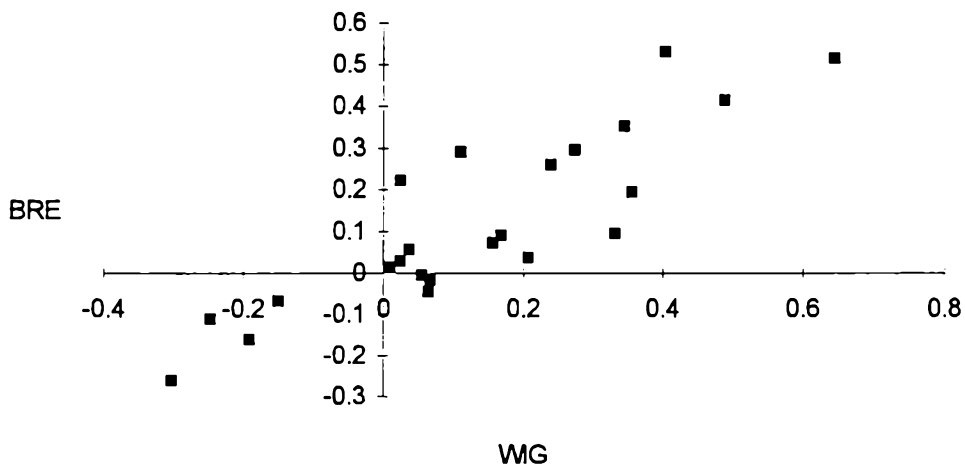


Tabela 5.2

Estymator	LINIA CHARAKTERYSTYCZNA BRE	Obserwacje nietypowe dla L_G -estymatora (w nawiasie data)
MNK	$\hat{R}_{BRE} = 0.0157 + 0.781R_{WG}$	nie występują
L_M -estymator	$\hat{R}_{BRE} = -0.0015 + 0.443R_{WG}$	
L_G -estymator	$\hat{R}_{BRE} = 0.0157 + 0.781R_{WG}$	

Rys. 5.3

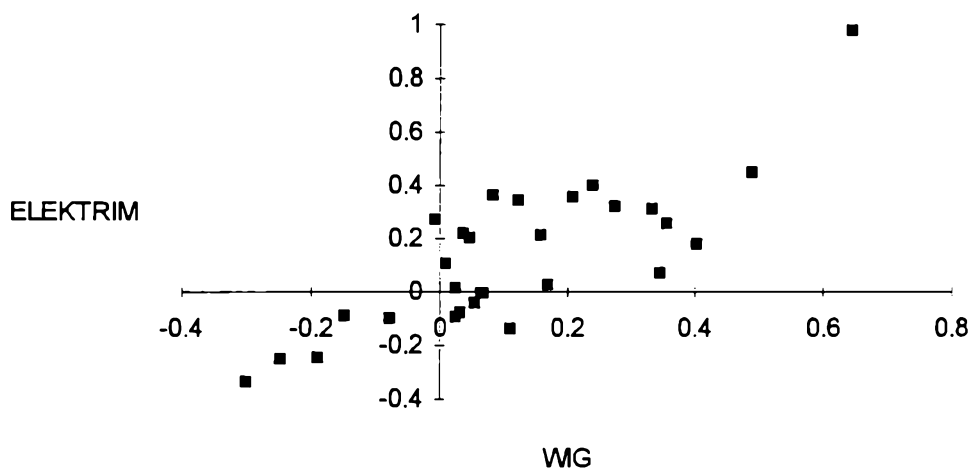


Tabela 5.3

Estymator	LINIA CHARAKTERYSTYCZNA ELEKTRIMU	Observacje nietypowe dla L_G -estymatora (w nawiasie data)
MNK	$\hat{R}_{ELEKTRIM} = 0.0121 + 1.017R_{WIG}$	nie występują
L_M -estymator	$\hat{R}_{ELEKTRIM} = -0.0436 + 0.840R_{WIG}$	
L_G -estymator	$\hat{R}_{ELEKTRIM} = 0.0121 + 1.017R_{WIG}$	

Ponieważ L_G -estymator nie zauważył obserwacji nietypowych dla BRE i ELEKTRIMU, linie charakterystyczne dla MNK i L_G -estymatora są takie same. L_M -estymator zaś nie brał pod uwagę obserwacji o dużych wartościach stopy zwrotu dla tych spółek, co spowodowało obniżenie linii charakterystycznych i nachylenie ich pod mniejszym kątem w stosunku do osi WIG-u.

Rys. 5.4

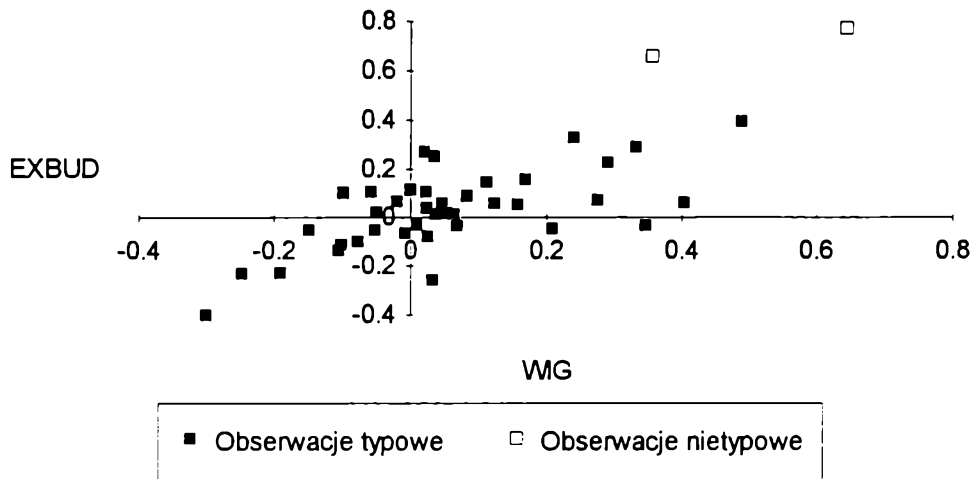


Tabela 5.4

Estymator	LINIA CHARAKTERYSTYCZNA EXBUDU	Obserwacje nietypowe dla L_G -estymatora (w nawiasie data)
MNK	$\hat{R}_{EXBUD} = -0.0012 + 0.842R_{WIG}$	
L_M -estymator	$\hat{R}_{EXBUD} = -0.0368 + 0.811R_{WIG}$	
L_G -estymator	$\hat{R}_{EXBUD} = -0.0041 + 0.628R_{WIG}$	25 (5.93), 33 (1.94)

Dla EXBUDU zarówno L_M jak i L_G -estymator zmniejszyły wpływ obserwacji o największych stopach zwrotu tej spółki, przy czym L_M -estymator był tutaj bardziej radykalny, co spowodowało głębsze obniżenie linii charakterystycznej i nachylenie jej pod mniejszym kątem w stosunku do osi WIG-u.

Wyodrębnione przez L_G -estymator obserwacje nietypowe charakteryzują się największymi miesięcznymi stopami zwrotu EXBUDU przekraczającymi 0.5. W maju 1993 r. (25 obserwacja) prawie przez cały miesiąc kurs EXBUDU na każdej sesji wzrastał o maksymalne dopuszczalne 10%.

Rys. 5.5

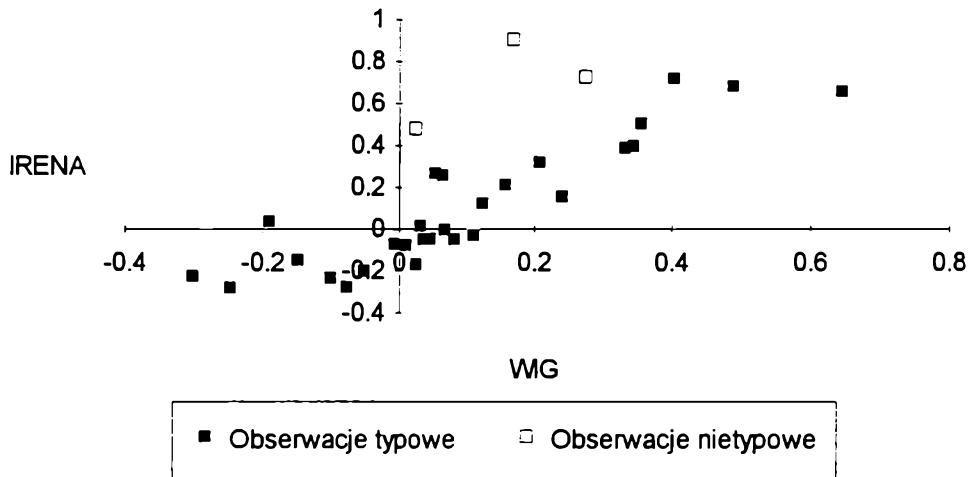


Tabela 5.5

Estymator	LINIA CHARAKTERYSTYCZNA IRENY	Observacje nietypowe dla L_G -estymatora (w nawiasie data)
MNK	$\hat{R}_{IRENA} = 0.0326 + 1.266R_{WIG}$	16 (6.93), 17 (7.93), 27 (5.94)
L_M -estymator	$\hat{R}_{IRENA} = -0.1084 + 1.569R_{WIG}$	
L_G -estymator	$\hat{R}_{IRENA} = -0.0125 + 1.206R_{WIG}$	

Usunięcie obserwacji nietypowych przez L_G -estymator spowodowało obniżenie w stosunku do MNK położenia linii charakterystycznej IRENY i nieznaczne zmniejszenie kąta nachylenia tej linii. L_M -estymator zwiększył zaś kąt nachylenia linii charakterystycznej. Świadczy to o wpływie powyższych obserwacji na szacowaną linię regresji.

Wyodrębnione przez L_G -estymator obserwacje nietypowe charakteryzują się wysoką stopą zwrotu IRENY w stosunku do stopy zwrotu przeciętnej akcji na giełdzie.

W czerwcu 1993 r. (16 obserwacja) prawie przez cały miesiąc kurs IRENY na każdej sesji wzrastał o maksymalne dopuszczalne 10%.

Rys. 5.6

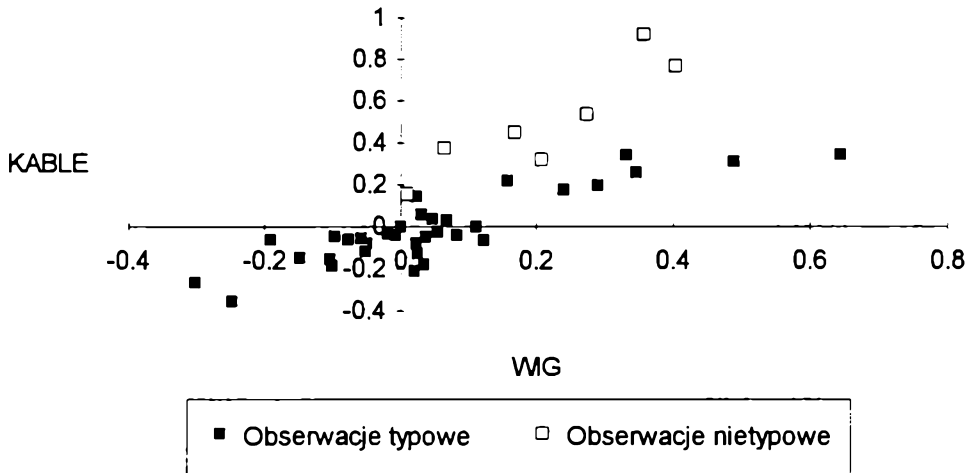


Tabela 5.6

Estymator	LINIA CHARAKTERYSTYCZNA KABLI	Obserwacje nietypowe dla L_G -estymatora (w nawiasie data)
MNK	$\hat{R}_{KABLE} = -0.0027 + 1.064R_{WIG}$	19 (11.92),
$L_{\Lambda T}$ -estymator	$\hat{R}_{KABLE} = -0.0446 + 0.728R_{WIG}$	21 (1.93), 26 (6.93), 27 (7.93),
L_G -estymator	$\hat{R}_{KABLE} = -0.0451 + 0.757R_{WIG}$	28 (8.93), 33 (1.94), 34 (2.94)

Dla KABLI można zauważyć bardzo zbliżone do siebie wyniki estymacji linii charakterystycznych za pomocą obu estymatorów odpornych. Świadczy to o podobnym podejściu do obserwacji nietypowych.

L_G -estymator wyodrębnił 7 obserwacji nietypowych. W miesiącach letnich (czerwiec - sierpień) 1993 r. można było zauważyć brak równowagi na rynku tych

papierów wartościowych: było sporo redukcji kupna, nadwyżek kupna i jedna oferta kupna, ale jednocześnie 2 oferty sprzedaży, redukcje i nadwyżki sprzedaży.

Rys. 5.7

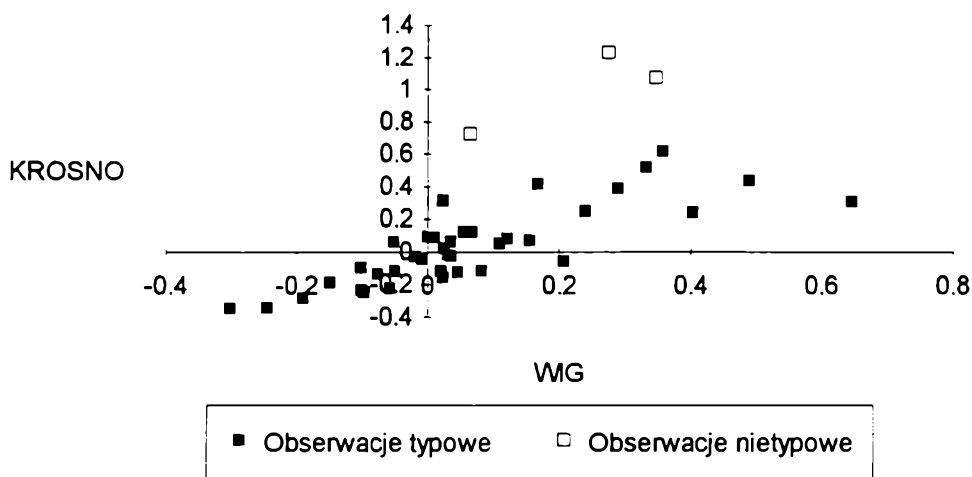


Tabela 5.7

Estymator	LINIA CHARAKTERYSTYCZNA KROSNA	Observacje nietypowe dla L_G -estymatora (w nawiasie data)
MNK	$\hat{R}_{KROSNO} = 0.0107 + 1.242R_{WIG}$	19(11.92), 27(7.93), 32(12.93)
L_M -estymator	$\hat{R}_{KROSNO} = -0.0249 + 1.412R_{WIG}$	
L_G -estymator	$\hat{R}_{KROSNO} = -0.0292 + 0.992R_{WIG}$	

Linie charakterystyczne dla KROSNA obliczane za pomocą estymatorów odpornych różnią się między sobą współczynnikiem beta. Na wartość tego współczynnika obliczonego za pomocą L_M -estymatora miały wpływ obserwacje uznane za nietypowe przez L_G -estymator.

Wszystkie wyodrębnione przez L_G -estymator obserwacje nietypowe dla KROSNA charakteryzują się największymi stopami zwrotu przekraczającymi 70%. Na początku

listopada 1992 r. spółka podała do publicznej wiadomości informację o podpisaniu kontraktu sprzedaży swoich wyrobów do USA wartości 5.5 mln \$. Spowodowało to na 6 kolejnych sesjach same oferty kupna, a na sesjach 24 i 26 listopada wzrost kursu o ok. 18%. W pozostałych dwóch miesiącach nietypowych (lipiec i grudzień 1993 r.) wzrosty kursów były na tyle duże, że spowodowało to podwojenie kursów w ciągu każdego z tych miesięcy.

Rys. 5.8

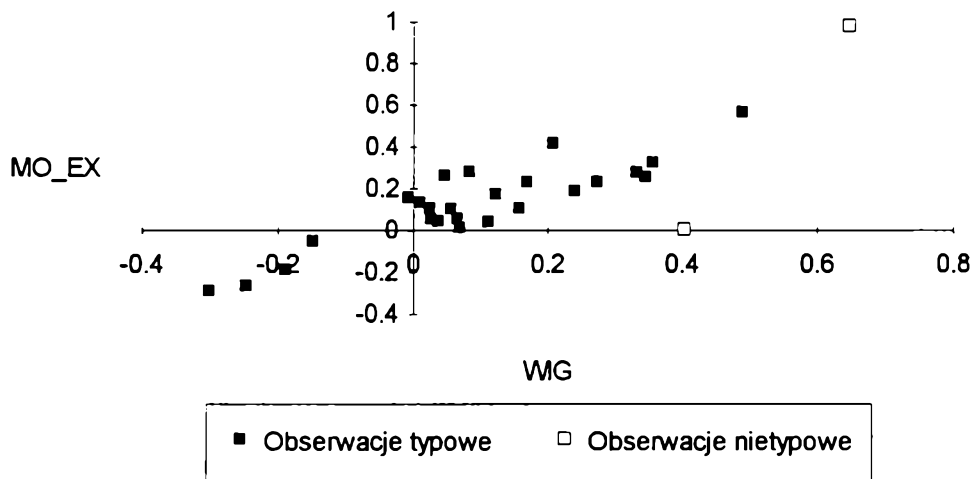


Tabela 5.8

Estymator	LINIA CHARAKTERYSTYCZNA MOSTOSTALU EXPORT	Observacje nietypowe dla L_G -estymatora (w nawiasie data)
MNK	$\hat{R}_{MOSTOSTAL_EXP} = 0.0383 + 0.963R_{WIG}$	11 (5.93), 14 (8.93)
L_M -estymator	$\hat{R}_{MOSTOSTAL_EXP} = -0.0111 + 0.896R_{WIG}$	
L_G -estymator	$\hat{R}_{MOSTOSTAL_EXP} = 0.0473 + 0.909R_{WIG}$	

Linie charakterystyczne MOSTOSTALU EXPORT liczone za pomocą wszystkich estymatorów nie odbiegają zbytnio od siebie.

Dla tej spółki L_G -estymator wyodrębnił dwa miesiące nietypowe. W maju 1993 r. przy wysokiej miesięcznej stopie zwrotu przeciętnej akcji na giełdzie zanotowano największą miesięczną stopę zwrotu MOSTOSTALU EXPORT (na każdej sesji notowano maksymalny dopuszczalny wzrost kursu). Inaczej zaś kształtowała się sytuacja trzy miesiące później. Przy też wysokiej stopie zwrotu WIG-u wzrost kursu MOSTOSTALU EXPORT w ciągu miesiąca był nieznaczny (niewiele większy od zera).

Rys. 5.9

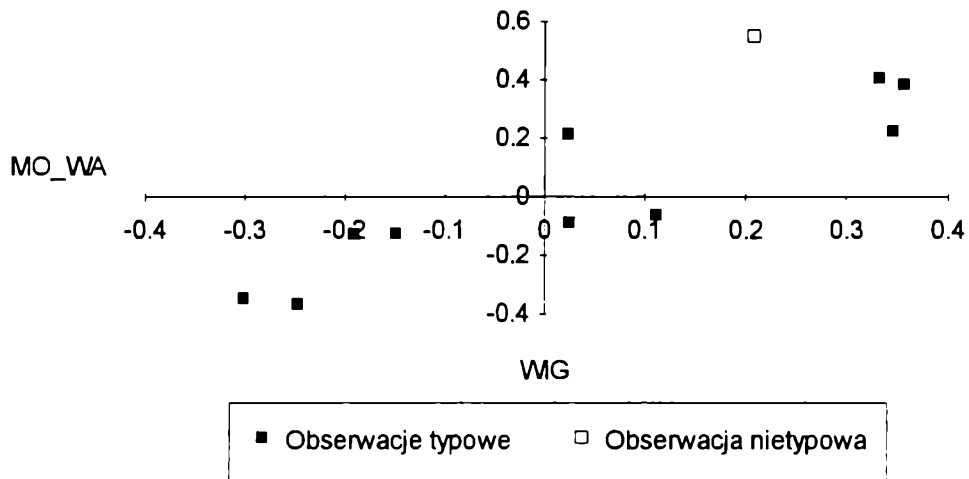


Tabela 5.9

Estymator	LINIA CHARAKTERYSTYCZNA MOSTOSTALU WARSZAWA	Obserwacje nietypowe dla L_G -estymatora (w nawiasie data)
MNK	$\hat{R}_{MOSTOSTAL_WA} = 0.0890 + 1.113R_{WG}$	4 (2.94)
L_M -estymator	$\hat{R}_{MOSTOSTAL_WA} = 0.1583 + 1.887R_{WG}$	
L_G -estymator	$\hat{R}_{MOSTOSTAL_WA} = -0.0192 + 1.016R_{WG}$	

Dla MOSTOSTALU WARSZAWA linie charakterystyczne dla estymatorów odpornych różnią się dość znacznie zwłaszcza współczynnikiem beta. Estymatory oparły się na innych obserwacjach typowych.

L_G -estymator zauważył tylko jedną obserwację nietypową charakteryzującą się największą stopą zwrotu (przekroczyła ona 0.5).

Rys. 5.10

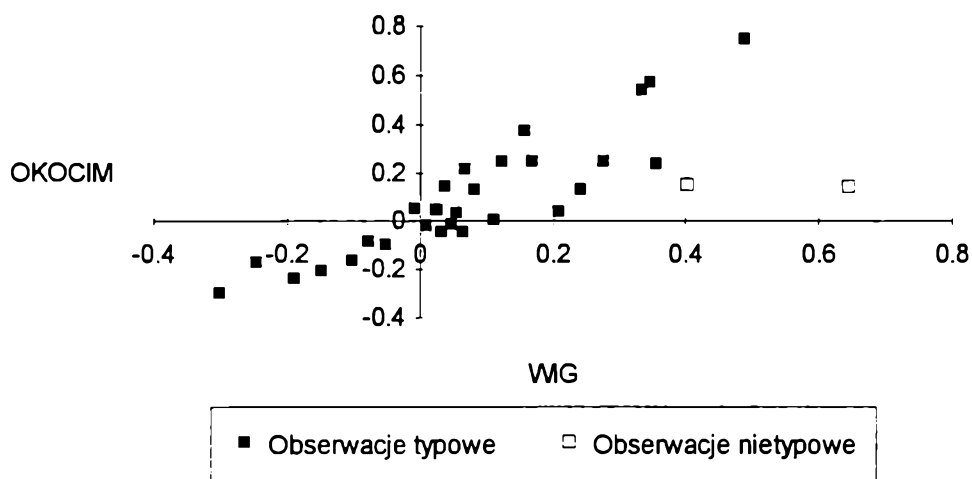


Tabela 5.10

Estymator	LINIA CHARAKTERYSTYCZNA OKOCIMIA	Observacje nietypowe dla L_G -estymatora (w nawiasie data)
MNK	$\hat{R}_{OKOCIM} = 0.0090 + 0.865R_{WIG}$	15 (5.93), 18 (8.93)
L_M -estymator	$\hat{R}_{OKOCIM} = 0.0117 + 1.467R_{WIG}$	
L_G -estymator	$\hat{R}_{OKOCIM} = 0.0069 + 1.193R_{WIG}$	

Tendencja zmiany linii charakterystycznej OKOCIMIA estymatorów odpornych w stosunku do MNK jest taka sama. L_M -estymator jest jednak w tej tendencji bardziej radykalny.

Obie wyodrębnione przez L_G -estymator obserwacje nietypowe charakteryzują się niską stopą zwrotu dla tego papieru przy wysokiej stopie zwrotu przeciętnej akcji na giełdzie.

Rys. 5.11

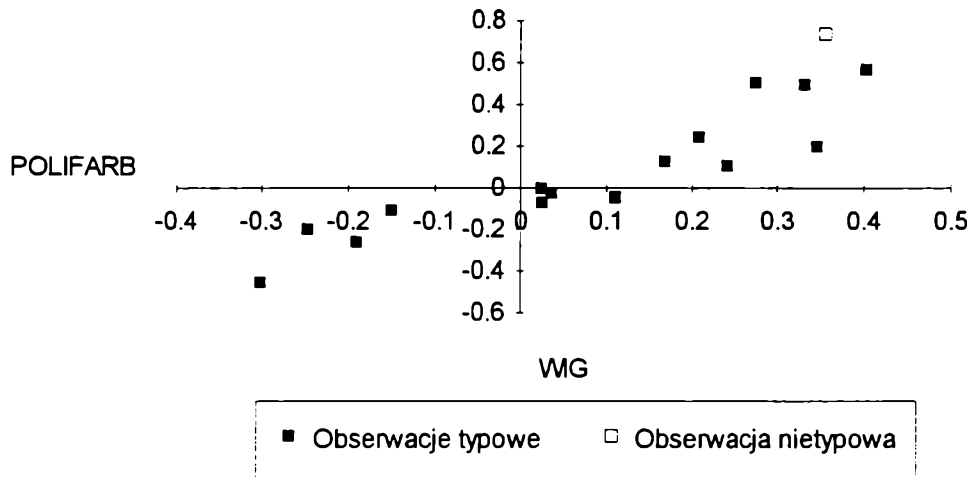


Tabela 5.11

Estymator	LINIA CHARAKTERYSTYCZNA POLIFARBU CIESZYN	Observacje nietypowe dla L_G -estymatora (w nawiasie data)
MNK	$\hat{R}_{POLIFARB_C} = -0.0197 + 1.302R_{W7G}$	8 (1.94)
L_M -estymator	$\hat{R}_{POLIFARB_C} = -0.0515 + 0.714R_{W7G}$	
L_G -estymator	$\hat{R}_{POLIFARB_C} = -0.0297 + 1.191R_{W7G}$	

Dla POLIFARBU CIESZYN L_G -estymator wyodrębnił tylko jedną obserwację nietypową o największej miesięcznej stopie zwrotu (przekraczającej 70%). Nie wpłynęło to znacząco na zmianę położenia linii charakterystycznej. Na L_M -estymator nie mają także wpływu pozostałe obserwacje o wysokiej stopie zwrotu, co powoduje znaczne zmniejszenie wartości współczynnika beta.

Rys. 5.12

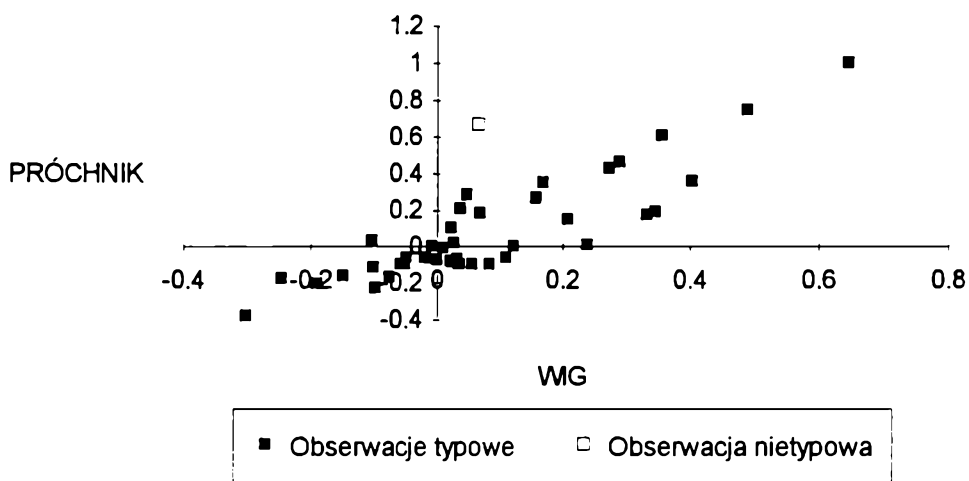


Tabela 5.12

Estymator	LINIA CHARAKTERYSTYCZNA PRÓCHNIKA	Observacje nietypowe dla L_G -estymatora (w nawiasie data)
MNK	$\hat{R}_{PRÓCHNIK} = 0.0003 + 1.232R_{WIG}$	19 (11.92)
L_M -estymator	$\hat{R}_{PRÓCHNIK} = -0.0714 + 0.583R_{WIG}$	
L_G -estymator	$\hat{R}_{PRÓCHNIK} = -0.0149 + 1.238R_{WIG}$	

Dla linii charakterystycznej PRÓCHNIKA L_G -estymator też zauważył tylko jedną obserwację nietypową. W listopadzie 1992 r. kurs tego papieru prawie cały czas zwykował maksymalnie przy równocześnie niskiej stopie zwrotu WIG-u. Usunięcie tej obserwacji nietypowej spowodowało nieznaczne obniżenie linii charakterystycznej (zmniejszenie wartości wyrazu wolnego regresji). Linia charakterystyczna obliczona za pomocą L_M -estymatora zaś ma znacząco mniejszy współczynnik beta. Na wielkość tego współczynnika nie miały wpływu także inne obserwacje o wysokiej stopie zwrotu.

Rys. 5.13

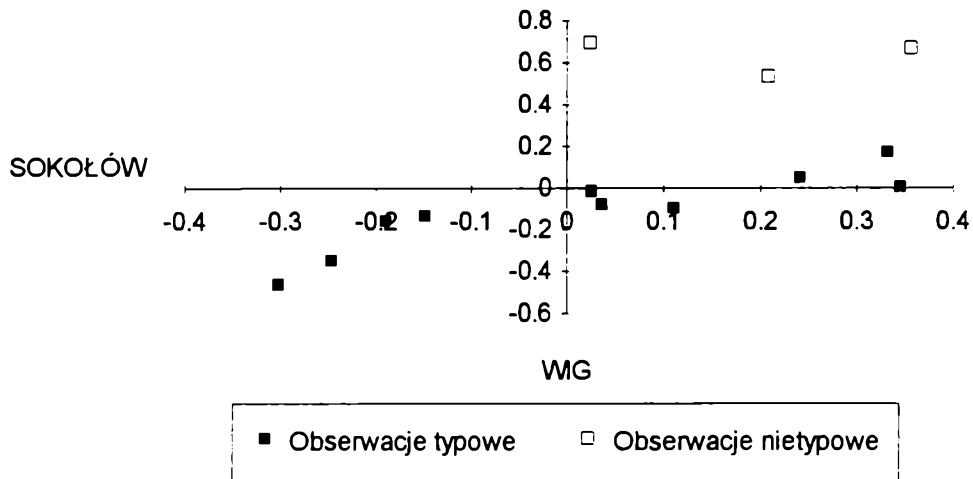


Tabela 5.13

Estymator	LINIA CHARAKTERYSTYCZNA SOKOŁOWA	Observacje nietypowe dla L_G -estymatora (w nawiasie data)
MNK	$\hat{R}_{SOKOŁÓW} = 0.0031 + 1.017R_{WIG}$	5 (1.94), 6 (2.94), 9 (5.94)
L_M -estymator	$\hat{R}_{SOKOŁÓW} = -0.0849 + 0.302R_{WIG}$	
L_G -estymator	$\hat{R}_{SOKOŁÓW} = -0.1194 + 0.695R_{WIG}$	

Wszystkie trzy obserwacje nietypowe wyodrębnione przez L_G -estymator dla SOKOŁOWA charakteryzują się największymi miesięcznymi stopami zwrotu przekraczającymi 0.5 (dla pozostałych miesięcy stopa zwrotu nie przekracza 0.2). Styczeń i luty br. to hossa na giełdzie, której poddały się też akcje SOKOŁOWA. W maju zaś mimo bessy na giełdzie Sokołów zanotował dużą stopę zwrotu. Przyczyną tego była informacja o podziale akcji, co spowodowało, że akcje SOKOŁOWA były nominalnie najtańszymi akcjami notowanymi na GPW.

Usunięcie obserwacji nietypowych znacząco obniżyło współczynnik beta. L_M -estymator jeszcze bardziej obniżył jego wartość, co świadczy, że na jego wartość nie miały wpływu także obserwacje o najniższej stopie zwrotu SOKOŁOWA.

Rys. 5.14

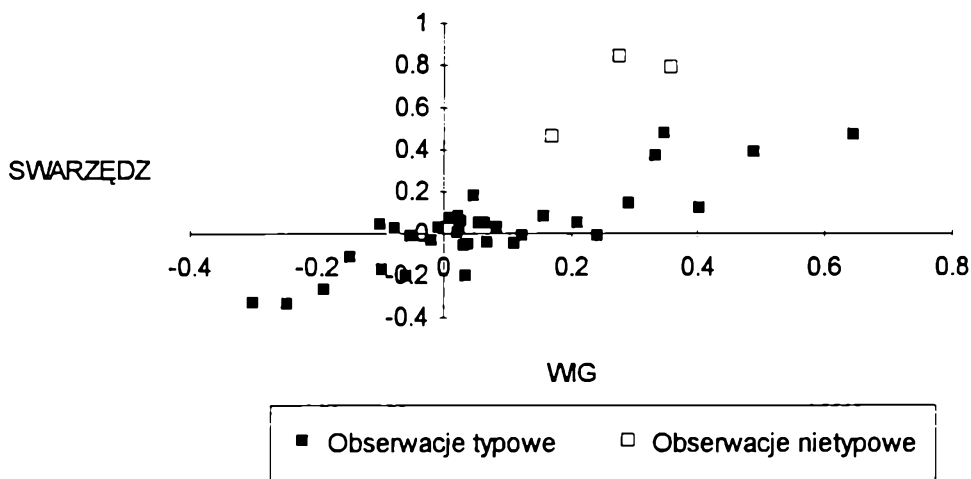


Tabela 5.14

Estymator	LINIA CHARAKTERYSTYCZNA SWARZĘDZA	Observacje nietypowe dla L_G -estymatora (w nawiasie data)
MNK	$\hat{R}_{SWARZĘDZ} = -0.0084 + 1.004R_{WIG}$	23 (6.93), 24 (7.93), 30 (1.94)
L_M -estymator	$\hat{R}_{SWARZĘDZ} = 0.0015 + 0.349R_{WIG}$	
L_G -estymator	$\hat{R}_{SWARZĘDZ} = -0.0316 + 0.807R_{WIG}$	

L_G -estymator przy szacowaniu linii charakterystycznej SWARZĘDZA usunął trzy obserwacje nietypowe o największych miesięcznych stopach zwrotu. Spowodowało to zmniejszenie wartości współczynnika beta. Jeszcze mniejszą wartość tego współczynnika uzyskano dla L_M -estymatora.

Rys. 5.15

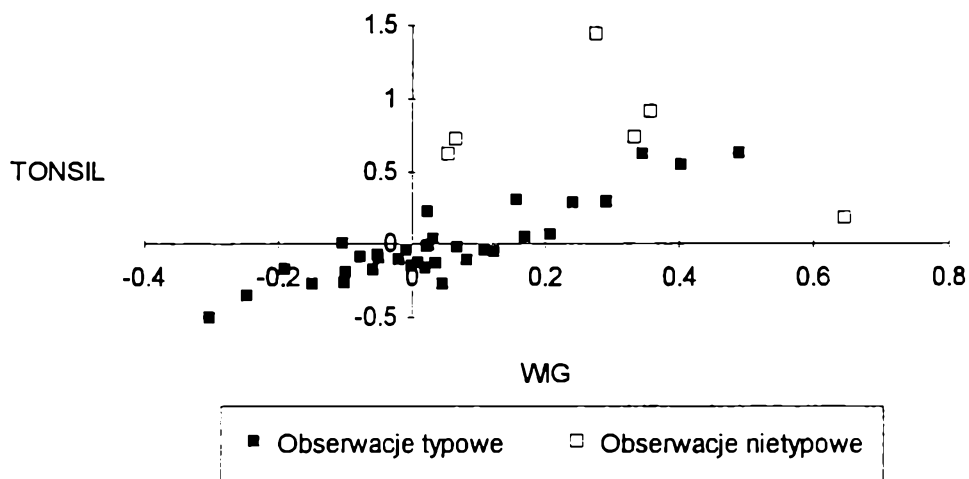


Tabela 5.15

Estymator	LINIA CHARAKTERYSTYCZNA TONSILU	Observacje nietypowe dla L_G -estymatora (w nawiasie data)
MNK	$\hat{R}_{TONSIL} = -0.0059 + 1.389R_{WIG}$	19(11.92), 20(12.92), 25(5.93), 27(7.93), 33(1.94), 39(7.94)
L_M -estymator	$\hat{R}_{TONSIL} = -0.0870 + 0.415R_{WIG}$	
L_G -estymator	$\hat{R}_{TONSIL} = -0.0684 + 1.330R_{WIG}$	

Dla TONSILU L_G -estymator zauważył 6 obserwacji nietypowych. Koniec roku (listopad - grudzień) 1992 to prawie same maksymalne wzrosty kursu (3.12.92 r. nawet o ponad 19%). W lipcu 1993 r. kurs akcji TONSILU prawie potroił się. Dwa miesiące wcześniej zaś przy dobrej sytuacji na giełdzie (stopa zwrotu WIG-u wyniosła w maju prawie 65%) TONSIL zanotował nieznaczny wzrost.

Mimo usunięcia 6 obserwacji nietypowych linia charakterystyczna tylko nieznacznie zmieniła swoje położenie. Znacznie mniejszy współczynnik beta uzyskano zaś dla L_M -estymatora.

Rys. 5.16

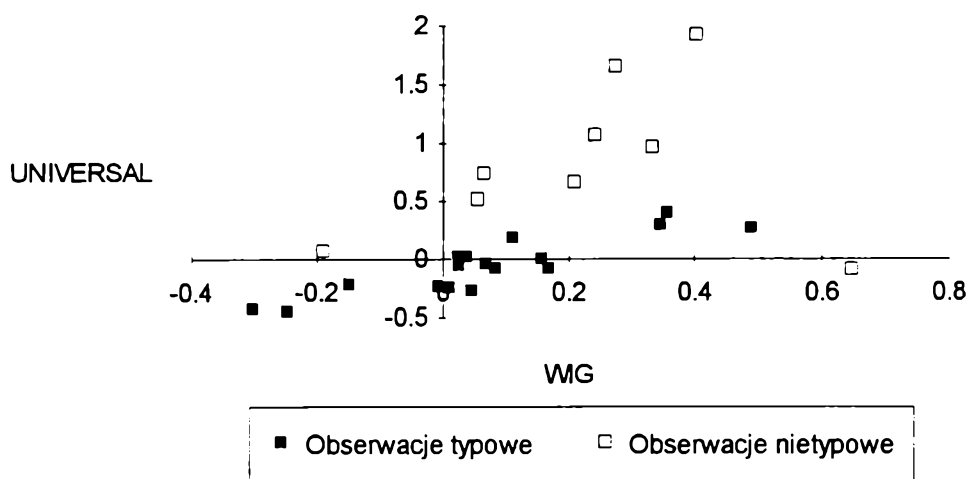


Tabela 5.16

Estymator	LINIA CHARAKTERYSTYCZNA UNIVERSALU	Observacje nietypowe dla L_G -estymatora (w nawiasie data)
MNK	$\hat{R}_{UNIVERSAL} = 0.0822 + 1.409R_{WG}$	4 (11.92), 5 (12.92), 10 (5.93),
L_M -estymator	$\hat{R}_{UNIVERSAL} = -0.1226 + 0.811R_{WG}$	12 (7.93), 13 (8.93), 15 (10.93),
L_G -estymator	$\hat{R}_{UNIVERSAL} = -0.1242 + 1.064R_{WG}$	19 (2.94), 20 (3.94), 24 (7.94)

Najwięcej obserwacji nietypowych ze wszystkich badanych akcji L_G -estymator wyodrębnił dla UNIVERSALU. Spółka ta bowiem w największym stopniu reaguje na zmiany zachodzące na rynku (największy współczynnik beta dla MNK) i jest w związku z tym uważana za papier najbardziej spekulacyjny na GPW. Już w listopadzie i grudniu 1992 r. prawie cały czas notowano maksymalne wzrosty kursu. W lipcu i sierpniu następnego roku kurs zwiększał się 2.5 krotnie na miesiąc (tylko 27 lipca ub. r. kurs wzrósł o 20%, 29 lipca o 28.79% a 19 sierpnia o 31.46%). Podobnie w październiku 1993 r. kurs podwoił się (tylko 21 tego miesiąca zanotowano wzrost kursu o 14.29%). Z

drugiej strony w maju tego roku przy dobrej sytuacji na giełdzie (przeciętna miesięczna stopa zwrotu dla WIG-u wynosiła wtedy prawie 65%) stopa zwrotu UNIVERSALU jest ujemna.

Usunięcie obserwacji nietypowych spowodowało zmniejszenie wartości współczynnika beta. Jeszcze bardziej radykalnie obniżył ten współczynnik L_M -estymator.

Rys. 5.17

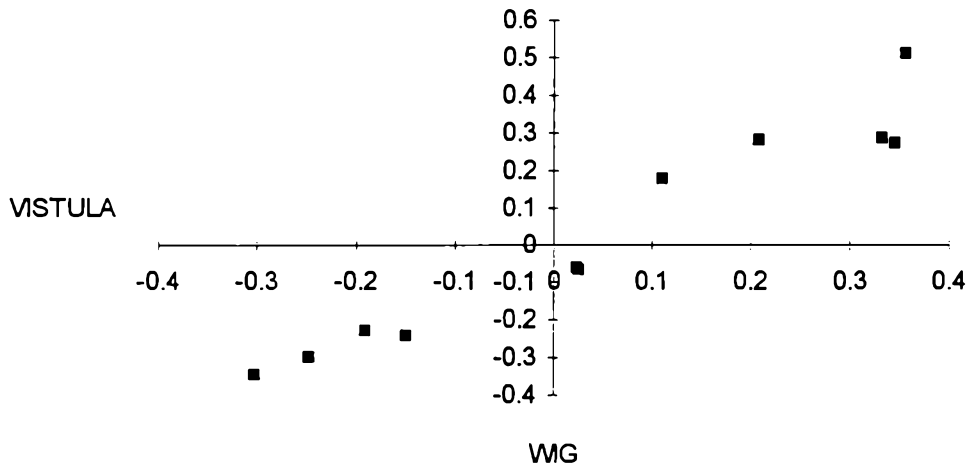


Tabela 5.17

Estymator	LINIA CHARAKTERYSTYCZNA VISTULI	Observacje nietypowe dla L_G -estymatora (w nawiasie data)
MNK	$\hat{R}_{VISTULA} = -0.0271 + 1.148R_{WIG}$	nie występują
L_M -estymator	$\hat{R}_{VISTULA} = -0.0988 + 0.809R_{WIG}$	
L_G -estymator	$\hat{R}_{VISTULA} = -0.0271 + 1.148R_{WIG}$	

Rys. 5.18

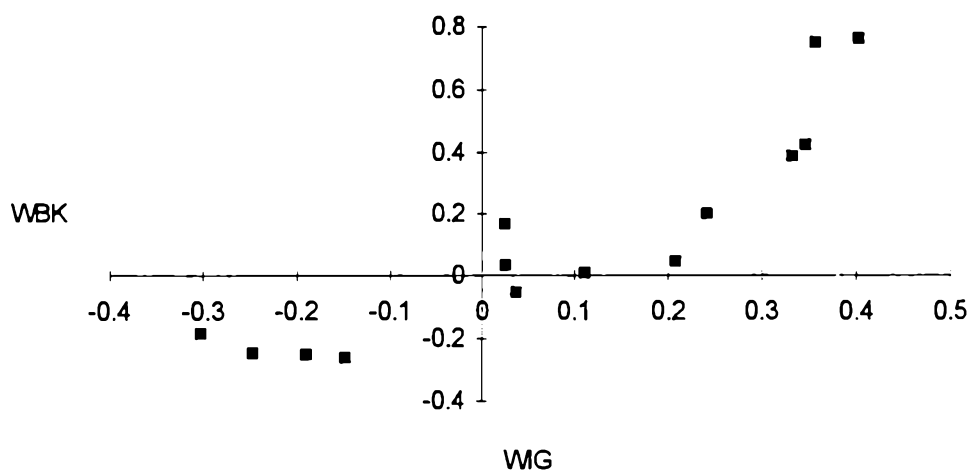


Tabela 5.18

Estymator	LINIA CHARAKTERYSTYCZNA WBK	Obserwacje nietypowe dla L_G -estymatora (w nawiasie data)
MNK	$\hat{R}_{WBK} = 0.0163 + 1.293R_{WG}$	nie występują
L_M -estymator	$\hat{R}_{WBK} = -0.0594 + 1.343R_{WG}$	
L_G -estymator	$\hat{R}_{WBK} = 0.0163 + 1.293R_{WG}$	

Rys. 5.19

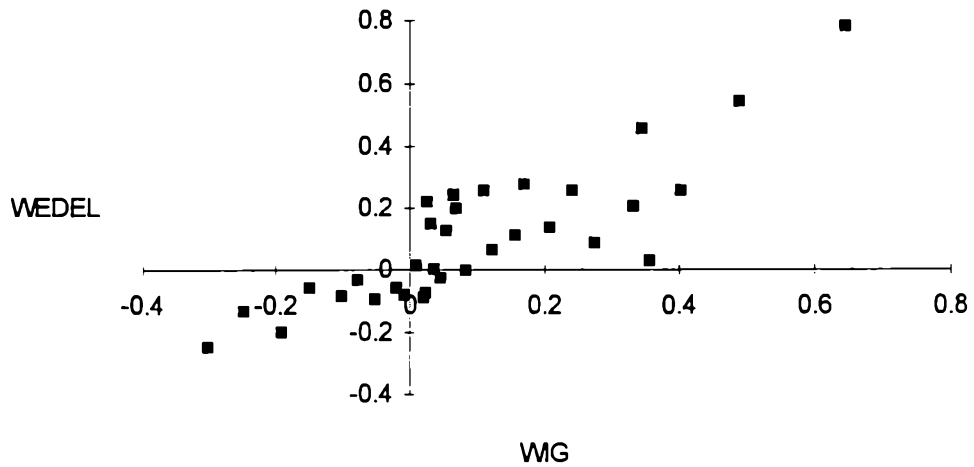


Tabela 5.19

Estymator	LINIA CHARAKTERYSTYCZNA WEDLA	Observacje nietypowe dla L_G -estymatora (w nawiasie data)
MNK	$\hat{R}_{WEDEL} = 0.0125 + 0.886R_{WG}$	nie występują
L_M -estymator	$\hat{R}_{WEDEL} = -0.0443 + 0.669R_{WG}$	
L_G -estymator	$\hat{R}_{WEDEL} = 0.0125 + 0.886R_{WG}$	

Rys. 5.20

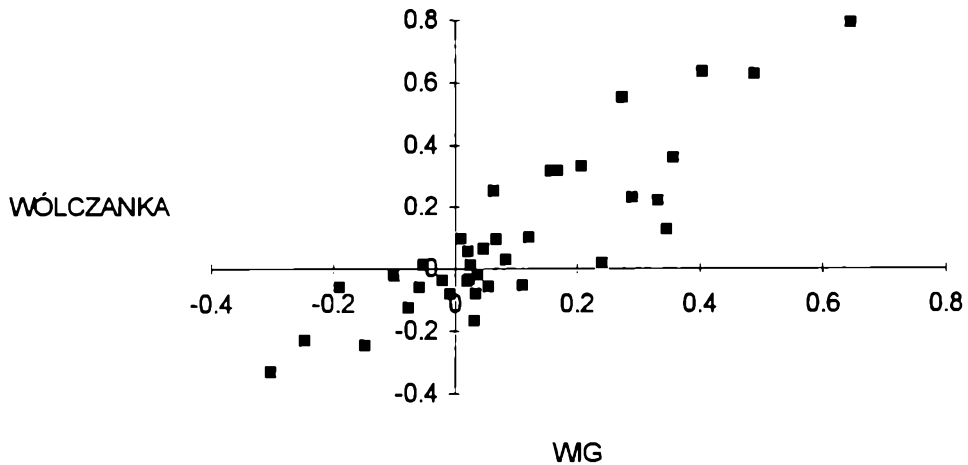


Tabela 5.20

Estymator	LINIA CHARAKTERYSTYCZNA WÓLCZANKI	Observacje nietypowe dla L_G -estymatora (w nawiasie data)
MNK	$\hat{R}_{WÓLCZANKA} = -0.0034 + 1.104R_{WG}$	nie występują
L_M -estymator	$\hat{R}_{WÓLCZANKA} = -0.0095 + 0.857R_{WG}$	
L_G -estymator	$\hat{R}_{WÓLCZANKA} = -0.0034 + 1.104R_{WG}$	

Dla VISTULI, WBK, WEDLA i WÓLCZANKI L_G -estymator nie zauważył obserwacji nietypowych. W związku z tym linie charakterystyczne szacowane za pomocą tego estymatora są takie same jak dla MNK. Dla L_M -estymatora linie charakterystyczne tych spółek są znacząco różne od MNK.

Rys. 5.21

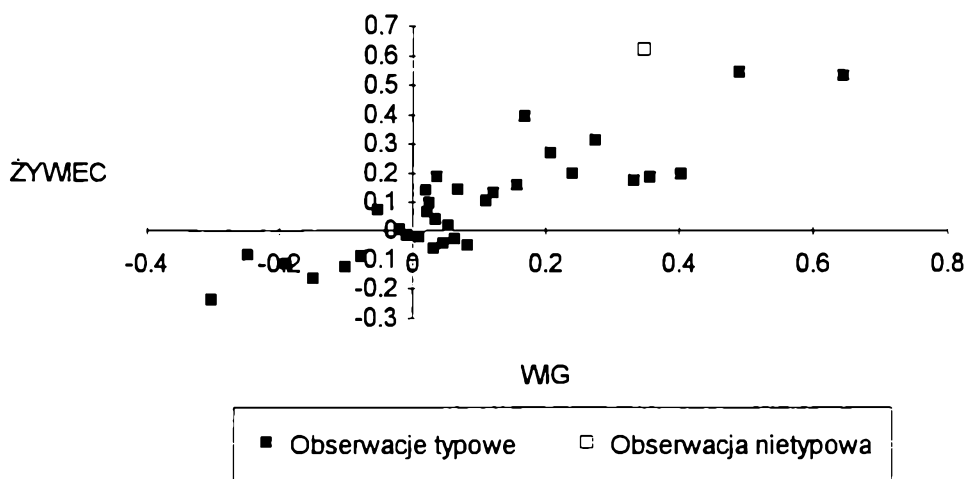


Tabela 5.21

Estymator	LINIA CHARAKTERYSTYCZNA ŻYWCA	Observacje nietypowe dla L_G -estymatora (w nawiasie data)
MNK	$\hat{R}_{ZYWEC} = 0.0279 + 0.840R_{WIG}$	26 (12.93)
L_M -estymator	$\hat{R}_{ZYWEC} = 0.0243 + 0.909R_{WIG}$	
L_G -estymator	$\hat{R}_{ZYWEC} = 0.0241 + 0.781R_{WIG}$	

Dla ŻYWCA L_G -estymator wyodrębnił tylko jedną obserwację nietypową o największej w historii notowań ŻYWCA miesięcznej stopie zwrotu. Usunięcie tej obserwacji nietypowej spowodowało obniżenie współczynnika beta. L_M -estymator ma zaś wartość tego współczynnika większą od tej uzyskanej MNK.

Porównajmy jeszcze współczynniki beta uzyskane dla tych trzech estymatorów. W tab. 5.22 - 5.24 zamieszczono wartości współczynników beta dla badanych w tym rozdziale estymatorów uporządkowane według rosnącej wartości tego współczynnika.

Tabela 5.22

Lp.	SPÓŁKA	WSPÓŁCZYNNIK BETA dla MNK
1	BRE	0.781
2	ŻYWIEC	0.840
3	EXBUD	0.842
4	OKOCIM	0.865
5	WEDEL	0.886
6	MOSTOSTAL EXPORT	0.963
7	SWARZĘDZ	1.004
8	ELEKTRIM	1.017
9	SOKOŁÓW	1.017
10	KABLE	1.064
11	BIG	1.086
12	WÓLCZANKA	1.104
13	MOSTOSTAL WARSZAWA	1.113
14	VISTULA	1.148
15	PRÓCHNIK	1.232
16	KROSNO	1.242
17	IRENA	1.266
18	WBK	1.293
19	POLIFARB CIESZYN	1.302
20	TONSIL	1.389
21	UNIVERSAL	1.409

Tabela 5.23

Lp.	SPÓŁKA	WSPÓŁCZYNNIK BETA dla L_G -estymatora
1	EXBUD	0.628
2	BIG	0.633
3	SOKOŁÓW	0.695
4	KABLE	0.757
5	BRE	0.781
6	ŻYWIEC	0.781
7	SWARZĘDZ	0.807
8	WEDEL	0.886
9	MOSTOSTAL EXPORT	0.909
10	KROSNO	0.992
11	MOSTOSTAL WARSZAWA	1.016
12	ELEKTRIM	1.017
13	UNIVERSAL	1.064
14	WÓLCZANKA	1.104
15	VISTULA	1.148
16	POLIFARB CIESZYN	1.191
17	OKOCIM	1.193
18	IRENA	1.206
19	PRÓCHNIK	1.238
20	WBK	1.293
21	TONSIL	1.330

Tabela 5.24

Lp.	SPÓŁKA	WSPÓŁCZYNNIK BETA dla L_M -estymatora
1	SOKOŁÓW	0.302
2	SWARZĘDZ	0.349
3	TONSIL	0.415
4	BRE	0.443
5	PRÓCHNIK	0.583
6	WEDEL	0.669
7	POLIFARB CIESZYN	0.714
8	KABLE	0.728
9	VISTULA	0.809
10	EXBUD	0.811
11	UNIVERSAL	0.811
12	ELEKTRIM	0.840
13	WÓLCZANKA	0.857
14	MOSTOSTAL EXPORT	0.896
15	ŻYWIEC	0.909
16	BIG	0.967
17	WBK	1.343
18	KROSNO	1.412
19	OKOCIM	1.467
20	IRENA	1.569
21	MOSTOSTAL WARSZAWA	1.887

Jak łatwo zauważyć, w zależności od stosowanego estymatora uzyskujemy nie tylko inne wartości współczynnika beta ale także inne uporządkowanie spółek pod względem ryzyka. Szczególnie dotyczy to L_M -estymatora. Jest to bardzo istotne, bo współczynnik beta ma znaczenie dla inwestora przy wyborze akcji o małym, bądź dużym ryzyku systematycznym. Dla przykładu TONSIL zajmuje przedostatnie miejsce przy stosowaniu MNK (akcja bardzo agresywna), ostatnie przy stosowaniu L_G -estymatora (akcja najbardziej agresywna ze wszystkich notowanych na GPW), a 3 dla L_M -estymatora

(akcja defensywna). Dodatkowo dla L_M -estymatora można zauważyć znacznie większy zakres wartości współczynnika beta.

Z powyższych rozważań można wysnuć wniosek, że L_M -estymator jest bardziej radykalny niż L_G -estymator. Najczęściej ten ostatni ma bardziej zbliżone wartości do MNK niż L_M -estymator. Wynika to oczywiście z konstrukcji L_M -estymatora, który opiera się na medianie. Sądzę jednak, że gdyby obniżyć wartość stałej regulującej g (np. do 0.8), więcej obserwacji nietypowych zostałoby odrzuconych, co spowodowałoby bardziej zbliżone wyniki dla tych estymatorów odpornych. Sądzę jednak, że odrzucanie większej liczby obserwacji jest już mocno dyskusyjne. L_G -estymator odrzucał maksymalnie $\frac{1}{3}$ wszystkich obserwacji (przy stałej g równej 1). Jeśli bowiem jest więcej obserwacji nietypowych należy zastanowić się nad sensem stosowania regresji liniowej (może stosować regresję dla segmentów) albo w ogóle zastanowić się nad sensem badania zależności między takimi zjawiskami.

Zakończenie

Praca dotyczy często dyskutowanych, o czym świadczy bogata literatura przedmiotu, problemów występowania obserwacji nietypowych w regresji liniowej. Ważne jest tutaj określenie, co rozumiemy przez obserwację nietypową. W rozdziale 1 starano się uporządkować definicje w tym zakresie.

Zakres pracy obejmuje dwa różne metodologicznie podejścia w przewyżczeniu niekorzystnego efektu działania obserwacji nietypowych w analizie regresji liniowej.

Pierwszy sposób polega na analizie *ex post* wyznaczonej regresji za pomocą metod diagnostyki obserwacji nietypowych w celu wykrycia obserwacji nietypowych. Najlepszym sposobem jest tutaj (jak wykazano w rozdziale 2) zastosowanie reszt *t*-normalizowanych. Dodatkowo zastosowanie zaproponowanego algorytmu zwiększa szanse odkrycia obserwacji nietypowych.

Drugi sposób polega na wykorzystaniu do szacowania regresji estymatorów odpornych. Można stosować kilka rodzajów tych estymatorów. Jak wynika z rozdziału 3 i 4 różnie się one reagują na występowanie obserwacji nietypowych. Najlepszym, to znaczy najbardziej odpornym okazał się estymator najmniejszej mediany kwadratów. Ma on jednak jedną wadę. Algorytm obliczeniowy jest czasochłonny zwłaszcza dla dużych przykładów (liczba obserwacji i zmiennych). Zaproponowany przeze mnie estymator okazał się równie dobry (dla frakcji obserwacji nietypowych mniejszej niż 25% - wynika to z konstrukcji estymatora) jak estymator najmniejszej mediany kwadratów. L_G -estymatora ma dodatkową zaletę, że jest prosty obliczeniowo. Do estymacji stosuje iteracyjnie metodę najmniejszych kwadratów. Oprócz tego jako jedyny estymator

odporny spełnia rolę diagnostyczną i to dobrze o czym można było się przekonać w rozdziale 5.

Zastosowanie metod diagnostyki obserwacji nietypowych i estymatorów odpornych powinno stać się powszechne w praktyce. W zasadzie wszędzie tam, gdzie stosuje się metody regresyjne, mogą bowiem wystąpić obserwacje nietypowe. W rozdziale 5 pokazano na przykładzie jednowskaźnikowego modelu teorii portfela papierów wartościowych, że stosowanie estymatorów odpornych i metod diagnostycznych jest możliwe i użyteczne.

Badanie obserwacji nietypowych wymaga dobrego oprogramowania. Takie oprogramowanie zostało opracowane i wykorzystane do analizy przykładów empirycznych jak i do symulacji przez Autora.

Badań nad obserwacjami nietypowymi w regresji nie uważam za zakończone - w pracy poruszanych jest wiele problemów, które mogą stanowić punkt wyjścia do dalszych analiz pod kątem diagnostyki obserwacji nietypowych oraz "ulepszania" metod odpornej estymacji. Dalszej analizie konieczne jest poddanie regresji wielorakiej. Problemem prawie w ogóle nie poruszonym w pracy a bardzo ważnym i specyficznym jest odporna analiza szeregów czasowych. Inną ważną, a jeszcze mało zbadaną pod kątem występowania obserwacji nietypowych, dziedziną jest regresja nieliniowa. W tych kierunkach można prowadzić dalsze badania.

Dodatek A

Dane do przykładów 1-6

Tabela A.1

Dane do przykładu 1

i	x_i	y_i
1	1	2
2	1.3	1.9
3	1.8	1.8
4	2	1.75
5	2.2	1.4
6	2.8	1.6
7	3	1.5
8	3.3	1.6
9	3.4	1.4
10	3.8	1.3
11	4	1.25
12	4.1	4.5
13	4.2	1.2
14	4.6	1.3
15	4.8	1.1
16	5	1

Tabela A.2

Dane do przykładu 5

i	x_i	y_i
1	0.8	4.5
2	1	4
3	1.5	4
4	2	3
5	2	3
6	2.8	2.3
7	3	2
8	3.6	1.9
9	4	2.1
10	4.3	1.9
11	4.8	1.19
12	4.9	0.76
13	5.4	0.51
14	5.9	0.26
15	6.8	0.16
16	13.8	13.8

Tabela A.3

Dane do przykładu 2

i	x_i	y_i
1	0.6	0.6
2	0.7	1
3	0.8	1.5
4	1	1.8
5	1.1	2
6	1.2	2.5
7	1.3	3
8	1.4	2.9
9	1.6	3.5
10	1.8	4
11	5	1

Tabela A.4

Dane do przykładu 3

i	x_i	y_i
1	1	1
2	2	2
3	2.2	2.3
4	3	3
5	3.6	3.3
6	3.9	4.1
7	4	4
8	4.1	4.3
9	4.8	4.7
10	5	5
11	10	10

Tabela A.5

Dane do przykładu 4

i	x_i	y_i
1	0.8	4.2
2	1	4
3	1.5	3.6
4	2	3
5	2.2	2.8
6	2.8	2.3
7	3	2
8	3.6	1.6
9	4	1
10	4	4
11	4.2	0.8

Tabela A.6

Dane do przykładu 6

i	x_i	y_i
1	1.7	4.8
2	6.8	3
3	7	4
4	7.1	4.7
5	7.3	5.5
6	7.8	3.5
7	8	4.1
8	8.2	5.8
9	8.7	6.8
10	8.8	3.9
11	9	5.8
12	9.2	4.8
13	9.3	7.3
14	10.1	6
15	10.3	7
16	15.1	7.1

Dodatek B

Wyniki badań symulacyjnych

Objaśnienia do tab. B.1-B.135:

n - liczba obserwacji;

n_0 - liczba obserwacji nietypowych;

\bar{n}_0 - średnia (w powtórzeniach) liczba źle sklasyfikowanych obserwacji nietypowych (dotyczy tylko L_G -estymatora);

a - średnia (w powtórzeniach) wartość współczynnika kierunkowego regresji;

b - średnia (w powtórzeniach) wartość wyrazu wolnego regresji;

$s(a)$, $s(b)$ - błędy średniokwadratowe (w powtórzeniach) oszacowań współczynników regresji.

Tabela B.1

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
$n = 12$		
$n_0 = 0$		
zakłócenie: 0.1		
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.50067 0.00017	0.99435 0.00687
L_M	0.50054 0.02032	1.00136 0.13072
M_{II}	0.50163 0.01269	0.98641 0.08552
M_{II_s}	0.51698 0.12706	0.80169 0.92212
R_W	0.50116 0.01401	0.99527 0.10459
R_{W_s}	0.48812 0.22473	1.14335 1.76701
L_s	0.50180 0.01346	0.98816 0.08575
L_G	0.50067 0.01292	0.99435 0.08289
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.2

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
$n = 12$		
$n_0 = 0$		
zakłócenie: 0.5		
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.50998 0.00337	0.91162 0.14400
L_M	0.51940 0.17229	0.89500 1.14102
M_{II}	0.51170 0.07233	0.90270 0.45538
M_{II_s}	0.51597 0.17442	0.51371 1.19671
R_W	0.51242 0.06382	0.94645 0.53402
R_{W_s}	0.53061 0.63934	1.04966 3.67595
L_s	0.50545 0.07175	0.93918 0.45435
L_G	0.50885 0.05932	0.91611 0.38003
\bar{n}_0	0.02000	

Tabela B.3

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 0$
	zakłócenie: 1.0	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.51506 0.01176	0.91925 0.42679
L_M	0.40818 0.26936	1.74333 1.89610
M_{II}	0.51417 0.11891	0.83733 0.77867
M_{Hs}	0.67266 0.60046	-0.99663 4.15902
R_W	0.49870 0.10237	1.09348 0.98456
R_{Ws}	-0.40561 3.06285	9.13579 28.92676
L_s	0.49574 0.12813	1.05410 0.76141
L_G	0.51506 0.10844	0.91925 0.65330
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.4

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$	$n_0 = 0$
	zakłócenie: 0.1	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.50211 0.00008	0.99073 0.00319
L_M	0.50395 0.01780	0.97779 0.11527
M_{II}	0.50225 0.00978	0.98990 0.06123
M_{Hs}	0.50961 0.62634	0.56259 3.83918
R_W	0.50214 0.00966	1.01389 0.09680
R_{Ws}	0.48820 0.94133	0.42736 6.07279
L_s	0.50257 0.00986	0.98768 0.06073
L_G	0.50211 0.00910	0.99073 0.05646
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.5

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
$n = 25$		
$n_0 = 0$		
zakłócenie: 0.5		
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.49463 0.00172	1.05139 0.07905
L_M	0.48295 0.10308	1.11552 0.68114
M_{II}	0.49563 0.04255	1.04149 0.29334
M_{II_s}	1.29543 5.36724	-6.10754 45.64653
R_W	0.49426 0.04144	1.01472 0.49185
R_{W_s}	0.97521 1.85351	-0.23662 4.71344
L_s	0.49164 0.04492	1.06822 0.30463
L_G	0.49463 0.04144	1.05139 0.28115
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.6

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
$n = 25$		
$n_0 = 0$		
zakłócenie: 1.0		
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.50593 0.01139	0.92101 0.37312
L_M	0.46470 0.22510	1.09584 1.40955
M_{II}	0.50663 0.12984	0.82194 0.77161
M_{II_s}	1.41847 4.88963	-7.83735 42.05525
R_W	0.50622 0.11077	1.00738 0.95384
R_{W_s}	0.25662 1.48463	3.17295 13.52605
L_s	0.49383 0.12340	0.98702 0.69716
L_G	0.50593 0.10672	0.92101 0.61084
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.7

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
$n = 50$		
$n_0 = 0$		
zakłócenie: 0.1		
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.49998 0.00004	1.00311 0.00176
L_M	0.50090 0.01546	0.99293 0.10379
M_{II}	0.50014 0.00646	1.00220 0.04177
M_{II_s}	0.35791 0.82642	1.52622 3.60335
R_W	0.49997 0.00642	1.00462 0.07915
R_{W_s}	0.49789 0.02909	1.02378 0.31129
L_s	0.50014 0.00654	1.00206 0.04285
L_G	0.49998 0.00638	1.00311 0.04199
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.8

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
$n = 50$		
$n_0 = 0$		
zakłócenie: 0.5		
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.49349 0.00085	1.04113 0.03361
L_M	0.48150 0.08030	1.11619 0.51781
M_{II}	0.49407 0.03049	1.03901 0.18735
M_{II_s}	0.84972 3.76521	-3.65076 26.51597
R_W	0.49267 0.02915	1.02652 0.42372
R_{W_s}	0.50336 0.29823	0.97897 2.52819
L_s	0.49215 0.03142	1.04961 0.19660
L_G	0.49349 0.02920	1.04113 0.18334
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.9

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 50$	$n_0 = 0$
	zakłócenie: 1.0	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.49290 0.00418	1.04077 0.19755
L_M	0.52936 0.12739	0.80049 0.84991
M_H	0.49849 0.06514	0.91957 0.44487
M_{Hs}	-2.30370 17.96372	11.01584 68.74673
R_W	0.49533 0.06666	0.99755 1.01314
R_{Ws}	0.49346 0.41127	1.18223 4.21977
L_s	0.49502 0.07168	1.02799 0.47621
L_G	0.49290 0.06464	1.04077 0.44447
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.10

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 0$
	zakłócenie: 0.1	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.50039 0.00001	0.99391 0.00163
L_M	0.50251 0.01337	0.97683 0.11351
M_H	0.50040 0.00274	0.99284 0.04406
M_{Hs}	0.50526 0.00578	0.89476 0.11566
R_W	0.50026 0.00342	0.99089 0.07131
R_{Ws}	0.50273 0.01377	0.94628 0.27860
L_s	0.49948 0.00761	1.00203 0.05910
L_G	0.50039 0.00324	0.99444 0.04024
\bar{n}_0	0.02000	

Tabela B.11

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 0$
	zakłócenie: 0.5	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.49867 0.00018	0.99608 0.03339
L_M	0.49243 0.06805	1.03321 0.53401
M_{II}	0.50037 0.01568	0.98392 0.22435
M_{II_s}	0.52575 0.03068	0.48516 0.61353
R_W	0.50036 0.01436	0.99477 0.33767
R_{W_s}	0.50274 0.07810	0.93350 1.57018
L_s	0.49946 0.02953	0.98498 0.22091
L_G	0.49867 0.01323	0.99608 0.18272
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.12

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 0$
	zakłócenie: 1.0	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.49899 0.00119	1.00377 0.20364
L_M	0.47162 0.14821	1.11437 1.06613
M_{II}	0.50590 0.02702	0.85188 0.51946
M_{II_s}	0.55221 0.06080	-0.04424 1.21601
R_W	0.49843 0.03330	1.05635 0.72000
R_{W_s}	0.47676 0.14363	1.42008 2.89193
L_s	0.49476 0.05561	1.02992 0.56138
L_G	0.49899 0.03456	1.00377 0.45127
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.13

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$	$n_0 = 0$
zakłócenie: 0.1		
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.50025 0.00001	0.99992 0.00114
L_M	0.50058 0.01612	0.99948 0.11620
M_{II}	0.50067 0.00364	0.99755 0.03480
M_{II_s}	-2.31061 11.62240	14.96578 56.03867
R_W	0.49998 0.00364	1.00380 0.07765
R_{W_s}	0.49838 0.01603	1.04085 0.32350
L_s	0.50057 0.00500	0.99796 0.04036
L_G	0.50025 0.00387	0.99992 0.03377
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.14

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$	$n_0 = 0$
zakłócenie: 0.5		
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.50337 0.00032	0.99508 0.03063
L_M	0.51425 0.09836	0.88296 0.60798
M_{II}	0.50211 0.01544	0.99718 0.17224
M_{II_s}	-4.96134 29.50389	36.23098 197.70454
R_W	0.50338 0.01821	0.91687 0.39143
R_{W_s}	0.47342 0.07722	1.51701 1.60708
L_s	0.50228 0.02109	1.00033 0.18830
L_G	0.50337 0.01798	0.99508 0.17502
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.15

$y = 0.5x + 1 + \epsilon$		
	$n = 25$	$n_0 = 0$
zakłócenie: 1.0		
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.49824 0.00114	1.00521 0.10434
L_M	0.46433 0.14588	1.14197 1.01331
M_{II}	0.50394 0.03180	0.87815 0.37456
M_{II_s}	-21.68057 130.63110	129.61658 766.50327
R_W	0.49779 0.02989	0.97921 0.54338
R_{W_s}	0.50857 0.14953	0.88441 3.13821
L_s	0.50152 0.04735	0.98659 0.39038
L_G	0.49824 0.03380	1.00521 0.32302
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.16

$y = 0.5x + 1 + \epsilon$		
	$n = 50$	$n_0 = 0$
zakłócenie: 0.1		
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.49966 0.00001	1.00649 0.00061
L_M	0.49941 0.01019	1.00213 0.07296
M_{II}	0.49991 0.00291	1.00436 0.02541
M_{II_s}	-1.79687 5.21223	12.70397 26.61626
R_W	0.49956 0.00262	1.00649 0.05711
R_{W_s}	0.49959 0.01864	1.04182 0.36628
L_s	0.49956 0.00277	1.00707 0.02398
L_G	0.49966 0.00281	1.00649 0.02465
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.17

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
$n = 50$		
$n_0 = 0$		
zakłócenie: 0.5		
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.50048 0.00021	0.99122 0.01332
L_M	0.50321 0.06544	0.98485 0.41931
M_{II}	0.49963 0.01328	0.99447 0.11605
M_{IIs}	-10.51422 28.23176	57.00971 141.00344
R_W	0.49962 0.01397	0.96464 0.32201
R_{Ws}	0.52208 0.10167	0.52319 2.05017
L_s	0.50024 0.01561	0.99483 0.13377
L_G	0.50048 0.01464	0.99122 0.11540
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.18

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
$n = 50$		
$n_0 = 0$		
zakłócenie: 1.0		
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.50669 0.00134	0.93445 0.08434
L_M	0.50217 0.12461	0.94037 0.77359
M_{II}	0.50809 0.03635	0.82303 0.33556
M_{IIs}	-22.29005 47.14945	124.01493 259.71984
R_W	0.50662 0.03332	0.86961 0.72485
R_{Ws}	0.47837 0.21289	1.18111 3.84089
L_s	0.50505 0.03614	0.94385 0.29375
L_G	0.50669 0.03655	0.93445 0.29041
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.19

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.1	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.38606 0.01469	1.86846 0.84263
L_M	0.49846 0.02220	0.99742 0.13921
M_{II}	0.44305 0.06668	1.43910 0.50437
M_{II_s}	0.50218 0.01429	0.97923 0.08895
R_W	0.49078 0.01777	1.05989 0.12506
R_{W_s}	0.28495 1.81804	3.27764 10.67441
L_s	0.49693 0.01393	1.02189 0.09444
L_G	0.50043 0.01299	0.99499 0.08166
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.20

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.5	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.38640 0.01625	1.83742 0.79830
L_M	0.45948 0.15179	1.24974 1.04834
M_{II}	0.43351 0.09723	1.45256 0.57153
M_{II_s}	0.54253 0.08498	0.61413 0.57154
R_W	0.44323 0.08376	1.32857 0.58624
R_{W_s}	1.65376 5.09898	-0.25975 15.65456
L_s	0.45999 0.07770	1.29506 0.49397
L_G	0.41759 0.11028	1.59566 0.77681
\bar{n}_0	0.66000	

Tabela B.21

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 1.0	
	(3, 5)	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.38090 0.02899	1.86940 1.22756
L_M	0.47217 0.28055	1.12106 1.83137
M_{II}	0.42296 0.17834	1.46931 1.09594
M_{II_s}	0.63142 0.27838	-0.28165 2.01477
$R_{II'}$	0.39663 0.17569	1.90218 1.47692
$R_{II'_s}$	1.06223 2.62589	0.24465 10.12376
L_s	0.43828 0.16628	1.48987 1.07753
L_G	0.38090 0.17026	1.86940 1.10795
\bar{n}_0	1.00000	

Tabela B.22

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.1	
	(3, 5)	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.44335 0.00350	1.44395 0.21200
L_M	0.50218 0.02021	0.99452 0.13297
M_{II}	0.47526 0.02778	1.19529 0.21263
M_{II_s}	0.50209 0.01071	0.98572 0.06630
$R_{II'}$	0.49608 0.01094	1.02122 0.09852
$R_{II'_s}$	1.00850 1.39371	-0.42506 3.49382
L_s	0.49734 0.01023	1.02329 0.06885
L_G	0.50065 0.00946	0.99773 0.06073
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.23

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$ zakłócenie: 0.5	$n_0 = 1$ (3, 5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.45621 0.00356	1.38059 0.21523
L_M	0.51268 0.11607	0.92782 0.71375
M_{II}	0.48982 0.04665	1.11589 0.32457
$M_{II's}$	0.55759 0.07989	0.54112 0.58998
R_W	0.48994 0.04897	1.01688 0.46983
$R_{W's}$	0.44266 0.70849	2.15317 3.15761
L_S	0.50199 0.04760	1.05026 0.31784
L_G	0.46947 0.05582	1.27853 0.42454
\bar{n}_0	0.76000	

Tabela B.24

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$ zakłócenie: 1.0	$n_0 = 1$ (3, 5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.44112 0.01057	1.43552 0.42448
L_M	0.44494 0.17353	1.25237 1.08313
M_{II}	0.46408 0.10518	1.15159 0.61161
$M_{II's}$	0.61782 0.41118	-0.37560 2.77024
R_W	0.45168 0.10782	1.43782 1.13686
$R_{W's}$	0.07369 2.25856	5.60545 17.56667
L_S	0.46781 0.10393	1.26244 0.66298
L_G	0.44112 0.10282	1.43552 0.65152
\bar{n}_0	1.00000	

Tabela B.25

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 50$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.1	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.47318 0.00075	1.21009 0.04575
L_M	0.49858 0.01204	1.00805 0.07667
M_{II}	0.48855 0.01279	1.09186 0.09899
M_{II_s}	0.50154 0.00517	0.99186 0.03386
R_W	0.49749 0.00571	1.01342 0.06866
R_{W_s}	0.50119 0.05310	0.81971 0.58116
L_s	0.49801 0.00568	1.02051 0.04005
L_G	0.49968 0.00499	1.00649 0.03294
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.26

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 50$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.5	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.47233 0.00144	1.20961 0.06964
L_M	0.51347 0.08116	0.90461 0.50868
M_{II}	0.48784 0.03154	1.08718 0.20832
M_{II_s}	0.55293 0.07205	0.49421 0.59985
R_W	0.48871 0.03076	1.02867 0.41446
R_{W_s}	0.38235 0.38877	2.05730 3.96390
L_s	0.49856 0.02907	1.02712 0.18765
L_G	0.47281 0.03760	1.20587 0.26166
\bar{n}_0	0.98000	

Tabela B.27

$y = 0.5x + 1 + \epsilon$		
	$n = 50$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 1.0	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.48080 0.00486	1.15824 0.18446
L_M	0.49033 0.18576	1.11297 1.14777
M_{II}	0.49935 0.07356	0.92715 0.46988
M_{II_s}	0.28465 3.12812	0.79074 14.70629
R_W	0.49016 0.07413	0.88188 0.74247
R_{W_s}	0.21949 2.04556	4.63717 19.89478
L_s	0.49648 0.08504	1.05766 0.50799
L_G	0.48080 0.06969	1.15824 0.42949
\bar{n}_0	1.00000	

Tabela B.28

$y = 0.5x + 1 + \epsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.1	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.24892 0.07025	2.91543 4.06698
L_M	0.49846 0.02220	0.99742 0.13921
M_{II}	0.44305 0.06668	1.43910 0.50437
M_{II_s}	0.50099 0.01435	0.98979 0.08717
R_W	0.49078 0.01777	1.05989 0.12506
R_{W_s}	0.15327 2.85001	4.29585 12.99227
L_s	0.49814 0.01395	1.01268 0.09323
L_G	0.50043 0.01299	0.99499 0.08166
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.29

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.5	
	(3, 8)	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.26056 0.06442	2.80375 3.53154
L_M	0.45763 0.18272	1.26485 1.38240
M_{II}	0.43351 0.09723	1.45256 0.57153
M_{II_s}	0.51672 0.07501	0.83276 0.46942
R_W	0.44323 0.08376	1.32857 0.58624
R_{W_s}	2.19225 8.60850	-1.71242 37.68711
L_s	0.45469 0.07765	1.31713 0.49497
L_G	0.48011 0.09535	1.10859 0.63186
\bar{n}_0	0.04000	

Tabela B.30

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 1.0	
	(3, 8)	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.24598 0.08172	2.89083 4.18457
L_M	0.47232 0.31065	1.15147 2.11809
M_{II}	0.42296 0.17834	1.46931 1.09594
M_{II_s}	0.55652 0.16981	0.43824 1.21082
R_W	0.39124 0.17999	1.67155 1.23985
R_{W_s}	0.94911 9.69540	3.24220 50.87450
L_s	0.43729 0.15704	1.48260 1.01821
L_G	0.35509 0.24578	2.07227 1.75772
\bar{n}_0	0.56000	

Tabela B.31

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$ zakłócenie: 0.1	$n_0 = 1$ (3, 8)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.37457 0.01676	1.97959 1.01660
L_M	0.50218 0.02021	0.99452 0.13297
M_{II}	0.47526 0.02778	1.19529 0.21263
M_{II_s}	0.50096 0.01008	0.99479 0.06326
R_W	0.49608 0.01094	1.02122 0.09852
R_{W_s}	0.87139 1.98673	-0.04242 4.95345
L_s	0.49773 0.00990	1.01991 0.06611
L_G	0.50065 0.00946	0.99773 0.06073
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.32

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$ zakłócenie: 0.5	$n_0 = 1$ (3, 8)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.38973 0.01423	1.89461 0.89275
L_M	0.51268 0.11607	0.92782 0.71375
M_{II}	0.48982 0.04665	1.11589 0.32457
M_{II_s}	0.53517 0.06067	0.76390 0.40682
R_W	0.48994 0.04897	1.01688 0.46983
R_{W_s}	0.46775 1.82980	2.34848 6.95505
L_s	0.49729 0.04636	1.07546 0.31636
L_G	0.51206 0.04433	0.94921 0.28973
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.33

$y = 0.5x + 1 + \epsilon$		
	$n = 25$ zakłócenie: 1.0	$n_0 = 1$ (3, 8)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.37761 0.02242	1.92814 1.11575
L_M	0.44494 0.17353	1.25237 1.08313
M_{II}	0.46408 0.10518	1.15159 0.61161
M_{Hs}	0.58950 0.13535	0.23462 0.95968
R_W	0.45058 0.10955	1.39315 1.03636
R_{Ws}	0.32194 2.40690	4.89722 12.17513
L_s	0.46819 0.09620	1.25989 0.60340
L_G	0.42056 0.14614	1.59670 1.01462
\bar{n}_0	0.64000	

Tabela B.34

$y = 0.5x + 1 + \epsilon$		
	$n = 50$ zakłócenie: 0.1	$n_0 = 1$ (3, 8)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.44131 0.00352	1.45498 0.21076
L_M	0.49858 0.01204	1.00805 0.07667
M_{II}	0.48855 0.01279	1.09186 0.09899
M_{Hs}	0.50087 0.00523	0.99713 0.03379
R_W	0.49749 0.00571	1.01342 0.06866
R_{Ws}	0.50335 0.01017	0.79743 0.22020
L_s	0.49766 0.00558	1.02206 0.03971
L_G	0.49968 0.00499	1.00649 0.03294
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.35

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 50$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.5	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.43876 0.00456	1.46994 0.25292
L_M	0.51347 0.08116	0.90461 0.50868
M_H	0.48784 0.03154	1.08718 0.20832
M_{Hs}	0.52418 0.03654	0.79883 0.26623
R_W	0.48871 0.03076	1.02867 0.41446
R_{Ws}	0.25919 0.76267	1.77064 5.20939
L_s	0.49485 0.02908	1.04854 0.18701
L_G	0.50036 0.02571	0.99219 0.16081
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.36

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 50$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 1.0	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.44764 0.00740	1.41592 0.33830
L_M	0.49570 0.17677	1.06873 1.05964
M_H	0.49935 0.07356	0.92715 0.46988
M_{Hs}	0.59811 0.12869	0.10772 1.03776
R_W	0.48989 0.07427	0.94638 0.81026
R_{Ws}	-0.04205 2.07172	5.73169 20.33499
L_s	0.49926 0.07535	1.04274 0.45274
L_G	0.46285 0.08666	1.29654 0.57350
\bar{n}_0	0.74000	

Tabela B.37

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.1	
	(3, 12)	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.06605 0.20897	4.31139 12.13021
L_M	0.49846 0.02220	0.99742 0.13921
M_H	0.44305 0.06668	1.43910 0.50437
M_{Hs}	0.50099 0.01435	0.98979 0.08717
R_W	0.49078 0.01777	1.05989 0.12506
R_{Ws}	-0.35208 4.20818	6.27543 17.29011
L_s	0.49895 0.01409	1.00677 0.09422
L_G	0.50043 0.01299	0.99499 0.08166
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.38

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.5	
	(3, 12)	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.09276 0.18304	4.09220 10.32769
L_M	0.47539 0.12725	1.10411 0.73465
M_H	0.43351 0.09723	1.45256 0.57153
M_{Hs}	0.50971 0.07887	0.88679 0.49924
R_W	0.44323 0.08376	1.32857 0.58624
R_{Ws}	1.12957 5.78729	1.14456 32.78076
L_s	0.45736 0.07834	1.29588 0.50084
L_G	0.49165 0.05827	1.02638 0.32856
\bar{n}_0	0.02000	

Tabela B.39

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 1.0	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.06608 0.21390	4.25273 11.64887
L_M	0.48933 0.27405	0.99957 1.72852
M_{II}	0.42296 0.17834	1.46931 1.09594
M_{II_S}	0.52382 0.15339	0.70996 1.01982
R_W	0.39124 0.17999	1.67155 1.23985
R_{W_S}	2.44262 14.68427	-1.68010 51.15322
L_S	0.43816 0.15262	1.45287 0.98316
L_G	0.48759 0.15085	1.05839 0.93988
\bar{n}_0	0.08000	

Tabela B.40

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.1	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.28287 0.04996	2.69376 3.02909
L_M	0.50218 0.02021	0.99452 0.13297
M_{II}	0.47526 0.02778	1.19529 0.21263
M_{II_S}	0.50078 0.01013	0.99638 0.06333
R_W	0.49608 0.01094	1.02122 0.09852
R_{W_S}	0.50186 0.01296	0.84181 0.17846
L_S	0.49836 0.00962	1.01495 0.06449
L_G	0.50065 0.00946	0.99773 0.06073
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.41

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$ zakłócenie: 0.5	$n_0 = 1$ (3, 12)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.30111 0.04279	2.57995 2.64622
L_M	0.51268 0.11607	0.92782 0.71375
M_{II}	0.48982 0.04665	1.11589 0.32457
M_{II_s}	0.52438 0.05372	0.85251 0.35207
R_{IV}	0.48994 0.04897	1.01688 0.46983
R_{IV_s}	0.17607 2.32202	2.99026 7.88276
L_s	0.49650 0.04603	1.07813 0.31617
L_G	0.51206 0.04433	0.94921 0.28973
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.42

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$ zakłócenie: 1.0	$n_0 = 1$ (3, 12)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.29294 0.05132	2.58498 2.82843
L_M	0.44494 0.17353	1.25237 1.08313
M_{II}	0.46408 0.10518	1.15159 0.61161
M_{II_s}	0.54457 0.11194	0.60927 0.69917
R_{IV}	0.45058 0.10955	1.39315 1.03636
R_{IV_s}	-0.10112 5.82393	11.70958 47.80535
L_s	0.46515 0.09858	1.27759 0.62093
L_G	0.49412 0.08943	1.02485 0.53859
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.43

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 50$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.1	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.39882 0.01042	1.78150 0.61961
L_M	0.49858 0.01204	1.00805 0.07667
M_H	0.48855 0.01279	1.09186 0.09899
M_{Hs}	0.50054 0.00499	0.99953 0.03284
R_W	0.49749 0.00571	1.01342 0.06866
R_{Ws}	0.50124 0.00770	0.82168 0.18587
L_s	0.49769 0.00554	1.02147 0.03958
L_G	0.49968 0.00499	1.00649 0.03294
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.44

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 50$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.5	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.39400 0.01233	1.81704 0.71405
L_M	0.51347 0.08116	0.90461 0.50868
M_H	0.48784 0.03154	1.08718 0.20832
M_{Hs}	0.51521 0.02894	0.87822 0.19753
R_W	0.48871 0.03076	1.02867 0.41446
R_{Ws}	0.38460 0.57836	0.69338 3.23052
L_s	0.49293 0.02888	1.05936 0.18468
L_G	0.50036 0.02571	0.99219 0.16081
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.45

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 50$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 1.0	(3, 12)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.40343 0.01429	1.75950 0.75463
L_M	0.49570 0.17677	1.06873 1.05964
M_{II}	0.49935 0.07356	0.92715 0.46988
M_{II_s}	0.56600 0.09843	0.47227 0.68586
R_W	0.48989 0.07427	0.94638 0.81026
R_{W_s}	0.08272 2.78533	6.02866 21.64758
L_s	0.49811 0.07461	1.04934 0.45058
L_G	0.50641 0.06970	0.95884 0.43421
\bar{n}_0	0.02000	

Tabela B.46

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.1	(3.5, 3.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	1.46702 0.33901	1.93608 1.10704
L_M	1.99589 0.05920	0.99845 0.15278
M_{II}	1.54334 0.53088	1.74750 0.88487
M_{II_s}	54.59282 305.81490	-187.44533 1071.11809
R_W	1.97619 0.04563	1.05434 0.13465
R_{W_s}	6.51132 56.61964	-15.60132 198.53648
L_s	1.99654 0.04242	1.00337 0.09824
L_G	2.00114 0.03465	0.99471 0.08976
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.47

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$ zakłócenie: 0.5	$n_0 = 1$ (3.5, 3.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	1.47361 0.33011	1.91104 1.09785
L_M	1.90585 0.48031	1.17601 1.03668
M_{II}	1.40764 0.68427	2.00661 1.26151
M_{II_s}	10.11567 46.10735	-31.88885 162.22861
R_W	1.84655 0.24255	1.33466 0.66246
R_{W_s}	4.95174 19.73218	-12.32450 69.93356
L_s	1.90024 0.20529	1.14805 0.45005
L_G	1.94527 0.21614	1.08789 0.44000
\bar{n}_0	0.08000	

Tabela B.48

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$ zakłócenie: 1.0	$n_0 = 1$ (3.5, 3.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	1.45583 0.43734	1.95046 1.77077
L_M	1.97155 0.73081	1.00668 1.90321
M_{II}	1.34671 0.78470	2.00048 1.44932
M_{II_s}	6.48447 31.91387	-19.92621 111.90142
R_W	1.68623 0.51462	1.79922 1.42062
R_{W_s}	-4.77624 40.19425	14.84029 107.60510
L_s	1.85817 0.42150	1.17500 0.98149
L_G	1.54628 0.63041	1.78504 1.26077
\bar{n}_0	0.80000	

Tabela B.49

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$ zakłócenie: 0.1	$n_0 = 1$ (3.5, 3.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	1.76915 0.05668	1.41008 0.18587
L_M	2.00581 0.05389	0.99307 0.14570
M_{II}	1.78024 0.22808	1.39106 0.41651
M_{II_s}	334.03639 2039.29829	-1163.80503 7138.25538
R_W	1.99140 0.02819	1.02329 0.10714
R_{W_s}	1.96960 0.27843	1.17734 0.36820
L_s	1.99393 0.02563	1.01221 0.06733
L_G	2.00174 0.02522	0.99729 0.06676
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.50

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$ zakłócenie: 0.5	$n_0 = 1$ (3.5, 3.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	1.78770 0.05627	1.37218 0.22334
L_M	2.03381 0.30952	0.91937 0.78727
M_{II}	1.78234 0.24857	1.36745 0.48403
M_{II_s}	184.00725 1077.02747	-621.44715 3652.81454
R_W	1.97859 0.12581	1.12182 0.48933
R_{W_s}	3.62153 8.21129	-6.49780 24.54020
L_s	1.99855 0.12408	0.98561 0.33804
L_G	2.02453 0.11923	0.95486 0.31306
\bar{n}_0	0.02000	

Tabela B.51

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$ zakłócenie: 1.0	$n_0 = 1$ (3.5, 3.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	1.74068 0.12282	1.44855 0.53480
L_M	1.85317 0.46274	1.28907 1.19250
M_H	1.67259 0.40824	1.48169 0.77243
M_{Hs}	15.70470 101.65449	-57.19473 323.47305
R_W	1.87349 0.29387	1.24616 0.91898
$R_{W's}$	8.48507 42.57664	-23.85927 147.34487
L_s	1.93216 0.26569	1.08022 0.65363
L_G	1.77038 0.35585	1.39814 0.75582
\bar{n}_0	0.88000	

Tabela B.52

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 50$ zakłócenie: 0.1	$n_0 = 1$ (3.5, 3.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	1.87198 0.01691	1.22854 0.05499
L_M	1.99621 0.03211	1.00900 0.08415
M_H	1.87402 0.12825	1.22606 0.23321
M_{Hs}	25.05838 82.92277	-79.57946 283.33538
R_W	1.99330 0.01522	1.01298 0.06827
$R_{W's}$	1.99890 0.03177	1.19884 0.21946
L_s	1.99353 0.01469	1.01677 0.03909
L_G	1.99914 0.01332	1.00670 0.03591
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.53

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 50$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.5	(3.5, 3.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	1.88074 0.01914	1.20347 0.07517
L_M	2.03593 0.21643	0.89562 0.56014
M_H	1.87796 0.14128	1.20201 0.27485
M_{Hs}	26.57702 82.98496	-80.76038 272.53840
R_W	1.97253 0.08053	1.07457 0.43707
R_{Ws}	3.86831 15.01859	-0.58510 19.98621
L_s	1.98306 0.07653	1.01447 0.19352
L_G	2.00096 0.06855	0.99195 0.17640
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.54

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 50$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 1.0	(3.5, 3.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	1.90375 0.04257	1.14413 0.23240
L_M	1.98853 0.47140	1.07159 1.17340
M_H	1.88327 0.22093	1.06490 0.48351
M_{Hs}	29.56691 181.39149	-98.74984 578.75547
R_W	1.97915 0.19799	1.16407 0.83889
R_{Ws}	1.46581 1.28289	1.01519 3.10210
L_s	2.01971 0.19808	0.89655 0.50871
L_G	1.90634 0.20922	1.13960 0.48706
\bar{n}_0	0.98000	

Tabela B.55

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.1	(6, 3.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.35563 2.74392	4.75422 14.66247
L_M	1.99589 0.05920	0.99845 0.15278
M_H	-0.13330 2.18933	5.27776 4.51174
M_{Hs}	-0.21751 2.22330	4.80508 3.92474
R_W	1.64431 0.72872	1.59429 1.08002
$R_{W's}$	-0.65110 2.81754	7.22004 8.48276
L_s	1.99731 0.04231	1.00190 0.09774
L_G	2.00114 0.03465	0.99471 0.08976
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.56

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.5	(6, 3.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.40308 2.58564	4.56156 13.10001
L_M	1.91543 0.42760	1.15548 0.94180
M_H	0.05638 1.97855	4.84373 4.01105
M_{Hs}	-0.17251 2.17572	4.53504 3.60538
R_W	1.30228 0.86864	2.52699 1.83941
$R_{W's}$	-0.97107 3.19300	9.02657 10.73801
L_s	1.90166 0.20153	1.16740 0.41928
L_G	1.60280 0.82848	1.90155 1.91567
\bar{n}_0	0.22000	

Tabela B.57

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$ zakłócenie: 1.0	$n_0 = 1$ (6, 3.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.35701 2.74630	4.70739 14.38964
L_M	1.91212 0.88044	1.21296 2.50479
M_{II}	0.07829 1.95137	4.80382 3.94603
M_{II_s}	-0.16970 2.17767	4.51818 3.69128
R_W	0.83381 1.28863	3.11305 2.47945
R_{W_s}	-0.63963 2.89486	7.30143 9.50603
L_s	1.87249 0.45007	1.19034 1.01144
L_G	0.61272 1.55574	4.08398 3.51397
\bar{n}_0	0.84000	

Tabela B.58

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$ zakłócenie: 0.1	$n_0 = 1$ (6, 3.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.89695 1.23147	3.57201 6.77248
L_M	2.00581 0.05389	0.99307 0.14570
M_{II}	0.86624 1.16930	3.51754 2.61062
M_{II_s}	-8.77003 35.53444	22.35228 72.19219
R_W	1.96431 0.04550	1.09860 0.14321
R_{W_s}	1.40355 1.26954	2.23794 3.58491
L_s	1.99840 0.02522	1.00412 0.06738
L_G	2.00174 0.02522	0.99729 0.06676
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.59

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.5	(6, 3.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.91591 1.19304	3.49756 6.37614
L_M	2.03381 0.30952	0.91937 0.78727
M_{II}	0.75596 1.26835	3.66339 2.73559
M_{II_s}	-68.61166 351.34086	146.00590 772.73697
R_W	1.85589 0.18200	1.36715 0.60741
R_{W_s}	-0.29562 2.78476	7.44477 9.67835
L_s	1.99115 0.11995	1.01791 0.31889
L_G	2.03217 0.11821	0.94117 0.31751
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.60

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 1.0	(6, 3.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.89790 1.24597	3.47768 6.36590
L_M	1.85317 0.46274	1.28907 1.19250
M_{II}	0.70055 1.31543	3.60825 2.66551
M_{II_s}	-57.05804 185.09253	116.98933 358.24759
R_W	1.61130 0.47978	1.91101 1.33275
R_{W_s}	-0.51747 3.00337	7.41110 10.75010
L_s	1.88769 0.27038	1.19856 0.64277
L_G	1.58118 0.76113	1.92090 1.69434
\bar{n}_0	0.38000	

Tabela B.61

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 50$ zakłócenie: 0.1	$n_0 = 1$ (6, 3.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	1.31227 0.47721	2.54073 2.39687
L_M	1.99621 0.03211	1.00900 0.08415
M_{II}	1.32285 0.68571	2.47797 1.49496
M_{IIs}	-94.34034 285.94171	179.70362 531.65767
R_W	1.98179 0.02297	1.05347 0.08915
R_{Ws}	2.00271 0.02436	1.18011 0.19353
L_s	1.99486 0.01477	1.01485 0.03923
L_G	1.99914 0.01332	1.00670 0.03591
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.62

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 50$ zakłócenie: 0.5	$n_0 = 1$ (6, 3.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	1.31965 0.47092	2.55098 2.47103
L_M	2.03593 0.21643	0.89562 0.56014
M_{II}	1.24381 0.76265	2.66887 1.69009
M_{IIs}	-126.45037 204.93962	253.85180 403.36910
R_W	1.90756 0.12180	1.22117 0.47536
R_{Ws}	1.39885 1.38836	2.77882 3.99989
L_s	1.97080 0.07688	1.04885 0.18872
L_G	2.00096 0.06855	0.99195 0.17640
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.63

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 50$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 1.0	(6, 3.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	1.34278 0.45894	2.48949 2.39717
L_M	1.98853 0.47140	1.07159 1.17340
M_H	1.18495 0.83220	2.66375 1.72128
M_{Hs}	-204.80607 406.29095	415.83757 832.83393
R_W	1.85244 0.25496	1.45544 0.98089
R_{Ws}	0.57224 1.94856	2.89135 5.71551
L_s	1.97066 0.19178	1.02616 0.47239
L_G	1.91569 0.35718	1.18257 0.83971
\bar{n}_0	0.14000	

Tabela B.64

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.1	(9, 3.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.00139 4.00624	5.74849 23.17339
L_M	1.99589 0.05920	0.99845 0.15278
M_H	-0.22088 2.22472	5.59636 4.70766
M_{Hs}	-0.13737 2.13925	4.73629 3.82264
R_W	-0.01458 2.02235	3.79271 2.94154
R_{Ws}	-0.30935 2.35060	6.28419 6.59478
L_s	1.99731 0.04231	1.00190 0.09774
L_G	2.00114 0.03465	0.99471 0.08976
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.65

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.5	(9, 3.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.03230 3.88166	5.57912 21.38670
L_M	1.91770 0.41573	1.15060 0.92121
M_{II}	-0.16655 2.17001	5.34550 4.40498
M_{II_s}	-0.11804 2.11935	4.56236 3.62497
R_W	-0.00253 2.00597	3.65834 2.78757
R_{W_s}	-0.40203 2.45918	7.12156 7.74886
L_s	1.90312 0.20065	1.16497 0.41800
L_G	1.49723 1.00407	2.19734 2.41396
\bar{n}_0	0.24000	

Tabela B.66

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 1.0	(9, 3.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.00602 3.98790	5.68308 22.57836
L_M	1.90523 0.86987	1.21658 2.38704
M_{II}	-0.16409 2.16818	5.32745 4.42505
M_{II_s}	-0.11042 2.11323	4.49374 3.62903
R_W	-0.02948 2.03259	3.76528 2.94466
R_{W_s}	-0.31646 2.38673	6.35454 7.44845
L_s	1.88387 0.45237	1.17218 1.02180
L_G	0.22050 1.89858	5.13717 4.47376
\bar{n}_0	0.90000	

Tabela B.67

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.1	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.32292 2.82217	5.07182 16.79788
L_M	2.00581 0.05389	0.99307 0.14570
M_H	0.03597 1.98485	5.31057 4.39706
M_{Hs}	-6.24098 30.89681	17.47099 63.43791
R_W	1.92293 0.08455	1.19725 0.21972
R_{Ws}	-0.16308 2.25900	5.66519 6.38571
L_s	1.99895 0.02510	1.00305 0.06735
L_G	2.00174 0.02522	0.99729 0.06676
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.68

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.5	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.33890 2.76834	4.98708 16.05668
L_M	2.03381 0.30952	0.91937 0.78727
M_H	0.14621 1.86186	4.95833 4.01439
M_{Hs}	-17.31751 80.64306	49.67348 220.73856
R_W	1.64100 0.38950	1.88583 1.01620
R_{Ws}	-0.41717 2.48214	7.12030 8.03087
L_s	1.99654 0.12492	1.00899 0.32909
L_G	2.03217 0.11821	0.94117 0.31751
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.69

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 1.0	(9, 3.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.33652 2.77828	4.91177 15.55435
L_M	1.85317 0.46274	1.28907 1.19250
M_{II}	0.13309 1.87425	4.70638 3.75806
M_{II_s}	-18.20835 43.95988	47.16766 102.65435
R_W	1.18877 0.89137	3.14171 2.45305
R_{W_s}	-0.32090 2.41391	6.38812 8.04384
L_s	1.88557 0.27203	1.20597 0.64554
L_G	1.21018 1.19832	2.82665 2.76706
\bar{n}_0	0.48000	

Tabela B.70

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 50$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.1	(9, 3.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.72424 1.63250	3.97607 8.89260
L_M	1.99621 0.03211	1.00900 0.08415
M_{II}	0.59187 1.41506	4.03209 3.05915
M_{II_s}	-81.21950 247.34117	174.67184 491.27892
R_W	1.96637 0.03665	1.08399 0.12151
R_{W_s}	2.00453 0.02175	1.16951 0.17965
L_s	1.99659 0.01517	1.01157 0.03996
L_G	1.99914 0.01332	1.00670 0.03591
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.71

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 50$ zakłócenie: 0.5	$n_0 = 1$ (9, 3.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.72516 1.63322	4.03504 9.30601
L_M	2.03593 0.21643	0.89562 0.56014
M_H	0.54102 1.46278	4.20299 3.22222
M_{Hs}	-133.68912 206.12753	307.54402 471.97619
R_W	1.83322 0.18764	1.41636 0.58623
R_{Ws}	0.60166 1.95942	5.23114 6.85856
L_s	1.97120 0.07693	1.04908 0.18905
L_G	2.00096 0.06855	0.99195 0.17640
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.72

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 50$ zakłócenie: 1.0	$n_0 = 1$ (9, 3.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.75064 1.57277	3.96602 8.95170
L_M	1.99936 0.38473	0.99076 0.96530
M_H	0.50880 1.49529	4.10927 3.13838
M_{Hs}	-244.87108 575.92987	573.87381 1314.11818
R_W	1.70332 0.34056	1.70005 1.16341
R_{Ws}	-0.09876 2.28753	5.68733 7.67837
L_s	1.97513 0.16530	0.99714 0.44706
L_G	2.02722 0.16379	0.90795 0.45451
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.73

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 12$ zakłócenie: 0.1	$n_0 = 1$ (5, 5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	-0.80152 0.04781	6.57093 0.23893
L_M	-1.00247 0.03552	6.99680 0.13119
M_{II}	-0.92526 0.09432	6.84343 0.21248
M_{II_s}	-1.00237 0.02465	6.99926 0.08517
R_W	-0.98458 0.02897	6.96113 0.11227
R_{W_s}	-1.81868 5.30379	11.92312 26.99521
L_s	-0.99297 0.02677	6.98029 0.08750
L_G	-0.99932 0.02079	6.99517 0.07686
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.74

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 12$ zakłócenie: 0.5	$n_0 = 1$ (5, 5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	-0.82178 0.04255	6.62338 0.27186
L_M	-1.03937 0.20359	7.09427 0.68690
M_{II}	-0.92741 0.12968	6.81760 0.45942
M_{II_s}	-1.07591 0.14498	7.14016 0.45191
R_W	-0.94514 0.11222	6.88637 0.48932
R_{W_s}	-3.54810 19.15140	23.41092 95.81220
L_s	-0.97255 0.10463	6.96558 0.33862
L_G	-0.93771 0.16147	6.86100 0.40574
\bar{n}_0	0.40000	

Tabela B.75

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 1.0	(5, 5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	-0.80251 0.08250	6.55845 0.85339
L_M	-0.93774 0.56132	6.82621 1.91308
M_{II}	-0.92863 0.23865	6.75452 0.92243
M_{II_s}	-1.04340 0.69526	6.71058 2.69683
R_W	-0.87637 0.27441	6.73281 1.14512
R_{W_s}	-3.67985 17.53009	15.56780 34.65121
L_s	-0.96660 0.29323	7.02335 1.04714
L_G	-0.80251 0.28722	6.55845 0.92379
\bar{n}_0	1.00000	

Tabela B.76

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 25$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.1	(5, 5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	-0.91490 0.00779	6.81789 0.03906
L_M	-0.99651 0.03233	6.99539 0.12540
M_{II}	-0.96923 0.03615	6.93467 0.09491
M_{II_s}	-1.00144 0.01512	7.00241 0.05836
R_W	-0.99387 0.01721	6.97493 0.09562
R_{W_s}	-0.94375 0.24423	6.66312 1.13272
L_s	-0.99388 0.01657	6.98617 0.06008
L_G	-0.99896 0.01513	6.99799 0.05714
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.77

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 25$ zakłócenie: 0.5	$n_0 = 1$ (5, 5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	-0.89468 0.01739	6.77027 0.14344
L_M	-0.97971 0.18571	6.93289 0.67005
M_{II}	-0.94880 0.09483	6.88000 0.33078
M_{II_s}	-1.03644 0.08234	7.05405 0.29157
R_W	-0.95757 0.09091	6.85137 0.46979
R_{W_s}	-1.16485 6.14683	9.54748 11.85157
L_s	-0.97206 0.08087	6.96282 0.29290
L_G	-0.94017 0.11256	6.86416 0.35432
\bar{n}_0	0.42000	

Tabela B.78

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 25$ zakłócenie: 1.0	$n_0 = 1$ (5, 5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	-0.91770 0.02511	6.83169 0.28687
L_M	-1.08810 0.27764	7.23034 1.01818
M_{II}	-0.97384 0.16508	6.84371 0.58983
M_{II_s}	-0.97868 1.60756	6.13214 7.42623
R_W	-0.95802 0.15114	6.92256 1.01450
R_{W_s}	-1.75816 3.04572	10.08622 8.41929
L_s	-1.01204 0.15901	7.11598 0.58242
L_G	-0.91770 0.15845	6.83169 0.53560
\bar{n}_0	1.00000	

Tabela B.79

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 50$ zakłócenie: 0.1	$n_0 = 1$ (5, 5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	-0.95430 0.00224	6.90838 0.00999
L_M	-1.00228 0.01927	7.00748 0.07224
M_{II}	-0.98435 0.01852	6.97085 0.04625
M_{II_s}	-1.00330 0.00909	7.01187 0.03311
R_W	-0.99826 0.00840	6.98710 0.07435
R_{W_s}	-0.99668 0.02448	6.79247 0.23484
L_s	-0.99727 0.00836	6.99925 0.03075
L_G	-1.00052 0.00799	7.00636 0.03119
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.80

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 50$ zakłócenie: 0.5	$n_0 = 1$ (5, 5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	-0.94984 0.00481	6.87192 0.05274
L_M	-1.00019 0.11542	6.99525 0.41021
M_{II}	-0.97910 0.05299	6.92609 0.21164
M_{II_s}	-1.05173 0.08238	7.02284 0.24418
R_W	-0.97884 0.05419	6.91277 0.38457
R_{W_s}	-0.73143 0.67671	6.47029 3.52770
L_s	-0.98378 0.05387	6.95416 0.21085
L_G	-0.96377 0.06891	6.90059 0.23130
\bar{n}_0	0.66000	

Tabela B.81

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 50$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 1.0	(5, 5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	-0.95198 0.01587	6.91606 0.21164
L_M	-1.02338 0.22915	6.99372 0.84305
M_H	-0.98249 0.12392	6.90226 0.46857
M_{Hs}	-1.22214 0.43736	7.17436 1.36728
R_W	-0.97238 0.12399	6.90991 0.89147
R_{Ws}	-0.34386 4.06917	3.88703 24.49789
L_s	-0.98540 0.12930	7.01646 0.48912
L_G	-0.95198 0.12599	6.91606 0.46005
\bar{n}_0	1.00000	

Tabela B.82

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.1	(8, 8)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	-0.03685 0.95149	4.06926 9.10347
L_M	-1.00247 0.03552	6.99680 0.13119
M_H	-0.80426 0.22674	6.42582 0.66030
M_{Hs}	-0.80878 0.69732	6.17987 3.14242
R_W	-0.93437 0.09364	6.80914 0.27501
R_{Ws}	0.84048 2.18239	0.33882 10.35297
L_s	-0.99690 0.02668	6.98853 0.08651
L_G	-0.99932 0.02079	6.99517 0.07686
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.83

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 12$ zakłócenie: 0.5	$n_0 = 1$ (8, 8)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	-0.08268 0.86620	4.27742 7.88049
L_M	-1.03937 0.20359	7.09427 0.68690
M_{II}	-0.80920 0.22693	6.43819 0.71390
M_{IIs}	-0.95690 0.56265	6.73143 2.20160
R_W	-0.76460 0.32037	6.23179 0.97034
R_{Ws}	1.55442 2.85661	-4.33101 15.26290
L_s	-0.97734 0.11065	6.94133 0.34257
L_G	-1.01336 0.09324	7.02304 0.30813
\bar{n}_0	0.02000	

Tabela B.84

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 12$ zakłócenie: 1.0	$n_0 = 1$ (8, 8)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	-0.04179 0.95787	4.11597 9.28475
L_M	-0.98779 0.52511	6.91570 1.86881
M_{II}	-0.74947 0.40940	6.18604 1.42148
M_{IIs}	-0.92812 0.80797	6.55931 3.07202
R_W	-0.50708 0.61217	5.38243 2.11589
R_{Ws}	1.01349 2.27119	0.34541 10.78812
L_s	-0.93881 0.26936	6.86037 0.88556
L_G	-0.32098 0.85331	4.93811 2.67761
\bar{n}_0	0.70000	

Tabela B.85

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 25$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.1	(8, 8)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	-0.42063 0.34098	5.19842 3.34484
L_M	-0.99651 0.03233	6.99539 0.12540
M_{II}	-0.90712 0.09550	6.71584 0.29563
M_{II_s}	-1.00111 0.01486	7.00384 0.05683
R_W	-0.98242 0.02422	6.92690 0.12478
R_{W_s}	-0.84344 0.45187	6.57258 1.20257
L_s	-0.99697 0.01569	6.99277 0.05735
L_G	-0.99896 0.01513	6.99799 0.05714
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.86

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 25$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.5	(8, 8)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	-0.41009 0.36125	5.21406 3.36129
L_M	-0.97971 0.18571	6.93289 0.67005
M_{II}	-0.87768 0.15587	6.63553 0.51377
M_{II_s}	-1.03953 0.07889	7.12480 0.30044
R_W	-0.89942 0.13264	6.77259 0.52601
R_{W_s}	0.79511 2.39815	0.10256 11.92608
L_s	-0.95843 0.08216	6.89857 0.29276
L_G	-0.98070 0.07092	6.95404 0.27324
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.87

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 25$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 1.0	
	(8, 8)	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	-0.42789 0.34473	5.29283 3.20085
L_M	-1.08810 0.27764	7.23034 1.01818
M_{II}	-0.90885 0.18057	6.62026 0.68031
M_{II_s}	-1.25359 0.31226	7.75538 0.97909
R_W	-0.84203 0.20901	6.52586 0.96286
R_{W_s}	0.45251 2.81823	0.84738 12.28942
L_s	-0.95907 0.14002	6.91683 0.49870
L_G	-0.88810 0.31084	6.66452 0.93598
\bar{n}_0	0.22000	

Tabela B.88

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 50$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 0.1	
	(8, 8)	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	-0.66300 0.11504	6.00895 0.99580
L_M	-1.00228 0.01927	7.00748 0.07224
M_{II}	-0.95442 0.04707	6.87022 0.13627
M_{II_s}	-1.00318 0.00888	7.01334 0.03395
R_W	-0.99280 0.01094	6.98299 0.07690
R_{W_s}	-1.00083 0.01102	6.83115 0.17596
L_s	-0.99785 0.00863	6.99960 0.03160
L_G	-1.00052 0.00799	7.00636 0.03119
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.89

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 50$ zakłócenie: 0.5	$n_0 = 1$ (8, 8)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	-0.66614 0.11369	5.97789 1.07831
L_M	-0.97844 0.12986	6.91000 0.47808
M_{II}	-0.95214 0.06336	6.84554 0.21950
M_{II_s}	-1.06196 0.07675	7.17841 0.24151
R_W	-0.96004 0.05866	6.85437 0.45206
R_{W_s}	-0.66447 0.87905	5.50972 4.10940
L_s	-0.98099 0.04470	6.94903 0.15705
L_G	-0.99943 0.04113	6.99233 0.15162
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.90

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 50$ zakłócenie: 1.0	$n_0 = 1$ (8, 8)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	-0.65698 0.12584	5.94628 1.23584
L_M	-1.00688 0.28284	7.06700 0.99185
M_{II}	-0.93129 0.13322	6.68557 0.51392
M_{II_s}	-1.20973 0.25001	7.57663 0.73979
R_W	-0.90389 0.15012	6.51452 0.89991
R_{W_s}	-0.16756 1.27749	4.90334 6.03865
L_s	-0.95893 0.11958	6.89139 0.41118
L_G	-0.96605 0.15062	6.88270 0.50943
\bar{n}_0	0.06000	

Tabela B.91

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 12$ zakłócenie: 0.1	$n_0 = 1$ (12, 12)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.52704 2.34449	2.03535 25.69170
L_M	-1.00247 0.03552	6.99680 0.13119
M_H	-0.66480 0.37427	5.92151 1.22673
M_{Hs}	1.25821 2.28916	-3.43861 10.79227
R_W	-0.09617 1.17270	5.33806 2.12220
R_{Ws}	0.94757 2.00364	0.74126 8.45751
L_s	-0.99710 0.02627	6.98914 0.08461
L_G	-0.99932 0.02079	6.99517 0.07686
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.92

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 12$ zakłócenie: 0.5	$n_0 = 1$ (12, 12)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.48892 2.22857	2.26776 23.09149
L_M	-1.03937 0.20359	7.09427 0.68690
M_H	-0.58605 0.50853	5.60822 1.81549
M_{Hs}	1.24293 2.29845	-3.64027 11.00047
R_W	0.11549 1.25939	4.97435 2.30826
R_{Ws}	1.11471 2.18945	-1.34750 10.78462
L_s	-0.98600 0.10712	6.96032 0.33401
L_G	-0.95093 0.33149	6.80016 1.22467
\bar{n}_0	0.06000	

Tabela B.93

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 12$ zakłócenie: 1.0	$n_0 = 1$ (12, 12)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.51837 2.32369	2.13696 24.77457
L_M	-0.98742 0.52570	6.91723 1.85561
M_{II}	-0.40054 0.74746	4.87691 2.70291
M_{II_s}	1.29366 2.29797	-3.52395 10.65847
R_W	0.41401 1.46346	4.59352 2.96675
R_{W_s}	0.99588 2.07107	0.17316 9.59481
L_s	-0.95276 0.27474	6.88112 0.89117
L_G	0.08217 1.33327	3.43090 4.48518
\bar{n}_0	0.72000	

Tabela B.94

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 25$ zakłócenie: 0.1	$n_0 = 1$ (12, 12)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.18695 1.41681	3.05146 15.89225
L_M	-0.99651 0.03233	6.99539 0.12540
M_{II}	-0.83464 0.17043	6.45203 0.57280
M_{II_s}	-1.00134 0.01488	7.00494 0.05683
R_W	-0.96499 0.03944	6.89498 0.13357
R_{W_s}	0.20718 1.61498	2.75995 7.52394
L_s	-0.99752 0.01577	6.99419 0.05787
L_G	-0.99896 0.01513	6.99799 0.05714
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.95

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 25$ zakłócenie: 0.5	$n_0 = 1$ (12, 12)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.18460 1.41473	3.14481 15.11195
L_M	-0.97971 0.18571	6.93289 0.67005
M_{II}	-0.79905 0.22324	6.35840 0.73307
M_{IIs}	-1.04172 0.08083	7.15007 0.29345
R_W	-0.80880 0.21941	6.29342 0.88968
R_{Ws}	1.00368 2.11097	-0.13125 10.13516
L_S	-0.96357 0.07980	6.90927 0.29160
L_G	-0.98070 0.07092	6.95404 0.27324
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.96

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 25$ zakłócenie: 1.0	$n_0 = 1$ (12, 12)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.17051 1.38201	3.24656 14.45934
L_M	-1.08810 0.27764	7.23034 1.01818
M_{II}	-0.77486 0.27778	6.15792 1.01727
M_{IIs}	-1.24521 0.30735	7.77116 0.99808
R_W	-0.66211 0.37185	5.93950 1.29793
R_{Ws}	0.95119 2.05053	0.45035 10.10218
L_S	-0.95785 0.14132	6.89781 0.50404
L_G	-0.86848 0.44328	6.57964 1.39452
\bar{n}_0	0.12000	

Tabela B.97

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 50$ zakłócenie: 0.1	$n_0 = 1$ (12, 12)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	-0.16890 0.69425	4.37523 6.93147
L_M	-1.00228 0.01927	7.00748 0.07224
M_{II}	-0.91345 0.08804	6.73004 0.27504
M_{IIs}	-1.00311 0.00884	7.01345 0.03384
R_W	-0.98566 0.01659	6.95342 0.09007
R_{Ws}	-1.00369 0.01081	6.84456 0.16257
L_s	-0.99829 0.00855	7.00069 0.03171
L_G	-1.00052 0.00799	7.00636 0.03119
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.98

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 50$ zakłócenie: 0.5	$n_0 = 1$ (12, 12)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	-0.16877 0.69514	4.28603 7.46118
L_M	-0.97844 0.12986	6.91000 0.47808
M_{II}	-0.91590 0.09480	6.71665 0.32196
M_{IIs}	-1.06073 0.07803	7.19124 0.26048
R_W	-0.92000 0.09192	6.78426 0.46980
R_{Ws}	-0.71253 0.83412	5.41515 3.73298
L_s	-0.98125 0.04506	6.94649 0.15840
L_G	-0.99943 0.04113	6.99233 0.15162
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.99

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 50$	$n_0 = 1$
	zakłócenie: 1.0 (12, 12)	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	-0.16516 0.70360	4.27543 7.56123
L_M	-1.00688 0.28284	7.06700 0.99185
M_{II}	-0.87623 0.16752	6.48568 0.65877
M_{II_s}	-1.22256 0.25772	7.70610 0.83770
R_W	-0.83150 0.20524	6.41271 1.01013
R_{W_s}	0.30490 1.63875	3.42431 7.64645
L_s	-0.95329 0.11973	6.86679 0.41228
L_G	-0.98596 0.11020	6.94430 0.39319
\bar{n}_0	0.00000	

Tabela B.100

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 2$
	zakłócenie: 0.1 (3, 7) (3.5, 7.5)	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.14766 0.13697	3.71953 7.97819
L_M	0.50592 0.02647	0.96851 0.14397
M_{II}	0.39583 0.12627	1.81709 0.97030
M_{II_s}	0.50086 0.01896	0.99331 0.10823
R_W	0.47718 0.03552	1.14517 0.24836
R_{W_s}	0.94615 0.51850	4.18847 3.31982
L_s	0.16871 0.36475	3.57822 2.78975
L_G	0.43140 0.23035	1.52431 1.74104
\bar{n}_0	0.66000	

Tabela B.101

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 2$
	zakłócenie: 0.5	(3, 7) (3.5, 7.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.18485 0.11322	3.49023 6.74827
L_M	0.50478 0.15150	0.90047 0.93248
M_{II}	0.40903 0.12951	1.71162 0.91470
M_{II_s}	0.55207 0.09546	0.61996 0.61700
R_W	0.41367 0.13983	1.52113 0.93574
R_{W_s}	0.97044 0.51393	4.10345 3.18682
L_s	0.21854 0.31033	3.27617 2.46057
L_G	0.42228 0.22785	1.59850 1.68815
\bar{n}_0	0.72000	

Tabela B.102

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 2$
	zakłócenie: 1.0	(3, 7) (3.5, 7.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.13274 0.15349	3.90128 9.34044
L_M	0.42864 0.42625	1.77193 3.17970
M_{II}	0.35380 0.21301	2.01411 1.53557
M_{II_s}	0.64117 0.25568	-0.23246 2.06202
R_W	0.22171 0.34372	2.90780 2.75815
R_{W_s}	0.85315 0.63226	4.54089 4.38596
L_s	0.19083 0.34878	3.51867 2.74583
L_G	0.16228 0.43563	3.65103 3.45053
\bar{n}_0	1.40000	

Tabela B.103

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$ zakłócenie: 0.1	$n_0 = 2$ (3, 7) (3.5, 7.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.31060 0.03801	2.47675 2.29962
L_M	0.50034 0.01687	0.99571 0.11709
M_{II}	0.45217 0.05149	1.37404 0.40092
M_{II_s}	0.50086 0.00804	0.99496 0.05378
R_W	0.49106 0.01309	1.06409 0.12456
R_{W_s}	1.00000 0.50000	4.00000 3.00000
L_s	0.37089 0.13507	2.01989 1.06313
L_G	0.49927 0.00927	1.00318 0.06391
\bar{n}_0	0.46000	

Tabela B.104

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$ zakłócenie: 0.5	$n_0 = 2$ (3, 7) (3.5, 7.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.32131 0.03577	2.44041 2.22141
L_M	0.51731 0.09439	0.92511 0.59610
M_{II}	0.45526 0.06906	1.38800 0.50700
M_{II_s}	0.53380 0.06632	0.75672 0.43759
R_W	0.46074 0.06436	1.28959 0.53350
R_{W_s}	1.00000 0.50000	4.00000 3.00000
L_s	0.37842 0.13502	2.01496 1.08466
L_G	0.50540 0.05484	0.99193 0.35451
\bar{n}_0	0.82000	

Tabela B.105

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$	$n_0 = 2$
	zakłócenie: 1.0 (3, 7) (3.5, 7.5)	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.33681 0.03516	2.32130 2.05405
L_M	0.54243 0.16971	0.78355 1.09499
M_{II}	0.45915 0.10777	1.26896 0.65930
M_{IIs}	0.61086 0.15893	0.09777 1.16843
R_W	0.43520 0.11463	1.32601 0.93134
R_{Ws}	0.92704 0.66575	4.55510 5.26662
L_s	0.39858 0.14595	1.89958 1.09816
L_G	0.50228 0.11329	1.02545 0.79847
\bar{n}_0	0.86000	

Tabela B.106

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 50$	$n_0 = 2$
	zakłócenie: 0.1 (3, 7) (3.5, 7.5)	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.41315 0.00780	1.69501 0.49726
L_M	0.49800 0.01345	1.00667 0.08066
M_{II}	0.47948 0.02209	1.16586 0.17569
M_{IIs}	0.50163 0.00666	0.99117 0.04113
R_W	0.49687 0.00697	1.01518 0.07793
R_{Ws}	1.00000 0.50000	4.00000 3.00000
L_s	0.45114 0.05039	1.40006 0.40996
L_G	0.50070 0.00722	0.99760 0.04561
\bar{n}_0	1.06000	

Tabela B.107

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 50$	$n_0 = 2$
	zakłócenie: 0.5 (3, 7) (3.5, 7.5)	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.40489 0.01056	1.74490 0.60031
L_M	0.49380 0.06776	1.05515 0.44631
M_{II}	0.47304 0.04598	1.20621 0.29262
M_{II_s}	0.52258 0.04154	0.81243 0.27464
R_W	0.47617 0.04309	1.13120 0.40419
R_{W_s}	1.00000 0.50000	4.00000 3.00000
L_s	0.44087 0.06865	1.47714 0.51680
L_G	0.49630 0.03439	1.03401 0.19394
\bar{n}_0	1.42000	

Tabela B.108

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 50$	$n_0 = 2$
	zakłócenie: 1.0 (3, 7) (3.5, 7.5)	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.39773 0.01432	1.78388 0.78056
L_M	0.48427 0.12976	1.08710 0.85137
M_{II}	0.46541 0.07733	1.15688 0.50206
M_{II_s}	0.60481 0.12703	0.06762 1.05146
R_W	0.45476 0.07803	1.25732 0.88106
R_{W_s}	1.00000 0.50000	4.00000 3.00000
L_s	0.43783 0.09170	1.51261 0.68584
L_G	0.49033 0.06327	1.06224 0.43567
\bar{n}_0	0.66000	

Tabela B.109

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 2$
	zakłócenie: 0.1 (5, 4) (5.5, 4.5)	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.26452 3.05038	4.86132 15.59711
L_M	2.01578 0.07059	0.96457 0.16042
M_{II}	-0.14014 2.14898	5.29203 4.41616
M_{II_s}	0.04829 1.95810	4.23442 3.34918
R_W	0.23135 1.80731	3.44128 2.62607
R_{W_s}	1.00000 1.00000	-1.00000 2.00000
L_s	0.32835 1.70518	4.66443 3.84973
L_G	0.24444 1.76988	4.89885 4.00281
\bar{n}_0	1.92000	

Tabela B.110

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 2$
	zakłócenie: 0.5 (5, 4) (5.5, 4.5)	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.33644 2.80696	4.61279 13.66840
L_M	1.96405 0.50688	1.00634 1.20080
M_{II}	-0.01672 2.03127	4.78762 3.95300
M_{II_s}	0.04258 1.96446	4.18504 3.32240
R_W	0.30226 1.73220	3.15137 2.32414
R_{W_s}	1.00000 1.00000	-1.00000 2.00000
L_s	0.40564 1.62620	4.37987 3.52788
L_G	0.31425 1.70216	4.63624 3.72332
\bar{n}_0	1.92000	

Tabela B.111

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 2$
	zakłócenie: 1.0	(5, 4) (5.5, 4.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.26034 3.09768	5.05173 17.89679
L_M	1.67005 1.02981	1.86006 2.75985
M_{II}	-0.00778 2.02435	5.01429 4.23050
$M_{II's}$	0.02750 1.98667	4.18262 3.41433
R_W	0.20621 1.81376	3.46419 2.98131
$R_{W's}$	0.95630 1.08761	-0.88777 2.04472
L_S	0.32878 1.70581	4.89075 4.14039
L_G	0.21954 1.81343	5.16026 4.42317
\bar{n}_0	1.88000	

Tabela B.112

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$	$n_0 = 2$
	zakłócenie: 0.1	(5, 4) (5.5, 4.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.75123 1.57853	3.81417 8.12541
L_M	2.00092 0.04498	0.99548 0.12767
M_{II}	0.67422 1.37618	3.62919 2.82142
$M_{II's}$	-1.58994 24.04561	4.77055 59.83348
R_W	1.92860 0.07695	1.17605 0.19431
$R_{W's}$	1.00000 1.00000	-1.00000 2.00000
L_S	0.97373 1.03424	3.29737 2.32529
L_G	1.96975 0.19673	1.06212 0.40838
\bar{n}_0	0.50000	

Tabela B.113

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$	$n_0 = 2$
	zakłócenie: 0.5	(5, 4) (5.5, 4.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.79510 1.48348	3.74197 7.79148
L_M	2.04616 0.25171	0.91357 0.65563
M_{II}	0.61888 1.39557	3.91003 2.98213
M_{IIs}	-31.39312 108.48411	63.54458 253.25256
R_W	1.67673 0.37112	1.85000 1.01284
R_{Ws}	1.00000 1.00000	-1.00000 2.00000
L_s	1.04532 0.96725	3.15503 2.19755
L_G	1.93088 0.39818	1.17036 0.90139
\bar{n}_0	0.90000	

Tabela B.114

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$	$n_0 = 2$
	zakłócenie: 1.0	(5, 4) (5.5, 4.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.79965 1.47505	3.64616 7.35481
L_M	2.11314 0.45257	0.75527 1.20049
M_{II}	0.57517 1.44127	3.79675 2.88067
M_{IIs}	-125.52488 772.54910	278.61900 1705.46972
R_W	1.33627 0.73769	2.67359 1.94516
R_{Ws}	1.00000 1.00000	-1.00000 2.00000
L_s	1.03542 0.98730	3.07379 2.16956
L_G	1.34224 0.98045	2.41988 2.20267
\bar{n}_0	1.26000	

Tabela B.115

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 50$	$n_0 = 2$
	zakłócenie: 0.1	(5, 4) (5.5, 4.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	1.23954 0.58376	2.67181 2.83086
L_M	1.99467 0.03586	1.00801 0.08907
M_{II}	1.18848 0.82088	2.73595 1.76321
$M_{II's}$	-48.90826 154.47568	96.51044 296.16042
R_W	1.97375 0.03192	1.06412 0.09412
$R_{W's}$	1.00000 1.00000	-1.00000 2.00000
L_S	1.46093 0.54300	2.18737 1.19747
L_G	2.00188 0.01925	0.99713 0.05017
\bar{n}_0	1.06000	

Tabela B.116

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 50$	$n_0 = 2$
	zakłócenie: 0.5	(5, 4) (5.5, 4.5)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	1.20943 0.63839	2.75117 3.14026
L_M	1.98348 0.18070	1.05928 0.48829
M_{II}	1.10588 0.90423	2.93232 1.95889
$M_{II's}$	-109.02782 173.61199	208.77224 352.93968
R_W	1.84046 0.19161	1.49425 0.65247
$R_{W's}$	1.00000 1.00000	-1.00000 2.00000
L_S	1.42209 0.58780	2.27562 1.30114
L_G	1.99014 0.09170	1.03647 0.21509
\bar{n}_0	1.42000	

Tabela B.117

$y = 2x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 50$	$n_0 = 2$
	zakłócenie: 1.0 (5, 4) (5.5, 4.5)	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	1.20125 0.65689	2.78432 3.35274
L_M	1.95805 0.34603	1.09759 0.93008
M_H	1.03487 0.97343	2.95619 2.00030
M_{Hs}	-299.42398 858.50899	585.85072 1637.30450
R_W	1.69299 0.35372	1.72407 1.07868
$R_{W's}$	1.00000 1.00000	-1.00000 2.00000
L_s	1.41804 0.60137	2.28076 1.35689
L_G	1.97422 0.16873	1.06868 0.47510
\bar{n}_0	0.66000	

Tabela B.118

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$	$n_0 = 2$
	zakłócenie: 0.1 (3, 7) (12, 3)	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.08322 0.17872	3.60975 7.16101
L_M	0.50592 0.02647	0.96851 0.14397
M_H	0.23358 0.29966	2.37602 1.64987
M_{Hs}	0.12259 0.39630	2.36312 1.49335
R_W	0.35834 0.21866	1.69025 1.01427
$R_{W's}$	-0.30951 1.98643	7.95675 10.54109
L_s	0.42785 0.18667	1.44947 1.16942
L_G	0.45867 0.15399	1.29973 1.11441
\bar{n}_0	0.64000	

Tabela B.119

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$ zakłócenie: 0.5	$n_0 = 2$ (3, 7) (12, 3)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.11057 0.15704	3.41266 6.15318
L_M	0.49236 0.16820	0.96460 0.97961
M_{II}	0.21471 0.31031	2.40005 1.60970
M_{IIs}	0.16013 0.37705	2.09236 1.48633
R_W	0.23763 0.29273	2.11873 1.48659
R_{Ws}	-0.33832 0.98261	7.28809 8.28642
L_S	0.44120 0.17797	1.32617 1.01749
L_G	0.47000 0.17237	1.18916 1.19781
\bar{n}_0	0.66000	

Tabela B.120

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 12$ zakłócenie: 1.0	$n_0 = 2$ (3, 7) (12, 3)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.08135 0.18368	3.73118 8.18433
L_M	0.40727 0.44838	1.77516 3.08596
M_{II}	0.16843 0.36188	2.77154 2.21298
M_{IIs}	-0.41339 4.53436	4.96681 24.03519
R_W	0.10574 0.41434	2.95227 2.51592
R_{Ws}	0.54318 5.02889	3.87768 16.04848
L_S	0.18764 0.39243	3.04276 2.67424
L_G	0.13966 0.41182	3.31525 2.84570
\bar{n}_0	1.48000	

Tabela B.121

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$ zakłócenie:0.1	$n_0 = 2$ (3, 7) (12, 3)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.25542 0.06120	2.51911 2.39144
I_M	0.50034 0.01687	0.99571 0.11709
M_{II}	0.32297 0.18125	1.97721 1.01779
M_{II_s}	0.35731 0.15048	1.50587 0.56014
R_W	0.48430 0.01870	1.11224 0.14660
R_{W_s}	-0.12283 9.89891	7.91061 30.94508
L_s	0.49998 0.00832	1.00095 0.05749
L_G	0.49927 0.00927	1.00318 0.06391
\bar{n}_0	0.46000	

Tabela B.122

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$ zakłócenie:0.5	$n_0 = 2$ (3, 7) (12, 3)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.26807 0.05686	2.47450 2.30722
I_M	0.51731 0.09439	0.92511 0.59610
M_{II}	0.32137 0.18946	2.01149 1.08760
M_{II_s}	0.37593 0.14897	1.28131 0.55501
R_W	0.43052 0.08930	1.46937 0.61941
R_{W_s}	-0.09397 0.71109	4.57523 5.71041
L_s	0.50599 0.04914	0.98665 0.30638
L_G	0.50540 0.05484	0.99193 0.35451
\bar{n}_0	0.82000	

Tabela B.123

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 25$	$n_0 = 2$
	zakłócenie: 1.0 (3, 7) (12, 3)	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.27446 0.05612	2.38996 2.17649
L_M	0.54243 0.16971	0.78355 1.09499
M_H	0.30505 0.21224	1.95724 1.13012
M_{Hs}	-5.01512 40.86999	19.08928 154.25464
R_W	0.36794 0.16539	1.87873 1.38779
R_{Ws}	0.30043 1.34186	3.29966 6.95513
L_s	0.48969 0.13327	1.07407 0.79785
L_G	0.48044 0.14667	1.12693 0.93479
\bar{n}_0	1.02000	

Tabela B.124

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 50$	$n_0 = 2$
	zakłócenie: 0.1 (3, 7) (12, 3)	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.37594 0.01563	1.75433 0.58032
L_M	0.49800 0.01345	1.00667 0.08066
M_H	0.41098 0.09028	1.47280 0.48245
M_{Hs}	0.44293 0.05958	1.16307 0.18497
R_W	0.49423 0.00863	1.03680 0.08913
R_{Ws}	0.46557 0.26495	1.31183 2.61898
L_s	0.50072 0.00604	0.99838 0.03824
L_G	0.50070 0.00722	0.99760 0.04561
\bar{n}_0	1.06000	

Tabela B.125

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 50$	$n_0 = 2$
	zakłócenie: 0.5 (3, 7) (12, 3)	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.36733 0.01894	1.80831 0.69471
L_M	0.49380 0.06776	1.05515 0.44631
M_{II}	0.39876 0.10703	1.54598 0.58268
M_{II_s}	0.44185 0.07418	1.06805 0.27476
R_W	0.46210 0.05300	1.26225 0.43433
R_{W_s}	0.08226 0.49209	3.28092 4.42158
L_s	0.49494 0.03489	1.03670 0.19489
L_G	0.49630 0.03439	1.03401 0.19394
\bar{n}_0	1.42000	

Tabela B.126

$y = 0.5x + 1 + \varepsilon$		
	$n = 50$	$n_0 = 2$
	zakłócenie: 1.0 (3, 7) (12, 3)	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.36277 0.02197	1.83555 0.85019
L_M	0.48427 0.12976	1.08710 0.85137
M_{II}	0.38210 0.13227	1.53103 0.68009
M_{II_s}	-2.29096 19.35295	11.25398 74.93530
R_W	0.42711 0.09707	1.59642 1.11172
R_{W_s}	0.29791 0.68170	2.44458 3.98280
L_s	0.49085 0.06461	1.05050 0.44029
L_G	0.48043 0.07625	1.11802 0.50523
\bar{n}_0	0.80000	

Tabela B.127

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 12$ zakłócenie: 0.1	$n_0 = 4$ (8, 8)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.69776 2.92560	1.49738 32.86065
L_M	-0.96976 0.25064	6.91261 0.73856
M_{II}	1.12171 2.14984	-1.22999 8.69696
M_{Hs}	1.71854 2.79143	-5.90426 13.64065
R_{II}	0.70304 1.72428	2.36601 5.10115
R_{Ws}	-0.73640 1.05390	12.54475 6.15359
L_s	-0.03148 1.28727	8.16332 6.89926
L_G	0.79188 1.83254	1.13802 6.56566
\bar{n}_0	3.20000	

Tabela B.128

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 12$ zakłócenie: 0.5	$n_0 = 4$ (8, 8)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.68910 2.90596	1.58290 32.55879
L_M	0.88687 1.98681	0.63872 7.87857
M_{II}	1.05289 2.08742	-0.77910 8.31211
M_{Hs}	1.80289 2.87018	-6.48749 14.36001
R_{II}	0.71721 1.74186	2.22940 5.31799
R_{Ws}	0.26577 2.59506	8.02392 7.64872
L_s	0.34652 1.61407	5.17111 7.36773
L_G	0.82885 1.87096	0.94524 6.77849
\bar{n}_0	2.52000	

Tabela B.129

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 12$ zakłócenie: 1.0	$n_0 = 4$ (8, 8)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.70380 2.98819	1.44597 36.31113
L_M	1.15920 2.29584	-1.30877 10.40251
M_{II}	1.12660 2.18001	-1.30057 9.01982
M_{II_s}	1.77157 2.83488	-6.21556 14.03866
R_W	0.72416 1.75755	2.16454 5.56770
R_{W_s}	-0.41399 2.91267	8.50123 7.53419
L_s	1.08773 2.29068	-0.78019 10.83247
L_G	0.84105 1.90174	0.95858 7.11453
\bar{n}_0	2.20000	

Tabela B.130

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 25$ zakłócenie: 0.1	$n_0 = 10$ (8, 8)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.31872 1.75043	2.98010 16.59752
L_M	-1.00084 0.03033	7.00000 0.12306
M_{II}	-0.48081 0.59488	5.41316 1.94030
M_{II_s}	-1.00119 0.01726	6.99897 0.06688
R_W	0.38348 1.38691	4.91800 2.22638
R_{W_s}	-1.01957 0.01957	16.03721 9.03721
L_s	0.46508 1.51636	1.90984 5.71680
L_G	0.32330 1.32900	2.96369 4.09592
\bar{n}_0	4.92000	

Tabela B.131

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 25$	$n_0 = 10$
	zakłócenie: 0.5	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.33727 1.79642	2.92945 16.91983
L_M	-0.97504 0.13845	6.91535 0.52533
M_{II}	-0.38840 0.63658	5.12884 1.95997
M_{II_s}	-1.05447 0.11277	7.15478 0.37913
R_W	0.38658 1.38982	4.86219 2.26795
R_{W_s}	-1.01179 0.27285	16.05296 9.31450
L_s	0.57520 1.61313	1.54962 5.95239
L_G	0.34158 1.34523	2.92313 4.12000
\bar{n}_0	4.90000	

Tabela B.132

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 25$	$n_0 = 10$
	zakłócenie: 1.0	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	0.34628 1.82515	2.84439 17.79082
L_M	-0.86828 0.60772	6.58256 2.15423
M_{II}	-0.26646 0.80799	4.48749 2.87896
M_{II_s}	-1.16429 0.62462	7.34084 2.71839
R_W	0.40474 1.40932	4.69525 2.55677
R_{W_s}	-0.89939 0.24202	15.00012 8.40973
L_s	0.59368 1.65803	1.25711 6.57459
L_G	0.35030 1.35537	2.84101 4.22116
\bar{n}_0	4.94000	

Tabela B.133

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 50$ zakłócenie: 0.1	$n_0 = 20$ (8, 8)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	-0.00300 0.99838	3.94039 9.47895
I_M	-0.99554 0.02428	6.98424 0.08699
M_{II}	-0.75677 0.24705	6.25977 0.75755
M_{II_s}	-1.00220 0.01116	7.00503 0.04258
R_W	-0.94625 0.05593	6.82144 0.21484
R_{W_s}	-1.01957 0.01957	16.03721 9.03721
I_s	0.08117 1.11102	3.57403 3.73259
I_G	-0.06275 0.96993	4.12159 2.99200
\bar{n}_0	4.78000	

Tabela B.134

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 50$ zakłócenie: 0.5	$n_0 = 20$ (8, 8)
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	-0.01379 0.97716	4.09516 8.56982
I_M	-1.02584 0.10647	7.10446 0.40595
M_{II}	-0.74267 0.26277	6.25062 0.77605
M_{II_s}	-1.05600 0.06831	7.18518 0.24220
R_W	-0.72011 0.28811	6.09211 0.99953
R_{W_s}	-1.11385 0.11385	16.95253 9.95253
I_s	0.08814 1.10248	3.54857 3.60454
I_G	-0.10740 0.94102	4.36349 2.78992
\bar{n}_0	4.60000	

Tabela B.135

$y = -x + 7 + \varepsilon$		
	$n = 50$	$n_0 = 20$
	zakłócenie: 1.0	
	(8, 8)	
Estymator	a $s(a)$	b $s(b)$
MNK	-0.03333 0.94163	4.10376 8.59206
I_M	-1.02402 0.18983	7.08673 0.83939
M_H	-0.73050 0.29693	6.09014 1.04318
M_{Hs}	-1.23187 0.26256	7.70194 0.83745
R_W	-0.48887 0.53918	5.25351 2.02412
R_{Ws}	-2.31548 1.42919	26.43664 19.93674
L_s	0.02520 1.03955	3.84911 3.29530
L_G	-0.08717 0.94414	4.28191 2.82088
\bar{n}_0	4.68000	

Dodatek C

Stopy zwrotu akcji i WIG-u

Tabela C.1

OKRES	WIG	BIG	BRE	ELEKTRIM	EXBUD	IRENA
5.1991	-0.0001				0.1177	
6.1991	-0.1038				-0.1339	
7.1991	-0.0501				0.0231	
8.1991	-0.0986				0.1028	
9.1991	-0.0585				0.1081	
10.1991	0.2903				0.2253	
11.1991	0.0346				0.2503	
12.1991	0.0225				0.1054	
1.1992	-0.0197				0.0674	
2.1992	0.0206				0.2698	
3.1992	-0.0519				-0.0505	-0.1984
4.1992	-0.1015				-0.1117	-0.2340
5.1992	-0.0771			-0.0985	-0.0993	-0.2752
6.1992	0.0314			-0.0766	-0.2598	0.0189
7.1992	0.1222			0.3464	0.0605	0.1249
8.1992	-0.0076			0.2742	-0.0634	-0.0686
9.1992	0.0829	0.0341		0.3633	0.0891	-0.0500
10.1992	0.0463	-0.0019		0.2030	0.0599	-0.0463
11.1992	0.0645	-0.0382	-0.0469	-0.0061	0.0156	0.2606
12.1992	0.0547	0.0976	-0.0047	-0.0387	0.0192	0.2671
1.1993	0.0094	-0.0639	0.0123	0.1060	-0.0299	-0.0735
2.1993	0.0680	0.0001	-0.0179	-0.0054	-0.0354	-0.0016
3.1993	0.1567	0.2171	0.0726	0.2143	0.0562	0.2104
4.1993	0.4890	0.1469	0.4148	0.4510	0.3923	0.6871
5.1993	0.6455	0.2821	0.5154	0.9800	0.7729	0.6601
6.1993	0.1685	-0.0231	0.0906	0.0293	0.1572	0.9035
7.1993	0.2742	0.4442	0.2961	0.3223	0.0713	0.7277
8.1993	0.4029	1.4064	0.5287	0.1819	0.0636	0.7215
9.1993	0.0369	-0.0714	0.0569	0.2213	0.0166	-0.0505
10.1993	0.2406	0.1834	0.2592	0.4022	0.3259	0.1577
11.1993	0.1107	-0.0474	0.2904	-0.1361	0.1460	-0.0274
12.1993	0.3458	-0.0704	0.3526	0.0724	-0.0324	0.3961
1.1994	0.3562	0.6474	0.1934	0.2557	0.6558	0.5030
2.1994	0.2081	0.1644	0.0371	0.3551	-0.0451	0.3216
3.1994	-0.1904	-0.2664	-0.1580	-0.2468	-0.2285	0.0379
4.1994	-0.3020	-0.3829	-0.2598	-0.3327	-0.3991	-0.2238
5.1994	0.0240	0.0055	0.0281	-0.0947	0.0431	0.4814
6.1994	-0.2470	-0.3044	-0.1111	-0.2510	-0.2330	-0.2803
7.1994	0.3324	0.4162	0.0970	0.3139	0.2883	0.3863
8.1994	0.0252	-0.1143	0.2228	0.0155	-0.0754	-0.1658
9.1994	-0.1489	-0.1690	-0.0675	-0.0902	-0.0517	-0.1459

Tabela C.2

OKRES	KABLE	KROSNO	MOST_EXP	MOST_WAR	OKOCIM	POLIFARB
5.1991	0.0041	0.0984				
6.1991	-0.1517	-0.0919				
7.1991	-0.0783	-0.1174				
8.1991	-0.0419	-0.2451				
9.1991	-0.0529	-0.2173				
10.1991	0.1967	0.3849				
11.1991	-0.1759	0.0617				
12.1991	-0.0816	-0.1549				
1.1992	-0.0318	-0.0296				
2.1992	-0.2100	-0.1176				
3.1992	-0.1180	0.0622			-0.0957	
4.1992	-0.1835	-0.2340			-0.1607	
5.1992	-0.0602	-0.1339			-0.0826	
6.1992	0.0578	-0.0149			-0.0404	
7.1992	-0.0627	0.0858	0.1786		0.2471	
8.1992	-0.0395	-0.0427	0.1605		0.0561	
9.1992	-0.0399	-0.1156	0.2853		0.1335	
10.1992	0.0365	-0.1232	0.2650		-0.0119	
11.1992	0.3771	0.7271	0.0605		-0.0410	
12.1992	-0.0213	0.1240	0.1046		0.0371	
1.1993	0.1542	0.0901	0.1328		-0.0158	
2.1993	0.0317	0.1199	0.0186		0.2159	
3.1993	0.2198	0.0729	0.1072		0.3770	
4.1993	0.3113	0.4318	0.5656		0.7494	
5.1993	0.3446	0.3089	0.9808		0.1426	
6.1993	0.4498	0.4110	0.2336		0.2495	0.1243
7.1993	0.5370	1.2315	0.2348		0.2469	0.5075
8.1993	0.7695	0.2394	0.0048		0.1500	0.5694
9.1993	-0.0514	-0.0221	0.0476		0.1478	-0.0252
10.1993	0.1775	0.2495	0.1901		0.1315	0.1070
11.1993	0.0029	0.0498	0.0417	-0.0622	0.0043	-0.0437
12.1993	0.2583	1.0737	0.2562	0.2241	0.5724	0.1953
1.1994	0.9228	0.6192	0.3258	0.3851	0.2383	0.7369
2.1994	0.3216	-0.0564	0.4158	0.5511	0.0407	0.2425
3.1994	-0.0619	-0.2789	-0.1816	-0.1264	-0.2365	-0.2597
4.1994	-0.2643	-0.3473	-0.2835	-0.3477	-0.2979	-0.4570
5.1994	0.1444	0.3122	0.1071	0.2129	0.0486	-0.0011
6.1994	-0.3543	-0.3403	-0.2610	-0.3661	-0.1685	-0.1990
7.1994	0.3421	0.5165	0.2776	0.4096	0.5427	0.4931
8.1994	-0.1275	0.0212	0.0603	-0.0870	0.0497	-0.0672
9.1994	-0.1480	-0.1837	-0.0505	-0.1227	-0.2068	-0.1048

Tabela C.3

OKRES	PRÓCHNIK	SOKOŁÓW	SWARZĘDZ	TONSIL	UNIWERSA	VISTULA
5.1991	-0.0714			-0.1479		
6.1991	0.0354			0.0108		
7.1991	-0.0552			-0.0914		
8.1991	-0.2231		-0.1651	-0.1916		
9.1991	-0.0948		-0.1976	-0.1763		
10.1991	0.4658		0.1434	0.2940		
11.1991	-0.0957		-0.1960	-0.1232		
12.1991	0.1053		0.0860	-0.0167		
1.1992	-0.0571		-0.0267	-0.0994		
2.1992	-0.0781		0.0086	-0.1629		
3.1992	-0.0934		-0.0090	-0.0719		
4.1992	-0.1134		0.0483	-0.2601		
5.1992	-0.1652		0.0265	-0.0847		
6.1992	-0.0646		-0.0554	0.0402		
7.1992	0.0066		-0.0059	-0.0539		
8.1992	0.0081		0.0322	-0.0460	-0.2291	
9.1992	-0.0937		0.0305	-0.1078	-0.0764	
10.1992	0.2881		0.1790	-0.2740	-0.2682	
11.1992	0.6716		0.0542	0.7250	0.7416	
12.1992	-0.0908		0.0533	0.6263	0.5216	
1.1993	-0.0041		0.0715	-0.1266	-0.2402	
2.1993	0.1877		-0.0391	-0.0247	-0.0349	
3.1993	0.2710		0.0833	0.3118	0.0045	
4.1993	0.7539		0.3935	0.6336	0.2740	
5.1993	1.0032		0.4735	0.1810	-0.0876	
6.1993	0.3528		0.4621	0.0506	-0.0763	
7.1993	0.4263		0.8431	1.4476	1.6585	
8.1993	0.3576		0.1259	0.5533	1.9225	
9.1993	0.2137	-0.0738	-0.0491	-0.1312	0.0292	
10.1993	0.0103	0.0501	-0.0070	0.2899	1.0698	
11.1993	-0.0594	-0.0966	-0.0450	-0.0416	0.1898	0.1767
12.1993	0.1926	0.0057	0.4781	0.6224	0.3030	0.2718
1.1994	0.6092	0.6686	0.7912	0.9204	0.4028	0.5095
2.1994	0.1526	0.5344	0.0525	0.0663	0.6671	0.2822
3.1994	-0.1984	-0.1592	-0.2654	-0.1660	0.0686	-0.2276
4.1994	-0.3773	-0.4605	-0.3252	-0.4972	-0.4220	-0.3430
5.1994	-0.0791	0.6953	0.0200	0.2297	0.0271	-0.0600
6.1994	-0.1711	-0.3473	-0.3328	-0.3489	-0.4444	-0.2986
7.1994	0.1759	0.1724	0.3704	0.7388	0.9693	0.2872
8.1994	0.0229	-0.0128	0.0626	-0.0101	-0.0487	-0.0647
9.1994	-0.1582	-0.1299	-0.1133	-0.2720	-0.2088	-0.2407

Tabela C.4

OKRES	WBK	WEDEL	WÓLCZANKA	ŻYWIEC
8.1991			-0.0236	
9.1991			-0.0596	
10.1991			0.2320	
11.1991			-0.0831	0.0422
12.1991			0.0562	0.0674
1.1992		-0.0575	-0.0365	0.0063
2.1992		-0.0901	-0.0400	0.1427
3.1992		-0.0947	0.0115	0.0736
4.1992		-0.0853	-0.0166	-0.1236
5.1992		-0.0337	-0.1275	-0.0863
6.1992		0.1487	-0.1671	-0.0598
7.1992		0.0622	0.1000	0.1355
8.1992		-0.0826	-0.0799	-0.0135
9.1992		-0.0016	0.0301	-0.0508
10.1992		-0.0257	0.0641	-0.0428
11.1992		0.2422	0.2517	-0.0268
12.1992		0.1265	-0.0578	0.0205
1.1993		0.0155	0.0982	-0.0208
2.1993		0.1974	0.0950	0.1449
3.1993		0.1111	0.3185	0.1576
4.1993		0.5414	0.6286	0.5430
5.1993		0.7805	0.7909	0.5323
6.1993		0.2766	0.3182	0.3929
7.1993		0.0871	0.5522	0.3137
8.1993	0.7606	0.2573	0.6359	0.1951
9.1993	-0.0545	0.0023	-0.0211	0.1876
10.1993	0.2021	0.2556	0.0165	0.1997
11.1993	0.0064	0.2574	-0.0546	0.1062
12.1993	0.4249	0.4562	0.1248	0.6215
1.1994	0.7493	0.0274	0.3596	0.1867
2.1994	0.0441	0.1359	0.3307	0.2709
3.1994	-0.2515	-0.1993	-0.0614	-0.1115
4.1994	-0.1838	-0.2464	-0.3296	-0.2374
5.1994	0.1648	-0.0752	-0.0325	0.0965
6.1994	-0.2473	-0.1320	-0.2290	-0.0831
7.1994	0.3871	0.2043	0.2223	0.1757
8.1994	0.0307	0.2213	0.0121	0.0979
9.1994	-0.2594	-0.0580	-0.2462	-0.1633

Literatura

- [1] Allen D. M. *The relationship between variable selection and data augmentation and a method for prediction* Technometrics 1974 nr 16 s. 125-127.
- [2] Andrews D. F. *A robust method for multiple linear regression* Technometrics 1974 nr 16 s. 523-531.
- [3] Anscombe F. J. *Rejection of outliers* Technometrics 1960 nr 2 s. 123-147.
- [4] Antoniewicz R. *Metoda najmniejszych kwadratów dla zależności niejawnych i jej zastosowania w ekonomii* Prace Naukowe AE 1988 nr 445 Seria: Monografie i opracowania nr 49.
- [5] Atkinson A. C. *Diagnostic regression for shifted power transformations* Technometrics 1983 nr 25 s. 23-33.
- [6] Atkinson A. C. *Plots, Transformations and Regression* Oxford: Clarendon Press 1985.
- [7] Atkinson A. C. *Robust and diagnostic regression analysis* Communications in Statistics (Theory and Methods) 1982 nr 11 s. 2559-2571.
- [8] Barnett V. *The study of outliers: purpose and model* Applied Statistics 1978 nr 27 s. 242-250.
- [9] Barnett V., Lewis T. *Outliers in Statistical Data* New York: Wiley & Sons 1978.
- [10] Beaton A. E., Tukey J. W. *The fitting of power series, meaning polynomials, illustrated on band-spectroscopic data* Technometrics 1974 nr 16 s. 147-185.
- [11] Beckman R. J., Cook R. D. *Outlier.....s (z dyskusją)* Technometrics 1983 nr 25 s. 119-163.

- [12] Belsley D. A., Kuh E., Welsch R. E. *Regression Diagnostics: Identifying Influential Data and Sources of Collinearity* New York: Wiley & Sons 1980.
- [13] Bickel P. J. *On some analogues to linear combinations of order statistics in the linear model* The Annals of Statistics 1973 nr 1 s. 597-616.
- [14] Bickel P. J. *One-step Huber estimates in the linear model* Journal of the American Statistical Association 1975 nr 70 s. 428-434.
- [15] Bickel P. J. *Robust regression based on infinitesimal neighbourhoods* The Annals of Statistics 1984 nr 12 s. 1349-1368.
- [16] Bloomfield P., Steiger W. L. *Least Absolute Deviations: Theory, Applications and Algorithms* Boston: Birkhauser 1983.
- [17] Box G. E. P., Draper N. R. *Robust designs* Biometrika 1975 nr 62 s. 347-352.
- [18] Carroll R. J., Ruppert D. *Transformations and Weighting in Regression* London: Chapman and Hall 1988.
- [19] Chatterjee S., Hadi A. S. *Influential observations, high leverage points, and outliers in linear regression (z dyskusją)* Statistical Science 1986 nr 1 s. 379-393.
- [20] Chatterjee S., Price B. *Regression Analysis by Example* New York: Wiley & Sons 1977.
- [21] Claerbout J. F., Muir F. *Robust modeling with erratic data* Geophysics 1973 nr 38 s. 826-844.
- [22] Cook R. D. *Detection of influential observation in linear regression* Technometrics 1977 nr 19 s. 15-18.
- [23] Cook R. D. *Influential observation in regression* Journal of the American Statistical Association 1979 nr 74 s. 169-174.
- [24] Cook R. D., Weisberg S. *Residuals and Influence in Regression* New York: Chapman & Hall 1982.
- [25] Daniel C., Wood F. S. *Fitting Equations to Data* Wyd. 2. New York: Wiley & Sons 1980.

- [26] Denby L., Mallows C. L. *Two diagnostic displays for robust regression analysis* Technometrics 1977 nr 19 s. 1-13.
- [27] Draper N. R., John J. A. *Influential observations and outliers in regression* Technometrics 1981 nr 23 s. 21-26.
- [28] Draper N. R., Smith H. *Analiza regresji stosowana* Warszawa: PWN 1973.
- [29] Dutter R. *Numerical solution of robust regression problems: Computational aspects, a comparison* Journal of Statistical Computation and Simulation 1977 nr 5 s. 207-238.
- [30] Florek K., Łukasiewicz J., Perkal J., Steinhaus H., Zubrzycki S. *Taksonomia Wroclawska* Przegląd Antropologiczny 1951 nr 17.
- [31] Forsythe A. B. *Robust estimation of straight line deviations* Technometrics 1972 nr 14 s. 159-166.
- [32] Fox J. *Regression Diagnostics* Newbury Park: Sage Publication 1991.
- [33] Gentle J. E., Kennedy W. J., Sposito V. A. *On least absolute values estimation* Communications in Statistics (Theory and Methods) 1977 nr 6 s. 839-845.
- [34] Gnanadesikan R., Kettenring J. R. *Robust estimates, residuals, and outlier detection with multiresponse data* Biometrics 1972 nr 28 s. 81-124.
- [35] Golub G. H., Reinsch C. *Singular value decomposition and least squares solutions* w: J. H. Wilkinson, C. Reinsch *Linear Algebra* Berlin: Springer Verlag 1971.
- [36] Gray J. B., Ling R. F. *K-clustering as a detection tool for influential subsets in regression* Technometrics 1984 nr 26 s. 305-330.
- [37] Grubbs F. E. *Procedures for detecting outlying observations in samples* Technometrics 1969 nr 11 s. 1-21.
- [38] Hampel F. R. *A general qualitative definition of robustness* The Annals of Mathematical Statistics 1971 nr 42 s. 1887-1896.
- [39] Hampel F. R. *The influence curve and its role in robust estimation* Journal of the American Statistical Association 1974 nr 69 s. 383-393.

- [40] Hampel F. R., Ronchetti E. M., Rousseeuw P. J., Stahel W. A. *Robust Statistics: The Approach Based on Influence Functions* New York: Wiley & Sons 1986.
- [41] Hawkins D. M. *Identification of Outliers* London: Chapman & Hall 1980.
- [42] Hill R. W. *Robust regression when there are outliers in the carriers* Boston: Harvard University 1977 (praca doktorska).
- [43] Hill R. W., Holland P. W. *Two robust alternatives to least-squares regression* Journal of the American Statistical Association 1977 nr 72 s. 828-833.
- [44] Hinich M. J., Talwar P. P. *A simple method for robust regression* Journal of the American Statistical Association 1975 nr 70 s. 113-119.
- [45] Hoaglin D. C., Mosteller F., Tukey J. W. (red.) *Understanding Robust and Exploratory Data Analysis* New York: Wiley & Sons 1983.
- [46] Hoaglin D. C., Welsch R. E. *The hat matrix in regression and ANOVA* The American Statistician 1978 nr 32.
- [47] Holland P. W., Welsch R. E. *Robust regression using iteratively reweighted least-squares* Communications in Statistics (Theory and Methods) 1977 nr 6 s. 813-828.
- [48] Huber P. J. *Robust regression: asymptotics, conjectures, and Monte Carlo* The Annals of Statistics 1973 nr 1 s. 799-821.
- [49] Huber P. J. *Robust Statistics* New York: Wiley & Sons 1981.
- [50] Jaeckel L. A. *Estimating regression coefficients by minimalizing the dispersion of the residuals* The Annals of Mathematical Statistics 1972 nr 43 s. 1449-1458.
- [51] Jajuga K. *Analiza cen giełdowych i stóp zysku akcji w:* S. Bartosiewicz (red.) *Komputerowa analiza ekonometryczna* Wrocław: AE 1993.
- [52] Jajuga K. *Statystyczna analiza wielowymiarowa* Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN 1993.
- [53] Jajuga K. *Zarządzanie kapitałem* Wrocław: AE 1993.

- [54] Jajuga K., Jajuga T. *Jak inwestować w papiery wartościowe* Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN 1993.
- [55] Jakubczyc J. *Jednorównaniowe modele ekonometryczne* Warszawa: PWE 1982.
- [56] Jakubczyc J. *Współliniowość statystyczna* Warszawa: PWE 1987.
- [57] Johns M. V. *Robust Pitman-like estimators* w: R. L. Launer, G. N. Wilkinson (red.) *Robustness in Statistics* New York: Academic Press 1979 s. 49-60.
- [58] Kale B. K. *Outliers - a review* Journal of the Indian Statistical Association 1979 nr 17 s. 51-67.
- [59] Kelly G. *The influence function in the errors-in-variables problem* The Annals of Statistics 1984 nr 1 s. 87-100.
- [60] Koenker R., Bassett G. *Regression quantiles* Econometrica 1978 nr 46 s. 33-50.
- [61] Konarzewska I. *Estymatory ograniczające skutki występowania obserwacji wpływowych w macierzy danych w przypadku jednorównaniowych modeli liniowych* Łódź: Uniwersytet Łódzki 1987 (CPBP 10.09.III. - maszynopis).
- [62] Konarzewska I. *Metody diagnostyki występowania obserwacji wpływowych w macierzy danych modelu liniowego* Prace Instytutu Ekonometrii i Statystyki Uniwersytetu Łódzkiego 1990 nr 79.
- [63] Konarzewska I. *On application of least squares estimates sensitivity measures in identification of influential observations in linear econometric model* Referat na konferencję Macromodels Łódź 1986.
- [64] Konarzewska I. *Wrażliwość wybranych metod estymacji modeli liniowych a złe uwarunkowanie danych* Łódź: Uniwersytet Łódzki 1988 (praca doktorska).
- [65] Konarzewska I., Milo W. *Porównanie precyzji i własności prognostycznych wybranych estymatorów parametrów modeli w przypadku nietypowości obserwacji - wyniki numeryczne* Przegląd Statystyczny 1982 nr 1/2.

[66] Konarzewska I., Milo W. *Some notes on applicability of variance-decomposition-proportion method* Acta Universitatis Lodziensis, Folia Oeconomica 1986 nr 54 s. 191-199.

[67] Konarzewska I., Milo W. *Notes on sensitivity of least squares estimates and their chosen functions* Acta Universitatis Lodziensis, Folia Oeconomica 1987 nr 68 s. 89-100.

[68] Kowalewski G. *Diagnostyka obserwacji skrajnych w modelu ekonometrycznym za pomocą macierzy rzutowania* Badania Operacyjne i Decyzje 1993 nr 1 s. 35-45.

[69] Kowalewski G. *Zastosowanie "macierzy rzutowania" w diagnostyce regresji* Prace Naukowe AE w Katowicach 1994 s. 39-47.

[70] Krasker W. S. *Applications of robust estimation to econometric problems* Massachusetts: Institute of Technology 1978 (praca doktorska).

[71] Krasker W. S., Welsch R. E. *Efficient bounded influence regression estimation* Journal of the American Statistical Association 1982 nr 77 s. 595-603.

[72] Krasker W. S., Kuh E., Welsch R. E. *Estimation for dirty data and flawed models* w: Z. Griliches, M. D. Intriligator (red.) *Handbook of Econometrics* New York: North Holland 1983.

[73] Lax D. A. *An interim report of a Monte Carlo study of robust estimators of width* Technikal Report 93, Series 2. Princeton: Princeton University, Department of Statistics 1975.

[74] Mallows C. L. *Robust methods - some examples of their use* The American Statistician 1979 nr 33 s. 179-184.

[75] Markowitz H. M. *Portfolio Selection - Efficient Diversification of Investments* New Haven: Yale University Press 1959.

[76] Martin R. D. *Robust methods for time series* w: D. F. Findley (red.) *Applied Time Series II* New York: Academic Press 1981 s. 683-759.

- [77] Mason R. L., Gunst R. F. *Outlier-induced collinearities* Technometrics 1985 nr 15 s. 497-508.
- [78] Miller R. G. *A trustworthy jackknife* The Annals of Mathematical Statistics 1964 nr 35.
- [79] Milo W. *Odporność w ekonometrii* Łódź: Uniwersytet Łódzki 1992.
- [80] Montgomery D. C., Peck E. A. *Linear Regression Analysis* New York: Wiley & Sons 1982.
- [81] Moore D. S., McCabe G. P. *Introduction to the Theory and Practice of Statistics* New York: W. H. Freeman and Company 1989.
- [82] Pawłowski Z. *Ekonometria* Warszawa: PWN 1980.
- [83] Pawłowski Z. *Elementy ekonometrii* Warszawa: PWN 1981.
- [84] Plackett R. L. *Studies in the history of probability and statistics XXIX: The discovery of the method of least squares* Biometrika 1972 nr 59 s. 239-251.
- [85] Polasek W. *Regression diagnostics for general linear regression models* Journal of the American Statistical Association 1984 nr 79 s. 336-340.
- [86] Prescott P. *A review of some robust data analysis and multiple outlier detection procedures* Bulletin in Applied Statistics 1980 s. 141-158.
- [87] Rao C. R. *Modele liniowe statystyki matematycznej* Warszawa: PWN 1982.
- [88] Rao C. R. *Statystyka i prawda* Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN 1994.
- [89] Rey W. *Introduction to Robust and Quasi-Robust Statistical Methods* Berlin: Springer Verlag 1983.
- [90] Ronchetti E. *Robust model selection in regression* Stat. Probab. Lett. 1985 nr 3 s. 21-23.
- [91] Rousseeuw P. J. *Least median of squares regression* Journal of the American Statistical Association 1984 nr 79 s. 871-880.

- [92] Rousseeuw P. J., Leroy A. M. *Robust Regression and Outlier Detection* New York: Wiley & Sons 1987.
- [93] Rousseeuw P. J., Yohai V. *Robust regression by means of S-estimators* w: J. Franke, W. Härdle, R. D. Martin (red.) *Robust and Nonlinear Time Series Analysis* New York: Springer Verlag 1984 s. 256-272.
- [94] Ruppert D., Carroll R. J. *Trimmed least squares estimations in the linear model* Journal of the American Statistical Association 1980 nr 75 s. 828-838.
- [95] Sharpe W. F. *Investments* New York: Prentice Hall 1978.
- [96] Siegel A. F. *Robust regression using repeated medians* Biometrika 1982 nr 69 s. 242-244.
- [97] Staudte R. G., Sheather S. J. *Robust Estimation and Testing* New York: Wiley & Sons 1990.
- [98] Stevens J. P. *Outliers and influential data points in regression analysis* Psychological Bulletin 1984 nr 95 s. 334-344.
- [99] Stigler S. M. *Simon Newcomb, Percy Daniell, and the history of robust estimation 1885-1920* Journal of the American Statistical Association 1973 nr 68 s. 872-879.
- [100] Szymczak M. (red.) *Słownik języka polskiego* Warszawa: PWN 1978.
- [101] Theil H. *Zasady ekonometrii* Warszawa: PWN 1979.
- [102] Trybuś E. *Metody wykrywania obserwacji nietypowych* Prace Naukowe AE we Wrocławiu 1983 nr 246 s. 51-64.
- [103] Velleman P. F., Welsch R. E. *Efficient computing of regression diagnostics* The American Statistician 1981 nr 35.
- [104] Wasilewski Z. *Analiza danych statystycznych i diagnostyka liniowych modeli regresji* Łódź: Uniwersytet Łódzki 1988 (praca doktorska).
- [105] Weiberg S. *Applied Linear Regression* New York: Wiley & Sons 1980.

[106] Welsch A. H. *The trimmed mean in the linear model* (z dyskusją) The Annals of Statistics 1987 nr 15 s. 20-45.

[107] Wilcoxon F. Individual comparisons by ranking methods Biometrika 1945 nr 1 s. 80-83.

[108] Wolfowitz J. *The minimum distance method* The Annals of Mathematical Statistics 1957 nr 28 s. 75-88.

[109] Yohai V. J. *High breakdown point and high efficiency robust estimates for regression* The Annals of Statistics 1987 nr 15 s. 642-656.

[110] Yohai V. J. *Robust estimation in the linear model* The Annals of Statistics 1974 nr 2 s. 562-567.