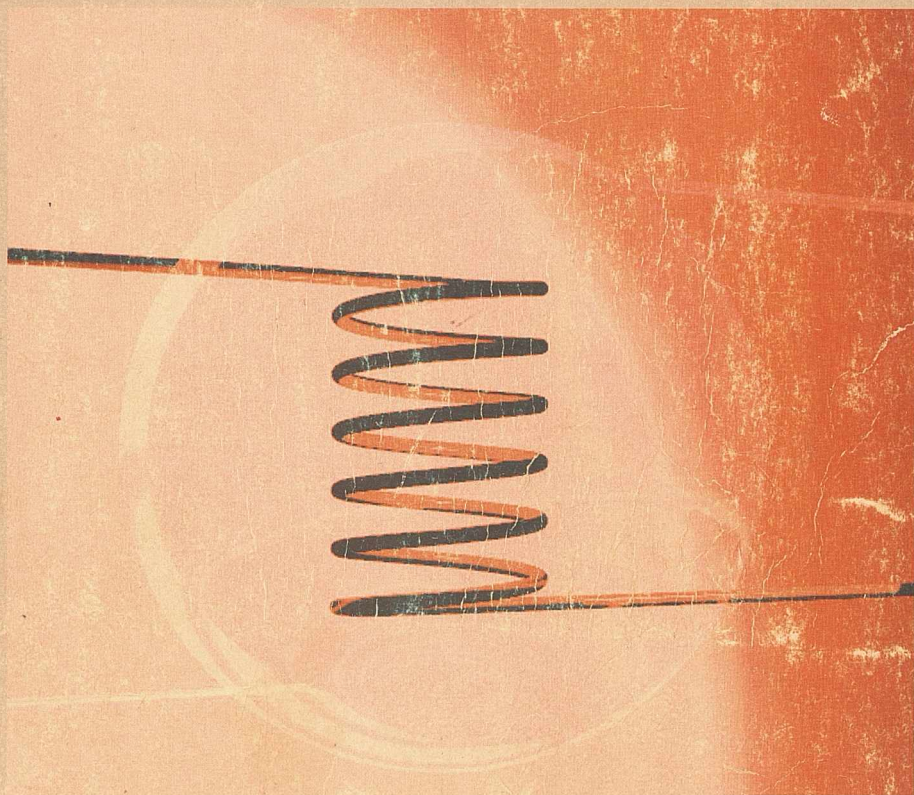


Eugeniusz Kalinowski



**Przekazywanie ciepła
i wymienniki**





Politechnika Wrocławska



Eugeniusz Kalinowski

Przekazywanie ciepła i wymienniki

Wrocław 1995

Tytuł dotowany przez Ministerstwo Edukacji Narodowej

Opiniodawcy

Adam NEGRUSZ

Ryszard PETELA

Opracowanie redakcyjne

Maria KOPEĆ

Korektor

Barbara WACHOWSKA

**Biblioteka Główna i OINT
Politechniki Wrocławskiej**



001776995

Projekt okładki

NCA



© Copyright by Eugeniusz KALINOW

286666 w/23

OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

ISBN 83-7085-107-X

Nakład 1500+50 egz. Ark. wyd. 22,75. Ark. druk. 19³/₄. Papier offset. kl. III, 70 g, B1.

Oddano do składu w lipcu 1994 r. Druk ukończono w lutym 1995 r.

Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 370/94.

Alko.390/k/95

Od Autora

Podręcznik powstał w wyniku wieloletnich wykładów autora w Politechnice Wrocławskiej. Jest on przeznaczony dla studentów studiujących zagadnienia cieplne (Wydziały Mechaniczno-Energetyczny, Elektryczny, Mechaniczny i in.) oraz dla osób zajmujących się techniką ciepłą.

Do opracowania niniejszego podręcznika wykorzystano skrypt z 1984 r. pt. *Przekazywanie ciepła*.

Ponieważ głównym zadaniem podręcznika akademickiego jest dydaktyka, zatem układ jego jest taki, by od zagadnień prostszych — elementarnych przechodzić do coraz trudniejszych. Dotyczy to także stosowanych metod matematycznych. Z tego powodu nieraz ten sam dział przekazywania ciepła (np. przewodzenie ciepła) jest omawiany w różnych częściach podręcznika.

Aby ułatwić zrozumienie treści działów przytoczono przykłady i zadania obliczeniowe. W tekście i części końcowej podręcznika umieszczono wykresy i tablice niezbędne do rozwiązywania przedstawionych przykładów i zadań, a także do realizacji opracowań projektowych w technice cieplnej.

Wstęp

Przekazywanie ciepła jest działem termodynamiki technicznej, rozwijającym się dynamicznie w ostatnich latach. Podstawowe równania ujmujące zjawiska cieplne, równania Fouriera, Newtona oraz niektóre metody rozwiązywania zagadnień cieplnych — zwłaszcza gdy chodzi o aparat matematyczny — są znane już od dawna. Obecnie jednak powstały warunki do ich powszechnego rozwoju. Wynika to z licznych i coraz to nowych zastosowań wymienników ciepła w różnych procesach przemysłowych, a także ze stosowania różnego typu urządzeń i aparatów, w których procesy przebiegają według założonego rozkładu temperatury. W dokładnych procesach obróbki metali, odlewnictwie i niektórych zagadnieniach wytrzymałości materiałów, znajomość pola temperaturowego i jego zmian w czasie jest podstawowym warunkiem realizacji właściwego procesu czy obliczenia. W ostatnich latach do realizacji wielu konstrukcji (np. rakiet, samolotów naddźwiękowych) wykorzystuje się procesy nie ustalonego przekazywania ciepła i nie ustalonych procesów (stanów) termodynamicznych. Wpłynęło to między innymi na rozwój tzw. termodynamiki procesów nieodwracalnych, tj. termodynamiki stanów nierównowagowych. Nie tylko właściwa konstrukcja maszyn i urządzeń, ale także ich eksploatacja i automatyzacja, wymaga rozwiązania wielu zagadnień, takich jak akumulacja i straty ciepła, dynamika wymienników ciepła itp.

Rozwój metod numerycznego rozwiązywania zagadnień cieplnych, oparty na wykorzystaniu stale rozwijających się możliwości komputerów, rozszerzył znacznie obszar rozwiązywalnych zagadnień.

Wszystko to powoduje, że procesy przekazywania ciepła stosuje się w coraz to nowych dziedzinach techniki, gospodarki i nauki, a ten dział termodynamiki jest traktowany jako oddzielny przedmiot z odrębną literaturą, oznaczeniami i symboliką. Jego treść stanowią zagadnienia przewodzenia (kondukcji), unoszenia (konwekcji) i promieniowania (radiacji) ciepła oraz przypadki połączone, z reguły występujące w praktyce, jak przejmowanie (wnikanie) i przenikanie.

Oprócz rozwiązań analitycznych zagadnień cieplnych, w publikacji omawia się wybrane przykłady praktycznych zastosowań w dziedzinie techniki cieplnej.

1. Podstawowe wielkości i oznaczenia

W tabeli 1.1 zestawiono ważniejsze wielkości, oznaczenia i jednostki, stosowane w przekazywaniu ciepła.

Symbolem E oznaczono wszelkie postacie energii z odpowiednim dodatkowym oznaczeniem, np. E_k — energia kinetyczna; ze względu na największą częstość występowania tego oznaczenia, symbolem E bez dodatku oznaczono energię promienistą, zwaną emisją. Wyjątkiem od tej zasady jest szczególna w termodynamice postać energii, zwana energią wewnętrzną lub entermią^{*)}, oznaczona przez U .

Masę oznacza się, podobnie jak w fizyce, przez m . Dokładne pomiary przeprowadzone ostatnio wykazały równość masy bezwładnościowej i grawitacyjnej, tak że nie ma potrzeby pojęć tych rozróżniać.

Wszystko to, co ma masę, nazywamy materią^{**)}. Materia może występować w postaci korpuskularnej (cząstek, atomów, cząstek elementarnych) zwanej substancją (tj. materii mającej masę spoczynkową) i materii polowej, która nie ma masy spoczynkowej (np. emisja promieniowania).

W technice szczególną rolę odgrywa materia korpuskularna, substancja. Do określenia ilości tej części materii najdogodniejszą jednostką jest wielokrotność liczby molekuł, a mianowicie ich $6,023 \cdot 10^{23}$ sztuk. Tę ilość nazywamy molem, a jednostkę 10^3 razy większą kilomolem. Ilość substancji wyrażoną w kilomolach oznaczamy literą n . Mimo że zdefiniowana w ten sposób ilość substancji jest ściśle określona, to jednak w praktyce określamy ją za pomocą ważenia lub pomiaru objętości w umownych, tzw. normalnych warunkach. Za jednostkę ilości substancji umowny (normalny) metr sześcienny 1 m^3 przyjmujemy taką ilość substancji, która w warunkach normalnych (fizyczne 760 Tr, 0° , techniczne 0,1 MPa, 0°C) zajmuje objętość 1 m^3 . Dla substancji, które spełniają równanie Clapeyrona (tj. dla gazów

^{*)} Termin *entermia* wprowadził W. Wiśniowski w celu określenia energii wewnętrznej jednego jednorodnego ciała jako pewnej postaci energii. Tu stosowany termin w odniesieniu do zespołu ciał jest równoważny energii wewnętrznej, która ujmie także energie wynikające z wzajemnego oddziaływania na siebie ciał, pól potencjalnych i in. Termin ten jako krótszy jest praktyczniejszy.

^{**) W. Wiśniowski, *Rozważania termodynamiczne*, Zesz. nauk. PWr., Mechanika nr 1, 1955 r.; E. Schmidt, *Einführung in die technische Thermodynamik*, Berlin 1956.}

Tabela 1.1. Zestawienie podstawowych wielkości

Wielkość	Symbol	Jednostka	Uwagi
Ciepło	Q $\dot{Q} = Q/\tau$ $\dot{q} = \dot{Q}/F$	J, kJ W, kW W/m ² , kW/m ²	1 kcal = 4,187 kJ strumień ciepła 1 kcal/h = 1,163 W gęstość strumienia ciepła
Energia	E $\dot{E}$ $\dot{e}$ U	J, kJ W, kW W/m ² , kW/m ² J, kJ	strumień energii gęstość strumienia energii energia wewnętrzna – entermia
Czas	τ	s, h	
Temperatura	T t ϑ $\Delta T = \Delta t$	K 0 C 0 C K	grd – skrót łaciński, gradus – stopień, używany w literaturze temperatura płynu temperatura ciała stałego
Masa	m $\dot{m}$	kg kg/s	strumień masy
Substancja	G V_u n $\dot{G}$ $\dot{g}$	kg um ³ kmol kg/s kg/m ² ·s	$G = m \cdot n$ $V_u = 22,4 n$ strumień substancji gęstość strumienia substancji
Długość	x, y, z d, h, L	m m	zmienna odcinka
Powierzchnia	F f	m ² m ²	całkowita zmienna
Objętość	V $\dot{V}$ $v = V/G$	m ³ m ³ /s m ³ /kg	strumień objętości objętość właściwa
Entalpia	I $\dot{I}$	J, kJ W, kW	strumień entalpii
Intensywność promieniowania	I_λ $i_\lambda = I_\lambda/F$	W/m, kW/m W/m ³ , kW/m ³	natężenie intensywności promieniowania
Siła	K	N	

doskonałych i półdoskonałych), ilość substancji wyrażoną w kilomolach można przeliczyć na umowne metry sześciennie za pomocą następujących zależności*):

$$V_u = 22,4 \, n \text{ (w warunkach 760 Tr, } 0^\circ\text{C)}, \quad (1.1)$$

$$V_{ut} = 22,7 \, n \text{ (w warunkach 0,1 MPa, } 0^\circ\text{C)}. \quad (1.2)$$

Ilość substancji można określić także przez ważenie masy spoczynkowej lub ciężarem w umownych warunkach energetycznych. Jednostką substancji jest wtedy normalny kilogram**) (masy — kg_n lub ciężaru — kG_n). Ilość substancji wyrażoną w normalnych kilogramach oznaczamy przez G . Zmiana energetycznych warunków umownych nie powoduje zauważalnych mierzalnych zmian masy spoczynkowej***) danej substancji. Pominięcie wpływu warunków energetycznych pozwala na określenie ilości substancji za pomocą jej masy spoczynkowej m_s

$$G = m_s. \quad (1.3)$$

Gdy spotykane prędkości substancji nie przekraczają 1/100 prędkości światła, wówczas znika zauważalna w technice i mierzalna różnica między masą m substancji****) a jej masą m_s spoczynkową. Ilość substancji można wówczas mierzyć jej masą w kg

$$G = m, \quad (1.4)$$

a różnica między substancją i masą ma tylko znaczenie pojęciowe. Wyrażenie substancji za pomocą spoczynkowej lub całkowitej masy nie wymaga wprowadzenia dodatkowych jednostek substancji w układzie SI.

W podręczniku przyjmuje się ilość G substancji, mierzoną za pomocą jednostki masy.

Związek między ilością substancji n w kilomolach i G w kilogramach jest wyrażony przez

$$G = Mn, \quad (1.5)$$

gdzie M kg/kmol jest to przelicznik, zwany liczbą molową, mający tę samą wartość, jaką ma bezwymiarowy ciężar cząsteczkowy. We wszystkich równaniach termodynamicznych liczba M jest wymiarowa.

*) Przytoczone wzory są powszechnie stosowane jako przybliżone do gazowych substancji rzeczywistych, dla których możemy stosować równanie Clapeyrona. Wzory te możemy stosować i do tych substancji, które w warunkach normalnych nie są gazami. Mówimy wtedy o objętości, jaką miałyby pary tych substancji, gdyby podczas przechodzenia — zgodnie z równaniem Clapeyrona — do warunków normalnych nie zmieniły stanu skupienia, np. H_2O . Ściśle biorąc, dla każdej substancji, która nie spełnia równania Clapeyrona, należałoby wprowadzić oddzielne przeliczniki, czego się nie stosuje ze względu na dokładność obliczeń spotykanych w technice.

**) Jednostkę tę należy traktować jako dodatkową jednostkę podstawową w układzie SI.

***)) Izobaryczne ogrzanie, odparowanie i przegrzanie pary wodnej do 3000°C zmienia jej masę spoczynkową nie więcej niż 0,00001%.

****)) Przy prędkościach nie przekraczających 1/100 prędkości światła przyrost masy w stosunku do masy spoczynkowej nie przekracza 0,005%.

Temperaturę w przekazywaniu ciepła oznacza się trzema symbolami T , t , ϑ . Symbolem T oznaczamy temperaturę wszystkich ciał^{*)} wyrażoną w K, symbolem t – temperaturę płynu, symbolem ϑ – temperaturę ciała stałego. Jeśli w równaniach różnica temperatur jest wyrażona symbolami Δt i $\Delta \vartheta$, można ją obliczać zarówno za pomocą temperatur w skali Kelwina ($\Delta T = \Delta t$ K), jak i w skali Celsjusza.

Stosunek do czasu wielkości zależnych od czasu nazywamy strumieniem^{**) t} tych wielkości i oznaczamy kropką nad symbolem, np. $\dot{Q}$ – strumień ciepła, $\dot{m}$ – strumień masy itp.

Stosunek strumienia danej wielkości do powierzchni przekroju przekazywania tego strumienia nazywa się gęstością danego strumienia, np. $\dot{Q}/F$ – gęstość strumienia ciepła, $\dot{E}/F$ – gęstość strumienia energii itp. Jeśli strumień danej wielkości jest oznaczony dużą literą alfabetu z kropką, to gęstość danego strumienia oznacza się małą literą z kropką: $\dot{q} = \dot{Q}/F$ – gęstość strumienia substancji, $\dot{e}$ – gęstość strumienia energii, $\dot{q}$ – gęstość strumienia ciepła itp.

^{*)} Bliższe określenie, dotyczące temperatury rodzaju danego ciała, podano w odnośniku, np.: T_{pl} , $T_{śc}$ itp.

^{**) t} W literaturze nazywa się strumień danej wielkości także jej natężeniem, np. $\dot{Q}$ – natężenie przekazywania ciepła, $\dot{G}$ – natężenie przepływu substancji, $\dot{V}$ – objętościowe natężenie przepływu.

2. Pojęcia wstępne

Różnica temperatury występująca w ciele lub między ciałami jest konieczną i wystarczającą przyczyną, by występował samoczynny proces zwany przekazywaniem ciepła. Mówimy, że siłą motoryczną przekazywania ciepła jest różnica temperatur. Kierunek przebiegu zjawiska jest taki, żeby zniwelować istniejącą różnicę temperatur.

Materialną przestrzeń, w której każdemu punktowi jest przyporządkowana temperatura, nazywamy polem temperaturowym. Pole temperaturowe jest skalarne. Jego punkty o tej samej temperaturze wyznaczają powierzchnie izotermiczne (ekwiskalarne).

Jeżeli temperatura dowolnego punktu pola zależy tylko od geometrycznego położenia tego punktu, nazywamy je ustalonym polem temperaturowym (stosuje się także nazwę — stacjonarne pole temperaturowe), co można zapisać równaniem

$$T = T(x, y, z). \quad (2.1)$$

W ustalonym polu temperaturowym położenie w przestrzeni i kształt powierzchni izotermicznych są niezmiennie w czasie.

Jeżeli temperatura dowolnego punktu pola zależy nie tylko od położenia punktu w przestrzeni, ale także od czasu, to pole takie nazywamy nieustalonym (lub niestacjonarnym) polem temperaturowym. Określa się je równaniem:

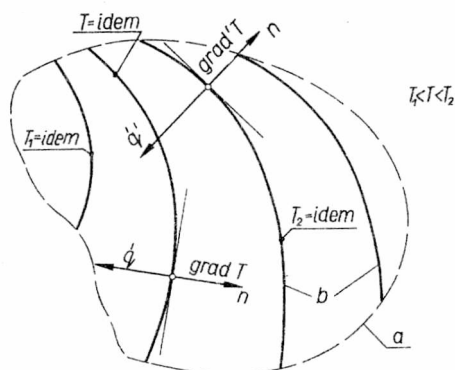
$$T = T(x, y, z, \tau). \quad (2.2)$$

W nieustalonym polu temperaturowym kształt i położenie w przestrzeni powierzchni izotermicznych są zależne od czasu.

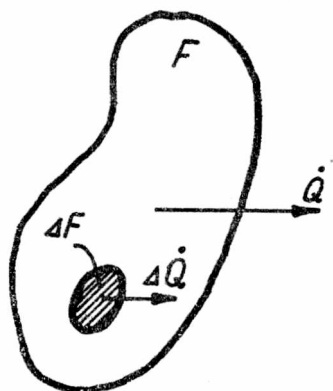
Każdemu punktowi pola temperaturowego jest przyporządkowany wektor zwany gradientem temperatury, wyrażony równaniem

$$\text{grad } T = \frac{dT}{dn}, \quad (2.3)$$

gdzie n jest normalną w danym punkcie pola do powierzchni izotermicznej, na której ten punkt leży. Gradient temperatury tworzy pole wektorowe (rys. 2.1).



Rys. 2.1. Pole temperaturowe;
a — przekrój powierzchni ograniczającej pole
temperaturowe, b — przekrój powierzchni
izotermicznych



Rys. 2.2. Przekazywanie strumienia $\dot{Q}$ ciepła
przez powierzchnię F ; $\Delta \dot{Q}$ — część strumienia
ciepła przekazana przez wycinek
 ΔF powierzchni

Kierunek gradientu wyznacza normalna n , a zwrot jej jest skierowany ku powierzchniom izotermicznym o wyższej temperaturze.

W ustalonym polu temperaturowym gradient zależy tylko od położenia rozważanego punktu w przestrzeni, nie zależy zaś od czasu. W nieustalonym polu temperaturowym gradient jest funkcją nie tylko położenia, ale i czasu.

Jeżeli w określonym odstępie $\Delta \tau$ czasu jest przekazane ciepło Q to średni w tym czasie strumień $\dot{Q}_{sr}$ ciepła wyraża się wzorem^{*)}

$$\dot{Q}_{sr} = \frac{Q}{\Delta \tau}. \quad (2.4)$$

Przez chwilowy strumień $\dot{Q}$ ciepła należy rozumieć granicę, do jakiej dąży stosunek przekazanego Q ciepła do przedziału czasu $\Delta \tau$, jeżeli $\Delta \tau$ dąży do zera^{**)}

$$\dot{Q} = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{Q}{\Delta \tau} = \frac{dQ}{d\tau}, \quad (2.5)$$

strumień ciepła jest wektorem.

Kierunek przekazywania ciepła, a ściślej strumienia ciepła, jest wyznaczony przez kierunek gradientu temperaturowego. Ciepło jest zawsze przekazywane od ciała o temperaturze wyższej do ciała o temperaturze niższej, czyli zwrot wektora strumienia ciepła jest zawsze przeciwny zwrotowi gradientu temperatury.

^{*)} Ten strumień ciepła równa się ciepłu przekazanemu w jednostce czasu.

^{**)} Jeżeli strumień ciepła jest liczony jako strumień ciepła przemiany, to dQ jest przystosowanym do tej przemiany wyrażeniem dQ różniczkowym.

Stosunek strumienia $\dot{Q}$ ciepła do powierzchni F przekroju, przez który strumień ten jest przekazywany, nazywamy średnią na tej powierzchni gęstością $\dot{q}_{sr}$ strumienia ciepła^{*)} (rys. 2.2).

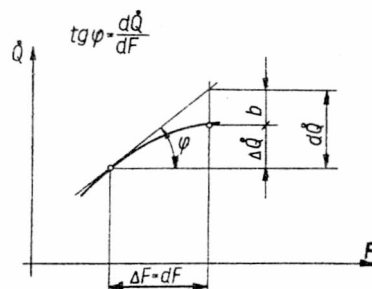
$$\dot{q}_{sr} = \frac{\dot{Q}}{F}. \quad (2.6)$$

Lokalną gęstością $\dot{q}$ strumienia ciepła nazywamy granicę stosunku części $\Delta\dot{Q}$ strumienia do wycinka ΔF powierzchni, gdy ΔF dąży punktowo do zera. Oznacza to, że wszystkie liniowe wymiary wycinka ΔF dążą do zera (patrz rys. 2.2)

$$\dot{q} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta\dot{Q}}{\Delta F} = \frac{d\dot{Q}}{dF}, \quad (2.7)$$

gęstość strumienia ciepła jest także wektorem.

Strumień ciepła zależy między innymi od powierzchni i tę zależność na rys. 2.3 symbolizuje linia pogrubiona. Dla skończonej wartości różniczki dF , równej przyrostowi ΔF wycinka powierzchni, można na rys. 2.3 przedstawić część $\Delta\dot{Q}$ strumienia ciepła, przekazaną przez ten wycinek i różniczkę $d\dot{Q}$ tego strumienia. Przez b (na rys. 2.3) rozumie się wartość bezwzględną błędu jaki popełniamy,



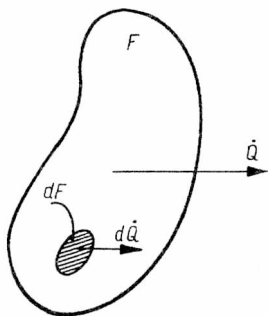
Rys. 2.3. Część strumienia $\Delta\dot{Q}$ ciepła i różniczka $d\dot{Q}$ wykreslnie; b – bezwzględny błąd w traktowaniu różniczki $d\dot{Q}$ strumienia ciepła jako części $\Delta\dot{Q}$ strumienia dla skończonej wartości dF

traktując różniczkę $d\dot{Q}$ jako część $\Delta\dot{Q}$ strumienia ciepła przekazanego przez element $dF = \Delta F$ powierzchni. Z rysunku tego widać, że dla malejącego do zera elementu dF powierzchni błąd b także dąży do zera. Można więc w tych warunkach traktować różniczkę strumienia ciepła jako strumień ciepła przekazany przez malejący do zera tzw. „dyskretny”^{**) element} powierzchni dF .

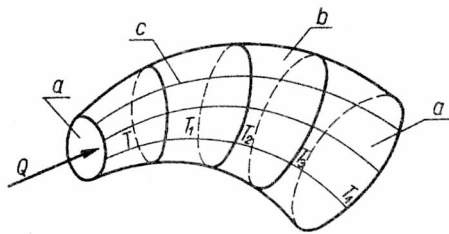
W dalszej części tej publikacji operujemy różniczką dowolnej funkcji (np. $d\dot{Q}$) jako przyrostem tej funkcji (np. $\Delta\dot{Q}$ dla niewielkiego przyrostu zmiennej niezależnej dF). Przy takim uproszczeniu można więc, bez popełnienia błędu w wynikach rozważań, rysunek 2.2 przedstawić jako rysunek 2.4.

^{*)} Średnia gęstość strumienia ciepła równa się strumieniowi ciepła przypadającemu na jednostkę powierzchni.

^{**) Stosuje się także terminy: elementarny, infitezymalny}



Rys. 2.4. Przekazywanie strumienia $\dot{Q}$ ciepła przez powierzchnię F ;
 $d\dot{Q}$ – część strumienia ciepła przekazana przez wycinek dF powierzchni



Rys. 2.5. Przestrzenny wycinek pola temperaturowego: a – powierzchnie izotermiczne, b – powierzchnia adiabatyczna, c – linie strumienia ciepła

Drogę, którą jest przekazywany strumień ciepła, można przedstawić graficznie jako linię. Jej kierunek w każdym punkcie pola temperaturowego jest normalny do powierzchni izotermicznej przechodzącej przez ten punkt. Jeżeli przyjmimy, że liczba linii strumienia jest proporcjonalna do wielkości strumienia ciepła, to zagęszczenie linii świadczy o wzroście gęstości strumienia ciepła.

Ponieważ w kierunku normalnym do linii strumienia ciepła nie ma różnic temperatury, więc nie ma w tym kierunku przekazywania ciepła. O liniach tych zatem mówi się nieraz, że są liniami adiabat, a powierzchnie obejmujące linie adiabat nazywa się powierzchniami adiabatycznymi (rys. 2.5).

2.1. Ogólny podział przekazywania ciepła

Ze względu na rodzaj pola temperaturowego materialnego ośrodka, przekazywanie w nim ciepła dzielimy na:

- ustalone (lub stacjonarne), jeżeli zachodzi w ustalonym polu temperaturowym,
- nieustalone (lub niestacjonarne), jeżeli zachodzi w nieustalonym polu temperaturowym.

Ze względu na sposób (mechanizm) przekazywanie ciepła dzielimy na:

- przewodzenie, czyli kondukcję,
- unoszenie (konwekcję),
- promieniowanie (radiację).

Przewodzenie ciepła zachodzi wtedy, kiedy w kierunku przekazywania ciepła, tj. kierunku gradientu temperatury, nie ma makroskopowego przemieszczenia substancji. Przypadek taki z reguły występuje w ciałach stałych, w których nie zachodzi makroskopowe przemieszczanie. Przykładem przewodzenia ciepła w ciałach gazo-

wych może być tzw. grzanie sufitowe, gdy zamykająca od góry gaz pozioma powierzchnia grzejąca ma wyższą od niego temperaturę. Także przekazywanie ciepła przez wąskie szczeliny wypełnione płynem, gazem lub cieczą (gdy na skutek wąkości szczeliny ruch płynu jest pomijalny) jest przykładem przewodzenia ciepła. Inne przykłady przekazywania ciepła w płynie zaliczamy także do przewodzenia, jeśli wpływ makroskopowego przemieszczenia substancji w kierunku gradientu temperaturowego na wielkość strumienia ciepła jest pomijalny.

Unoszenie ciepła zachodzi wówczas, gdy strumień ciepła jest przekazywany przez makroskopowy ruch substancji w kierunku gradientu temperaturowego. W praktyce zwykle występuje ono wtedy, gdy ruch ten decyduje o wielkości strumienia. Unoszenie ciepła zazwyczaj zachodzi w płynach oraz między ciałem stałym a płynem.

Przekazywanie ciepła przez **promieniowanie** odbywa się za pośrednictwem fal elektromagnetycznych. Każde ciało jest źródłem promieniowania, źródłem fal elektromagnetycznych. Promieniowanie w odróżnieniu od przewodzenia i konwekcji może zachodzić w próżni.

W praktyce rzadko spotykamy się z przekazywaniem ciepła tylko przez przewodzenie, unoszenie lub promieniowanie. Częściej zachodzą przypadki połączone. Są to:

Przejmowanie ciepła (wnikanie), to rzeczywiste, faktyczne przekazywanie ciepła od ciała stałego do płynnego, jako połączony przypadek unoszenia i promieniowania.

Przenikanie ciepła — przypadek przekazywania ciepła między ciałami płynnymi rozgraniczonymi przegrodą stałą. Występuje tu dwukrotnie (po stronie każdego płynu raz) przejmowanie ciepła i przewodzenie przez stałą przegrodę.



2.2. Równowaga i ogólne zależności w polu temperaturowym

Jednym z warunków równowagi termodynamicznej jest stałość temperatury w obszarze, w którym równowaga taka występuje. Pole temperaturowe jest wtedy nie tylko ustalone, ale w każdym punkcie ma tę samą temperaturę. Przejście z jednego stanu równowagi termodynamicznej w drugi odbywa się przez stany nierównowagowe.

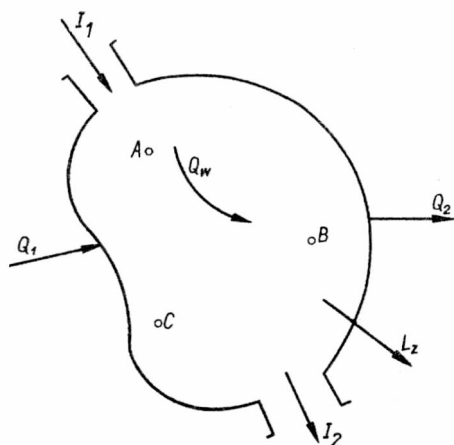
Teoretycznie po zakłóceniu^{*)} stanu równowagi jego przejście w inny stan wymaga czasu nieskończenie długiego. Praktycznie stan taki następuje po czasie skończonym, zależnym od wielkości obszaru (obiektu) i czasu trwania zaburzeń.

^{*)} Do najczęściej spotykanych przyczyn zakłóceń temperatury układu o równowadze termodynamicznej można zaliczyć znajdujące się w nim źródła ciepła wszelkiego pochodzenia (tarcie, przepływ prądu pokonujący opór elektryczny, reakcje chemiczne, jądrowe i in.), kontakt z układem o innej temperaturze (na całej zewnętrznej powierzchni lub jej części), przepływ przez układ substancji, jej przyrost lub zanikanie.

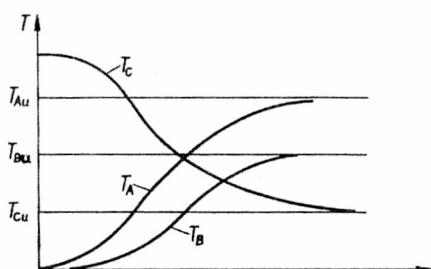
Uznajemy, że czas ustalenia równowagi minął, jeżeli istniejące jeszcze w obszarze zmiany parametrów określających stan są w rozważanych zagadnieniach pomijalne.

Przechodzenie z jednego stanu równowagi termodynamicznej w stan drugi może się odbywać w ustalonym lub nieustalonym polu temperaturowym. Aby przechodzenie takie odbywało się w ustalonym polu temperaturowym, występujące zakłócenia muszą spełniać następujące warunki: nie zawierać wewnętrznych źródeł ciepła, a jeżeli są w rozważanym obszarze, to ich rozmieszczenie i wydajność nie mogą się zmieniać w czasie; kontakt rozważanego obszaru z otoczeniem musi być tego rodzaju, by temperatura zewnętrznej powierzchni brzegu obszaru także nie zależała od czasu.

Jeżeli warunki te nie są spełnione, pole temperaturowe nie jest ustalone. Po zaniknięciu przyczyn powodujących powstanie nieustalonego pola temperaturowego, pole to samoczynnie przechodzi w ustalone. Teoretycznie przechodzenie to także trwa przez czas nieograniczenie długi, w praktyce zaś czas skończony zależy od pojemności cieplnej układu. W chwili, gdy zachodzące zmiany temperatury w czasie możemy uznać w rozważanych zagadnieniach przekazywania ciepła za pomijalne, uznajemy to pole za już ustalone (patrz rys. 2.6 i 2.7).



Rys. 2.6. Bilans energii wycinka pola temperaturowego: Q_1 , Q_2 – przekazane strumienie ciepła „doprowadzony” i „odprowadzony”, L_z – praca zewnętrzna przekazana do otoczenia, I_1 , I_2 – entalpie substancji doprowadzonej i odprowadzonej



Rys. 2.7. Przebiegi temperatury: T_A , T_B , T_C – temperatury punktów odpowiednio A, B, C na rys. 2.6, T_{Au} , T_{Bu} , T_{Cu} – temperatury punktów A, B, C po ustaleniu się pola temperaturowego

Weźmy pod uwagę dowolny obszar zamknięty*) pola temperaturowego (rys. 2.6) i przeprowadźmy bilans energii substancji znajdującej się w tym obszarze.

*) Obszar zamknięty oznacza obszar otoczony zamkniętą powierzchnią, nie zaś układ zamknięty – patrz dalej s. 16 (odnośnik).

Przez obszar ten przelywa substancja o entalpii I_1 doprowadzonej i I_2 odprowadzonej. Pod wpływem przekazywania ciepła i przepływu substancji układ taki może przekazać zewnętrzną pracę objętościową jedynie na pokonanie sił pochodzących od ciśnienia p_0 , jakim otoczenie działa na rozważany obszar. Pracę wewnętrzną układu, w którym w czasie $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$ pod wpływem przedstawionych na rys. 2.6 działań objętość z V_p zmienia się na V_k , wyrażamy wzorem:

$$L_z = \int_{V_p}^{V_k} p_0 dV. \quad (2.8)$$

Zgodnie z równaniem bilansu energii dla układu przedstawionego na rys. 2.6

$$\Delta E_u = E_1 - E_2 = Q_1 + Q_w + L_1 - Q_2 - I_2 - L_z, \quad (2.9)^*)$$

gdzie

E_1, E_2 — energia doprowadzona i odprowadzona z układu,

Q_1, Q_2 — ciepło przekazane do i z układu,

Q_w — ciepło z wewnętrznych źródeł.

Założmy poza tym, że nie zmienia się energia kinetyczna i potencjalna substancji znajdującej się w układzie. Wtedy

$$\Delta E_u = E_{uk} - E_{up} = U_k - U_p, \quad (2.9a)$$

gdzie

E_{uk} — energia układu w chwili τ_2 końcowej,

E_{up} — energia układu w chwili τ_1 początkowej,

U — energia wewnętrzna układu.

Zgodnie z równaniami (2.9) i (2.9a) można napisać

$$U_k - U_p = Q_1 + Q_w + I_1 - Q_2 - L_z. \quad (2.10)$$

Przy stałym ciśnieniu otoczenia $L_z = p_0(V_k - V_p)$, równanie (2.10) można więc zapisać w postaci:

$$U_k + p_0 V_k - (U_p + p_0 V_p) = Q_1 + Q_w + I_1 - Q_2 - I_2. \quad (2.11)$$

Gdy substancja znajdująca się w rozważanym obszarze jest w równowadze mechanicznej z otoczeniem, tzn. dla substancji płynnych ciśnienie wewnątrz obszaru jest równe p_0 , wówczas $U + p_0 V = I$ równa się entalpii substancji znajdującej się w układzie, czyli równanie (2.11) można zapisać w postaci:

$$I_k - I_p = Q_1 + I_1 - Q_2 - I_2. \quad (2.12)$$

*) W bilansie energii, w którym energią wewnętrzną U operuje się jako energią względną, ciepło pochodzące z wewnętrznych źródeł traktujemy podobnie, jak przekazane z zewnątrz.

Jeżeli w rozważanym obszarze znajduje się substancja, której objętość pod wpływem działań przedstawionych na rys. 2.6 praktycznie się nie zmienia, np. ciało stałe lub ciecz, to dla tych substancji, zgodnie z (2.10)

$$U_k - U_p \approx Q_1 + Q_w + I_1 - Q_2 - I_2. \quad (2.13)$$

Z równań (2.12) i (2.13) obliczymy odpowiednio przyrost entalpii lub energii wewnętrznej (entermii) substancji, znajdującej się wewnątrz zamkniętej powierzchni otaczającej układ zamknięty^{*)} lub otwarty, spowodowany działaniami cieplnymi (w układzie otwartym spowodowany także przepływem substancji).

Jeżeli w omawianym obszarze pola temperaturowego ilość substancji się nie zmienia, nie zachodzą przemiany fazowe (tzn. ilości poszczególnych faz nie ulegają zmianie), a pole temperaturowe jest ustalone, to zarówno przyrost energii wewnętrznej, jak i entalpii substancji znajdującej się w tym obszarze, jest równy zeru

$$U_k - U_p = I_k - I_p = 0. \quad (2.14)$$

Dla układu otwartego obowiązuje wtedy zależność

$$\dot{I}_2 - \dot{I}_1 = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_w - \dot{Q}_2. \quad (2.15)$$

Przyrost strumienia entalpii substancji przepływającej^{**)} przez układ otwarty równa się sumie strumienia ciepła doprowadzonego oraz z wewnętrznych źródeł, pomniejszonej o strumień odprowadzony.

Dla układu zamkniętego

$$\dot{Q}_1 + \dot{Q}_w = \dot{Q}_2 \quad (2.16)$$

suma strumieni ciepła doprowadzonego oraz z wewnętrznych źródeł musi być odprowadzona z obszaru otoczonego zamkniętą powierzchnią.

W obszarach bez wewnętrznych źródeł ciepła

$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 \quad (2.17)$$

ciepło, przekazane do otoczonego zamkniętą powierzchnią obszaru o ustalonym polu temperaturowym, musi być odprowadzone.

Jeżeli jako układ otoczony zamkniętą powierzchnią wyobrazimy sobie obszar źródła ciepła, a pole temperaturowe jest ustalone, to zgodnie z (2.17) strumień $\dot{Q}$ ciepła jest wtedy stały

$$\dot{Q} = \text{idem}. \quad (2.18)$$

^{*)} Układ jest zamknięty wówczas, gdy zawarta w nim substancja jest ciągle ta sama, nie ulega zmianie. Układ jest otwarty, gdy przepływa przez niego substancja lub tylko dopływa, albo odpływa.

^{**)} W tym przypadku ilość substancji wpływającej do układu musi się równać ilości substancji opuszczającej układ.

3. Przewodzenie ciepła (część I) — rozwiązania podstawowe

Mechanizm przewodzenia ciepła w ciałach stałych jest zjawiskiem skomplikowanym i dotychczas niecałkowicie znanym. Niepoślednią rolę odgrywa w nim drgający (oscylacyjny) ruch atomów i cząstek oraz ruch wolnych elektronów; ten ostatni zwłaszcza w metalach. W ciałach gazowych i ciekłych decydujące znaczenie ma ruch dyfuzyjny.

3.1. Prawo Fouriera

Gęstość strumienia ciepła jest proporcjonalna do gradientu temperatury

$$\dot{q} = -\lambda \text{ grad } T. \quad (3.1)$$

Znak minus^{*)} wynika z tego, że zwrot wektora gęstości strumienia ciepła jest przeciwny zwrotowi gradientu temperatury (patrz rozdz. 2).

Ponieważ $\dot{q} = d\dot{Q}/dF$, a więc strumień ciepła należy obliczyć ze wzoru

$$\dot{Q} = - \int_F \lambda \text{ grad } T dF. \quad (3.2)$$

Jeżeli w polu temperaturowym można wybrać powierzchnię F , na której λ i grad T nie zależą od położenia^{**)}, to

$$\dot{Q} = -F\lambda \text{ grad } T, \quad (3.3)$$

^{*)} Znak minus może być zlikwidowany przez odpowiednie obrócenie osi układu współrzędnych.

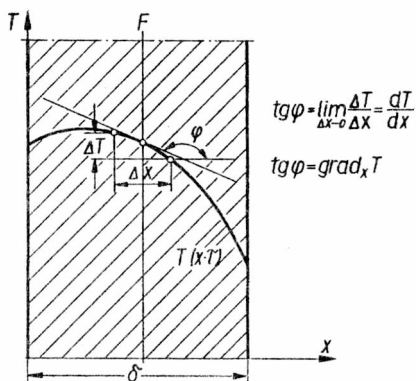
^{**) Nie zależą od zmiennych określających położenia x, y, z , lecz mogą być funkcją czasu zwłaszcza grad T .}

co za pomocą współrzędnych prostokątnych można zapisać

$$\dot{Q} = -F\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (3.4)^*)$$

gdzie

$\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$, $\partial T/\partial z$ — składowe gradientu temperatury (wektory); w nawiasie suma wektorowa.



Rys. 3.1. Jednoosiowe przewodzenie ciepła; rozkład temperatur w chwili τ

Dla jednoosiowego przewodzenia ciepła, np. w kierunku osi x , przewodzony strumień ciepła wyraża się w najczęściej spotykanej szczególnej postaci prawa Fouriera

$$\dot{Q} = -F\lambda \frac{dT}{dx}. \quad (3.5)$$

Równania od (3.1) do (3.5) są słuszne zarówno dla ustalonego, jak i nieustalonego przewodzenia ciepła. Jeżeli mamy do czynienia z ustalonym przewodzeniem, to rozkład temperatury (rys. 3.1) nie zmienia się z czasem, a więc i $dT/dx = \operatorname{tg} \varphi$ także jest w czasie niezmiennie; przy niezależnym od czasu współczynniku przewodzenia, strumień ciepła, zgodnie np. z (3.5), jest stały. W przypadku nieustalonego przewodzenia ciepła strumień ciepła jest funkcją czasu.

3.2. Współczynnik λ przewodzenia ciepła

Współczynnik proporcjonalności, występujący w prawie Fouriera, nazywamy współczynnikiem przewodzenia ciepła^{**)} . Zależy on od rodzaju substancji (materiału), jej gęstości i temperatury. Zestawienie porównawcze współczynników przewodzenia ciepła podano w tab. 3.1.

3.2.1. Ciała stałe metaliczne

Największe wartości współczynnika przewodzenia ciepła mają metale. Ponieważ przewodnictwo ciepła w tych ciałach jest powodowane przede wszystkim ruchem wolnych elektronów, zatem przewodnictwo cieplne jest uwarunkowane przewodnictwem elektrycznym.

^{*)} Gdy zastępuje się operator $\nabla = (\partial/\partial x) + (\partial/\partial y) + (\partial/\partial z)$ Hamiltona (nabla), wówczas równanie (3.4) przyjmie postać $\dot{Q} = -F\lambda \nabla T$.

^{**)} Zgodnie z równaniem (3.19) współczynnik przewodzenia ciepła równa się strumieniowi ciepła przewodzonemu przez 1 m^2 powierzchni ściany grubości 1 m , jeżeli różnica temperatur powierzchni skrajnych wynosi 1 K .

Tabela 3.1. Współczynniki λ przewodzenia ciepła

W/m · K	Ciała stałe	W/m · K	Ciecze	W/m · K	Gazy	
450	Ag	10	Płyn Merkury			
350	Cu					
250	Al					
200	Mg					
150	Zn					
100	Ni					
	Fe					
	Pt					
50	Li					
	U					
	Stop Monela					
	SiC					
30	Kwarc					
10	Lód					1
	Piaskowiec	Amoniak				
1	Fibra	Gliceryna				
		C ₂ H ₅ OH				
0,2	Skóra	0,2	Benzol		He	
	Sosna	0,1		0,1		
0,1	Guma					
	Azbest					
	Korek					
0,03	Wełna	0,03	CH ₄	0,01	O ₂	
		N ₂				
		Powietrze				
0,01		CO CO ₂				
		SO ₂				
0,001			0,001			

Związek między przewodnictwem cieplnym i elektrycznym podaje prawo Wiedemanna–Franza–Lorenza.

$$L = \frac{\lambda}{\lambda_e T}, \quad (3.6)$$

gdzie L – liczba Lorenza,
 λ_e – przewodność elektryczna.

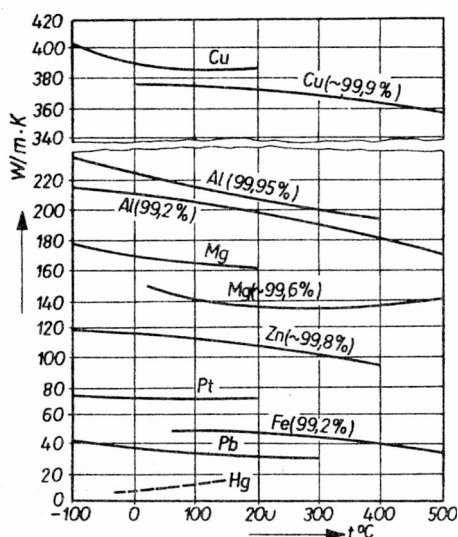
Jeśli w rozważaniach uwzględnia się statystykę Fermiego–Diraca, liczbę Lorenza można wyliczyć ze wzoru

$$L = 3 \left(\frac{B}{z} \right)^2 = 24,5 \cdot 10^{-9} \text{ (volt/K)}^2 \quad (3.7)$$

w którym z – ładunek elektronu,
 B – liczba Boltzmanna.

Tabela 3.2*). Liczba Lorenza dla rzeczywistych metali w 0 °C i 100 °C

Metal	0 °C	100 °C	Metal	0 °C	100 °C
Aluminium	21,2	22,3	Molibden	26,1	27,9
Bismut	33,1	28,9	Nikiel	17,7	22,8
Kadm	24,2	24,3	Pallad	25,9	27,4
Miedź	22,3	23,3	Platyna	25,1	26,0
Złoto	23,5	24,0	Ren	25,7	25,7
Irydium	24,9	24,9	Srebro	23,1	23,7
Żelazo	24,9	25,6	Cyna	25,2	24,9
Ołów	24,7	25,6	Tungsten	30,4	32,0
			Cynk	23,1	23,3



Rys. 3.2. Współczynnik λ przewodzenia ciepła metali

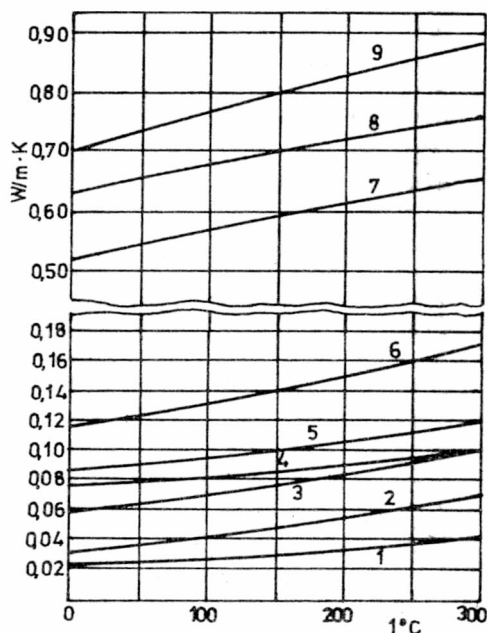
W przeprowadzonych współcześnie badaniach wskazuje się na odchylenia od teoretycznej wartości liczby Lorenza. Wyniki badań podano w tab. 3.2.

Przewodność cieplna ciał krystalicznych, a więc metali, zmniejsza się ze wzrostem temperatury (rys. 3.2). Kryształy często wykazują anizotropowość przewodności cieplnej i znacznie większą wartość przewodności niż np. przeciętnie spotykane metale (ciała o kryształach nieuporządkowanych). Wartość współczynnika przewodzenia ciepła w znacznej mierze zależy od czystości chemicznej metalu, np. w czystej miedzi $\lambda = 386 \text{ W/m} \cdot \text{K}$, a w miedzi zanieczyszczonej śladem arsenu – ok. $120 \text{ W/m} \cdot \text{K}$. W odpowiednich stopach notuje się mniejsze wartości λ niż w czystych składnikach (patrz tab. 14.1 w zestawieniu na końcu).

*) Według Geigera i Schela.

3.2.2. Ciała stałe niemetaliczne

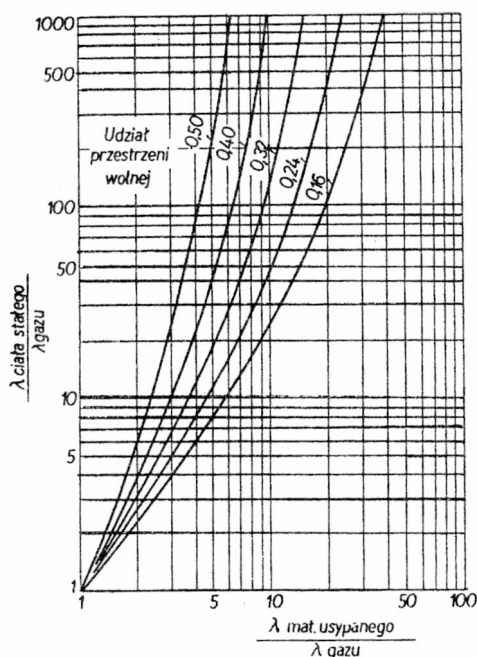
Ciała te są stosowane przede wszystkim jako materiały konstrukcyjne podstawowe lub izolacyjne (rys. 3.3). Notuje się tu materiały, których współczynniki przewodzenia ciepła znajdują się w przedziale liczb od ok. 0,2 do kilkunastu. Orientacyjnie — materiały, których współczynnik przewodzenia jest mniejszy niż ok. 0,15, nazywamy materiałami izolacyjnymi, lecz granica ta nie jest wyraźnie określana.



Rys. 3.3. Współczynnik przewodzenia ciepła materiałów izolacyjnych i ogniotrwałych: 1 — powietrze, 2 — wata mineralna $\rho = 160 \text{ kg/m}^3$, 3 — wata żuźlowa $\rho = 200 \text{ kg/m}^3$, 4 — newel $\rho = 340 \text{ kg/m}^3$, 5 — sowielit $\rho = 440 \text{ kg/m}^3$, 6 — cegła diatomowa $\rho = 550 \text{ kg/m}^3$, 7 — cegła czerwona $\rho = 1672 \text{ kg/m}^3$, 8 — cegła żuźlowa $\rho = 1373 \text{ kg/m}^3$, 9 — cegła szamotowa $\rho = 1840 \text{ kg/m}^3$

Współczynnik przewodzenia jest funkcją temperatury i w dużym zakresie temperatur dla ciał stałych niemetalicznych zależność ta jest przyjmowana jako liniowa. Należy zauważyć, że dla ciał bezpostaciowych, np. szkła, szamotu, współczynnik przewodzenia rośnie wraz ze wzrostem temperatury — odwrotnie jak dla ciał krystalicznych.

Współczynnik przewodzenia ciepła, zwłaszcza dla porowatych materiałów izolacyjnych, zależy od gęstości tych ciał. Wynika to z izolacyjnych właściwości gazów znajdujących się w porach. Gazy o najniższych wartościach współczynnika λ (patrz tab. 3.1), występujące w porach o rozmiarach i kształtach, które uniemożliwiają ruch konwekcyjny gazów, zmniejszają wydatnie przewodność cieplną. Technika wytwarzania materiałów izolacyjnych o najniższych współczynnikach λ polega na tworzeniu w nich dużej liczby drobnych zamkniętych porów, wypełnionych gazem,



Rys. 3.4. Współczynnik przewodzenia ciepła materiałów usypanych o przestrzeniach wypełnionych gazem

W cieczech, z wyjątkiem wody i gliceryny, λ zmniejsza się ze wzrostem temperatury (patrz rys. 3.5) [19].

Stosuje się różne wzory służące do obliczenia λ cieczy. Wzory te są dosyć uniwersalne, lecz wyniki są mniej pewne niż uzyskane z bezpośrednich pomiarów. Otrzymanie wyników dosyć zgodnych z doświadczeniem umożliwia znany od dawna wzór Webera w ($\text{W/m} \cdot \text{K}$)

$$\lambda = 0,358 \, c \rho \sqrt[3]{\frac{\rho}{M}}, \quad (3.8)^*$$

w którym

c — ciepło właściwe w $\text{kJ/kg} \cdot \text{K}$,

ρ — gęstość w kg/dm^3 ,

M — liczba molowa.

Dla cieczy także wzór Predwoditielewa (w $\text{W/m} \cdot \text{K}$)

$$\lambda_0 = \frac{1,77 \cdot 10^{-4}}{\varepsilon M^{1/3}} \quad (3.9)$$

jest dość zgodny z pomiarami bezpośrednimi.

przy jak najmniejszej ilości materiału zamykającego pory.

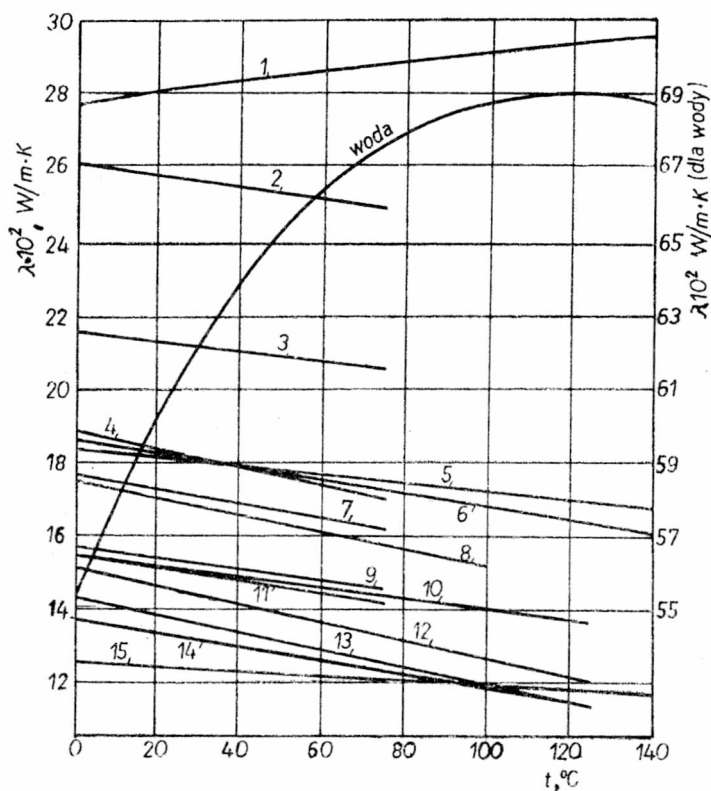
Duży wpływ na przewodność cieplną ciał nasiąkliwych ma ich wilgotność, np. piasek suchy ma $\lambda = 0,3$, wilgotny 0,9, woda zaś $\sim 0,5$. Współczynnik przewodzenia materiału zawilżonego może być wyższy od tegoż współczynnika wody i materiału suchego. Ostatnio pojawiło się wiele prac wyjaśniających to zjawisko [24].

W ciałach sypkich (nasypowch) współczynnik przewodzenia ciepła zależy od ubicia (gęstości) i jest bardziej zbliżony do przewodności gazu znajdującego się w porach, niż materiału, z którego powstało ciało sypkie (patrz rys. 3.4).

3.2.2.1. Ciecze

Współczynnik przewodzenia cieczy nie-metalicznych mieści się w granicach od około 0,1 do 0,6, w cieczech metalicznych jest znacznie większy: $\lambda_{\text{Hg}, 0^\circ\text{C}} = 8,7 \text{ W/m} \cdot \text{K}$.

*) Smith uważa, że stałą należy powiększyć do 0,430 [8].



Rys. 3.5. Współczynnik przewodzenia ciepła cieczy: 1 – gliceryna bezwodna, 2 – kwas mrówkowy, 3 – alkohol metylowy, 4 – alkohol etylowy, 5 – olej rycynowy, 6 – anilina, 7 – kwas octowy, 8 – aceton, 9 – alkohol butylowy, 10 – nitrobenzol, 11 – alkohol izopropylowy, 12 – benzol, 13 – toluol, 14 – ksyloł, 15 – wazelina, 16 – woda (skala z prawej strony)

Dla cieczy nie rozpuszczających się (np. benzol, toluol) $\varepsilon = 1$, dla cieczy rozpuszczających się (woda, alkohol) $\varepsilon > 1$.

Hobler [6]^{*)} dla roztworów cieczy przytacza wzór przybliżony

$$\lambda_m = \sum_{i=1}^n g_i \lambda_i, \quad (3.10)$$

w którym

g_i – udział wagowy składników w roztworze,

λ_i – współczynniki przewodzenia czystych składników roztworu.

^{*)} Według Hsu [8] udziały powinny być objętościowe. W cieczach o zbliżonych gęstościach udziały objętościowe niewiele odbiegają od udziałów wagowych (uwaga autora).

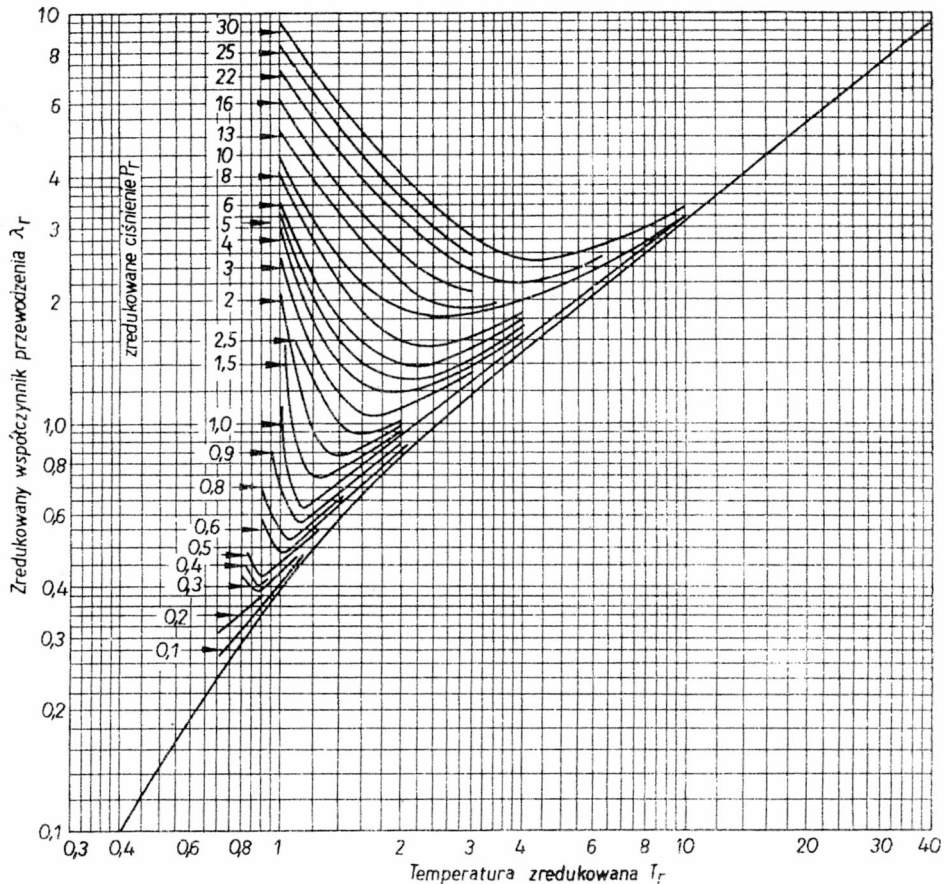
3.2.2.2. Gazy

Najniższe wartości współczynnika λ , w granicach 0,005–0,55, mają gazy.

Z teorii kinetycznej gazów wynika prosty związek między współczynnikiem λ a ciepłem właściwym c_v i współczynnikiem lepkości η dynamicznej

$$\lambda = d c_v \eta, \quad (3.11)$$

gdzie d – współczynnik zależny od ilości atomów w cząstce gazu.



Rys. 3.6. Zredukowany współczynnik przewodzenia ciepła gazów

Wyniki wyliczone za pomocą tego wzoru odbiegają jednak od wyników pomiarów i dlatego Eucken zaproponował wzór empiryczny określający wielkość współczynnika d (w $\text{W/m} \cdot \text{K}$)

$$d = 0,29(9k - 5), \quad (3.12)$$

w którym k – wykładnik adiabaty.

Współczynnik przewodzenia ciepła w gazach zależy od temperatury i wraz z jej wzrostem zwiększa się bardziej niż w innych ciałach.

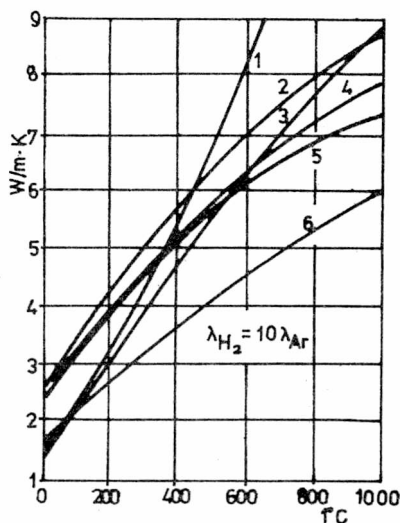
Znane są metody określania λ dla różnych gazów na podstawie wprowadzonego pojęcia parametru zredukowanego $\lambda_r = \lambda/\lambda_{kr}$, podobnie jak w termodynamice dla ciśnienia zredukowanego $p_r = p/p_{kr}$ i temperatury $T_r = T/T_{kr}$. Ogólną zależność

$$\lambda_r = f(T_r, p_r) \quad (3.13)$$

przedstawiono na rys. 3.6.

Jeśli po odczytaniu z wykresu zredukowanej wartości λ_r chcemy obliczyć rzeczywistą wartość λ , to musimy pomnożyć λ_r przez λ_{kr} (tab. 3.3).

Współczynnik przewodzenia ciepła obliczamy z wzorów zwykle wówczas, gdy brak danych bezpośrednich. Najdokładniejsze są liczby współczynnika przewodzenia ciepła wzięte z tabel^{*)} i wykresów opartych na bezpośrednich pomiarach (rys. 3.7).



Rys. 3.7. Współczynnik przewodzenia ciepła gazów: 1 — para wodna, 2 — tlen, 3 — dwutlenek węgla, 4 — powietrze, 5 — azot, 6 — argon

Tabela 3.3. Wartości krytyczne współczynnika λ_{kr} (w $\text{W/m} \cdot \text{K}$) przewodzenia ciepła dla gazów (według B. W. Gamsona)

Aceton	0,0793	Dwuchloro- dwufluorometan	0,0379	Ksenon	0,0143
Acetylen	0,0550	Dwutlenek siarki	0,0359	Metan	0,0495
Amoniak	0,0922	Dwutlenek węgla	0,0450	Neon	0,0215
Argon	0,0256	Etan	0,0566	Octan etylu	0,0830
Azot	0,0329	Eter etylowy	0,0877	Podtlenek azotu	0,0458
Benzen	0,1057	Etylen	0,0495	Tlenek azotu	0,0424
Chlorek etylu	0,0621	Hel	0,0149	Tlenek węgla	0,0298
Chloroform	0,0424	Heptan	0,0531	Woda	0,1350
Czterochlorek węgla	0,9359	Krypton	0,0162	Wodór	0,0641

3.3. Przewodzenie ciepła ustalone, bez wewnętrznych źródeł ciepła — przypadki elementarne

3.3.1. Ściana płaska

Pole powierzchni ściany wynosi F , jej grubość δ . Ściana jest zbudowana z materiału o niezależnym od temperatury współczynniku λ przewodzenia ciepła. Temperatury powierzchni zewnętrznych ścian wynoszą odpowiednio ϑ_1 i ϑ_2 . Celem

^{*)} Tabele 15.1–15.4 podano w Dodatku.

rozwiązania jest określenie rozkładu temperatury wewnątrz ściany i obliczenie strumienia ciepła. Rozpatrywany przypadek (rys. 3.8) jest przykładem jednoosiowego przewodzenia ciepła, zatem po zastosowaniu równania (3.5) dla ciała stałego napiszemy

$$\dot{Q} = -F\lambda \frac{d\vartheta}{dx}. \quad (3.14)$$

Ponieważ rozpatrujemy ustalone przewodzenie bez wewnętrznych źródeł ciepła, więc zgodnie z równaniem (2.18) $\dot{Q} = \text{idem}$; F oraz λ nie zależą od x , przeto w równaniu (3.14) zmienne są tylko ϑ oraz x . Całkowanie można więc przeprowadzić rozdzielając zmienne

$$\dot{Q} dx = -F\lambda d\vartheta, \quad (3.15)$$

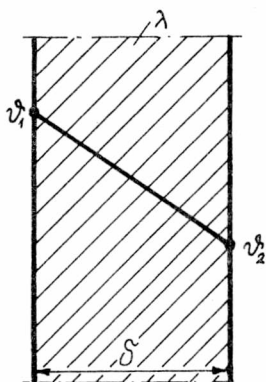
co daje w wyniku:

$$\dot{Q} x = -F\lambda \vartheta + \text{const}. \quad (3.16)$$

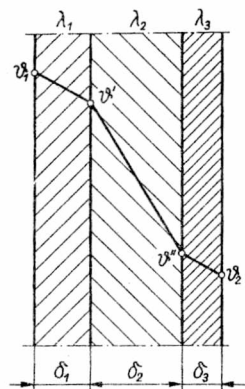
Z równania tego można wyznaczyć zależność $\vartheta = \vartheta(x)$, czyli rozkład temperatury

$$\vartheta = -\frac{\dot{Q}}{F\lambda} x + \text{const}'. \quad (3.17)$$

Równanie (3.17) przedstawia geometrycznie linię prostą przechodzącą przez punkty o temperaturach ϑ_1 i ϑ_2 .



Rys. 3.8. Ściana płaska – rozkład temperatury o ustalonym przekazywaniu ciepła



Rys. 3.9. Ściana płaska trójwarstwowa – rozkład temperatury

Jeśli chcemy obliczyć strumień ciepła, jaki jest przewodzony przez ścianę płaską w warunkach ustalonych, to równanie (3.15) musimy scałkować w granicach od $x = 0$ do $x = \delta$. Temperatura zmienia się wówczas odpowiednio od ϑ_1 do ϑ_2 , czyli

$$\dot{Q} x \Big|_0^\delta = -\lambda F \vartheta \Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}, \quad (3.18)$$

Z równania tego otrzymujemy

$$\dot{Q} = F \frac{\lambda}{\delta} (\vartheta_1 - \vartheta_2). \quad (3.19)$$

Jest to wzór do obliczenia strumienia ciepła przewodzonego przez jednowarstwową ścianę płaską o ustalonym przekazywaniu ciepła.

Ze względu na podobieństwo rozplywu strumieni ciepła do rozplywu prądu elektrycznego, co wyraża się w podobnej budowie równań (traktując jako wielkości analogiczne przewodność elektryczną i przewodność cieplną), wprowadza się do zagadnień przekazywania ciepła pojęcie oporu cieplnego na wzór oporu elektrycznego.

Dla ściany płaskiej za właściwy opór R_λ przewodzenia ciepła przyjmujemy

$$R_\lambda = \frac{\delta}{\lambda}, \quad (3.20)$$

wtedy wzór (3.12) przyjmie postać

$$\dot{Q} = F \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{R_\lambda}. \quad (3.21)$$

Strumień ciepła jest proporcjonalny do różnicy temperatur, a odwrotnie proporcjonalny do oporu cieplnego. Jest to analogiczne do przepływu strumienia elektrodów w przewodniku elektrycznym, czyli natężenia prądu elektrycznego. Analogiem temperatury jest potencjał elektryczny, analogiem zaś strumienia ciepła jest natężenie prądu.

3.3.1.1. Wielowarstwowa ściana płaska

Niech ściana płaska składa się z n warstw nałożonych na siebie, z których każda jest określona przez różne dla niej wartości współczynnika λ_i przewodzenia ciepła oraz δ_i grubości. Na rysunku 3.9 przedstawiono przykładowo przegrodę trójwarstwową. Znakami „prim”, „bis” itd. zaznaczono odpowiednio temperatury warstw stykających się, przez ϑ_1 i ϑ_2 natomiast odpowiednio temperatury powierzchni zewnętrznych. Po oznaczeniu temperatury warstw w miejscu styku zagadnienie przegrody n -warstwowej możemy rozłożyć na n przypadków powierzchni jednowarstwowych. Ten przykład omówiono w p. 3.3.1.

Dla n warstw można napisać odpowiednio n równań:

$$\text{dla warstwy 1} \quad \dot{Q} = F \frac{\vartheta_1 - \vartheta'}{R_{\lambda 1}}, \quad (3.22)$$

$$\text{dla warstwy 2} \quad \dot{Q} = F \frac{\vartheta' - \vartheta''}{R_{\lambda 2}}, \quad (3.23)$$

.....

$$\text{dla } n\text{-tej warstwy} \quad \dot{Q} = F \frac{\vartheta''_{n-1} - \vartheta_2}{R_{\lambda n}}. \quad (3.24)$$

W równaniach tych $R_{\lambda 1}$, $R_{\lambda 2}$ itd. (ogólnie $R_{\lambda i}$) są cieplnymi oporami odpowiedniej i -tej warstwy. W równaniu (3.24) odnośnik $n-1$ przy temperaturze ϑ'' oznacza liczbę apostrof, jeśli jest n warstw.

Jeżeli układ równań (3.22)–(3.24) odpowiednio przekształcimy tak, że po prawej stronie pozostaną tylko różnice temperatury, to otrzymamy:

$$\frac{\dot{Q}}{F} R_{\lambda 1} = \vartheta_1 - \vartheta', \quad (3.25)$$

$$\frac{\dot{Q}}{F} R_{\lambda 2} = \vartheta' - \vartheta'', \quad (3.26)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{\dot{Q}}{F} R_{\lambda n} = \vartheta''_{n-1} - \vartheta_2. \quad (3.27)$$

Po zsumowaniu odpowiednio stronami otrzymujemy

$$\frac{\dot{Q}}{F} (R_{\lambda 1} + R_{\lambda 2} + \dots + R_{\lambda n}) = \vartheta_1 - \vartheta_2. \quad (3.28)$$

Temperatury warstw stykających się występują raz ze znakiem minus i raz ze znakiem plus w równaniach następujących po sobie, i po sumowaniu się znoszą; stosunek $\dot{Q}/F$ we wszystkich przekształconych równaniach dla ustalonego przewodzenia jest stały i został umieszczony przed nawiasem.

Jeżeli sumę oporów znajdującą się w nawiasie nazwiemy oporem zastępczym oporów łączonych szeregowo i oznaczmy

$$R_\lambda = \sum_{i=1}^{i=n} R_{\lambda i} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}, \quad (3.29)$$

to z równania (3.28) otrzymamy wzór określający strumień ciepła przewodzony przez płaską przegrodę n warstwową

$$\dot{Q} = F \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{R_\lambda}. \quad (3.30)$$

Jest on identyczny ze wzorem (3.21), z tym że opór cieplny występujący w mianowniku jest oporem sumarycznym, zgodnie ze wzorem (3.29).

3.3.2. Ściana rurowa

Przyjmijmy, że współczynnik przewodzenia ciepła jest niezależny od temperatury i czasu. Gdy zastosujemy współrzędne walcowe, możemy przypadek ten rozpatrywać w układzie dwu zmiennych ϑ oraz x (patrz rys. 3.10).

3.3.2.1. Jednowarstwowa ściana rurowa

Ściana rurowa (rys. 3.10) jest zbudowana z materiału, którego przewodność cieplną określa współczynnik λ . Średnicę wewnętrzną i zewnętrzną rury określono odpowiednio d_1 i d_2 , jej długość zaś symbolem L . W prawie Fouriera zastosowanym do tego przypadku

$$\dot{Q} = -F\lambda \frac{d\vartheta}{dx} \quad (3.31)$$

zmiennymi są: $F = F(x)$, ϑ oraz x . Powierzchnię można wyrazić jako funkcję zmiennej niezależnej x w postaci:

$$F = 2\pi Lx, \quad (3.32)$$

gdzie x jest ograniczone przez d_1 i d_2 , tzn. zmienia się w granicach od $d_1/2$ do $d_2/2$. Po podstawieniu (3.32) do (3.31) otrzymamy równanie różniczkowe

$$\dot{Q} = -2\pi Lx\lambda \frac{d\vartheta}{dx}, \quad (3.33)$$

w którym występują dwie zmienne x oraz ϑ . Zmienne te można rozdzielić następująco:

$$\dot{Q} \frac{dx}{x} = -2\pi L\lambda d\vartheta, \quad (3.34)$$

po obustronnym całkowaniu otrzymujemy

$$\dot{Q} \ln x = -2\pi L\lambda \vartheta + \text{const}, \quad (3.35)$$

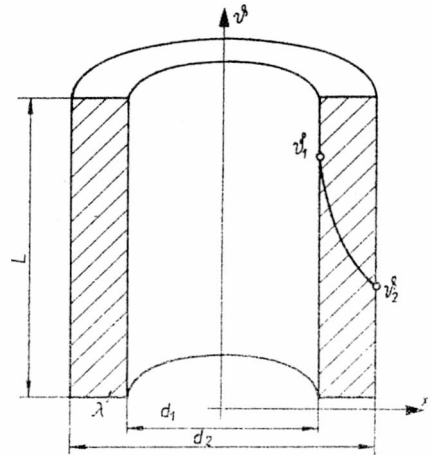
czyli

$$\vartheta = \frac{\dot{Q}}{2\pi L\lambda} \ln x + \text{const}'. \quad (3.36)$$

Równanie (3.36) określa przebieg temperatury w rurze. Na rysunku 3.10 jest to linia logarymiczna, przebiegająca przez punkty o temperaturach ϑ_1 i ϑ_2 .

Aby znaleźć wartość przewodzonego strumienia ciepła, równanie różniczkowe (3.34) należy scałkować w granicach od $x_1 = d_1/2$ do $x_2 = d_2/2$; wtedy temperatura ϑ zmienia się od ϑ_1 do ϑ_2

$$\dot{Q} \ln x \bigg|_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_2}{2}} = -2\pi L\lambda \vartheta \bigg|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \quad (3.37)$$



Rys. 3.10. Rozkład temperatury w jednowarstwowej ścianie rurowej

Po wykonaniu działań otrzymujemy

$$\dot{Q} \ln \frac{d_2}{d_1} = -2\pi L \lambda (\vartheta_2 - \vartheta_1), \quad (3.38)$$

z tego zaś

$$\dot{Q} = \pi L \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\ln \frac{d_2}{d_1}} 2\lambda. \quad (3.39)$$

Jeśli za opór cieplny przewodzenia ciepła przez przegrodę rurową przyjmiemy wyrażenie

$$R_{\lambda r} = \frac{\ln \frac{d_2}{d_1}}{2\lambda}, \quad (3.40)$$

to otrzymamy

$$\dot{Q} = \pi L \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{R_{\lambda r}}. \quad (3.41)$$

Jest to wzór służący do obliczania strumienia ciepła przewodzonego przez ścianę rurową.

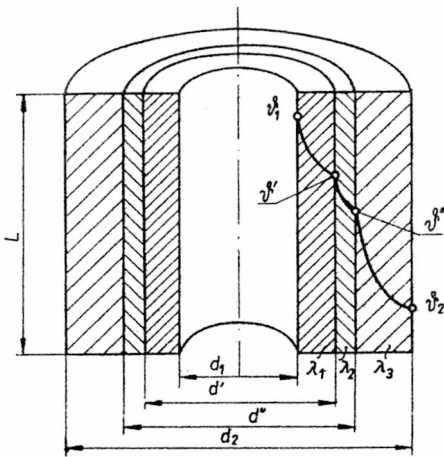
3.3.2.2. Wielowarstwowa ściana rurowa

Na rysunku 3.11 przedstawiono ścianę trójwarstwową jako przykład przegrody wielowarstwowej. Po wprowadzeniu oznaczenia temperatury ϑ' , ϑ'' itd. na cylindrycznych powierzchniach styku różnych warstw, ścianę n warstwową możemy traktować jako n ścian rurowych jednowarstwowych. Do obliczenia strumienia ciepła takich jednowarstwowych ścian wyprowadzono wzór (3.41). Możemy zatem napisać układ n równań:

$$\text{dla warstwy wewnętrznej} \quad \dot{Q} = \pi L \frac{\vartheta_1 - \vartheta'}{R_{\lambda r1}}, \quad (3.42)$$

$$\text{dla warstwy następnej} \quad \dot{Q} = \pi L \frac{\vartheta' - \vartheta''}{R_{\lambda r2}}, \quad (3.43)$$

$$\text{dla warstwy } n\text{-tej, tj. zewnętrznej} \quad \dot{Q} = \pi L \frac{\vartheta''_{n-1} - \vartheta_2}{R_{\lambda rn}}. \quad (3.44)$$



Rys. 3.11. Rozkład temperatury w wielowarstwowej ścianie rurowej

W równaniach (3.42)–(3.44) $\dot{Q}$ oraz L mają takie same wartości. Po przekształceniu układu n równań w ten sposób, żeby po prawej stronie wystąpiły tylko różnice temperatury, dodaniu stronami i wzięciu $\dot{Q}/\pi L$ przed nawias otrzymamy:

$$\frac{\dot{Q}}{\pi L} (R_{\lambda r1} + R_{\lambda r2} + \dots + R_{\lambda rn}) = \vartheta_1 - \vartheta_2. \quad (3.45)$$

Jeżeli sumę oporów $R_{\lambda ri}$ znajdującą się w nawiasie lewej strony równania (3.45), przyjmiemy za opór wypadkowy wielowarstwowej ściany rurowej o warstwach łączonych szeregowo

$$R_{\lambda r} = \sum_{i=1}^{i=n} R_{\lambda ri} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}, \quad (3.46)^*$$

to z równania (3.46) otrzymamy wzór do obliczenia strumienia ciepła przewodzonego przez wielowarstwową ścianę rurową

$$\dot{Q} = \pi L \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{R_{\lambda r}} \quad (3.47)$$

o budowie identycznej z równaniem (3.41), z tym że w równaniu (3.47) $R_{\lambda r}$ jest oporem sumarycznym.

3.3.3. Ściana kulista

Rozpatrujemy przypadek przewodzenia ciepła przez wydrążoną kulę (rys. 3.12), w której temperatury powierzchni (sfery) wewnętrznej i zewnętrznej są różne. Omawiany przypadek trójosiowego przewodzenia we współrzędnych sferycznych możemy rozpatrywać w układzie dwu zmiennych ϑ, x , gdzie x jest promieniem omawianej sfery, ograniczonym z dołu przez r_w , a z góry przez r_z . Do takiego układu odniesienia zastosujemy prawo Fouriera w postaci:

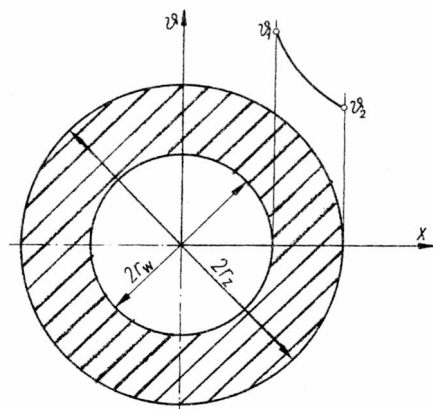
$$\dot{Q} = -F\lambda \frac{d\vartheta}{dx}, \quad (3.48)$$

gdzie F jest powierzchnią sfery, czyli

$$F = 4\pi x^2. \quad (3.49)$$

Po wstawieniu równania (3.49) do (3.48) otrzymamy wzór

$$\dot{Q} = -4\pi x^2 \lambda \frac{d\vartheta}{dx}, \quad (3.50)$$



Rys. 3.12. Ściana kulista – rozkład temperatury

*) d_{n+1} należy rozumieć jako średnicę zewnętrzną rury wielowarstwowej, czyli d_2 .

w którym występują tylko dwie zmienne x i ϑ . Równanie całkujemy przez rozdzielenie zmiennych

$$\dot{Q} \frac{dx}{x^2} = -4\pi\lambda d\vartheta, \quad (3.51)$$

z tego zaś

$$-\dot{Q} \frac{1}{x} = -4\pi\lambda\vartheta + \text{const}, \quad (3.52)$$

czyli

$$C_1\vartheta x + C_2x - 1 = 0, \quad (3.53)$$

gdzie $C_1 = 4\pi\lambda/\dot{Q}$, $C_2 = \text{const}/\dot{Q}$ i są to wielkości stałe.

Równanie (3.53) przedstawia zależność ϑ od x , czyli rozkład temperatury w układzie sferycznym. Jest to równanie przesuniętej hiperboli równobocznej.

Aby obliczyć strumień ciepła przewodzony przez powierzchnie kuliste, należy równanie (3.51) scałkować w granicach. Jeżeli x zmienia się od r_w do r_z , to ϑ zmienia się od ϑ_1 do ϑ_2 , czyli

$$-\dot{Q} \frac{1}{x} \int_{r_w}^{r_z} = -4\pi\lambda \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}. \quad (3.54)$$

Po rozwiązaniu (3.54) względem $\dot{Q}$ otrzymamy

$$\dot{Q} = 4\pi\lambda \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\frac{1}{r_w} - \frac{1}{r_z}}. \quad (3.55)$$

Jest to wzór do obliczania strumienia ciepła przewodzonego przez ścianę kulistą. Jeśli opór przewodzenia ciepła przez ścianę kulistą oznaczymy przez

$$R_{\lambda o} = \frac{\frac{1}{r_w} - \frac{1}{r_z}}{4\pi}, \quad (3.56)$$

to wzór określający strumień ciepła można wyrazić w postaci stosowanej w poprzednich przypadkach przewodzenia:

$$\dot{Q} = \pi \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{R_{\lambda o}}. \quad (3.57)$$

Oznacza to, że strumień ciepła przewodzonego jest proporcjonalny do różnicy temperatur, a odwrotnie proporcjonalny do oporu cieplnego.

3.3.4. Powierzchnia zastępcza ścian zakrzywionych

W wielu zagadnieniach jest wygodniej operować ścianą płaską zastępczą, nie zaś ścianą zakrzywioną. Równania określające strumień ciepła, opór cieplny i inne wielkości są wtedy stosunkowo proste i pozwalają w niektórych zagadnieniach łatwo wyciągać wnioski uogólniające.

Rozważania tu przeprowadzone są stosowane do wszelkich ścian zakrzywionych, których powierzchnię przewodzenia ciepła można wyrazić jako funkcję tylko jednej zmiennej, np. $F = f(x)$ (można to osiągnąć rozpatrując odpowiednie przypadki we współrzędnych walcowych, sferycznych itp.).

Zgodnie z prawem Fouriera

$$\dot{Q} = -F(x)\lambda \frac{d\vartheta}{dx} \quad (3.58)$$

można wtedy rozdzielić zmienne

$$\dot{Q} \frac{dx}{F(x)} = -\lambda d\vartheta. \quad (3.59)$$

Jeśli ściana jest jednorodna, izotropowa o stałym współczynniku λ , to całkując w granicach od x_1 do x_2 (temperatura ϑ zmienia się od ϑ_1 do ϑ_2) otrzymamy:

$$\dot{Q} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{F(x)} = \lambda(\vartheta_1 - \vartheta_2). \quad (3.60)$$

Różnica $x_1 - x_2 = \delta$ jest grubością ściany. Równanie (3.60) zapiszemy więc w postaci

$$\dot{Q} = \frac{\delta}{\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{F(x)}} \frac{\lambda}{\delta} (\vartheta_1 - \vartheta_2). \quad (3.61)$$

Gdy wprowadzimy pojęcie zastępczej powierzchni płaskiej F_{sr} , równanie określające strumień ciepła, zgodnie z równaniem (3.19), powinno mieć postać

$$\dot{Q} = F_{sr} \frac{\lambda}{\delta} (\vartheta_1 - \vartheta_2). \quad (3.62)$$

Równanie to będzie spełnione, jeśli F_{sr} wyrazi się wzorem

$$F_{sr} = \frac{\delta}{\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{F(x)}}. \quad (3.63)$$

co wynika z porównania równań (3.61) i (3.62).

3.3.4.1. Powierzchnia zastępcza ściany rurowej

Powierzchnię F przewodzenia ciepła jednowarstwowej ściany rurowej wyrażamy funkcją (patrz rys. 3.10)

$$F = 2\pi Lx. \quad (3.64)$$

Na podstawie równania (3.63) możemy napisać

$$F_{sr} = \frac{\delta}{\int_{d_1/2}^{d_2/2} \frac{dx}{2\pi Lx}}. \quad (3.65)$$

gdzie d_1 i d_2 są to średnice: wewnętrzna i zewnętrzna.

Jeśli $\pi L/2$ weźmiemy przed całkę, a $\delta = (d_2 - d_1)/2$, to otrzymamy

$$F_{sr} = \pi L \frac{d_2 - d_1}{\ln \frac{d_2}{d_1}} = \pi L d_{sr}, \quad (3.66)$$

przy czym d_{sr} – średnica zastępcza.

Z równania (3.66) możemy napisać

$$d_{sr} = \frac{d_2 - d_1}{\ln \frac{d_2}{d_1}} = \frac{F_2 - F_1}{\ln \frac{F_2}{F_1}}, \quad (3.67)$$

gdzie F_1, F_2 są to powierzchnie: wewnętrzna i zewnętrzna ściany rurowej, d_{sr} jest to średnica, według której należy rozwinąć ścianę rurową, by przy nie zmienionym strumieniu ciepła otrzymać ścianę płaską, oczywiście przy nie zmienionych temperaturach ϑ_1 i ϑ_2 powierzchni skrajnych i współczynnika λ .

Wzór określający strumień ciepła przewodzony przez płaską powierzchnię zastępczą $F_{sr} = \pi d_{sr} L$ ściany rurowej ma postać

$$\dot{Q} = \pi d_{sr} L \frac{\lambda}{\delta} (\vartheta_1 - \vartheta_2). \quad (3.68)$$

Jeżeli rozwinięcia przegrody rurowej dokonamy nie po średniej średnicy d_{sr} logarytmicznej (wzór 3.67), lecz po średniej arytmetycznej d_{ar} średnicy, przy czym

$$d_{ar} = \frac{d_1 + d_2}{2}, \quad (3.69)$$

to do obliczania strumienia ciepła należy zastosować współczynnik ψ korygujący

$$\dot{Q} = \pi d_{ar} \frac{L}{\psi} \frac{\lambda}{\delta} (\vartheta_1 - \vartheta_2). \quad (3.70)$$

Po porównaniu (3.68) z (3.70) współczynnik dla powierzchni rurowej^{*)} można wyrazić jako funkcję d_2/d_1

$$\psi = \frac{1}{2} \frac{\frac{d_2}{d_1} + 1}{\frac{d_2}{d_1} - 1} \ln \frac{d_2}{d_1}. \quad (3.71)$$

Korygujący współczynnik ψ jest przedstawiony wykreślnie na rys. 3.13. Jak wynika z wykresu, gdy $d_2/d_1 < 2$, wówczas ψ nie przekracza 1,04. Znaczy to, że gdy $d_2/d_1 < 2$, nie popełnimy błędu większego niż 4%, jeśli zamiast średniej logarytmicznej średnicy użyjemy średniej arytmetycznej.

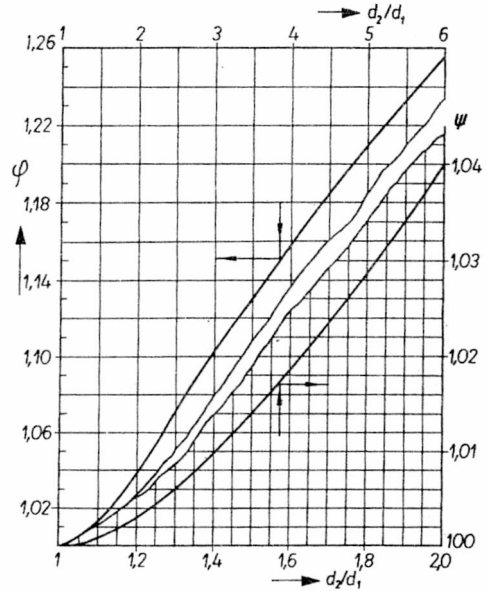
Wielowarstwową ścianę rurową możemy traktować jako n ścian jednowarstwowych. Pisząc dla każdej z nich wzór określający strumień ciepła otrzymamy układ n równań

$$\dot{Q} = \pi L \frac{d_{ar1}}{\psi_1} \frac{\lambda_1}{\delta_1} (\vartheta_1 - \vartheta') \quad (3.72)$$

$$\dot{Q} = \pi L \frac{d_{ar2}}{\psi_2} \frac{\lambda_2}{\delta_2} (\vartheta' - \vartheta'') \quad (3.73)$$

.....

$$\dot{Q} = \pi L \frac{d_{arn}}{\psi_n} \frac{\lambda_n}{\delta_n} (\vartheta''_{n-1} - \vartheta_2). \quad (3.74)$$



Rys. 3.13. Współczynnik ψ korygujący:
 d_1, d_2 — średnica wewnętrzna i zewnętrzna rury

Przekształćmy układ równań tak, by po prawej stronie były tylko różnice temperatur, dodajmy stronami, a następnie wyznaczmy strumień $\dot{Q}$. Otrzymamy

$$\dot{Q} = \pi L d_{ar} \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} \frac{\psi_1 d_{ar}}{d_{ar1}} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} \frac{\psi_2 d_{ar}}{d_{ar2}} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} \frac{\psi_n d_{ar}}{d_{arn}}}, \quad (3.75)$$

gdzie

d_{ar} — średnia arytmetyczna średnic wewnętrznej i zewnętrznej wielowarstwowej ściany jako całości,

d_{ari} — średnia arytmetyczna średnic wewnętrznej i zewnętrznej ściany składowej.

^{*)} Dla innych powierzchni zakrzywionych niż powierzchnia rurowa wzór określający współczynnik korygujący ψ ma inną postać — zależy on od kształtu ściany.

Wzór (3.75) można zapisać w skróconej postaci

$$\dot{Q} = \pi L d_{ar} \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} \frac{\psi_i d_{ar}}{d_{ar i}}}. \quad (3.76)$$

3.3.4.2. Zastępczy współczynnik λ_z przewodzenia ciepła w wielowarstwowej ścianie rurowej.

Gdy wprowadzimy λ_z , wówczas zastępczą płaską przegrodę wielowarstwową grubości $\delta = (d_2 - d_1)/2$ możemy traktować jako jednowarstwową, mającą ten sam współczynnik przewodzenia ciepła. Wzór określający strumień ciepła przyjmie postać

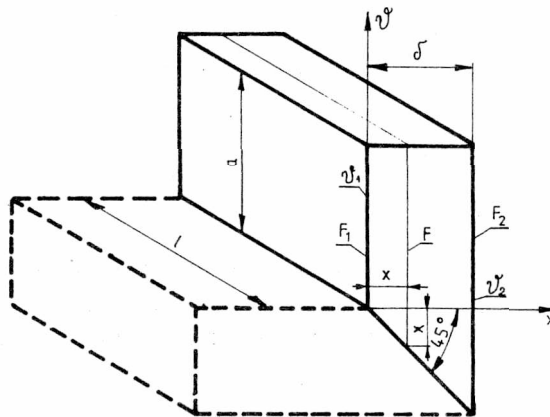
$$\dot{Q} = \pi L d_{ar} \frac{\lambda_z}{\delta} (\vartheta_1 - \vartheta_2). \quad (3.77)$$

Z porównania (3.76) i (3.77) wynika, że zastępczy współczynnik λ_z przewodzenia ciepła zastępczej ściany płaskiej dla wielowarstwowej przegrody rurowej

$$\lambda_z = \frac{\delta}{d_{ar} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} \frac{\psi_i}{d_{ar i}}}. \quad (3.78)$$

3.3.4.3. Narożnik dwuścienny

Na rysunku 3.14 przedstawiono narożnik dwuścienny, oznaczenia jego wymiarów i układ $\vartheta-x$. Temperatury powierzchni wewnętrznej F_1 i zewnętrznej F_2 są stałe i wynoszą odpowiednio ϑ_1 i ϑ_2 .



Rys. 3.14. Narożnik dwuścienny

Pole powierzchni jednej części narożnika

$$F = (a + x)l \quad (3.79)$$

Na podstawie (3.63) średnią powierzchnię zastępczą jednej części narożnika obliczamy z równania

$$F_n = \frac{\delta}{\int_0^\delta \frac{dx}{(a+x)} l} \quad (3.80)$$

Jeśli przyjmiemy nową zmienną $z = a + x$, to przy stałym l , $dz = dx$ i całkowe równanie (3.80) można sprowadzić do postaci

$$F_n = \frac{\delta}{\frac{1}{l} \int_a^{\delta+a} \frac{dz}{z}} \quad (3.81)$$

a i $\delta + a$ są granicami dla z , gdy x zmienia się od 0 do δ .

Po całkowaniu otrzymamy wzór określający średnią powierzchnię F_n zastępczą jednej strony narożnika.

$$F_n = \frac{l\delta}{\ln \frac{a+\delta}{a}} \quad (3.82)$$

Wzór określający strumień ciepła przewodzony przez jedną część dwuściennego narożnika (na rysunku 3.14 część tę zaznaczono linią ciągłą) przyjmuje postać

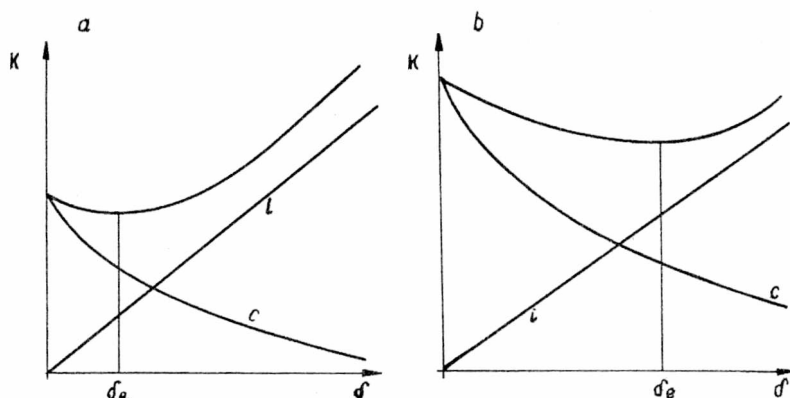
$$\dot{Q} = F_n \frac{\lambda}{\delta} (\vartheta_1 - \vartheta_2). \quad (3.83)$$

3.3.5. Grubość izolacji

Nakładanie izolacji ma na celu zmniejszenie strat ciepła. Oczywiście nie izolujemy takich elementów powierzchni, w których zmniejszenie strumienia ciepła nie daje dodatnich skutków ekonomicznych (np. rurociąg odprowadzający czynnik w celu jego chłodzenia, kierujący czynnik do atmosfery itp.), chyba że decydują inne powody.

Nakładanie izolacji zmniejsza koszt jednostkowy zapotrzebowania na ciepło, a więc koszt zużycia paliw i energii; równocześnie zwiększenie grubości izolacji

zwiększa koszty inwestycyjne. Grubość izolacji powinno się tak dobrać do danego urządzenia, by osiągnąć minimum sumarycznych kosztów ciepła i inwestycji. Można to uczynić wykreślnie (patrz rys. 3.15).



Rys. 3.15. Ekonomiczna grubość δ_e izolacji: δ – grubość izolacji, K – koszty (c – ciepła, i – izolacji);
a – małe jednostkowe koszty ciepła; b – duże jednostkowe koszty ciepła

Podczas izolowania rurociągów, zwłaszcza cienkich, mimo nakładania izolacji straty ciepła mogą wzrastać aż do pewnej – tzw. krytycznej – średnicy izolacji. Dla przegrody rurowej opór ciepła

$$R_{kr} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{\ln \frac{d_2}{d_1}}{2\lambda} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}. \quad (3.84)$$

Ze wzrostem zewnętrznej średnicy d_2 izolacji rośnie wyraz środkowy prawej strony równania, a wyraz ostatni maleje. Przy nie zmienionej różnicy temperatur strumień ciepła jest więc maksymalny, gdy występuje minimum oporu. Jeżeli przyjmiemy, że w równaniu (3.84) α_1 , d_1 , λ , α_2 są niezmiennicze, a jedyną zmienną jest d_2 (zewnętrzna średnica izolacji), to po zróżniczkowaniu R_{kr} według d_2 i przyrównaniu do zera otrzymamy:

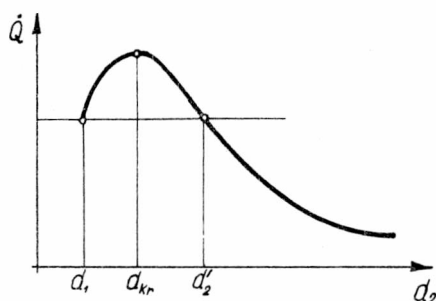
$$\frac{dR_{kr}}{d(d_2)} = \frac{1}{2\lambda} \frac{1}{d_2} - \frac{1}{\alpha_2 d_2^2} = 0, \quad (3.85)$$

z tego zaś średnica d_2 wyliczona z (3.84), dająca minimum^{*)} oporu, zwana średnicą krytyczną, wynosi

$$d_{kr} = \frac{2\lambda}{\alpha_2}. \quad (3.86)$$

^{*)} Druga pochodna podług d_2 po podstawieniu $d_2 = d_{kr}$ jest dodatnia, czyli funkcja ma minimum.

Na rysunku 3.16, jako funkcję d_2 można prześledzić przebieg strat ciepła $\dot{Q}$ dla stałego λ przy nie zmienionej różnicy temperatury izolacji po stronie wewnętrznej i zewnętrznej. Jak widać, istnieje taka grubość izolacji o średnicy d_2 , przy której straty ciepła są takie same jak wówczas, gdy nie ma izolacji. Przekroczenie tej średnicy powoduje zmniejszenie strat ciepła w odniesieniu do strat rury bez izolacji.



Rys. 3.16. Straty $\dot{Q}$ ciepła izolowanego rurociągu jako funkcja średnicy d_2 zewnętrznej izolacji

Najczęściej w sieciach cieplnych $d_2 > d_{kr}$. Wtedy nakładanie izolacji zawsze zmniejsza straty. Gdy jednak średnice są małe i słabe jest przejmowanie ciepła na zewnątrz (α_2), wówczas znajomość średnicy krytycznej jest konieczna dla właściwego rozwiązania zagadnienia. Znajomość tej średnicy jest ważna także podczas układania kabli elektrycznych, gdy chodzi nam o jak najintensywniejsze w danych warunkach chłodzenie.

Tabela 3.4. Ekonomiczne grubości izolacji w mm

Temperatura pary 0°C	100		200		350	
	Gerbel	Cammerer	Gerbel	Cammerer	Gerbel	Cammerer
Rura $\varnothing$ 25	14	20	36	30	62	25
Rura $\varnothing$ 100	37	40	70	60	105	65
Rura $\varnothing$ 400	60	55	106	80	157	90
Ściana płaska	83	65	153	100	242	120

W tabeli 3.4 podano ekonomiczne grubości izolacji według Gerbela i Cammerera dla izolacji o $\lambda = 0,0945 \text{ W/m} \cdot \text{K}$, czasie eksploatacji 8000 h/rok, kosztach inwestycyjnych 20% i przeciętnej cenie wytwarzania pary.

3.3.6. Przykłady obliczeniowe

Przykład 1. Płaska murowana ściana budynku (oznaczenia jak na rys. 3.8) jest zbudowana z cegły czerwonej dwustronnie otynkowanej. Współczynnik przewodzenia ciepła dla muru $\lambda = 0,6 \text{ W/m} \cdot \text{K}$, dla warstwy tynku $\lambda = 0,2 \text{ W/m} \cdot \text{K}$. Grubość tynku wewnętrznego $\delta_1 = 0,015 \text{ m}$, muru $\delta_2 = 0,380 \text{ m}$, tynku zewnętrznego $\delta_3 = 0,020 \text{ m}$. Obliczyć straty ciepła, jeśli powierzchnia ściany wynosi 20 m^2 , a temperatura powierzchni wewnętrznej $+18^\circ\text{C}$, zewnętrznej -20°C .

Obliczenie sumarycznego oporu cieplnego

$$R_\lambda = \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} = \frac{0,015}{0,2} + \frac{0,38}{0,6} + \frac{0,02}{0,2} = 0,81 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}.$$

Obliczenie straty ciepła

$$\dot{Q} = F \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{R_\lambda} = 20 \frac{18 - (-20)}{0,81} = 688 \text{ W}.$$

Przykład 2. Parociąg długości 50 m i średnicy $\varnothing$ 108/100 jest izolowany ziemią okrzemkową grubości warstwy 100 mm. Izolacja z ziemi okrzemkowej jest owinięta bandażem grubości 3 mm z juty wyprawionej cementem. Obliczyć straty ciepła rurociągu, jeśli temperatura wewnątrz ściany $\vartheta_1 = 120^\circ\text{C}$, a zewnętrzna temperatura izolacji $\vartheta_2 = 35^\circ\text{C}$. Współczynniki przewodzenia ciepła: dla stali $\lambda = 50 \text{ W/m}\cdot\text{K}$, dla ziemi okrzemkowej $\lambda = 0,07 \text{ W/m}\cdot\text{K}$, dla ocementowanego bandaża $\lambda = 2 \text{ W/m}\cdot\text{K}$.

Obliczenie oporu cieplnego (oznaczenia jak na rys. 3.11):

$$R_{\lambda r} = \frac{\ln \frac{d_l}{d'}}{2\lambda_1} + \frac{\ln \frac{d'}{d''}}{2\lambda_2} + \frac{\ln \frac{d''}{d^2}}{2\lambda_3},$$

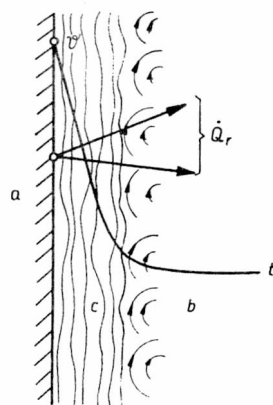
$$R_{\lambda r} = \frac{\ln \frac{108}{100}}{2 \cdot 50} + \frac{\ln \frac{308}{108}}{2 \cdot 0,07} + \frac{\ln \frac{314}{308}}{2,2} = 9,05 \text{ m}\cdot\text{K/W}.$$

Obliczenie strat ciepła:

$$\dot{Q} = \pi L \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{R_{\lambda r}} = \pi \cdot 50 \frac{120 - 35}{9,05} = 1480 \text{ W}.$$

4. Przejmowanie (wnikanie) ciepła

Przejmowanie ciepła z reguły zachodzi między ciałem stałym i stykającym się z nim płynem. Może także zachodzić między płynami, jeśli da się wyróżnić powierzchnię rozdziału płynów, np. powierzchnię rozdziału fazy ciekłej i gazowej. Przejmowanie ciepła oznacza faktycznie przekazane ciepło między omawianymi ciałami, a więc przekazane zarówno przez konwekcję, jak i promieniowanie. Zjawisko konwekcji jest skomplikowane; ważną rolę odgrywa w nim makroskopowy ruch mieszania substancji i ruch dyfuzyjny w tzw. warstewce granicznej, zwanej także warstewką przyścienną lub Prandtla (rys. 4.1). W warstewce tej nie występują wyraźne ruchy makroskopowe płynu w kierunku normalnym do powierzchni ściany. Zagadnienie to będzie omawiane w dziale konwekcji. Ciepło przekazane przez promieniowanie zależy od właściwości emisyjnych płynu i ściany. Zależy także od zakresu temperatur ściany i płynu. Dla tych samych właściwości emisyjnych w niskich temperaturach, uwzględniając konwekcję, można niekiedy pominąć wpływ promieniowania, czego nie można uczynić, gdy temperatury są wyższe. Jeśli właściwości (zdolności) emisyjne są małe, nieraz i w węższych temperaturach wpływ



Rys. 4.1. Przejmowanie (wnikanie) ciepła od ściany do płynu: a — ściana, b — płyn, c — warstwa przyścienna w płynie

promieniowania można pominąć. Jeśli wpływ promieniowania jest znaczny, np. w wysokich temperaturach, można niekiedy w zjawisku przejmowania ciepła pominąć wpływ konwekcji; przypadek taki rozpatrujemy tylko jako promieniowanie. Metody obliczenia ciepła Q_r przekazanego przez promieniowanie będą omówione w rozdz. 10. Wykluczenie wpływu konwekcji lub promieniowania należy rozpatrywać indywidualnie.

4.1. Prawo Newtona

W przejmowaniu ciepła łączny wpływ konwekcji i promieniowania wyraża się równaniem zwanym prawem Newtona

$$\dot{Q} = F\alpha(\vartheta - t), \quad (4.1)$$

w którym

- F — powierzchnia ciał stykających się, zwykle omywana płynem powierzchnia zewnętrzna ciała stałego,
- α — współczynnik przejmowania (wnikania) ciepła,
- $\vartheta - t$ — różnica temperatury powierzchni ciała stałego i temperatury płynu w pewnej odległości od ściany.

4.2. Współczynnik α przejmowania (wnikania) ciepła^{*)}

W celu zaznaczenia, że przejmowanie ciepła łączy wpływ konwekcji i promieniowania, współczynnik przejmowania ciepła rozkłada się na dwie części, z których każda odnosi się do jednego z wpływów

$$\alpha = \alpha_k + \alpha_r, \quad (4.2)$$

przy czym

- α_k — współczynnik przejmowania ciepła przez konwekcję lub krótko: współczynnik konwekcji,
- α_r — współczynnik przejmowania ciepła przez promieniowanie lub krótko: współczynnik α radiacji.

W tabeli 4.1. podano orientacyjne wartości współczynnika konwekcji. Współczynnik ten zależy tylko od parametrów płynu, nie zaś od ściany. Ściana oddziałuje na ten współczynnik tylko przez swoją chropowatość, jeśli ta chropowatość ma widoczny wpływ na średnią grubość warstewki przyściennej; grubość ta wpływa na α_k , co omówiono w rozdz. 9.

^{*)} Zgodnie z równaniem (4.1) współczynnik przejmowania ciepła równa się strumieniowi ciepła przekazanemu od płynu do 1 m² ściany, gdy różnica temperatur między płynem i ścianą wynosi 1 K. Opór cieplny podczas przejmowania będzie omówiony w rozdz. 5, gdyż jest on związany z kształtem przegrody rozgraniczającej płyny. Dla ściany płaskiej opór cieplny R przejmowania równa się odwrotności α ; ($R_\alpha = 1/\alpha$).

Tabela 4.1. Orientacyjne wartości współczynnika konwekcji α_k

Płyn	α_k , W/m ² · K
Powietrze	5–80
Ciecze lepkie	50–350
Woda nie wrząca	500–10 000
Woda wrząca	1000–20 000
Para skraplająca się	4000–40 000

Współczynnik radiacji α_r określa się bądź doświadczalnie, bądź z tablic, najczęściej jednak wyznacza się go licząc oddzielnie $\dot{Q}_r$ metodami omówionymi w rozdz. 10 za pomocą wzoru

$$\alpha_r = \frac{\dot{Q}_r}{F(\vartheta - t)}. \quad (4.3)$$

W literaturze są także znane wzory empiryczne, służące do obliczenia sumarycznego współczynnika przejmowania ciepła α (tzn. $\alpha_k + \alpha_r$):

– dla ściany płaskiej (Nusselt)

$$\alpha = 9,77 + 0,07(\vartheta_{sc} - t_o) \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}, \quad (4.4)$$

– dla rury

$$\alpha = 9,42 + 0,052(\vartheta_{sc} - t_o) \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}, \quad (4.5)^*$$

gdzie

ϑ_{sc} – temperatura ściany,

t_o – temperatura otoczenia.

4.3. Przykłady obliczeniowe

Obliczyć gęstość strumienia ciepła między płaską ścianą o temperaturze $\vartheta = 200^\circ\text{C}$ podgrzewacza powietrza a spalinami o temperaturze $t = 450^\circ\text{C}$. Współczynnik konwekcji $\alpha_k = 60 \text{ W/m}^2$, współczynnik promieniowania $\alpha_r = 20 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$.

Współczynnik przejmowania ciepła

$$\alpha = \alpha_k + \alpha_r = 60 + 20 = 80 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}.$$

Gęstość strumienia ciepła

$$\dot{q} = \alpha(t - \vartheta) = 80(450 - 200) = 200 \text{ W/m}^2.$$

*) Wzory (4.4) i (4.5) zaczerpnięto z pracy [6]. Należy je traktować jako orientacyjne, gdyż nie ujmują wielu parametrów szczegółowych, np. wysokości ściany lub średnicy rury, które mają wpływ na α . W rozdz. 9 podano wzory szczegółowe, dokładnie określające przebieg zjawiska.

5. Przenikanie ciepła — rozwiązania podstawowe

Rozpatrzono tu przenikanie ciepła w polu temperatury ustalonym bez wewnętrznych źródeł ciepła.

Przenikanie ciepła z zasady zachodzi między dwoma płytami, rozgraniczonymi przegrodą stałą^{*)}. Przypadek ten jest złożony z przejmowania ciepła między jedną ze ścian zewnętrznych przegrody a płynem omywającym tę ścianę, oraz przejmowania ciepła między drugą ścianą przegrody omywaną drugim płynem i przewodzenia ciepła przez ścianę rozgraniczającą płyny.

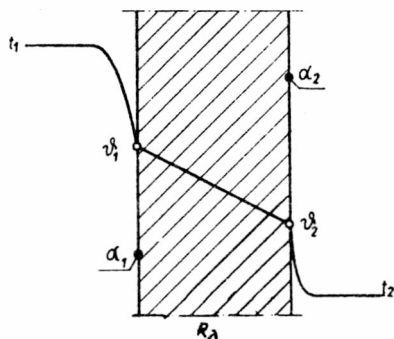
Współczynnik k przenikania ciepła zależy między innymi od współczynników przejmowania ciepła obu płynów i rodzaju materiału przegrody. Budowa wzoru określającego współczynnik k , zwany współczynnikiem Pécleta, zależy od kształtu ściany rozgraniczającej płyny, co omówiono dalej.

5.1. Przenikanie ciepła przez przegrodę płaską

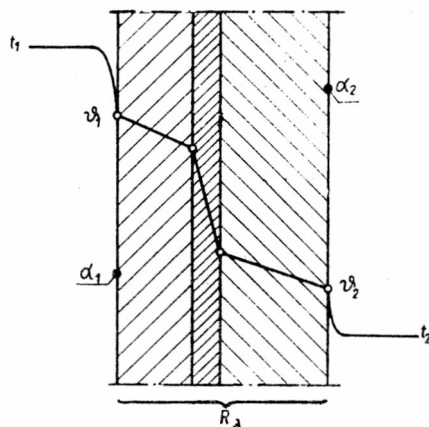
Rozkład temperatury w czasie ustalonego przenikania ciepła przez jedno- i wielowarstwową przegrodę płaską przedstawiono na rys. 5.1 i 5.2. W prowadzonych tu rozważaniach jest obojętne, z którą z tych przegród będziemy mieli do czynienia. Z poprzednich rozdziałów wiemy, że wielowarstwową przegrodę płaską możemy zastąpić przegrodą jednowarstwową o zastępczym sumarycznym oporze R_λ . Strumień ciepła nie ulegnie zmianie, jeśli ϑ_1 i ϑ_2 pozostaną bez zmian (rys. 5.1 i 5.2).

Przypadek przenikania ciepła możemy rozpatrywać jako złożony z oddzielnie występujących zjawisk: przejmowanie ciepła od płynu 1 o temperaturze t_1 do ściany o temperaturze ϑ_1 , przewodzenia ciepła przez ścianę płaską o temperaturach skraj-

^{*)} Jeżeli dwa różne płyny przekazują ciepło przez bezpośredni styk, a istnieje wyraźna powierzchnia rozdziału tych płynów, np. powierzchnia cieczy i znajdującej się nad nią gaz, przypadek taki można rozpatrywać jako przenikanie ciepła przy zerowym oporze cieplnym płaskiej przegrody stałej.



Rys. 5.1. Przenikanie ciepła przez jednowarstwową przegrodę płaską – rozkład temperatury



Rys. 5.2. Przenikanie ciepła przez wielowarstwową przegrodę płaską – rozkład temperatury

nych powierzchni ϑ_1 i ϑ_2 oraz przejmowania ciepła od ściany o temperaturze ϑ_2 do płynu 2 o temperaturze t_2 . Na podstawie już poznanych wzorów możemy więc napisać układ równań

$$\dot{Q} = F\alpha_1(t_1 - \vartheta_1), \quad (5.1)$$

$$\dot{Q} = F \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{R_\lambda}, \quad (5.2)$$

$$\dot{Q} = F\alpha_2(\vartheta_2 - t_2), \quad (5.3)$$

Jeżeli przedstawiony układ równań przekształcimy w ten sposób, że po prawych stronach będą tylko różnice temperatury, a następnie dodamy stronami, to otrzymamy:

$$\frac{\dot{Q}}{F} \left(\frac{1}{\alpha_1} + R_\lambda + \frac{1}{\alpha_2} \right) = t_1 - t_2. \quad (5.4)$$

W nawiasie otrzymaliśmy sumę trzech wyrażeń, z których jedno R_λ jest oporem cieplnym przewodzenia przez ścianę. Analogicznie pozostałe wyrażenia nazywamy oporami cieplnymi R_α przejmowania ciepła po stronie płynu jednego i drugiego.

$$R_{\alpha 1} = \frac{1}{\alpha_1}, \quad (5.5)$$

$$R_{\alpha 2} = \frac{1}{\alpha_2}. \quad (5.6)$$

Przy tak pojętych oporach przejmowania ciepła dla ściany płaskiej wyrażenie w nawiasie jest oporem sumarycznym, zwanym oporem cieplnym przenikania ciepła przez przegrodę płaską i oznaczonym R_k

$$R_k = R_{\alpha 1} + R_\lambda + R_{\alpha 2}. \quad (5.7)$$

Po wyliczeniu z równania (5.4) strumienia ciepła i wykorzystaniu zależności (5.7) można zapisać wzór określający strumień ciepła przenikający przez przegrodę płaską:

$$\dot{Q} = F \frac{t_1 - t_2}{R_k}. \quad (5.8)$$

Równanie to nazywa się równaniem Pécleta dla ściany płaskiej.

Można je także zapisać w postaci:

$$\dot{Q} = Fk(t_1 - t_2), \quad (5.9)$$

gdzie k jest współczynnikiem przenikania*) ciepła dla ściany płaskiej, zwany współczynnikiem Pécleta.

Oczywiście obowiązuje zależność

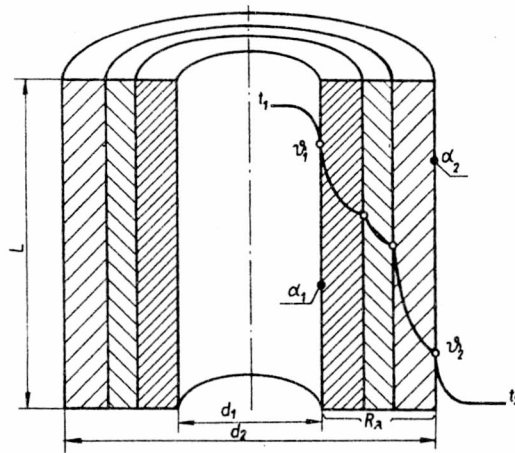
$$k = \frac{1}{R_k} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (5.10)$$

5.2. Przenikanie ciepła przez przegrodę rurową

Rozważania tu przeprowadzone odnoszą się do przegrody rurowej zarówno wielowarstwowej, jak jednowarstwowej, o oporze ściany $R_{\lambda r}$. Wewnątrz rury przepływa płyn o temperaturze t_1 i współczynniku przejmowania ciepła α_1 . Na zewnątrz rura jest omywana płynem o temperaturze t_2 i współczynniku α_2 . Rozkład temperatury w czasie przenikania ciepła przez przegrodę rurową przedstawiono na rys. 5.3.

Temperatura wewnętrznej i zewnętrznej ściany rury wynosi odpowiednio ϑ_1 i ϑ_2 . Przenikanie ciepła przez rozważaną przegrodę możemy rozpatrywać jako przypadek złożony z traktowanych oddzielnie; przejmowania ciepła, przewodzenia i znów przejmowania. Przedstawiając przekazywanie ciepła w ten sposób możemy ułożyć odpowiednio układ trzech równań:

*) Zgodnie z równaniem (5.9) współczynnik k przenikania ciepła dla przegrody płaskiej można interpretować jako równy strumieniowi ciepła przekazanemu przez 1 m² ściany od jednego do drugiego płynu, gdy różnica temperatur między nimi wynosi 1 K.



Rys. 5.3. Przenikanie ciepła przez wielowarstwową przegrodę rurową – rozkład temperatury

$$\dot{Q} = \pi d_w L \alpha_1 (t_1 - \vartheta_1), \quad (5.11)$$

$$\dot{Q} = \pi L \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{R_{sr}}, \quad (5.12)$$

$$\dot{Q} = \pi d_z L \alpha_2 (\vartheta_2 - t_2). \quad (5.13)$$

Podobnie jak poprzednio, po przekształceniu układu równań w ten sposób, aby po prawej stronie były tylko różnice temperatur, dodaniu stronami i wzięciu z lewych stron wyrażenia $\dot{Q}/\pi L$ przed nawias, otrzymamy:

$$\frac{\dot{Q}}{\pi L} \left(\frac{1}{\alpha_1 d_w} + R_{sr} + \frac{1}{\alpha_2 d_z} \right) = t_1 - t_2. \quad (5.14)$$

W nawiasie otrzymaliśmy sumę trzech wyrazów, z których R_{sr} znamy jako opór przewodzenia ciepła przez ścianę rurową. Pozostałe dwa wyrazy, wynikające z zastosowanych do przegrody rurowej równań Newtona, nazywamy przez analogię oporami cieplnymi przejmowania ciepła dla przegrody rurowej

$$\frac{1}{\alpha_1 d_w} = R_{sr1} \quad (5.15)$$

$$\frac{1}{\alpha_2 d_z} = R_{sr2} \quad (5.16)$$

Jeśli sumę tych trzech oporów nazwiemy oporem R_{kr} przenikania ciepła przez przegrodę rurową

$$R_{kr} = R_{sr1} + R_{sr} + R_{sr2}, \quad (5.17)$$

to z zależności (5.14) otrzymamy równanie określające strumień ciepła przenikający przez przegrodę rurową, zwane równaniem Pécleta dla tej przegrody

$$\dot{Q} = \pi L \frac{t_1 - t_2}{R_{kr}}. \quad (5.18)$$

Gdy wprowadzimy pojęcie współczynnika przenikania ciepła dla przegrody rurowej k_r , będącego odwrotnością oporu przenikania, możemy zapisać równanie Pécleta w postaci

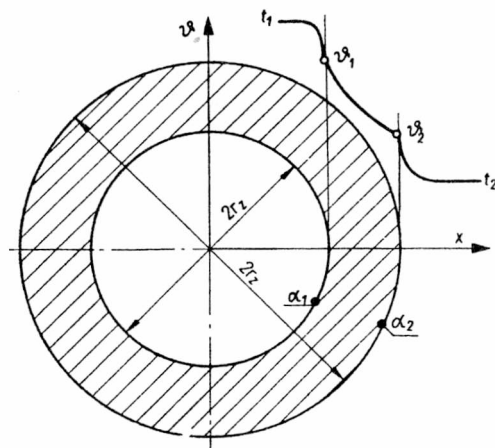
$$\dot{Q} = \pi L k_r (t_1 - t_2). \quad (5.19)$$

Rozpisany wzór określający współczynnik k_r przenikania ciepła, zwany także współczynnikiem Pécleta dla przegrody rurowej, można napisać następująco:

$$k_r = \frac{1}{R_{kr}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_w} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\ln \frac{d_{i+1}}{d_i}}{2\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_z}}. \quad (5.20)$$

5.3. Przenikanie ciepła przez przegrodę kulistą

Wewnątrz przegrody kulistej (rys. 5.4) znajduje się płyn o temperaturze t_1 i współczynniku przejmowania ciepła α_1 . Przegroda od zewnątrz jest omywana płynem o temperaturze t_2 i współczynniku przejmowania ciepła α_2 . Opór cieplny ściany kulistej wynosi $R_{\lambda o}$. Dla przejmowania ciepła wewnątrz przegrody, przewodzenia przez ścianę i przejmowania ciepła na powierzchni zewnętrznej przegrody



Rys. 5.4. Przenikanie ciepła przez przegrodę kulistą — rozkład temperatury

kulistej możemy napisać równania

$$\dot{Q} = 4\pi r_w^2 \alpha_1 (t_1 - \vartheta_1), \quad (5.21)$$

$$\dot{Q} = \pi \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{R_{\lambda o}}, \quad (5.22)$$

$$\dot{Q} = 4\pi r_z^2 \alpha_2 (\vartheta_2 - t_2). \quad (5.23)$$

Po przekształceniu względem różnic temperatur, dodaniu stronami, wzięciu przed nawias $\dot{Q}/\pi$ otrzymujemy następujący wynik:

$$\frac{\dot{Q}}{\pi} \left(\frac{1}{4r_w^2 \alpha_1} + R_{\lambda o} + \frac{1}{4r_z^2 \alpha_2} \right) = t_1 - t_2. \quad (5.24)$$

W nawiasie tego równania oporami $R_{\alpha o}$ cieplnymi przejmowania ciepła dla przegrody kulistej są:

$$\frac{1}{4r_w^2 \alpha_1} = R_{\alpha o1}, \quad (5.25)$$

$$\frac{1}{4r_z^2 \alpha_2} = R_{\alpha o2}, \quad (5.26)$$

a opór przenikania ciepła R_{ko} przez przegrodę kulistą jest sumą wszystkich oporów

$$R_{ko} = R_{\alpha o1} + R_{\lambda o} + R_{\alpha o2}. \quad (5.27)$$

Równanie Pécleta, wzór przenikania ciepła dla przegrody kulistej przyjmie więc postać

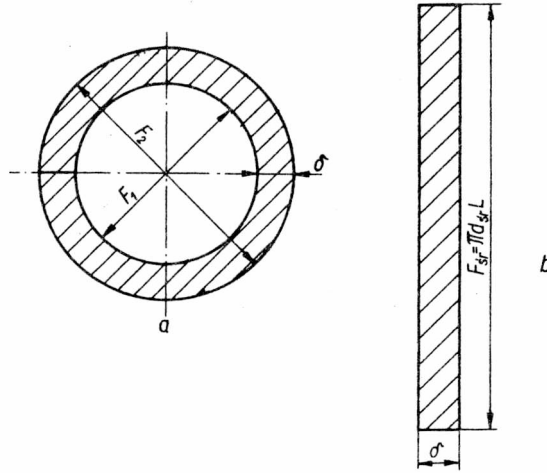
$$\dot{Q} = \pi \frac{t_1 - t_2}{R_{ko}}, \quad (5.28)$$

z czego po wprowadzeniu współczynnika k_o Pécleta dla przegrody kulistej otrzymuje się

$$k_o = \frac{1}{R_{ko}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4r_w^2 \alpha_1} + \frac{r_w}{4\lambda} + \frac{1}{4r_z^2 \alpha_2}}}. \quad (5.30)$$

5.4. Przenikanie ciepła przez powierzchnię zastępczą

W punkcie 5.3.4 wprowadzono pojęcie powierzchni zastępczej płaskiej F_{sr} dla powierzchni zakrzywionych, spełniających podane tam warunki. Przykładowo omówiono ścianę rurową i narożnik. Rozwinięcie ściany zakrzywionej, np. rurowej do płaskiej powoduje, że powierzchnia wklęsła na skutek rozwinięcia zwiększa się od F_1 do F_{sr} , a powierzchnia zewnętrzna (wypukła) zmniejsza się od F_2 także do F_{sr} (patrz rys. 5.5).



Rys. 5.5. Rozwijanie przegrody rurowej: a – przed rozwinięciem, b – po rozwinięciu

Jeśli rozpatrzmy oddzielnie przejmowanie ciepła w przegrodzie zakrzywionej i przewodzenie (traktując przewodzenie jak w przegrodzie zastępczej), otrzymamy następujący układ równań, określający przenikający strumień ciepła $\dot{Q}$.

$$\dot{Q} = F_1 \alpha_1 (t_1 - \vartheta_1), \quad (5.31)$$

$$\dot{Q} = F_{sr} \frac{\lambda}{\delta} (\vartheta_1 - \vartheta_2), \quad (5.32)$$

$$\dot{Q} = F_2 \alpha_2 (\vartheta_2 - t_2). \quad (5.33)$$

Gdy układ równań przekształcimy tak, aby po prawej stronie były tylko różnice temperatur i weźmiemy z lewych stron $\dot{Q}/F_{sr}$ przed nawias, otrzymamy:

$$\frac{\dot{Q}}{F_{sr}} \left(\frac{F_{sr}}{F_1} \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{F_{sr}}{F_2} \frac{1}{\alpha_2} \right) = t_1 - t_2, \quad (5.34)^*)$$

*) Dla ściany rurowej $F_{sr}/F_1 = d_{sr}/d_1$.

$\delta/\lambda = R_{\lambda z}$ jest zastępczym oporem przewodzenia przegrody zakrzywionej, traktowanej jako przegroda płaska. Przez analogię pozostałe wyrazy sumy w nawiasie nazywamy zastępczymi oporami przejmowania ciepła po stronie płynu 1 i płynu 2

$$R_{\alpha z 1} = \frac{F_{sr}}{F_1} \frac{1}{\alpha_1}, \quad (5.35)$$

$$R_{\alpha z 2} = \frac{F_{sr}}{F_2} \frac{1}{\alpha_2}. \quad (5.36)$$

Odwrotności tak pojętych oporów przejmowania ciepła nazywa się nieraz zredukowanymi współczynnikami przejmowania ciepła α_z dla powierzchni zastępczej

$$\alpha_{z1} = \frac{1}{R_{\alpha z 1}} = \alpha_1 \frac{F_1}{F_{sr}}, \quad (5.37)$$

$$\alpha_{z2} = \frac{1}{R_{\alpha z 2}} = \alpha_2 \frac{F_2}{F_{sr}}. \quad (5.38)$$

Jeśli do sumy wyrażeń w nawiasie równania (5.34) zastosujemy pojęcie oporów zastępczych, to otrzymamy tzw. zastępczy opór przenikania R_{kz} ciepła przez zastępczą ścianę płaską

$$R_{kz} = R_{\alpha z 1} + R_{\lambda z} + R_{\alpha z 2}. \quad (5.39)$$

Z równania tego otrzymamy wzór określający strumień ciepła, przenikający przez zastępczą przegrodę płaską

$$\dot{Q} = F_{sr} \frac{t_1 - t_2}{R_{kz}}, \quad (5.40)$$

przy czym odwrotność oporu przenikania ciepła jest współczynnikiem Pécleta dla powierzchni zastępczej

$$k_z = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{z1}} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{z2}}}. \quad (5.41)$$

Równanie Pécleta dla powierzchni zastępczej przyjmie znaną już postać

$$\dot{Q} = F_{sr} k_z (t_1 - t_2). \quad (5.42)$$

W odniesieniu do zakrzywionej przegrody wielowarstwowej, w której sumaryczna grubość warstw wynosi δ , F_{sr} jest natomiast średnią arytmetyczną powierzchni

F_1 i F_2 , wzór (5.41) jest słuszny, jeśli zamiast λ wstawimy λ_z , obliczone z równania (3.78). Po rozpisaniu wzór określający strumień ciepła w wielowarstwowej przegrodzie zastępczej ma następującą postać:

$$\dot{Q} = F_{srar} \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_{1z}} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i \psi_i F_{ar}}{\lambda_i F_{sri}} + \frac{1}{\alpha_{2z}}}. \quad (5.43)^*)$$

gdzie ψ współczynnik korygujący poszczególnych warstw (patrz wzór (3.70) lub rys. 3.13).

5.5. Obliczanie temperatury w wybranym miejscu przegrody

Przytoczone wzory do obliczania strumienia ciepła w ustalonym polu temperatury bez wewnętrznych źródeł ciepła mają budowę ogólną:

$$\dot{Q} = A \frac{\Delta T}{R}, \quad (5.44)$$

gdzie

ΔT — różnica temperatur,

R — opór cieplny,

A — współczynnik stały, zależny od kształtu przegrody**).

Jeżeli $\Delta T = t_1 - t_2$ jest całkowitą różnicą temperatur, to R jest całkowitym sumarycznym oporem przenikania ciepła. Jeśli ΔT rozbijemy na częściowe różnice ΔT_i , to opór cieplny R_i jest przynależnym do danej różnicy ΔT_i oporem częściowym. Dla danej przegrody możemy więc napisać:

$$\frac{\Delta T}{R} = A \frac{\Delta T_i}{R_i} \quad (5.45)$$

z tego zaś częściowy spadek temperatury ΔT_i można wyliczyć jako:

$$\Delta T_i = R_i \frac{\Delta T}{R}. \quad (5.46)$$

Częściowy spadek temperatury ΔT_i na częściowym oporze R_i równa się iloczynowi tego oporu przez stosunek całkowitego spadku temperatury ΔT do oporu całkowitego R .

*) W tym przypadku $\alpha_{z1} = \alpha_1(F_1/F_{srar})$; $\alpha_{z2} = \alpha_2(F_2/F_{srar})$; $F_{srar} = (F_1 + F_2)/2$; $F_{sr} = (F_1 - F_2)/\ln(F_2/F_1)$.

**) Dla przegrody płaskiej $A = F$; dla rurowej $A = \pi L$; dla kulistej $A = \pi$; dla zastępczej $A = F_{sr}$ lub $A = F_{srar}$, dla żebrowanej $A = F_z$ (podane dalej w niniejszym podręczniku).

Równanie (5.46) służy do obliczenia szukanej temperatury ϑ_x w dowolnym miejscu przegrody, np. odległym o x od powierzchni F_1 (patrz rys. 5.6).

Zgodnie z rysunkiem 5.6 i równaniem (5.46)

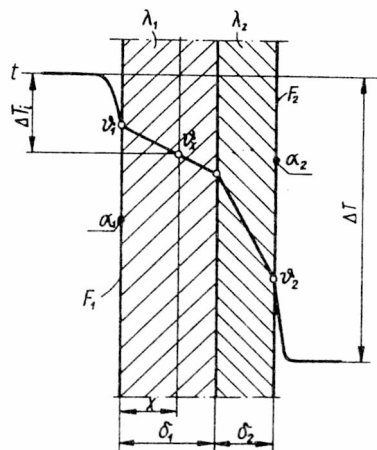
$$\Delta T = t_1 - \vartheta_x = (R_{x1} + R_{\lambda x}) \frac{t_1 - t_2}{R_k}, \quad (5.47)$$

przy czym $R_{\lambda x}$ jest cieplnym oporem wycinka ściany grubości x .

Z równania (5.47) wyliczamy temperaturę

$$\vartheta_x = t_1 - (R_{x1} + R_{\lambda x}) \frac{t_1 - t_2}{R_k}. \quad (5.48)$$

Do obliczania szukanej temperatury ϑ_x można użyć innego sposobu, analogicznego do stosowanego w elektrotechnice podczas obliczania spadku napięcia na oporze elektrycznym. Na podstawie równania (5.44) można napisać:



Rys. 5.6. Wyznaczenie temperatury

$$\dot{Q} = A \frac{\Delta T_i}{R_i}, \quad (5.49)$$

z tego zaś

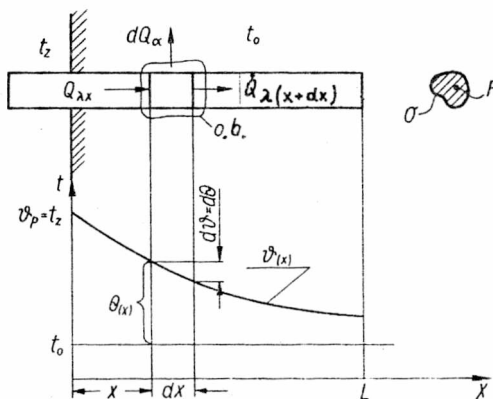
$$\Delta T_i = \frac{\dot{Q}}{A} R_i = \dot{q}_j R_i. \quad (5.50)^*)$$

Częściowy spadek temperatury ΔT_i na oporze cieplnym R_i równa się iloczynowi jednostkowego strumienia ciepła $\dot{q}_j$ i tego oporu.

5.6. Przenikanie ciepła przez pręty proste

Pręt, którego powierzchnia przekroju poprzecznego F i obwód tego przekroju „o” nie zależą od długości, nazywamy prętem prostym. Rozpatrujemy przypadek przenikania ciepła od źródła o temperaturze t do płynu (otoczenia) o temperaturze t_o tylko za pośrednictwem pręta. Z tego powodu na rys. 5.7 zaznaczono ścianę, w której pręt jest zamocowany, jako ścianę izolowaną, rozgraniczającą oba płyny. Rozpatruje się pręty, dla których w rozwiązaniach praktycznych temperatura ϑ całego przekroju F jest jednakowa, lub gdy można ją za taką uważać.

*) $\dot{Q}$ należy obliczyć ze wzoru określającego przenikanie ciepła w danej przegrodzie.



Rys. 5.7. Przenikanie ciepła przez pręt prosty – rozkład temperatury

Rozpatrujemy przypadek stacjonarny, w którym temperatura zależy tylko od zmiennej x . Położenie układu odniesienia zaznaczono na rysunku 5.7. Przyjmuje się, że współczynnik przejmowania ciepła na całej długości pręta jest stały. Przyjmuje się także, że na skutek intensywnego przekazywania ciepła od źródła o temperaturze t , np. przez dobry metaliczny kontakt, temperatura ϑ_p pręta w miejscu jego zanurzenia w źródle ma temperaturę źródła t w praktyce niewiele od niej odbiegającą.

Pierwszym etapem rozważań jest wyznaczenie temperatury pręta jako funkcji x , a następnie obliczenie ciepła przekazanego od źródła do otoczenia przez pręt.

5.6.1. Obliczanie temperatury pręta

Ponieważ w ustalonym polu temperaturowym przyrost energii układu wyodrębnionego na rys. 5.7 osłoną bilansową jest równy zeru, więc z równań bilansu energii wynika związek

$$\dot{Q}_{\lambda x} = \dot{Q}_{\lambda(x+dx)} + d\dot{Q}_{\alpha}, \quad (5.51)$$

w którym

$\dot{Q}_{\lambda x}$ – strumień ciepła przewodzony wzdłuż osi pręta do wycinka pręta długości dx ,

$\dot{Q}_{\lambda(x+dx)}$ – strumień ciepła opuszczający wycinek wzdłuż osi pręta,

$d\dot{Q}_{\alpha}$ – strumień ciepła przejęty do otoczenia od zewnętrznej powierzchni wycinka.

Ponieważ $\dot{Q}_{\lambda(x+dx)} - \dot{Q}_{\lambda x} = d\dot{Q}_{\lambda}$, więc równanie (5.51) po obustronnym podzieleniu przez dx można zapisać w postaci

$$\frac{d\dot{Q}_{\lambda}}{dx} + \frac{d\dot{Q}_{\alpha}}{dx} = 0. \quad (5.52)$$

Zgodnie z równaniem (3.5) przewodzony strumień ciepła

$$\dot{Q}_{\lambda} = \dot{Q} = -F_{\lambda} \frac{d\vartheta}{dx}, \quad (5.53)$$

a ponieważ F i λ nie zależą od x , wobec tego

$$\frac{d\dot{Q}_\lambda}{dx} = -F\lambda \frac{d^2\vartheta}{dx^2}. \quad (5.54)$$

Na długości wycinka pręta dx strumień ciepła $d\dot{Q}_\alpha$ przejęty do otoczenia od zewnętrznej powierzchni, zgodnie z równaniem Newtona, wynosi:

$$d\dot{Q}_\alpha = \alpha \cdot dx (\vartheta - t_o), \quad (5.55)$$

z tego zaś

$$\frac{d\dot{Q}_\alpha}{dx} = \alpha(\vartheta - t_o). \quad (5.56)$$

Przyjmujemy oznaczenie

$$\Theta = \vartheta - t_o. \quad (5.57)$$

gdzie Θ jest nową zmienną.

Przy stałym t_o , $d^2\vartheta = d^2\Theta$ równanie (5.54) przyjmie postać:

$$\frac{d\dot{Q}_\lambda}{dx} = F\lambda \frac{d^2\Theta}{dx^2}. \quad (5.58)$$

Po wstawieniu równania (5.58) i (5.56) do (5.52) i odpowiednim przekształceniu otrzymamy

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} - \frac{\alpha}{F\lambda} \Theta = 0. \quad (5.59)$$

Gdy λ i α są stałe, (5.59) jest równaniem różniczkowym liniowym drugiego rzędu o stałych współczynnikach. Rozwiązaniem ogólnym tego równania (całąką ogólną) jest

$$\Theta = Me^{Ax} + Ne^{-Ax}, \quad (5.60)$$

gdzie

$$A = \sqrt{\frac{\alpha}{F\lambda}}. \quad (5.61)$$

M i N — stałe całkowania, które należy wyznaczyć z warunków brzegowych.

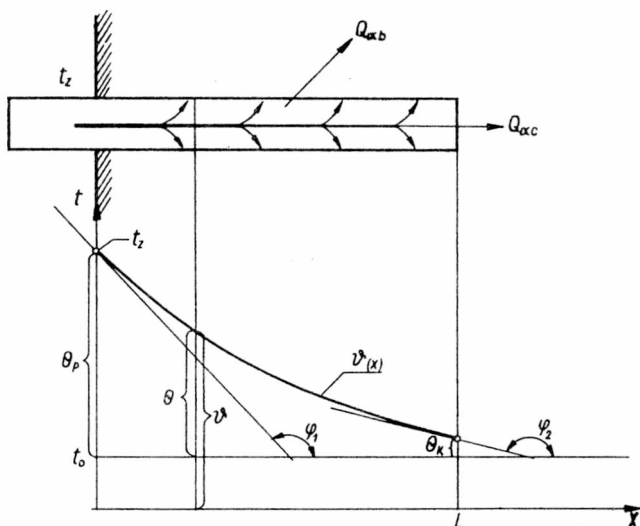
Równanie (5.60), określające zmienną Θ jako funkcję x , będziemy dalej nazywali ogólnym równaniem pręta prostego.

Ponieważ $\vartheta = \Theta - t_o$, więc równanie określające temperaturę pręta jako funkcję położenia x rozważanego przekroju przyjmie postać:

$$\vartheta = t_o + Me^{Ax} + Ne^{-Ax}. \quad (5.62)$$

5.6.2. Obliczanie strumienia ciepła

Strumień ciepła $\dot{Q}_k$, przenikający ze źródła o temperaturze t do otoczenia za pośrednictwem pręta, można określić licząc strumień ciepła $\dot{Q}_\lambda$ przewodzony przez przekrój poprzeczny pręta u jego nasady (tj.: dla $x = 0$) lub strumień $\dot{Q}_\alpha$ ciepła przejmowany od całej zewnętrznej powierzchni pręta do otoczenia. Strumień $\dot{Q}_\alpha$ składa się z części $\dot{Q}_{\alpha b}$ przejętej od pobocznicy pręta, i części $\dot{Q}_{\alpha c}$ przejętej od powierzchni czołowej pręta (dla $x = L$).



Rys. 5.8. Pręt prosty – rozptył strumienia ciepła
 $\operatorname{tg} \varphi_1 = (d\theta/dx)_{x=0}$; $\operatorname{tg} \varphi_2 = (d\theta/dx)_{x=L}$

Zgodnie z równaniem (3.57), $d\vartheta = d\theta$, po zastosowaniu wzoru (3.53), można więc napisać:

$$\dot{Q}_k = \dot{Q}_{\lambda, x=0} = -F\lambda \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=0} \quad (5.63)$$

Na podstawie równania (5.60) możemy napisać

$$\left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=0} = A(M-N), \quad (5.64)$$

z tego zaś otrzymujemy wzór określający strumień ciepła, przenikający do otoczenia przez pręt ze źródła ciepła, w którym jest on zanurzony

$$\dot{Q}_k = -F\lambda A(M-N). \quad (5.65)$$

Strumień ten można także obliczyć jako złożony z dwu części

$$\dot{Q}_k = \dot{Q}_{zb} + \dot{Q}_{ac}. \quad (5.66)$$

Strumień $\dot{Q}_{zb}$ przejęty od poboczniczy pręta do otoczenia przyjmuje postać

$$\dot{Q}_{zb} = \int_{x=0}^{x=L} \alpha \Theta dx. \quad (5.67)$$

Jeżeli do wzoru (5.67) zamiast Θ wstawimy równanie (5.60) i wykonamy całkowanie w granicach od $x = 0$ do $x = L$, to otrzymamy wzór określający strumień ciepła przejęty do otoczenia od poboczniczy pręta

$$\dot{Q}_{zb} = \frac{\alpha A}{A} [M(e^{AL} - 1) - N(e^{-AL} - 1)]. \quad (5.68)$$

Strumień $\dot{Q}_{ac}$, przejęty od czoła pręta do otoczenia, wyznaczamy z warunku równości tego strumienia ze strumieniem ciepła przewodzonym w końcu pręta (dla $x = L$)

$$\dot{Q}_{ac} = F \alpha \Theta_k = -F \lambda \left(\frac{d\Theta}{dx} \right)_{x=L}, \quad (5.69)$$

gdzie Θ_k jest to różnica temperatur końca pręta i otoczenia (patrz rys. 5.8).

Po zróżniczkowaniu równania (5.60) podług x i wstawieniu L za x , obliczymy

$$\left(\frac{d\Theta}{dx} \right)_{x=L} = A(Me^{AL} - Ne^{-AL}). \quad (5.70)$$

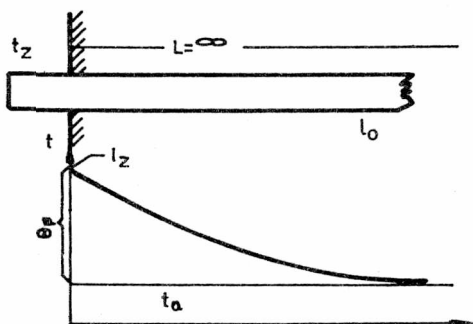
Jeśli do równania (5.69) wstawimy (5.70), to otrzymamy wzór określający strumień ciepła, przejęty od powierzchni czołowej pręta

$$\dot{Q}_{ac} = -F \lambda A (Me^{AL} - Ne^{-AL}). \quad (5.71)$$

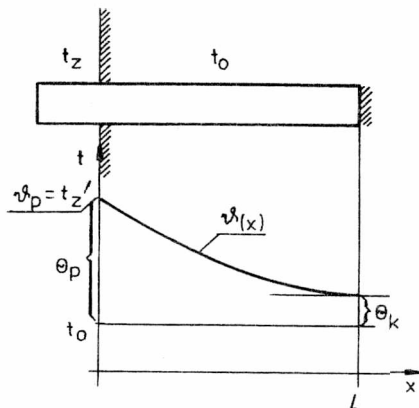
Z równań (5.68) i (5.71) możemy obliczyć części składowe strumienia ciepła przenikającego do otoczenia przez pręt prosty od źródła, w którym pręt jest zanurzony. Ponadto równaniem (5.69) możemy się posłużyć do wyznaczenia różnicy temperatury Θ_k na końcu pręta. Oczywiście, z sumy wyrażeń określających $\dot{Q}_{zb} + \dot{Q}_{ac}$, po wykonaniu odpowiednich działań powstaje wzór (5.65).

5.6.3. Pręt o nieskończonej długości

Równania tutaj wyprowadzone, choć teoretycznie odnoszą się do pręta nieskończenie długiego (rys. 5.9), można także zastosować do praktycznie spotykanych odpowiednio długich prętów prostych. Można je stosować do prętów skończonej długości, jeśli w danym zagadnieniu możemy uznać, że koniec pręta ma temperaturę



Rys. 5.9. Rozkład temperatury w pręcie nieskończenie długim



Rys. 5.10. Rozkład temperatury w pręcie na końcu zaizolowanym

równą temperaturze otoczenia (t_0 znaczy, że $\Theta_k = 0$, zgodnie z podanym dalej drugim warunkiem brzegowym).

Rozwiązanie zagadnienia pręta nieskończenie długiego polega na wyznaczeniu stałych całkowania M i N na podstawie następujących warunków brzegowych:

I. Dla $x = 0$ przyjmujemy, że $\Theta = \Theta_p = t - t_0$, gdyż zgodnie z założeniami temperatura pręta w miejscu jego zanurzenia ma wartość temperatury t źródła.

II. Dla $x = \infty$ koniec pręta ma temperaturę równą temperaturze otoczenia, czyli $\Theta = \Theta_k = 0$.

Jeśli obydwa warunki brzegowe wykorzystamy w równaniu (5.60), otrzymamy względem M i N układ równań o dwóch niewiadomych

$$\Theta_p = M + N, \quad (5.72)$$

$$0 = M \cdot x, \quad \text{gdy } x \rightarrow \infty. \quad (5.73)$$

Z równania (5.73) wynika, że $M = 0$; wobec tego z równania (5.72) otrzymujemy $N = \Theta_p$. Równanie pręta nieskończenie długiego przyjmuje postać:

$$\Theta = \Theta_p e^{-Ax}. \quad (5.74)$$

Zgodnie z równaniem (5.65) strumień ciepła przenikający za pośrednictwem pręta nieskończenie długiego ze źródła do otoczenia wyrazi się wzorem:

$$\dot{Q} = -F\lambda A\Theta_p. \quad (5.75)$$

5.6.4. Pręt o skończonej długości na końcu zaizolowany

Do wyznaczenia stałych całkowania posłużymy się następującymi warunkami brzegowymi (rys. 5.10):

I. Gdy $x = 0$, $\vartheta_p = t$, wówczas zgodnie z omówionymi poprzednio założeniami $\Theta = \vartheta_p - t_z = \Theta_p$.

II. Gdy $x = L$, wówczas $\dot{Q}_{x=L} = 0$, co wynika z warunku istnienia izolacji na końcu pręta.

Warunek brzegowy II należy przystosować do bezpośredniego wykorzystania w równaniu ogólnym pręta.

Zgodnie z równaniem (5.53), gdy $d\vartheta = d\Theta$, wówczas

$$\dot{Q}_{x=L} = -F\lambda \left(\frac{d\Theta}{dx} \right)_{x=L} = 0. \quad (5.76)$$

Ponieważ F i λ są różne od zera, więc $(d\Theta/dx)_{x=L} = 0$.

Po zróżniczkowaniu równania ogólnego pręta, wstawieniu L zamiast x , przyrównaniu do zera, otrzymamy z II warunku brzegowego dla $A \neq 0$

$$0 = Me^{AL} - Ne^{-AL}, \quad (5.77)$$

a z I warunku brzegowego

$$\Theta_p = M + N. \quad (5.78)$$

Z układu liniowych równań (5.77) i (5.78) po rozwiązaniu otrzymamy stałe M i N

$$M = \Theta_p \frac{e^{-AL}}{e^{AL} + e^{-AL}}, \quad (5.79)$$

$$N = \Theta_p \frac{e^{AL}}{e^{AL} + e^{-AL}}. \quad (5.80)$$

Równanie pręta na końcu zaizolowanego przyjmie więc postać:

$$\Theta = \Theta_p \frac{e^{-AL}}{e^{AL} + e^{-AL}} e^{Ax} + \Theta_p \frac{e^{AL}}{e^{AL} + e^{-AL}} e^{-Ax}. \quad (5.81)$$

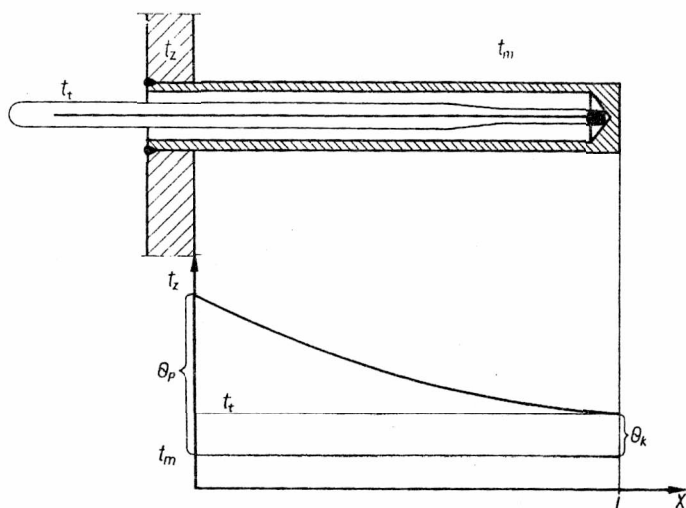
Na podstawie (5.65) wzór określający strumień ciepła przekazanego za pośrednictwem pręta na końcu zaizolowanego można sprowadzić do postaci

$$\dot{Q}_k = F\lambda\Theta_p \operatorname{tgh}(AL). \quad (5.82)^*)$$

5.6.5. Obliczanie poprawki określającej błąd termometryczny spowodowany tulejką

Równanie pręta na końcu zaizolowanego w praktyce służy najczęściej do obliczania poprawki termometrycznej, wynikającej z istnienia tulejki termometrycznej. Zwykle tulejka termometryczna nie jest zaizolowana na końcu, gdy jednak budowa tulejki (jej smukłość) uzasadnia warunek, że $\dot{Q}_{ac} \ll \dot{Q}_{ab}$, wówczas taką tulejkę możemy traktować jako zaizolowaną na końcu (rys. 5.10).

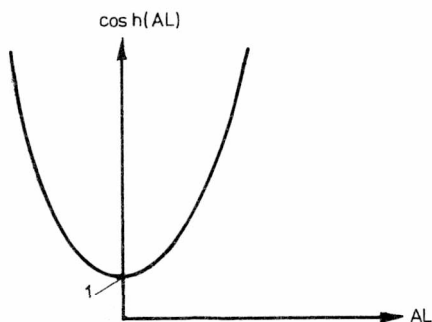
*) $\operatorname{tgh}(AL) = \frac{\sinh(AL)}{\cosh(AL)} = \frac{e^{AL} - e^{-AL}}{e^{AL} + e^{-AL}}.$



Rys. 5.11. Tulejka termometryczna; Θ_k — błąd termometryczny

Równanie określające błąd termometryczny Θ_k , wynikający z istnienia tulejki, jest słuszne wówczas, gdy tulejka wewnątrz nie przekazuje ciepła (np. gdy jest wewnątrz wypełniona materiałem izolacyjnym), w praktyce także wówczas, gdy nie ma izolacji, ponieważ włożony termometr powoduje, że ruch konwekcyjny płynu wewnątrz tulejki jest znikomy.

Jeżeli w równaniu (5.81) zamiast x wstawimy L , to obliczymy Θ_k będące różnicą między temperaturą końca tulejki ϑ_k mierzoną termometrem, a temperaturą medium t_m , którą chcemy mierzyć; Θ_k jest więc bezwzględnym błędem termometrycznym, który należy uwzględnić, jeżeli pomiar temperatury medium ma być poprawny



Rys. 5.12. Przebieg funkcji
 $\cosh(AL) = f(AL)$
 — linia łańcuchowa

$$\Theta_k = \Theta_p \frac{1}{\cosh(AL)}. \quad (5.83)^*$$

Temperatura medium, którą mierzymy termometrem zamontowanym w tulejce, zgodnie z rys. 5.11 wynosi

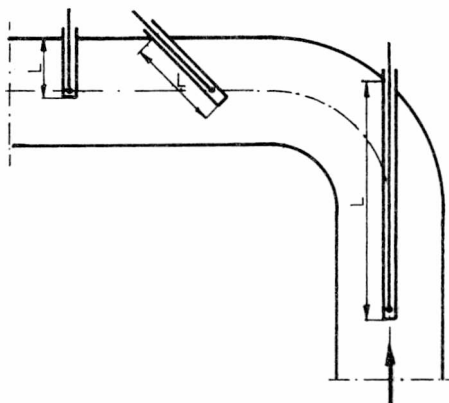
$$t_m = t_t - \Theta_k. \quad (5.84)$$

*) $\cosh(AL) = \frac{e^{AL} + e^{-AL}}{2}$; $\sinh(AL) = \frac{e^{AL} - e^{-AL}}{2}$.

Dalsze rozważania mają na celu takie przeprowadzenie pomiaru t_m , by błąd był możliwie najmniejszy. Funkcja $\cosh AL$ od AL ma przebieg jak na rys. 5.12; jest to tzw. linia łańcuchowa. Realna jest tylko prawa ćwiartka wykresu, gdy $AL > 0$, wówczas ze wzrostem AL rośnie $\cosh AL$ (rys. 5.12).

Błąd termometryczny Θ_k jest więc mały, gdy AL jest duże, gdy zatem jest długa tulejka, a przekrój poprzeczny F tulejki (wydrążonego pręta) oraz współczynnik przewodzenia ciepła materiału $\lambda^{*)}$ są małe.

Wynikające z tych rozważań sposoby montażu tulejki przedstawiono na rys. 5.13.



Rys. 5.13. Sposoby montażu tulejki termometrycznej w rurociągu

5.7. Przenikanie ciepła przez przegrody żebrowane

Niejednokrotnie, aby uzyskać zwartą konstrukcję wymiennika ciepła, stosuje się przegrody żebrowane. Stosowanie takiej przegrody przynosi nieraz oszczędności w zużyciu materiału.

Gdy jeden ze współczynników przejmowania ciepła jest znacznie mniejszy od drugiego, stosujemy powierzchnie żebrowane jednostronnie. Po stronie żebrowanej (powierzchni rozwiniętej) stosujemy płyn, którego α jest mniejsze. Obowiązuje ogólna zasada, że dajemy α mniejsze na powierzchni większej. Na powierzchnie żebrowane stosujemy materiał o dużym λ , a więc z reguły metale.

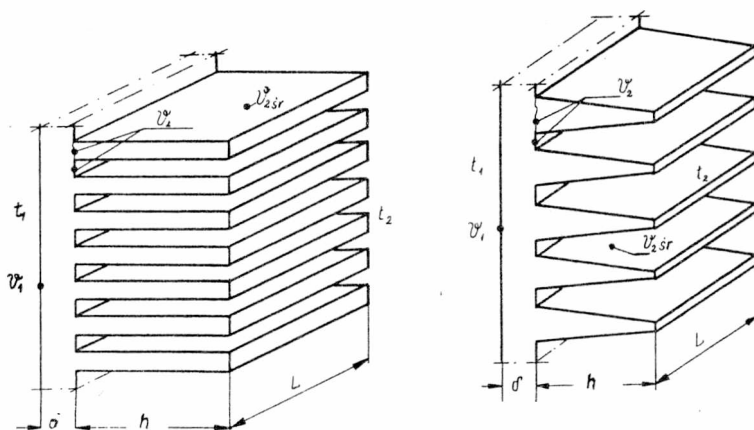
Jeżeli oba płyny przekazują ciepło przy małych α , a zależy nam na zwartej konstrukcji (tj. na małej objętości), stosujemy powierzchnie dwustronnie żebrowane.

Bliższe informacje na temat stosowania powierzchni żebrowanych podano w p. 5.7.5.

5.7.1. Jednostronne żebra proste

Żebami jednostronnymi nazywamy żebra osadzone na ścianie po jednej stronie; prostymi — takie, w których linie leżące na powierzchni tych żebier, a równoległe do powierzchni ściany, są liniami prostymi (patrz rys. 5.14).

*) Stal jest lepszym materiałem na tulejkę niż miedź. Użycie mosiądzu lub miedzi na tulejkę jest podyktowane większą antykorozyjnością tych metali od stali, nie zaś dokładnością pomiaru.



Rys. 5.14. Przegrody z jednostronnymi żebrami prostymi

F_1 jest polem powierzchni gładkiej omywanej płynem o temperaturze t_1 i współczynniku przejmowania ciepła α_1 , F_2 jest polem powierzchni żebrowanej omywanej płynem o temperaturze t_2 i współczynniku α_2 . Żebra są osadzone w ścianie płaskiej o polu powierzchni F_1 i grubości δ . Materiał przegrody ma stały współczynnik przewodzenia ciepła λ . Przyjmuje się, że temperatura w miejscu osadzenia żebra jest równa temperaturze ściany płaskiej, w której żebra są osadzone. Stałymi współczynnikami są także α_1 i α_2 .

Na podstawie znanych już równań określających przejmowanie ciepła i przewodzenie przez ścianę płaską możemy napisać następujący układ równań:

$$\dot{Q} = F_1 \alpha_1 (t_1 - \vartheta_1), \quad (5.85)$$

$$\dot{Q} = F_1 \frac{\lambda}{\delta} (\vartheta_1 - \vartheta_2), \quad (5.86)$$

$$\dot{Q} = F_2 \alpha_2 (\vartheta_{2,sr} - t_2), \quad (5.87)$$

w których $\vartheta_{2,sr}$ — średnia temperatura powierzchni F_2 omywanej płynem 2 (tj. płynem o temperaturze t_2).

Przekształcenie tego układu równań względem różnic temperatur po prawej stronie i dodanie stronami nie eliminuje pośrednich temperatur ϑ_2 , $\vartheta_{2,sr}$; aby to osiągnąć wprowadzimy współczynnik ε , zwany sprawnością powierzchni żebrowanej F_2^* , który jest odpowiednim stosunkiem różnic temperatur

$$\varepsilon = \frac{\vartheta_{2,sr} - t_2}{\vartheta_2 - t_2}. \quad (5.88)$$

Jeśli w równaniu (5.87) zamiast $\vartheta_{2,sr} - t_2$, zgodnie z równaniem (5.88), wstawimy $\varepsilon(\vartheta_2 - t_2)$, to po przekształceniu układu równań od (5.85) do (5.87) względem różnic

temperatur i dodaniu stronami oraz wzięciu $\dot{Q}/F_2$ z lewej strony przed nawias otrzymamy

$$\frac{\dot{Q}}{F_2} \left(\frac{F_2}{F_1} \frac{1}{\alpha_1} + \frac{F_2}{F_1} \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\varepsilon \alpha_2} \right) = t_1 - t_2. \quad (5.89)$$

Po przekształceniu tego równania otrzymamy wzór określający strumień $\dot{Q}$, przenikający od płynu pierwszego do drugiego poprzez przegrodę jednostronnie żebrowaną żebami prostymi

$$\dot{Q} = F_2 \frac{t_1 - t_2}{\frac{F_2}{F_1} \frac{1}{\alpha_1} + \frac{F_2}{F_1} \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\varepsilon \alpha_2}}. \quad (5.90)$$

Zgodnie z przyjętymi poprzednio prawidłami wyrażenie w mianowniku jest oporem przenikania ciepła R_{k_z} przez powierzchnię żebrowaną żebami prostymi. Jeśli wprowadzimy stosunek

$$\frac{F_2}{F_1} = \varphi \quad (5.91)$$

zwany stopniem ożebrowania, to wzór określający opór przenikania ciepła przyjmie postać

$$R_{k_z} = \frac{\varphi}{\alpha_1} + \frac{\varphi \delta}{\lambda} + \frac{1}{\varepsilon \alpha_2} = \frac{1}{k_z}. \quad (5.92)$$

Współczynnik przenikania ciepła przez przegrodę żebrowaną żebami prostymi k_z jest odwrotnością oporu R_{k_z} .

Równanie (5.90) dla tej przegrody w skróconym zapisie

$$\dot{Q} = F_2 k_z (t_1 - t_2), \quad (5.93)$$

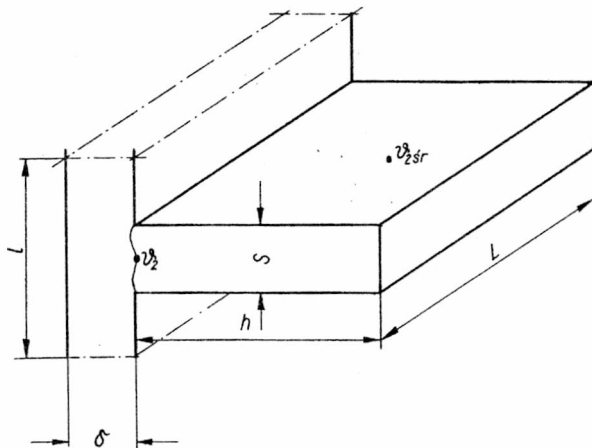
służy do obliczenia strumienia ciepła przekazanego przez powierzchnię płaską jednostronnie żebrowaną żebami prostymi.

5.7.1.1. Jednostronne żebra proste o stałym przekroju

W jednostronnym żebrze prostym o stałym przekroju przekrój poprzeczny jest niezależny od wysokości. Żebro to jest prętem prostym.

*) Jeżeli $\vartheta_{2, sr}$ jest średnią temperaturą ϑ_z powierzchni zewnętrznej samego żebra (bez wpływu elementów powierzchni ściany, w której są osadzone), to ε jest nazywane sprawnością żebra i dla odróżnienia będzie oznaczone ε_z .

Nieznajomość średniej temperatury $\vartheta_{2,śr}$ powierzchni F_2 stwarza trudność w obliczaniu strumienia ciepła. Nie można więc za jej pomocą obliczyć współczynnika ε występującego w równaniu (5.92). W dalszych rozważaniach zajmiemy się przybliżonym określaniem wielkości tego współczynnika na podstawie znanych wymiarów konstrukcyjnych. Niech wymiary te będą określone jak na rys. 5.15.



Rys. 5.15. Przestrzenny rysunek żebra prostego;
l — podziałka osadzenia żebra

Jeżeli żebra są osadzone gęsto, to wpływ na $\vartheta_{2,śr}$ niewielkich elementów nieożebrowanych powierzchni, w której żebra są osadzone, jest niewielki. Możemy przyjąć, że średnia temperatura powierzchni F_2 jest wtedy w przybliżeniu równa średniej temperaturze powierzchni zewnętrznej samego żebra. Poza tym, jeśli żebra są dostatecznie cienkie (mała wartość s) i wysokie (duża wartość h), to strumień $\dot{Q}_{zg}$ przekazany przez elementy powierzchni nieożebrowanych w porównaniu ze strumieniem $\dot{Q}_{\lambda h=0}$ przekazanym przez same żebra jest pomijalny (patrz rys. 5.16)

$$\dot{Q}_{zg} \ll \dot{Q}_{\lambda h=0} = \dot{Q}_{zb} + \dot{Q}_{zc}. \quad (5.94)$$

Ponieważ w takich warunkach także $\dot{Q}_{zc} \ll \dot{Q}_{zb}^*$, zatem żebro możemy traktować jako pręt skończonej długości h zaizolowany na końcu. Obowiązuje wtedy w przybliżeniu zależność

$$\dot{Q}_{\lambda h=0} \approx \dot{Q}_{zb}, \quad (5.95)$$

a zgodnie z równaniem (5.82), dla jednego żebra

$$\dot{Q}_{\lambda h=0} = Ls\lambda\Theta_p th(Ah). \quad (5.96)$$

*) W proponowanych dalej obliczeniach praktycznych wpływ $\dot{Q}_{zc}$ na powierzchni czołowej częściowo uwzględnia się przez powiększenie wysokości żebra o pół jego grubości ($h = h + s/2$). Jest to uzasadnione tym, że cała ta powierzchnia ma temperaturę końca żebra i przekazuje ciepło $\dot{Q}_{zc}$.

Gdy $\vartheta_{2sr} = \vartheta_{zsr}$ jest średnią temperaturą powierzchni F_z samego żebra, a $F_z = 2Lh$, wówczas dla jednego żebra z prawa Newtona możemy napisać

$$\dot{Q}_{zb} = 2Lh\alpha_2(\vartheta_{2sr} - t_2). \quad (5.97)$$

Zgodnie z (5.95), po porównaniu (5.96) i (5.97), otrzymamy

$$\frac{\vartheta_{2sr} - t_2}{\Theta_p} = \frac{s\lambda th(Ah)}{2h\alpha_2}. \quad (5.97a)$$

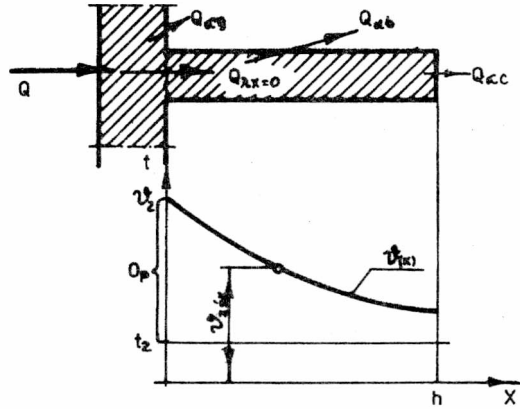
Dla żeber cienkich i dość długich, zgodnie z (5.61), współczynnik

$$A = \sqrt{\frac{0\alpha}{F\lambda}} \approx \sqrt{\frac{2L\alpha_2}{sL\lambda}} = \sqrt{\frac{2\alpha_2}{s\lambda}}. \quad (5.98)$$

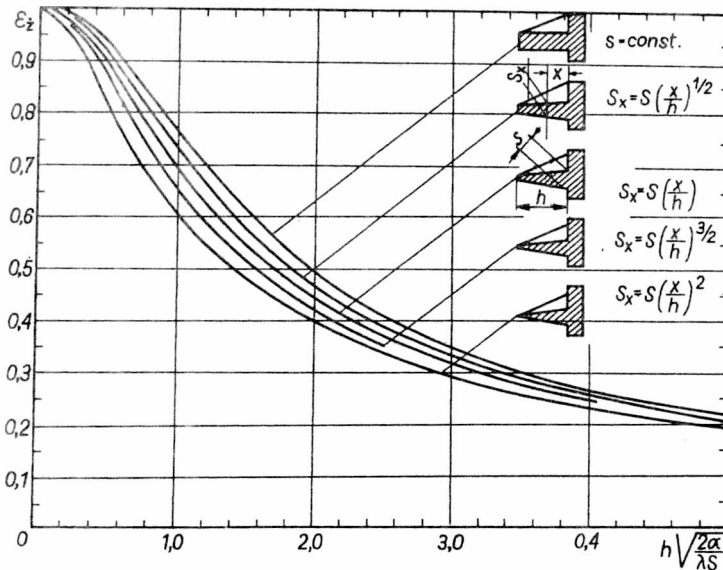
Wobec tego, że $\Theta_p = \vartheta_2 - t_2$ (patrz rys. 5.15), równanie (5.97a) przyjmie postać:

$$\varepsilon = \frac{\vartheta_{2sr} - t_2}{\vartheta_2 - t_2} \cong \frac{\tanh(Ah)}{Ah} = \varepsilon_z. \quad (5.99)$$

Iloczyn Ah zależy od współczynników α_2 i λ (patrz równanie (5.98)) oraz od s i h , a więc od wymiarów konstrukcyjnych żebra. ε_z jest podane na rys. 5.17 jako linia górna.



Rys. 5.16. Rozpływ strumieni ciepła w żebrze prostym – rozkład temperatury



Rys. 5.17. Sprawność ε_z jednostronnych żeber prostych

5.7.1.2. Jednostronne żebra proste o zmiennej grubości

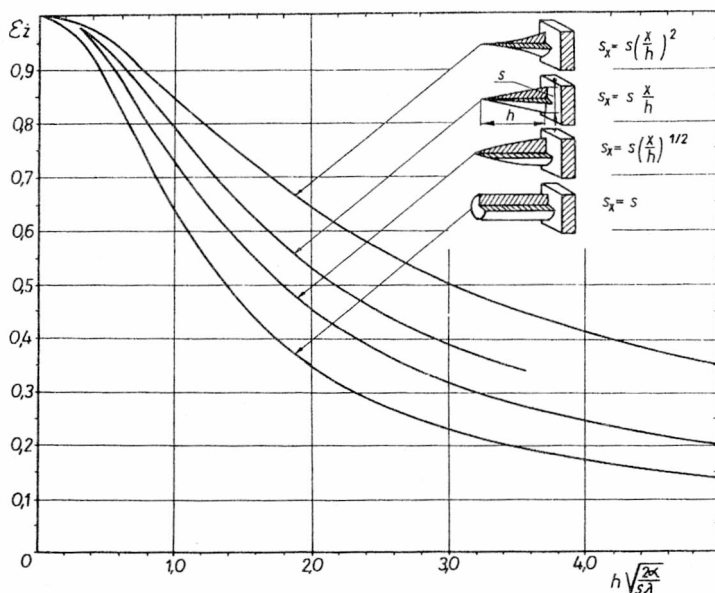
Zmiana kształtu przekroju żebra prostego powoduje, że przy tej samej temperaturze ϑ_2 w miejscu osadzenia żebra zmienia się średnia temperatura $\vartheta_{z,śr}$ jego powierzchni. Zmienia się więc także współczynnik ε_z , zwany sprawnością żebra.

Na podstawie analitycznych opracowań Gardnera, na rys. 5.17 współczynnik ten podano wykreślnie dla różnych kształtów żebra prostego.

Jeżeli powierzchnia jest ożebrowana gęsto^{*)}, to sprawność ε_z żebra równa się w przybliżeniu współczynnikowi ε występującemu w równaniu (5.92), określającemu sprawność całej powierzchni ożebrowanej. Można więc z równania (5.93) obliczyć strumień ciepła przenikający przez przegrodę żebrowaną żebrowanymi prostymi o zmiennej grubości.

5.7.2. Jednostronne żebra igłowe

Powierzchnię przejmowania ciepła po stronie płynu o małym α można zwiększać także przez konstrukcję tzw. żebrowań igłowych. W ścianie gładkiej są osadzone pręty o różnych kształtach i z różną gęstością (patrz rys. 5.18).



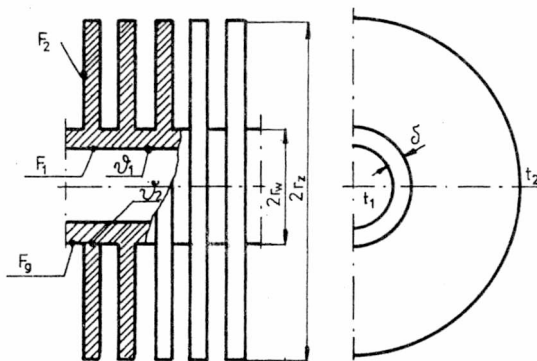
Rys. 5.18. Sprawność ε_z jednostronnych żebrowań igłowych (palcowych)

^{*)} Jeśli przegroda jest ożebrowana rzadko, to wpływ na ϑ_{sr} gładkich elementów ściany, w której żebra są osadzone, jest niepomijalny. Taki przypadek jest rozwiązany dalej podczas omawiania żebrowań dwustronnych. Znając ε_z , sprawność ε_z powierzchni F_2 należy obliczyć ze wzoru (5.127).

Tok obliczenia i wzory (5.92)–(5.93) są takie same jak dla żeber prostych, z tym że sprawność żebra igłowego, nie będącego prętem prostym, nie jest określona zależnością (5.99). Wyniki opracowań Gardnera, dotyczące ε_z dla wybranych kształtów igieł, podano na rys. 5.18. Gdy igły są osadzone rzadko, należy uwzględnić wpływ ściany gładkiej, co uczyniono w p. 5.7.4.

5.7.3. Jednostronne żebra okrągłe

Przegroda żebrowana, przykładowo przedstawiona na rys. 5.19 z żebrami o stałej grubości^{*)}, jest omywana wewnątrz na powierzchni F_1 płynem o temperaturze t_1 i współczynniku przejmowania ciepła α_1 . Powierzchnia F_2 żebrowana żebrami okrągłymi jest omywana płynem o temperaturze t_2 i współczynniku α_2 . F_2 jest



Rys. 5.19. Jednostronne żebro okrągłe o stałej grubości

zewnątrzną powierzchnią rury gładkiej, w której są osadzone żebra, δ jest grubością tej rury. Temperatura ściany w miejscu osadzenia żeber i elementów zewnętrznej powierzchni rury gładkiej, omywanej płynem zewnętrznym, jest taka sama i wynosi ϑ_2 . Możemy napisać następujący układ równań określających strumień ciepła

$$\dot{Q} = F_1 \alpha_1 (t_1 - \vartheta_1), \quad (5.100)$$

$$\dot{Q} = F_{sr} \frac{\lambda}{\delta} (\vartheta_1 - \vartheta_2), \quad (5.101)$$

$$Q = F_2 \alpha_2 (\vartheta_{2sr} - t_2), \quad (5.102)$$

gdzie

F_{sr} — płaska zastępcza powierzchnia rury gładkiej (w której są osadzone żebra) rozwinięta po średniej logarytmicznej średnicy

^{*)} Wyprowadzony dalej wzór (5.107), określający strumień ciepła, jest słuszny dla przegrody żebrowanej żebrami okrągłymi różnych kształtów. Kształt żebra okrągłego wpływa na ε_{zo} .

$$F_{sr} = \frac{F_2 - F_1}{\ln \frac{F_2}{F_1}},$$

ϑ_{2sr} — średnia temperatura powierzchni F_2 .

Gdy wprowadzimy pojęcie współczynnika

$$\varepsilon_o = \frac{\vartheta_{2sr} - t_2}{\vartheta_2 - t_2}, \quad (5.103)$$

który jest sprawnością powierzchni F_2 ożebrowanej żebrami okrągłymi, równanie (5.102) można zapisać w postaci:

$$\dot{Q} = F_2 \alpha_2 \varepsilon_o (\vartheta_2 - t_2). \quad (5.104)$$

Po przekształceniu układu (5.100), (5.101) i (5.104) tak, aby po prawej stronie pozostały tylko różnice temperatur, dodaniu stronami i wzięciu z lewej strony $\dot{Q}/F_2$ przed nawias, otrzymamy

$$\frac{\dot{Q}}{F_2} \left(\frac{F_2}{F_1} \frac{1}{\alpha_1} + \frac{F_2}{F_{sr}} \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\varepsilon_o \alpha_2} \right) = t_1 - t_2. \quad (5.105)$$

Stopnie ożebrowania oznaczmy:

$$\frac{F_2}{F_1} = \varphi \quad \text{oraz} \quad \frac{F_2}{F_{sr}} = \varphi_{sr}. \quad (5.106)$$

Na podstawie równania (5.105) wzór określający strumień ciepła, przenikający przez przegrodę żebrowaną żebrami okrągłymi, przyjmuje postać

$$\dot{Q} = F_2 \frac{t_1 - t_2}{\frac{\varphi}{\alpha_1} + \frac{\varphi_{sr} \delta}{\lambda} + \frac{1}{\varepsilon_o \alpha_2}}. \quad (5.107)$$

Współczynnik ε_o można wyrazić jako funkcję ε ze wzoru (5.99) i dodatkowego współczynnika ε' . Według Michiejewa [19] strumień ciepła $\dot{Q}_{zo}$, przekazywany przez samo żebro okrągłe, w porównaniu ze strumieniem ciepła $\dot{Q}_{zp}$, przekazany przez żebro proste tej samej wysokości, grubości i powierzchni, można wyrazić jako:

$$\varepsilon' = \frac{\dot{Q}_{zo}}{\dot{Q}_{zp}} = \frac{F_{zo} \alpha_2 (\vartheta_{2srp} - t_2)}{F_{zo} \alpha_2 (\vartheta_{2sr} - t_2)}, \quad (5.108)$$

czyli

$$\dot{Q}_{zo} = \varepsilon' F_{zo} \alpha_2 (\vartheta_{2srp} - t_2), \quad (5.109)$$

przy czym ϑ_{2srp} — średnia temperatura powierzchni, jaką miałoby żebro proste.

Na podstawie (5.99) dla żebra prostego

$$\varepsilon = \frac{\vartheta_{2srp} - t_2}{\vartheta_2 - t_2}, \quad (5.110)$$

równanie (5.109) można więc zapisać w postaci:

$$\dot{Q}_{zo} = \varepsilon' \varepsilon F_{zo} \alpha_2 (\vartheta_2 - t_2). \quad (5.111)$$

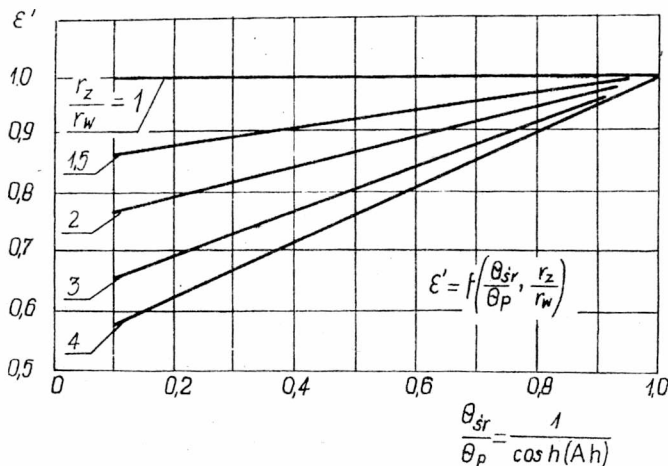
Dla żebrowania gęstego, gdy możemy przyjąć, że średnia temperatura całej powierzchni F_2 jest taka sama jak średnia temperatura powierzchni F_{zo} samego żebra,

$$\dot{Q} = F_2 \varepsilon' \varepsilon \alpha_2 (\vartheta_2 - t_2). \quad (5.112)$$

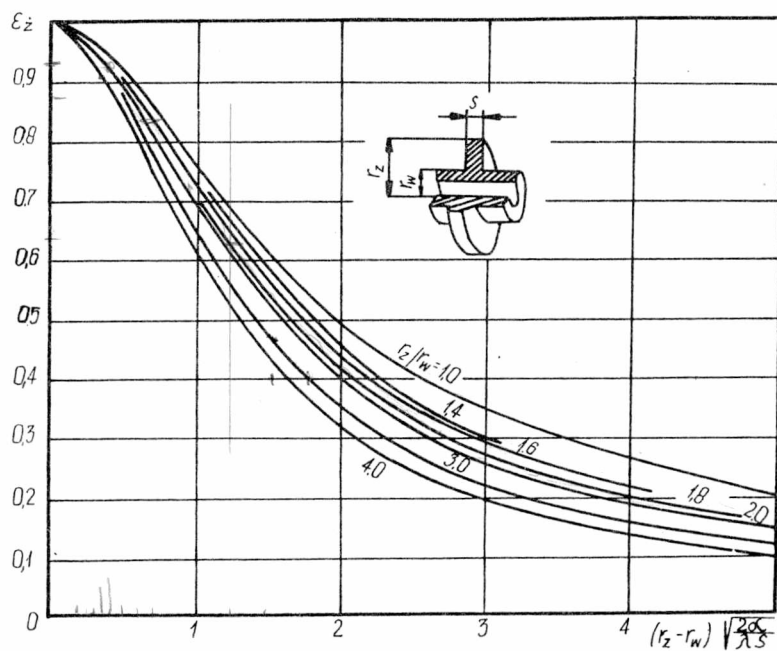
Z porównania (5.112) i (5.104) otrzymamy

$$\varepsilon_o = \varepsilon' \varepsilon, \quad (5.113)$$

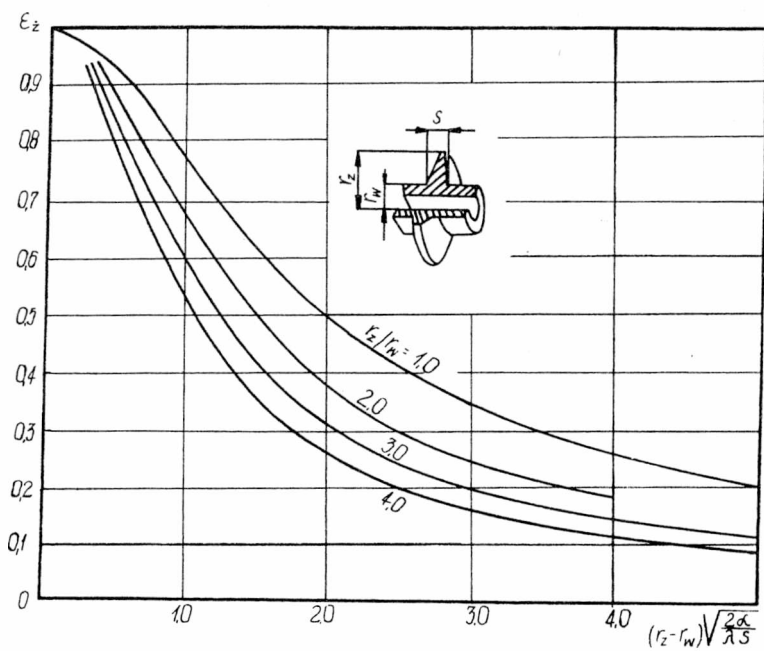
gdzie ε oblicza się ze wzoru (5.99), a poprawka ε' jest wzięta z przytoczonego przez Michiejewa wykresu podanego na rys. 5.20. Współczynnik $\varepsilon_o \approx \varepsilon_z$ można także odczytać z wykresów opracowanych przez Gardnera, podanych na rys. 5.21 i 5.22.



Rys. 5.20. Poprawka ε' określająca sprawność żeber okrągłych o stałej grubości



Rys. 5.21. Sprawność ε_z jednostronnych zębów okrągłych o stałej grubości



Rys. 5.22. Sprawność ε_z jednostronnych zębów okrągłych o zmiennej grubości

Po wykorzystaniu pojęcia oporu cieplnego przenikania przez powierzchnię żebrowaną żebami okrągłymi R_{kzo} i współczynnika Pécleta k_{zo} dla tej powierzchni, na podstawie (5.107) napiszemy:

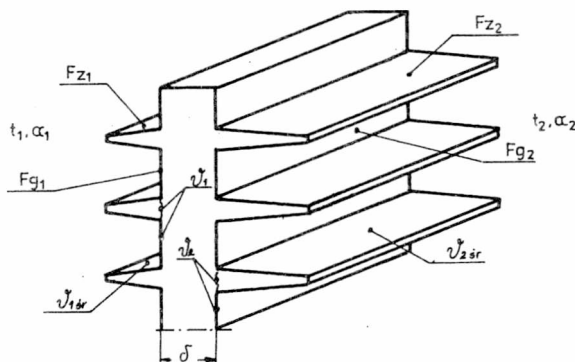
$$R_{kzo} = \frac{1}{k_{zo}} = \frac{\varphi}{\alpha_1} + \frac{\varphi_{sr}\delta}{\lambda} + \frac{1}{\varepsilon_0\alpha_2}. \quad (5.114)$$

Równanie określające strumień ciepła przenikający przez przegrodę z żebami okrągłymi ma potać:

$$\dot{Q} = F_2 k_{zo} (t_1 - t_2). \quad (5.115)$$

5.7.4. Żebra dwustronne

Na rysunku 5.23 przedstawiono dwustronnie żebrowaną przegrodę, w której żebra są osadzone w ścianie płaskiej grubości δ . Rozważania tu prowadzone są słuszne także dla żebrowanych ścian zakrzywionych (np. rurze), dla której można wyznaczyć zgodnie z p. 3.3.4 zastępczą powierzchnię płaską F_{sr} grubości δ . Oczywiście zakładamy, że zależnie od kształtu żebrowania jesteśmy w stanie określić sprawność ε_z tych żebrowań.



Rys. 5.23. Przegroda z dwustronnymi żebami prostymi

F_1 i F_2 są to całkowite pola powierzchni przegrody omywane płynami odpowiednio o temperaturze t_1 i t_2 , współczynniki przyjmowania ciepła wynoszą α_1 i α_2 . Z całkowitej powierzchni F_1 można wydzielić zewnętrzną powierzchnię samych żebrowań F_{z1} i powierzchnie F_{g1} , które stanowią nie zakryte żebrowaniem elementy powierzchni F_1 , leżące na ścianie płaskiej, w której żebra te są osadzone. Oczywiście

$$F_1 = F_{z1} + F_{g1}. \quad (5.116)$$

Podobnie dla powierzchni omywanej płynem 2

$$F_2 = F_{z2} + F_{g2}. \quad (5.117)$$

Żebra w miejscu osadzenia mają temperatury ścian, w których są osadzone, a więc odpowiednio ϑ_1 i ϑ_2 .

Średnie temperatury zewnętrznych powierzchni żebrowych (bez elementów ściany, w której są osadzone) wynoszą odpowiednio ϑ_{z1} i ϑ_{z2} . Sprawności żebrowych:

pierwszej strony
$$\varepsilon_{z1} = \frac{t_1 - \vartheta_{z1}}{t_1 - \vartheta_1}, \quad (5.118)$$

drugiej strony
$$\varepsilon_{z2} = \frac{t_2 - \vartheta_{z2}}{t_2 - \vartheta_2}. \quad (5.119)$$

Jeśli ściana gładka (np. po odłamaniu żebrowych), w której są osadzone żebra, jest płaska, to $F_1 = F_2 = F$. Jeżeli jest zakrzywiona, to jej powierzchnia zastępcza, zgodnie z (3.67),

$$F_{sr} = \frac{F_2 - F_1}{\ln \frac{F_2}{F_1}}. \quad (5.120)^*)$$

Jeżeli będziemy rozpatrywać przenikanie ciepła jako złożone z przejmowania ciepła od powierzchni żebrowanych i przewodzenia przez ścianę gładką, otrzymamy następujący układ równań:

$$\dot{Q} = F_{g1}\alpha_1(t_1 - \vartheta_1) + F_{z1}\alpha_1(t_1 - \vartheta_{z1}), \quad (5.121)$$

$$\dot{Q} = F_{sr} \frac{\lambda}{\delta} (\vartheta_1 - \vartheta_2), \quad (5.122)$$

$$\dot{Q} = F_{g2}\alpha_2(\vartheta_2 - t_2) + F_{z2}\alpha_2(\vartheta_{z2} - t_2). \quad (5.123)$$

Zgodnie z (5.118) i (5.119) $t_1 - \vartheta_{z1} = \varepsilon_{z1}(t_1 - \vartheta_1)$ oraz $\vartheta_{z2} - t_2 = \varepsilon_{z2}(\vartheta_2 - t_2)$. Po wykorzystaniu tych zależności oraz równań (5.116) i (5.117) możemy równania (5.121) i (5.123) sprowadzić do postaci

$$\dot{Q} = F_1\alpha_1\left[1 - \frac{F_{z1}}{F_1}(1 - \varepsilon_{z1})\right](t_1 - \vartheta_1), \quad (5.124)$$

$$\dot{Q} = F_2\alpha_2\left[1 - \frac{F_{z2}}{F_2}(1 - \varepsilon_{z2})\right](\vartheta_2 - t_2). \quad (5.125)$$

*) Jeżeli posługujemy się zastępczą powierzchnią F_{ar} rozwiniętą po średniej arytmetycznej średnicy, należy w obliczeniach uwzględnić współczynnik korygujący ψ z rys. 3.13; obowiązuje związek $F_{sr} = F_{ar} 1/\psi$.

Wyrażenia w nawiasach kwadratowych oznaczają sprawności ε_1 i ε_2 powierzchni F_1 i F_2

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{F_{z1}}{F_1}(1 - \varepsilon_{z1}), \quad (5.126)$$

$$\varepsilon_2 = 1 - \frac{F_{z2}}{F_2}(1 - \varepsilon_{z2}). \quad (5.127)$$

Równania (5.124) i (5.125) przyjmą postać:

$$\dot{Q} = F_1 \alpha_1 \varepsilon_1 (t_1 - \vartheta_1), \quad (5.128)$$

$$\dot{Q} = F_2 \alpha_2 \varepsilon_2 (\vartheta_2 - t_2). \quad (5.129)$$

Po przekształceniu układu równań (5.128), (5.129) i (5.122) tak, by po prawej stronie były tylko różnice temperatur, i wzięciu z sumy lewych stron $\dot{Q}/F_{sr}$ przed nawias, otrzymamy:

$$\frac{\dot{Q}}{F_{sr}} \left(\frac{F_{sr}}{F_1 \varepsilon_1 \alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{F_{sr}}{F_2 \varepsilon_2 \alpha_2} \right) = t_1 - t_2. \quad (5.130)$$

Stosunek $F_1/F_{sr} = \varphi_1$ i $F_2/F_{sr} = \varphi_2$ nazywamy stopniem ożebrowania powierzchni F_1 i F_2 . Po wprowadzeniu tych oznaczeń do równania (5.130) możemy z niego obliczyć strumień ciepła

$$\dot{Q} = F_{sr} \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\varphi_1 \alpha_1 \varepsilon_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\varphi_2 \alpha_2 \varepsilon_2}}. \quad (5.131)$$

Zgodnie z przyjętymi poprzednio analogiami, mianownik równania (5.131) przedstawia opór cieplny R_{kzd} przenikania ciepła. Współczynnik k_{zd} Pécleta dla przenikania ciepła przez przegrodę dwustronnie żebrowaną jest odwrotnością oporu cieplnego:

$$k_{zd} = \frac{1}{R_{kzd}} = \frac{1}{\frac{1}{\varphi_1 \alpha_1 \varepsilon_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\varphi_2 \alpha_2 \varepsilon_2}}. \quad (5.132)$$

Równanie Pécleta, określające przenikanie ciepła przez dwustronnie żebrowaną przegrodę, można zapisać w tradycyjnej postaci:

$$\dot{Q} = F_{sr} k_{zd} (t_1 - t_2). \quad (5.133)^*)$$

*) W odniesieniu do ściany gładkiej zamiast F_{sr} należy wstawić F .

Należy zauważyć, że strumień ciepły jest odniesiony nie do powierzchni rozwiniętej (żebrowanej), jak w równaniach dla powierzchni jednostronnie żebrowanych, lecz do powierzchni F_{sr} gładkiej, w której żebra są osadzone. Z tego powodu stopień ożebrowania jest inaczej umiejscowiony w równaniu (5.132), określającym współczynnik Pécleta, niż w (5.114). Po obliczeniu lub odczytaniu z wykresów sprawności ε_{z1} i ε_{z2} żeber, sprawność ε_1 i ε_2 powierzchni ożebrowanej wyliczymy z równań (5.126) i (5.127).

5.7.5. Uwagi dotyczące stosowania powierzchni żebrowanych

Stosowanie powierzchni żebrowanych nie zawsze jest uzasadnione. Z zasady nie stosujemy takich powierzchni, gdy współczynnik α ma dużą wartość. Zachodzi wtedy obawa, że podczas intensywnego przejmowania ciepła żebro szybko przejmie temperaturę płynu i stosowanie powierzchni rozwiniętych nie zwiększa strumienia ciepła, lecz jedynie zużycie materiału. Rozważania co do opłacalności stosowania powierzchni żebrowanych przeprowadzamy na przykładach jednostronnych żeber prostych o stałej grubości. Dla takich żeber jest słuszny wzór określający strumień ciepła w przecie prostym (5.65). W punkcie 5.6.4 do wyznaczania stałych całkowania w żebrach cienkich i długich, które w praktyce można traktować jak zaizolowane na końcu, posłużyliśmy się warunkiem, że ciepło przekazywane na końcu żebra jest równe zeru. W odniesieniu do rozważań przeprowadzanych obecnie przybliżenie to jest mało ściśle. Właściwy wynik uzyskuje się przez wprowadzenie do równania (5.65) stałych M i N całkowania, wyznaczonych z następujących warunków brzegowych:

$$\begin{aligned} \text{I. } x = 0, \quad \Theta = \vartheta_2 - t_2 = \Theta_p, \\ \text{II. } x = h, \quad Q_{\lambda x=h} = -F\lambda \left(\frac{d\Theta}{dx} \right)_{x=h} = F\alpha \Theta_{x=h}. \end{aligned}$$

W drugim warunku brzegowym wykorzystujemy przejście do otoczenia strumienia ciepła przewodzonego na końcu żebra. $\Theta_{x=h}$ jest różnicą temperatury końca żebra i płynu o temperaturze t_2 omywającego to żebro. Po wykorzystaniu warunków brzegowych w równaniu ogólnym pręta (5.60), wyznaczeniu stałych całkowania i wstawieniu ich do równania (5.65) otrzymujemy dokładny wzór określający strumień ciepła przekazany przez żebro proste o stałej grubości w postaci:

$$\dot{Q} = F\lambda\Theta_p \frac{\frac{\alpha}{A\lambda} + \operatorname{tgh}(Ah)}{1 + \frac{\alpha}{A\lambda} \operatorname{tgh}(Ah)}, \quad (5.134)$$

A wyznacza się z równania (5.98).

W równaniu (5.134) wysokość h traktujemy jako zmienną. Stosowanie żebra staje się bezcelowe, jeśli u nasady żebra

$$\left(\frac{d\dot{Q}}{dh}\right)_{h=0} = 0. \quad (5.135)$$

Po zróżniczkowaniu równania (5.134) według długości h i przyrównaniu do zera otrzymujemy zależność:

$$\frac{2\lambda}{\alpha s} = 1, \quad (5.136)$$

w której s — grubość żebra.

Zależność tę można zapisać w postaci:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{s}{2\lambda}. \quad (5.137)$$

Oznacza to, że gdy opór przejmowania ciepła jest równy oporowi przewodzenia połowy grubości żebra, żebrowanie jest bezcelowe.

Żebrowanie jest celowe wówczas, gdy

$$\frac{2\lambda}{\alpha s} > 1, \quad (5.138)$$

W praktyce stosuje się je, gdy stosunek ten jest większy niż 5, gdyż w rozważaniach zakładaliśmy, że nie ma spadku temperatury w przekroju poprzecznym żebra (nie ma oporu), co w żebrach rzeczywistych jednak występuje. Zwykle liczba ta jest znacznie większa.

Z przenikaniem ciepła przez przegrody żebrowane wiąże się zagadnienie maksymalnej oszczędności materiału. Chodzi o to, by przy danym zużyciu materiału tak uformować żebro, aby strumień ciepła był maksymalny, tzn. odpowiednio dobrać stosunek długości h żebra do jego grubości s . Dla danej długości L żebra prostego (rys. 5.15) o stałej grubości zużycie materiału jest proporcjonalne do powierzchni przekroju poprzecznego F_p , określanego wzorem

$$F_p = hs \quad (5.139)$$

Zagadnienie optymalizacji sprowadzimy do tego, by przy stałym F_p znaleźć grubość s , jaką powinno mieć żebro, aby strumień ciepła był maksymalny. Zagadnienie rozwiążemy, gdy wyrazimy strumień $\dot{Q}$ jako funkcję s i pochodną $d\dot{Q}/ds$ przyrównamy do zera. Skorzystamy z uproszczonego wzoru (5.96)

$$\dot{Q} = Ls\lambda\Theta_p \tanh(Ah). \quad (5.140)$$

Ponieważ dla żeber $A = \sqrt{2\alpha/s\lambda}$, a $h = F_p/s$, przeto równanie (5.140) możemy sprowadzić do postaci:

$$\dot{Q} = L\sqrt{2\alpha\lambda s} \Theta_p \operatorname{tgh}\left(\frac{F_p}{s} \sqrt{\frac{2\alpha}{s\lambda}}\right). \quad (5.141)$$

Po różniczkowaniu według s i przyrównaniu do zera otrzymujemy wzór określający optymalną wartość wysokości h_{opt} żebra prostego o stałej grubości

$$h_{opt} = 1,419 \frac{s}{2} \sqrt{\frac{2\lambda}{\alpha s}}. \quad (5.142)$$

Zgodnie ze wzorem (5.99) można stwierdzić, że sprawność takiego żebra wynosi $\varepsilon_z = 0,457$.

Po przeprowadzeniu podobnych rozważań dotyczących żeber prostych o przekroju trójkątnym otrzymamy optymalną wysokość tych żeber:

$$h_{opt} = 1,309 \frac{s}{2} \sqrt{\frac{2\lambda}{\alpha s}}, \quad (5.143)$$

przy czym s — grubość u nasady żebra prostego o przekroju trójkątnym.

Należy zauważyć, że jeśli dla tego samego strumienia ciepła zamiast żeber prostych o stałej grubości stosujemy żebra o przekroju trójkątnym tej samej wysokości, zaoszczędzimy ok. 44% materiału.

Najbardziej oszczędne w zużyciu materiału jest żebro proste zbliżone do żebra o przekroju trójkątnym. Gdy jednak powierzchnie boczne nie są płaskie, lecz wklęsłe walcowo paraboliczne, wykonanie takich powierzchni o optymalnej wysokości oczywiście jest utrudnione i w praktyce stosujemy żebra o przekroju trójkątnym.

5.8. Przykłady obliczeniowe

Przykład 1. Ściana chłodziarki (ziębiarki) o powierzchni $0,5 \text{ m}^2$ jest wykonana z poliuretanu ($\lambda = 0,02 \text{ W/m} \cdot \text{K}$) grubości $\delta = 80 \text{ mm}$, wypełniającego przestrzeń między ścianą komory chłodniczej z polistyrenu grubości 4 mm ($\lambda = 0,15 \text{ W/m} \cdot \text{K}$) i warstwą blachy stalowej 1 mm ($\lambda = 50 \text{ W/m} \cdot \text{K}$).

Obliczyć straty „zimna”, jeśli temperatura otoczenia wynosi $+25^\circ\text{C}$, a w komorze $+2^\circ\text{C}$. Współczynnik przejmowania ciepła dla powietrza wewnątrz komory $\alpha = 12 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$, dla powietrza zewnątrz chłodziarki $\alpha = 15 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$.

Obliczenie oporu przenikania ciepła (oznaczenia jak na rys. 5.2):

$$R_k = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_2},$$

$$R_k = \frac{1}{12} + \frac{0,004}{0,15} + \frac{0,020}{0,02} + \frac{0,001}{50} + \frac{1}{15} = 1,08 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}.$$

Obliczenie współczynnika przenikania ciepła (Pécleta):

$$k = \frac{1}{R_k} = \frac{1}{1,08} = 0,925 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}.$$

Obliczenie strat „zimna”:

$$\dot{Q} = Fk(t_1 - t_2),$$

$$\dot{Q} = 0,5 \cdot 0,925(25 - 2) = 10,6 \text{ W}.$$

Przykład 2. Rura stalowa $\varnothing 65/50$ mm o współczynniku $\lambda = 40 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ wewnątrz jest zanieczyszczona osadzonym kamieniem kotłowym grubości 1 mm ($\lambda = 2 \text{ W/m} \cdot \text{K}$). Na zewnątrz rurę opływają spaliny o współczynniku przejmowania ciepła $\alpha = 120 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$, a wewnątrz woda kotłowa o współczynniku $\alpha = 3500 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$. Obliczyć strumień ciepła przekazany przez 1 mb rury, jeżeli temperatura spalin wynosi 1000°C , a wody 200°C .

Obliczenie oporu R_{kr} przenikania ciepła:

$$R_{kr} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{\ln \frac{d_2}{d_1}}{2\lambda_1} + \frac{\ln \frac{d_3}{d_2}}{2\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_2},$$

$$R_{kr} = \frac{1}{3500 \cdot 0,048} + \frac{\ln \frac{50}{48}}{2 \cdot 2} + \frac{\ln \frac{65}{50}}{2 \cdot 40} + \frac{1}{1200 \cdot 0,065} = 0,$$

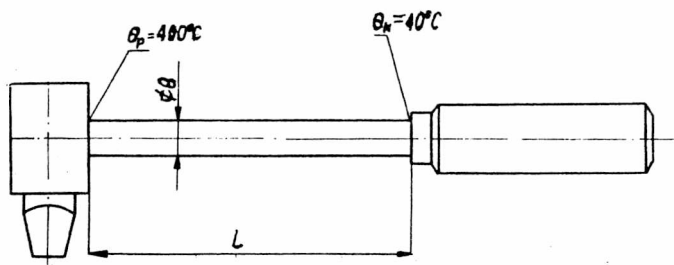
Obliczenie współczynnika k_r przenikania ciepła:

$$k_r = \frac{1}{R_{kr}} = \frac{1}{0,146} = 6,85 \text{ W/m} \cdot \text{K}.$$

Obliczenie jednostkowego (na 1 metr bieżący) strumienia ciepła:

$$\dot{q} = \pi k_r (t_1 - t_2) = \pi \cdot 6,85(1000 - 200) = 17\,200 \text{ W/m}.$$

Przykład 3. Temperatura kolby do lutowania wynosi 420°C . Kolba jest osadzona na pręcie żelaznym $\varnothing 8$ mm ($\lambda = 40 \text{ W/m} \cdot \text{K}$). Koniec pręta jest zakończony rękojeścią drewnianą (rys. 5.24).



Rys. 5.24. Kolba do lutowania – szkic do obliczeń

Obliczyć długość pręta, jeśli jego temperatura w miejscu osadzenia rękojeści nie powinna przekroczyć 100°C , a współczynnik przejmowania ciepła od powierzchni pręta do otoczenia wynosi $\alpha = 12 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$. Temperatura otoczenia 20°C . Rękojeść należy traktować jako izolację na końcu pręta.

Dla pręta na końcu zaizolowanego wzór (5.81) przechodzi w (5.83)

$$\Theta_k = \Theta_p \frac{1}{\cosh(AL)},$$

$$\cosh(AL) = \frac{\Theta_p}{\Theta_k} = \frac{420-20}{100-12} = 5.$$

Zgodnie ze wzorem (5.61)

$$A = \sqrt{\frac{o\alpha}{F\lambda}} = \sqrt{\frac{\pi 0,008 \cdot 12}{\pi \frac{0,008^2}{4} 40}} = 12,23,$$

$$AL = \operatorname{arc} \cosh 5 \cong 2,31, \quad L = \frac{2,31}{12,23} = 0,189 \text{ m}.$$

6. Wymienniki ciepła (część I)

Wymienniki ciepła^{*)} są to urządzenia (aparaty), w których zachodzi przekazywanie ciepła między czynnikami. Najczęściej występują dwa czynniki, z których jeden przekazuje, a drugi zaś przejmuje ciepło. Są też wymienniki, w których czynników może być więcej^{**)}. Normalna praca urządzenia, oprócz okresu rozruchu, może odbywać się w ustalonym lub nieustalonym polu temperatur.

Niektóre aparaty wymiany ciepła o działaniu okresowym są przeznaczone tylko do rozruchu, np. autoklawy, krystalizatory itp. W tym rozdziale omówiono ogólny podział wymienników, a szczegółowo tylko jeden z typów, mianowicie wymienniki powierzchniowe. Wymienniki z wypełnieniem omówiono w innym rozdziale, mieszkankowe tylko ogólnie^{***)}.

6.1. Ogólny podział wymienników ciepła

Wymienniki ciepła dzielimy na powierzchniowe (przeponowe), zwane rekuperatorami, mieszkankowe i wymienniki z wypełnieniem.

Wymiennikami powierzchniowymi nazywamy aparaty, w których przekazywanie ciepła zachodzi między czynnikami rozdzielonymi powierzchnią rozgraniczającą. W tego typu urządzeniach zachodzi więc przenikanie ciepła. Na powierzchnię rozgraniczającą dobiera się materiały nie wchodzące w reakcję chemiczną z płynami. Zaletą tego typu urządzenia jest to, że w czasie normalnej pracy zachodzi w nich ustalone przekazywanie ciepła oraz jest zapewniona czystość (niemieszanie się) płynów.

^{*)} Proponowane są także nazwy: przekaźniki ciepła lub przekazywacze ciepła.

^{**)} Około-Kułał opracował teorię wymienników trójczynnikowych.

^{***)} W wymiennikach mieszkankowych chodzi częściej o wymianę substancji, co jest zwykle domeną tzw. inżynierii procesowej.

Wymienniki mieszankowe są to aparaty, w których mieszają się czynniki przekazujące ciepło, nie ma przegrody rozgraniczającej i płyny stykają się bezpośrednio. W urządzeniach tego typu dużą rolę odgrywa przekazywanie substancji (mas), tak że nieraz proces przekazywania ciepła jest traktowany jako uboczny. Przykładami tego typu urządzeń mogą być: skraplacz mieszankowy, w którym skraplanie uzyskuje się przez wtrysk wody do pary, zraszacz (skruber) — gaz jest ochładzany lub ogrzewany zraszającym go płynem, mieszalniki, w których głównym zadaniem jest wymieszanie czynników, zwykle tej samej fazy.

Zaletą wymienników mieszankowych jest intensywność przekazywania ciepła, co umożliwia konstrukcję małych — w porównaniu z innymi — rozmiarów. Czynniki mieszają się; nie jest zachowana czystość, co jest czasem wadą, a czasem zaletą.

Wymienniki ciepła z wypełnieniem. W wymiennikach tego typu znajduje się wypełnienie z ciała stałego (lub fluid), które może brać bezpośredni udział w przekazywaniu ciepła, tzn. może samo być jednym z czynników wymieniających ciepło lub brać udział pośredni, tzn. być pośrednikiem w przekazywaniu ciepła między płynami. Wypełnienie może być nieruchome lub ruchome. Wymiennik, którego wypełnienie ma wewnętrzne źródło ciepła, nazywamy **reaktorem**. Wymiennik ciepła z nieruchomym wypełnieniem bez wewnętrznych źródeł ciepła nazywamy **regeneratorem**.

Wymienniki ciepła z wypełnieniem nazywa się nieraz wymiennikami masowymi.

6.2. Wymienniki powierzchniowe — rekuperatory

W wymiennikach powierzchniowych zachodzi przenikanie ciepła. Do obliczenia strumienia ciepła posłużymy się więc równaniem Péceleta.

Gdy dane są wielkości współczynników przejmowania ciepła, wówczas współczynnik k przenikania ciepła zależy od kształtu przegrody. Kształt przegrody rozgraniczającej płyny może być różny. Może to być przegroda płaska, rurowa, kulista, żebrowana żebrami prostymi lub okrągłymi. W określaniu wielkości wymiennika posłużymy się wielkością powierzchni płaskiej (albo zastępczej), długością rury, promieniami przegrody kulistej lub powierzchnią żebrowaną. Zagadnienie to zostało omówione w rozdz. 5. W tym rozdziale zajmiemy się przede wszystkim określeniem różnicy temperatur płynów przekazujących ciepło. Przy określonych wlotowych i wylotowych temperaturach czynników średnia różnica temperatur płynów zależy od układu prądów. Rozróżniamy wymienniki:

współprądowe, w których kierunki i zwroty prędkości przepływu obu czynników są zgodne,

przeciwprądowe, w których kierunki prędkości przepływów czynników są zgodne, a zwroty przeciwne,

krzyżowe, w których kierunki prędkości przepływów są prostopadłe,

o **prądach mieszanych**, w których kierunki prędkości przepływów są inne,
 o **dowolnych kierunkach prądów**, w których temperatura jednego z płynów jest stała. Zwykle temperatura czynnika jest stała, jeśli czynnik o izobarycznym przepływie przechodzi zmiany fazowe. Wymiennik, w którym zachodzi wrzenie, nazywamy **warnikiem** lub **parownikiem**; taki zaś, w którym zachodzi skraplanie – **skraplaczem**.

Jeśli w wymienniku temperatury obu czynników są stałe, np. w wyparce^{*)}, do rozwiązania tego przypadku posługujemy się podstawowymi rozwiązaniami równania Pécleta omówionymi w rozdz. 5.

6.2.1. Obliczanie różnicy temperatur płynów jako funkcji powierzchni wymiennika

W obliczeniach posłużymy się przykładem wymiennika współprądowego. Wyniki obliczenia zostaną dalej uogólnione.

Na rysunku 6.1 schematycznie przedstawiono wymiennik współprądowy i w układzie t - f przedstawiono temperatury t_1 i t_2 czynników przekazujących ciepło. Jeżeli rozważymy wycinek df powierzchni w dowolnym miejscu wymiennika, to będziemy mogli mówić o przekazanych na tym wycinku strumieniach ciepła przemiany czynnika pierwszego i drugiego $d\dot{Q}_1$ oraz $d\dot{Q}_2$. Z reguły zachodzi w nich przemiana izobaryczna^{**)} . Strumień ciepła przenikający od jednego czynnika do drugiego można obliczyć także jako strumień $d\dot{Q}_k$ wyliczony z równania Pécleta, gdyż można przyjąć, że na niewielkim (dyskretnym) wycinku powierzchni temperatury t_1 i t_2 płynów niewiele się zmieniły i różnicę temperatur oznaczoną jako

$$\Theta = t_1 - t_2 \quad (6.1)$$

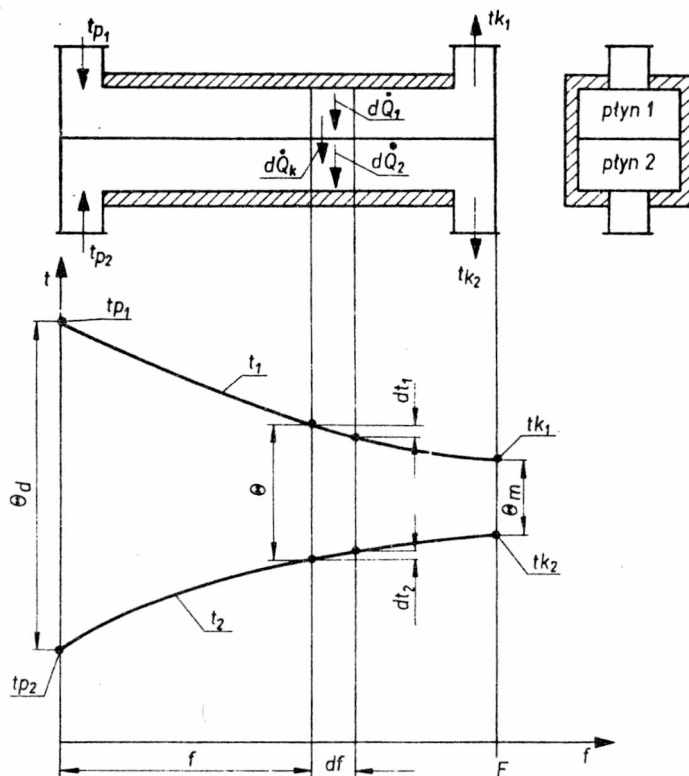
w przedziale df możemy przyjąć za stałą.

Rozpatrujemy przypadek normalnej eksploatacji wymiennika przy stałych temperaturach płynów na wlocie i wylocie z wymiennika. Temperatury początkowe (wlotowe) i końcowe (wylotowe) czynników są oznaczone odpowiednio t_{p1} , t_{k1} i t_{p2} , t_{k2} . Pole temperatury w wymienniku jest ustalone. Bilansując w takich warunkach wycinek wymiennika o powierzchni df otrzymamy:

$$d\dot{Q}_1 = d\dot{Q}_2 = d\dot{Q}_k. \quad (6.2)$$

^{*)} Wyparka jest to wymiennik ciepła, w którym podczas izobarycznych przepływów czynników odparowujemy jeden z czynników za pomocą skraplającej się pary czynnika drugiego. Jeżeli oba czynniki są tego samego rodzaju, np. H_2O , to po obu stronach przegrody płyny muszą mieć różne ciśnienia.

^{**)} Spadki ciśnienia w wymienniku wynikają tylko z oporów przepływu. Należy projektować niewielkie opory, gdyż z ich wzrostem rośnie moc zużyta na przetłoczenie czynników. W praktyce przyjmujemy ciśnienie $p = \text{idem}$.



Rys. 6.1. Schemat wymiennika współprądowego; przebiegi temperatur płynów: $d\dot{Q}_1$, $d\dot{Q}_2$ — przejęte na wycinku dF powierzchni strumienie ciepła przemiany płynu 1 i 2, $d\dot{Q}_k$ — przenikający przez wycinek df strumień ciepła, f — liczona od początku układu do dowolnego przekroju powierzchnia wymiennika (zmienna), F — całkowita powierzchnia wymiennika, t_{p1} , t_{k1} — temperatury płynu 1 na wlocie i wylocie, t_{p2} , t_{k2} — temperatury płynu 2 na wlocie i wylocie. Wywód nie ulegnie zmianie, jeżeli nie będziemy operowali powierzchnią f płaską i współczynnikiem k dla tej powierzchni, lecz inną liczbą charakteryzującą wielkość wymiennika i odpowiednim współczynnikiem Pécleta, np. L i k_p ; F_z i k_z itp.

Strumienie ciepła przemiany izobarycznej

$$d\dot{Q}_1 = -\dot{G}_1 c_{p1} dt_1, \quad (6.3)^*)$$

$$d\dot{Q}_2 = \dot{G}_2 c_{p2} dt_2, \quad (6.4)$$

przy czym

$\dot{G}_1$, $\dot{G}_2$ — strumienie substancji przepływających czynników 1 i 2,
 c_{p1} , c_{p2} — ciepła właściwe tych czynników przy stałym ciśnieniu.

*) W równaniu tym znak minus wynika stąd, że ze wzrostem f przyrost dt_1 temperatury czynnika 1 jest ujemny.

Zgodnie z równaniem Pécleta strumień ciepła przenikający przez df

$$d\dot{Q} = k\Theta df, \quad (6.5)$$

gdzie

k – współczynnik przenikania ciepła,

Θ – różnica temperatury czynnika 1 i 2.

Jeśli odpowiednio dla obu przepływających czynników wprowadzimy równoważniki wodne przepływu:

$$W_1 = \dot{G}_1 c_{p1}; \quad W_2 = \dot{G}_2 c_{p2}, \quad (6.6)$$

to równania (6.3) i (6.4) możemy zapisać w postaci

$$d\dot{Q}_1 = -W_1 dt_1, \quad (6.7)$$

$$d\dot{Q}_2 = W_2 dt_2. \quad (6.8)$$

Z porównania równań (6.7) i (6.8) wynika:

$$\frac{W_2}{W_1} = -\frac{dt_1}{dt_2}. \quad (6.9)$$

Po obustronnym dodaniu jedności i wykonaniu mnożenia przez $1/W_2$ otrzymamy

$$\frac{W_1 + W_2}{W_1 W_2} = -\frac{dt_1 - dt_2}{W_2 dt_2}. \quad (6.10)$$

Wprowadźmy dla współprądu pojęcie zastępczego równoważnika wodnego przepływów W_z obu czynników

$$\frac{1}{W_z} = \frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} = \frac{W_1 + W_2}{W_1 W_2}, \quad (6.11)$$

wtedy po przekształceniu (6.10) otrzymamy

$$W_2 dt_2 = -W_z (dt_1 - dt_2). \quad (6.12)$$

$W_2 dt_2 = d\dot{Q}_2$, zgodnie z równaniem (6.2) $d\dot{Q}_2 = d\dot{Q}_k = k\Theta df$, czyli

$$k\Theta df = -W_z (dt_1 - dt_2). \quad (6.13)$$

Jeżeli przy zmiennych t_1 i t_2 zróżniczkujemy równanie (6.1), otrzymamy

$$d\Theta = dt_1 - dt_2. \quad (6.14)$$

Gdy równanie to wykorzystamy w (6.13), otrzymamy różniczkowe równanie liniowe pierwszego rzędu

$$k\Theta df = -W_z d\Theta, \quad (6.15)$$

o zmiennych f i Θ . W równaniu tym można rozdzielić zmienne:

$$\frac{d\Theta}{\Theta} = -\frac{k}{W_z} df. \quad (6.16)$$

W wyniku całkowania po powierzchni f w granicach od 0 do F — wtedy Θ zmienia się od Θ_d do Θ_m (patrz rys. 6.1) — otrzymamy równanie algebraiczne:

$$\ln \frac{\Theta_m}{\Theta_d} = -\frac{kF}{W_z}. \quad (6.17)$$

Z równania tego otrzymamy wzór określający różnicę temperatur Θ_m czynników na wylocie wymiennika jako funkcję różnicy temperatur Θ_d na wlocie i powierzchni F wymiennika, zwany wzorem Hudlera:

$$\Theta_m = \Theta_d e^{-kF/W_z}. \quad (6.18)^*)$$

Jeżeli interesuje nas różnica temperatury w dowolnym przekroju wymiennika, to możemy ją obliczyć na podstawie Θ_d , gdy wykonamy całkowanie wzdłuż powierzchni od wlotu do dowolnego przekroju odcinającego powierzchnię f . Wtedy równanie Hudlera ma postać:

$$\Theta = \Theta_d e^{-kf/W_z}. \quad (6.19)$$

Równania (6.18) i (6.19) zostały wyprowadzone przy założeniu, że temperatury t_1 i t_2 są zmienne. Jest to więc także słuszne dla skraplacza i parownika, w których jedna z temperatur jest stała. Oczywiście należy pamiętać, że wtedy dla izobaryczno-izotermicznego przepływu jednego z płynów ciepło właściwe, a więc i równoważnik wodny przepływu, jest równy nieskończoności. Zastępczy równoważnik przepływu w parowniku

$$W_z = W_1, \quad (6.20)$$

w skraplaczu zaś

$$W_z = W_2. \quad (6.21)$$

Wymiennik przeciwprądowy w równaniu (6.4) ma znak minus. Jeśli w ten sam sposób przeprowadzimy matematyczne operacje dla przeciwprądu, uwzględnimy znak minus w (6.4) i (6.8), to otrzymamy identyczny wynik (6.18) — wzór Hudlera.

*) Wzór jest słuszny także dla wymiennika przeciwprądowego, skraplacza i warkana.

Odwrotność zastępczego równoważnika wodnego przepływów (6.11) wyrazimy odpowiednio jako różnicę odwrotności indywidualnych równoważników wodnych przepływu. Różnica powinna być tak utworzona, by W_z było liczbą dodatnią. Dla przeciwprądu, gdy $W_1 < W_2$,

$$\frac{1}{W_z} = \frac{1}{W_1} - \frac{1}{W_2}, \quad (6.22)$$

gdy zaś $W_1 > W_2$

$$\frac{1}{W_z} = \frac{1}{W_2} - \frac{1}{W_1}. \quad (6.23)$$

6.2.2. Obliczanie wielkości wymiennika za pomocą średniej różnicy temperatur płynów

6.2.2.1. Obliczenia dla współprądu, przeciwprądu, skraplacza i parownika

Po scałkowaniu równań (6.7) i (6.8) w granicach od temperatury początkowej (wlotowej) do końca (wylotowej) obu czynników przy stałym W_1 i W_2 , otrzymamy

$$\dot{Q} = - \int_{t_{p1}}^{t_{k1}} W_1 dt_1 = W_1(t_{p1} - t_{k1}) = W_1 \Delta_1, \quad (6.24)$$

$$\dot{Q} = \int_{t_{p2}}^{t_{k2}} W_2 dt_2 = W_2(t_{k2} - t_{p2}) = W_2 \Delta_2, \quad (6.25)$$

przy czym

Δ_1 — bezwzględna wartość przyrostu temperatury czynnika pierwszego,

Δ_2 — bezwzględna wartość przyrostu temperatury czynnika drugiego.

Porównując równania (6.24) i (6.25) wykorzystujemy często w obliczeniach zależności

$$\dot{Q} = W_1 \Delta_1 = W_2 \Delta_2; \quad \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{W_2}{W_1}. \quad (6.26)^*)$$

Po dodaniu obustronnie jedności do prawego równania (6.26) i pomnożeniu przez $1/W_2$ otrzymujemy

$$\frac{W_1 + W_2}{W_1 W_2} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{W_2 \Delta_2}. \quad (6.27)$$

*) Gdy operujemy bezwzględnymi wartościami Δ_1 i Δ_2 , wzory są słuszne dla współprądu, przeciwprądu, skraplacza i parownika.

Lewa strona tego równania jest odwrotnością zastępczego równoważnika wodnego przepływów. Mianownik prawej strony, zgodnie z (6.25), określa strumień $\dot{Q}$ przekazany w wymienniku, czyli

$$\dot{Q} = W_z(\Delta_1 + \Delta_2). \quad (6.28)$$

Temperatury t_1 i t_2 obu czynników są zmienne, zmienna jest także różnica temperatur $\Theta = \Delta t$. Wprowadźmy pojęcie takiej średniej różnicy temperatur Δt_{sr} płynów przekazujących ciepło, by można było obliczyć strumień ciepła przekazany w wymienniku z równania Pécleta w postaci

$$\dot{Q} = Fk\Delta t_{sr}. \quad (6.29)$$

Lewa strona równań (6.28) i (6.29) powinny być równe, więc

$$Fk\Delta t_{sr} = W_z(\Delta_1 + \Delta_2). \quad (6.30)$$

Zgodnie z (6.17)

$$Fk = -W_z \ln \frac{\Theta_m}{\Theta_d} = W_z \ln \frac{\Theta_d}{\Theta_m}. \quad (6.31)$$

Jeśli (6.31) wstawimy do (6.30), to

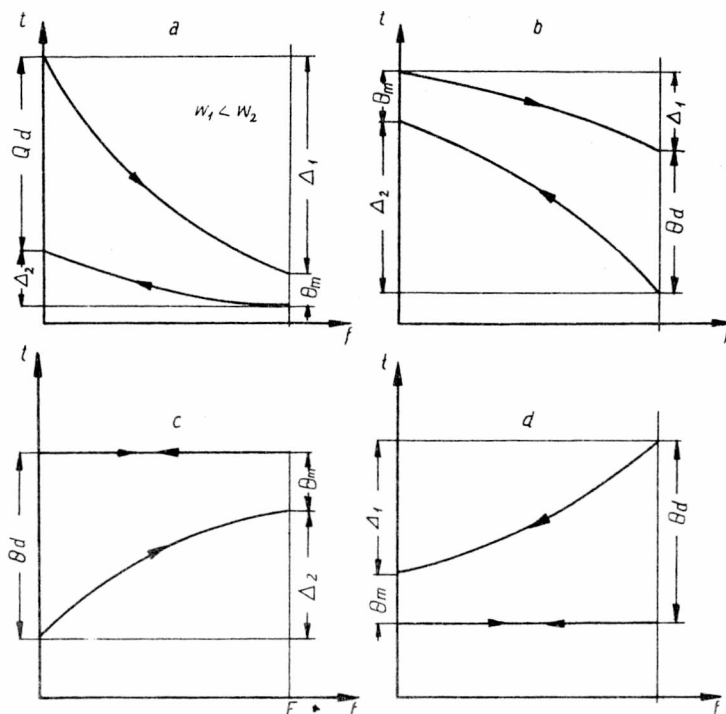
$$W_z \ln \frac{\Theta_d}{\Theta_m} \Delta t_{sr} = W_z(\Delta_1 + \Delta_2). \quad (6.32)$$

Suma $\Delta_1 + \Delta_2$, zgodnie z rys. 6.1 i 6.2, równa się $\Theta_d - \Theta_m$, średnia różnica temperatur powinna więc być wyliczona ze wzoru

$$\Delta t_{sr} = \frac{\Theta_d - \Theta_m}{\ln \frac{\Theta_d}{\Theta_m}}. \quad (6.33)^*$$

Wzór (6.33) jest słuszny dla wymiennika współprądowego, przeciwprądowego, skraplacza i parownika. Wywód nie ulegnie zmianie, jeśli będziemy operowali nie powierzchnią F i współczynnikiem k , ale długością L i współczynnikiem k_r lub — dla przegrody żebrowanej — F_z i k_z . Wzór określający Δt_{sr} dla wymiennika nie jest więc zależny od kształtu przegrody rozgraniczającej płyny, ale tylko od układu prądów. Należy zauważyć, że Θ_d jest różnicą temperatur płynów większą niż Θ_m bez względu na to, czy występuje na jednym, czy drugim końcu wymiennika.

*) Jeśli $\Theta_d/\Theta_m \leq 1,5$, to z błędem mniejszym niż 5% można przyjąć $\Delta t_{sr} = (\Theta_d + \Theta_m)/2$.



Rys. 6.2. Przebiegi temperatur płynów w wymiennikach:
a, b – przeciwpływowych, c – w skraplaczu, d – w parowniku

Równanie Pécleta (6.29), określające strumień $\dot{Q}$ ciepła przenikający w wymienniku, zwany wydajnością wymiennika, można również zapisać w postaci:

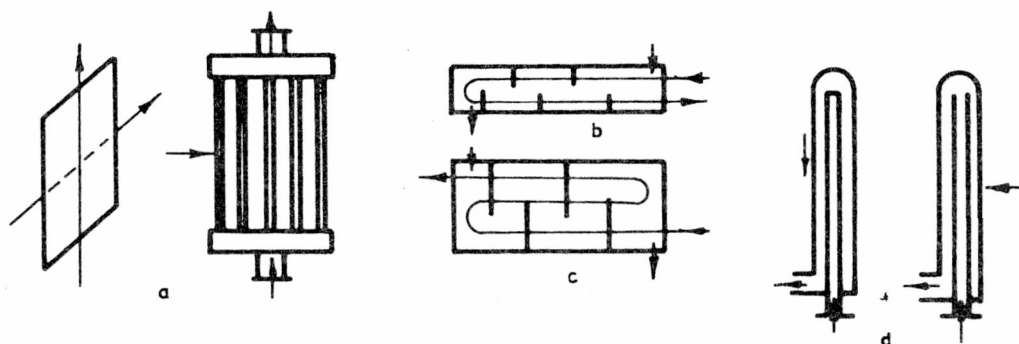
$$\dot{Q} = \pi L k_r \Delta t_{sr}, \quad (6.34)$$

$$\dot{Q} = F_z k_z \Delta t_{sr}. \quad (6.35)$$

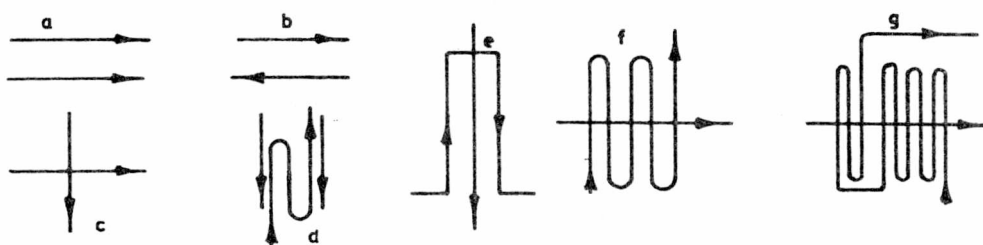
Jeśli mamy z góry założoną wydajność $\dot{Q}$ wymiennika, to z równań (6.29), (6.34) lub (6.35) obliczymy wielkość wymiennika, tj. powierzchnię gładką F , sumaryczną długość rur L lub powierzchnię żebrowaną F_z .

6.2.2.2. Obliczenia dla prądów skrzyżowanych i mieszanych

Do obliczenia wydajności $\dot{Q}$ wymiennika lub jego wielkości możemy posługiwać się wzorami (6.29), (6.34) lub (6.35). Obliczenie średniej różnicy Δt_m temperatur dla prądu krzyżowego i mieszanego jest jednak znacznie bardziej skomplikowane, gdyż zwykle w tych przypadkach temperatury płynu nie da się wyrazić jako funkcji jednej tylko zmiennej, np. f , ale raczej jako funkcję dwu, a czasem trzech zmiennych położenia (rys. 6.3 i 6.4).



Rys. 6.3. Schematyczne wymienniki: a — o prądach krzyżowych, b, c, d — o prądach mieszanych, (d — rury Fielda)



Rys. 6.4. Schematyczne układy prądów: a — współprąd, b — przeciuprąd, c — prąd krzyżowy, d, e, f, g — prądy mieszane

W celach praktycznych wyniki obliczeń sprowadzamy do wyznaczenia poprawki $\varepsilon_{\Delta t}$, jaką należy wprowadzić, jeśli średnią różnicę temperatur obliczymy jako Δt_{srp} przeciuprądu

$$\Delta t_m = \varepsilon_{\Delta t} \Delta t_{srp}. \quad (6.36)^*)$$

Dla prądu krzyżowego poprawkę $\varepsilon_{\Delta t}$, odpowiadającą zmiennym pomocniczym X i Y , można odczytać z tabeli 6.1. lub odpowiadającą zmiennym P , R — z wykresu 6.5.

Aby skorzystać z tab. 6.1, zmienne te należy obliczyć według wzoru:

$$X = \frac{\Delta_1}{t_{p1} - t_{p2}} = \frac{\Delta_1}{\Delta t_{\max}}; \quad Y = \frac{\Delta_2}{t_{p1} - t_{p2}} = \frac{\Delta_2}{\Delta t_{\max}}, \quad (6.37)$$

w którym $\Delta t_{\max} = t_{p1} - t_{p2}$ jest maksymalną różnicą temperatur występującą w wymienniku.

*) Wielkość średniej różnicy Δt_m dla prądów skrzyżowanych i mieszanych jest zawarta między Δt_{srw} wyliczonym jak dla współprądu i Δt_{srp} wyliczonym jak dla przeciuprądu. Dlatego do obliczeń orientacyjnych, można przyjąć, że

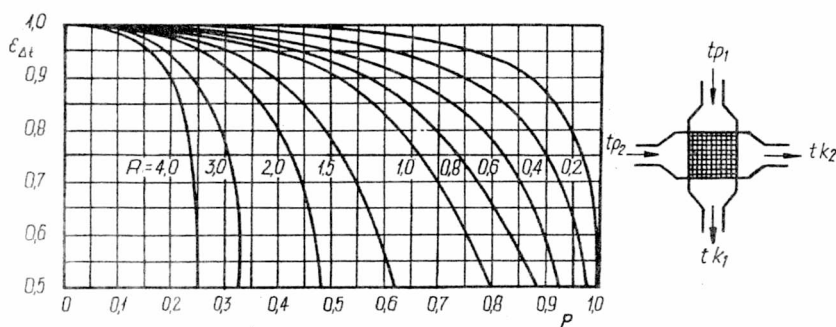
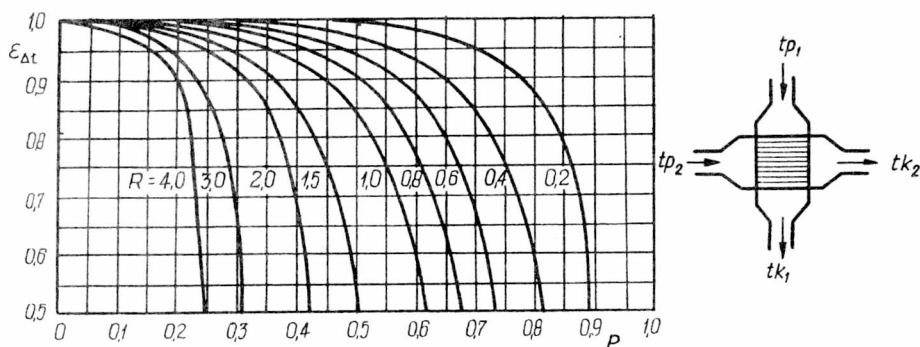
$$\Delta t_m \cong (\Delta t_{srw} + \Delta t_{srp})/2$$

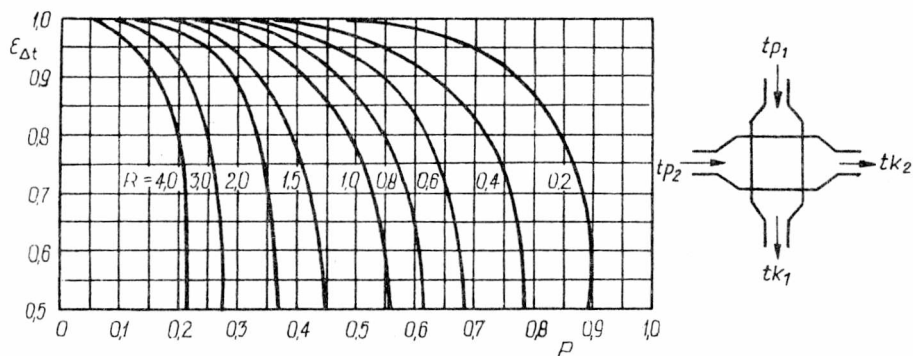
Tabela 6.1. Poprawki $\varepsilon_{\Delta t}$ dla prądu krzyżowego

$X \backslash Y$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,1	1	0,996	0,994	0,992	0,988	0,984	0,978	0,973	0,961	0,937
0,2	1	0,993	0,988	0,983	0,975	0,967	0,955	0,942	0,919	0,873
0,3	1	0,990	0,983	0,974	0,962	0,952	0,935	0,908	0,872	0,810
0,4	1	0,987	0,975	0,962	0,938	0,935	0,909	0,873	0,824	0,738
0,5	1	0,984	0,967	0,950	0,935	0,910	0,875	0,832	0,765	0,665
0,6	1	0,980	0,980	0,935	0,909	0,877	0,835	0,780	0,698	0,581
0,7	1	0,975	0,942	0,911	0,875	0,832	0,780	0,710	0,614	0,485
0,8	1	0,961	0,919	0,872	0,824	0,758	0,698	0,614	0,500	0,360
0,9	1	0,928	0,867	0,801	0,738	0,678	0,581	0,490	0,360	0,220

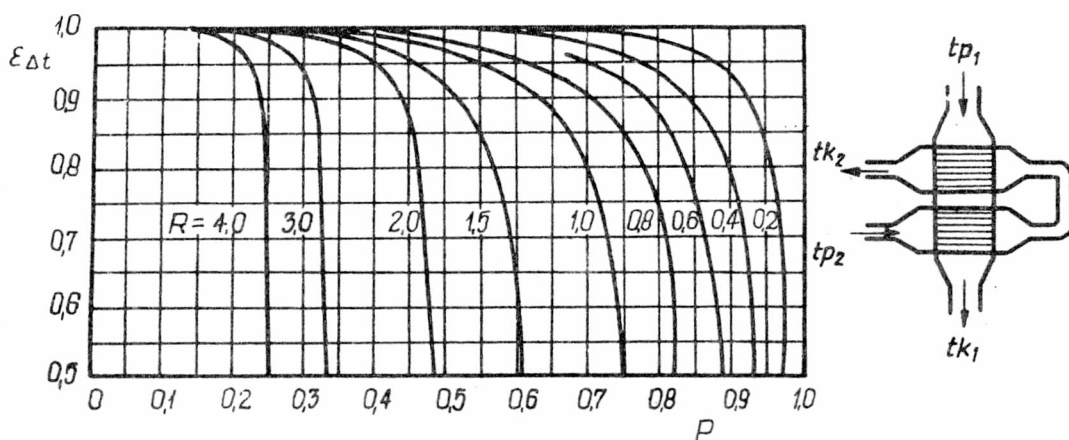
Dla prądów krzyżowych i mieszanych poprawkę $\varepsilon_{\Delta t}$, odpowiadającą zmiennym pomocniczym P , R , można odczytać z wykresów 6.5–6.12

$$P = \frac{\Delta_1}{\Delta t_{\max}} = X; \quad R = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{X}{Y}. \quad (6.38)$$

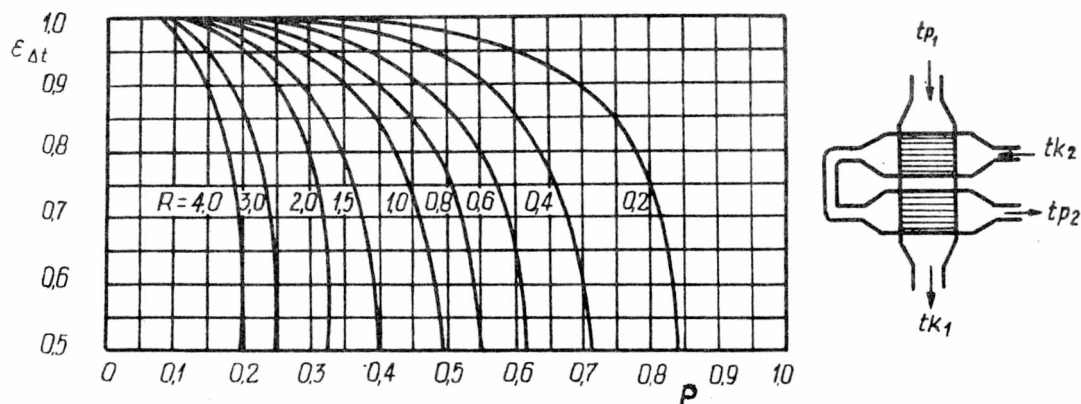
Rys. 6.5. Mnożnik $\varepsilon_{\Delta t}$ dla prądów skrzyżowanych (strugi obu płynów są prowadzone oddzielnie)Rys. 6.6. Mnożnik $\varepsilon_{\Delta t}$ dla prądów skrzyżowanych (strugi jednego z płynów są prowadzone oddzielnie)



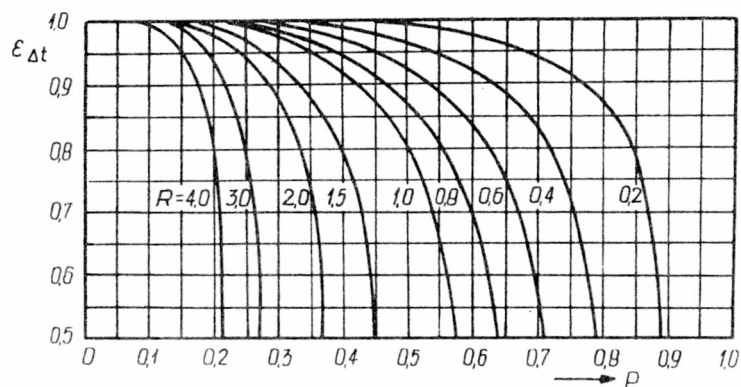
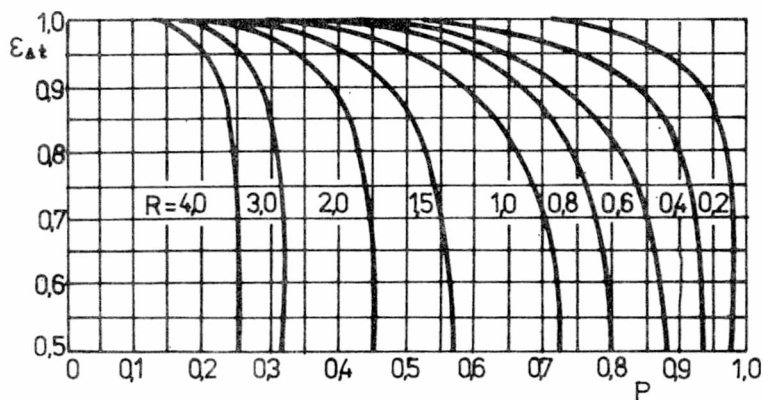
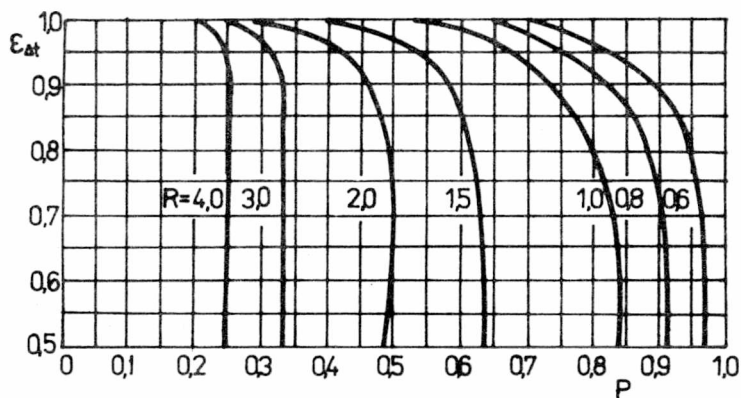
Rys. 6.7. Mnożnik $\epsilon_{\Delta t}$ dla prądów skrzyżowanych (strugi każdego z płynów nie są prowadzone oddzielnie)



Rys. 6.8. Mnożnik $\epsilon_{\Delta t}$ dla prądu mieszanego



Rys. 6.9. Mnożnik $\epsilon_{\Delta t}$ dla prądu mieszanego

Rys. 6.10. Mnożnik $\varepsilon_{\Delta t}$ dla prądu mieszanegoRys. 6.11. Mnożnik $\varepsilon_{\Delta t}$ dla prądu mieszanegoRys. 6.12. Mnożnik $\varepsilon_{\Delta t}$ dla prądu mieszanego

6.2.3. Obliczanie wielkości wymiennika za pomocą pojęcia jego sprawności

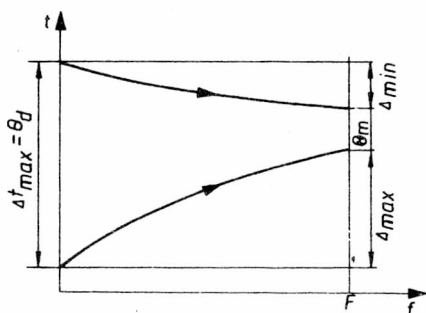
Niejednokrotnie wygodniej jest wyznaczyć wielkość wymiennika lub jego wydajność za pomocą pojęcia sprawności wymiennika. Przez pojęcie sprawność wymiennika rozumiemy stosunek jego wydajności do wydajności, jaką miałby on, gdyby czynnik o mniejszym równoważniku wodnym przepływu wykorzystał całkowicie maksymalną różnicę temperatur $\Delta t_{\max} = t_{p1} - t_{p2}$, występującą w tym wymienniku w celu uzyskania zwiększonego strumienia ciepła

$$\eta = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{\max}}, \quad (6.39)$$

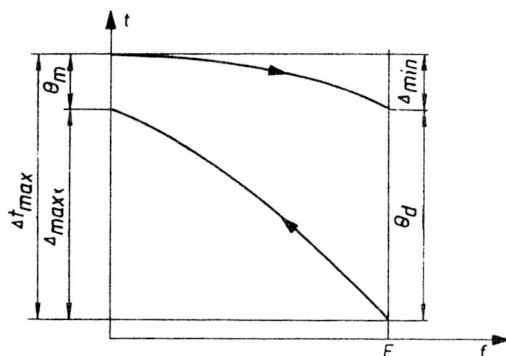
przy czym

$\dot{Q}$ — wydajność wymiennika,

$\dot{Q}_{\max}$ — wydajność maksymalna z wykorzystaniem $\Delta t_{\max}$.



Rys. 6.13. Rozkład temperatur w wymienniku współprądowym, gdy równoważnik wodny przepływu $W_1 > W_2$



Rys. 6.14. Rozkład temperatur w wymienniku przeciuprądowym, gdy równoważnik wodny przepływu $W_1 > W_2$

Całkowite wykorzystanie $\Delta t_{\max}$ w celu uzyskania $\dot{Q}_{\max}$ jest możliwe w wymienniku przeciuprądowym (rys. 6.13) o nieograniczonej powierzchni. W wymienniku współprądowym (rys. 6.14) jest to możliwe jedynie wówczas, gdy jeden z równoważników wodnych przepływu jest nieskończenie duży, a więc w skraplaczu lub parowniku. Dla innych wymienników współprądowych $\dot{Q}_{\max}$ nie ma znaczenia fizycznego, ale tylko obliczeniowego*).

*) Jeżeli np. $\dot{Q}_{\max}$ byłoby zdefiniowane jako strumień ciepła przekazany w wymienniku o nieograniczonej powierzchni, to dla współprądu — do wzoru (6.40) określającego $\dot{Q}_{\max}$ — należy wprowadzić mnożnik N/W_z , η zaś pomnożyć przez $W_z/W_{\min}$.

Zgodnie z definicją

$$\dot{Q}_{\max} = W_{\min}(t_{p1} - t_{p2}) = W_{\min}\Delta t_{\max}, \quad (6.40)$$

na podstawie zaś (6.24) i (6.25)

$$\dot{Q} = W_{\min}\Delta_{\max} = W_{\max}\Delta_{\min}, \quad (6.41)$$

gdzie $\Delta_{\max}$, $\Delta_{\min}$ – odpowiednio przyrosty temperatury czynnika o mniejszym i o większym równoważniku wodnym przepływu.

Sprawność wymiennika można wyrazić przez

$$\eta = \frac{\Delta_{\max}}{\Delta t_{\max}} = \frac{\Delta_{\min} W_{\max}}{\Delta t_{\max} W_{\min}} = f(N, R), \quad (6.42)$$

gdzie N i R – bezwymiarowe wielkości pomocnicze,

$$N = \frac{kF}{W_{\min}} \quad (6.43)$$

zwie się nieraz liczbą przenikania ciepła^{*)},

$$R = \frac{W_{\min}}{W_{\max}}, \quad (6.44)$$

$$R = \frac{W_{\min}}{W_{\max}} = \frac{\Delta_{\min}}{\Delta_{\max}} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$$

jest identyczne z jedną z liczb pomocniczych do wyznaczenia współczynnika poprawkowego $\varepsilon_{\Delta t}$ podczas obliczania średniej różnicy temperatur w wymienniku mieszanym (patrz wzór (6.38)).

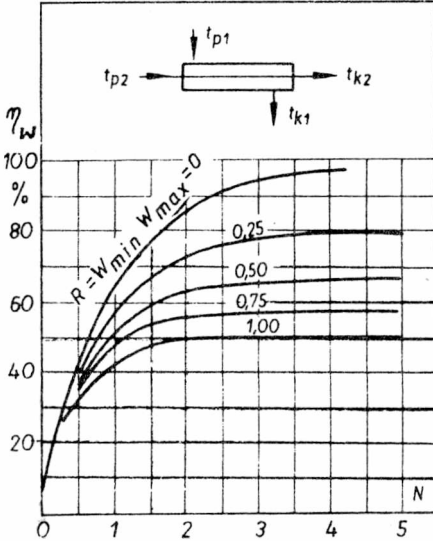
Obliczenie wydajności wymiennika polega na pomnożeniu przez sprawność η wymiennika wydajności maksymalnej $\dot{Q}_{\max}$, obliczonej z (6.40)

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{\max}\eta. \quad (6.45)$$

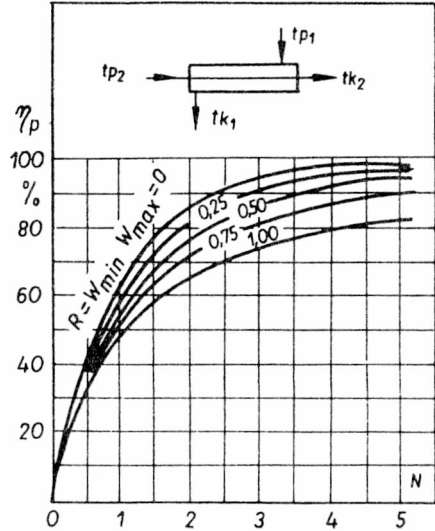
^{*)} $N = kF/W_{\min} = (\dot{Q}/\Delta t_{sr})/W_{\min} = (t_k - t_p)/\Delta t_{sr}$ jest to liczba przenikania ciepła równa przyrostowi temperatury czynnika o mniejszym równoważniku wodnym przepływu, przypadającemu na każdy stopień średniej różnicy temperatur między płynami.

Wielkość F wymiennika określamy z wyznaczonej z wykresu 6.15 lub 6.16 liczby N dla obliczonej sprawności η i liczby R .

$$F = N \frac{W_{\min}}{k}. \quad (6.46)$$



Rys. 6.15. Zależność $\eta_w = f(N, R)$ dla wymiennika współprądowego (patrz tab. 15.11)



Rys. 6.16. Zależność $\eta_p = f(N, R)$ dla wymiennika przeciwpądowego (patrz tab. 15.12)

6.2.3.1. Wzór określający sprawność wymiennika współprądowego

Ze wzoru Hudlera

$$\Theta_m = \Theta_d e^{-kF/W_z}. \quad (6.47)$$

Zgodnie z rys. 6.5 dla współprądu

$$\Theta_m = \Theta_d - (\Delta_{\max} + \Delta_{\min}). \quad (6.48)$$

Z porównania (6.47) i (6.48), po wzięciu sumy przyrostów temperatur na stronę lewą i przekształceniu, możemy otrzymać:

$$\Delta_{\max} + \Delta_{\min} = \Theta_d (1 - e^{-kF/W_z}). \quad (6.49)$$

Zgodnie z (6.41)

$$\Delta_{\min} = \Delta_{\max} \frac{W_{\min}}{W_{\max}}. \quad (6.50)$$

Jeśli do (6.49) wstawimy (6.50) i weźmiemy $\Delta_{\max}$ z lewej strony przed nawias, to otrzymamy:

$$\Delta_{\max} \left(1 + \frac{W_{\min}}{W_{\max}} \right) = \Theta_d (1 - e^{-kF/W_z}), \quad (6.51)$$

z tego zaś

$$A_{\max} = \Theta_d \frac{1 - e^{-kF/W_z}}{1 + \frac{W_{\min}}{W_{\max}}}. \quad (6.52)$$

Dla współprądu zgodnie z rys. 6.13

$$\Theta_d = t_{p1} - t_{p2} = \Delta t_{\max}. \quad (6.53)$$

Na podstawie (6.42) po podzieleniu odpowiednio stronami (6.52) i (6.53) możemy wzór określający sprawność wymiennika współprądowego η_w przedstawić w postaci:

$$\eta_w = \frac{1 - e^{-kF/W_z}}{1 + \frac{W_{\min}}{W_{\max}}}. \quad (6.54)$$

Wyrażenie e^{-kF/W_z} można przedstawić jako funkcję liczby N i R w następujący sposób:

dla współprądu

$$\frac{1}{W_z} = \frac{1}{W_{\min}} + \frac{1}{W_{\max}}, \quad (6.55)$$

wobec tego

$$e^{-kF/W_z} = e^{kF/W_{\min}(1 + W_{\min}/W_{\max})} = e^{-N(1+R)}. \quad (6.56)$$

Na podstawie tego równania wzór określający sprawność wymiennika współprądowego można przedstawić w funkcji N i R w postaci:

$$\eta_w = \frac{1 - e^{-N(1+R)}}{1 + R}. \quad (6.57)$$

Wzór ten przedstawiono w postaci wykresu na rys. 6.15 oraz tabel 15.11 i 15.14.

6.2.3.2. Wzór określający sprawność wymiennika przeciwprądowego η_p

Zgodnie z rys. 6.14

$$\Delta t_{\max} = \Theta_m + \Delta_{\max}. \quad (6.58)$$

Na podstawie wzoru Hudlera możemy napisać

$$\Delta t_{\max} = \Theta_d e^{-kF/W_z} + \Delta_{\max}. \quad (6.59)$$

Jeśli do (6.59) wstawimy zależność widoczną na rys. 6.14, otrzymamy

$$\Theta_d = \Delta t_{\max} - \Delta t_{\min}, \quad (6.60)$$

a po wymnożeniu i zgrupowaniu wyrazów

$$\Delta t_{\max}(1 - e^{-kF/W_z}) = \Delta t_{\min} \left(\frac{W_{\max}}{W_{\min}} - e^{-kF/W_z} \right); \quad (6.61)$$

z tego zaś

$$\Delta t_{\max} = \frac{\Delta t_{\min} \frac{W_{\max}}{W_{\min}} \left(1 - \frac{W_{\min}}{W_{\max}} e^{-kF/W_z} \right)}{1 - e^{-kF/W_z}}. \quad (6.62)$$

Zgodnie z (6.41)

$$\Delta t_{\max} = \Delta t_{\min} \frac{W_{\max}}{W_{\min}}. \quad (6.63)$$

Po podzieleniu (6.63) przez (6.62) otrzymamy sprawność

$$\eta_p = \frac{\Delta t_{\min} \frac{W_{\max}}{W_{\min}} (1 - e^{-kF/W_z})}{\Delta t_{\min} \frac{W_{\max}}{W_{\min}} \left(1 - \frac{W_{\min}}{W_{\max}} e^{-kF/W_z} \right)} = \frac{1 - e^{-kF/W_z}}{1 - \frac{W_{\min}}{W_{\max}} e^{-kF/W_z}}. \quad (6.64)$$

Dla przeciwprądu

$$\frac{1}{W_z} = \frac{1}{W_{\min}} - \frac{1}{W_{\max}}, \quad (6.65)$$

wobec tego

$$e^{-kF/W_z} = e^{-kF/W_{\min}(1 - W_{\min}/W_{\max})} = e^{-N(1-R)}. \quad (6.66)$$

Na podstawie (6.66) otrzymamy wzór określający sprawność wymiennika przeciwprądowego

$$\eta_p = \frac{1 - e^{-N(1-R)}}{1 - R \cdot e^{-N(1-R)}}. \quad (6.67)$$

Wzór ten podano w postaci wykresu 6.16 oraz tabel 15.12 i 15.13.

6.2.3.3. Sprawność η_d wymienników o dowolnym kierunku przepływu (skraplacz i parownik)

Dla podanych wymienników $W_{\max} = \infty$, wobec czego $R = 0$. W obliczeniach można posłużyć się wzorem (6.57) lub (6.67); w wyniku otrzymamy:

$$\eta_d = 1 - e^{-N}. \quad (6.68)$$

6.2.3.4. Sprawność wymienników η_m o prądach skrzyżowanych i mieszanych

Zgodnie z 6.2.2, strumień $\dot{Q}_m$ ciepła dla wymienników o prądach krzyżowych i mieszanych obliczymy wprowadzając do wzoru określającego Δt_{sr} poprawkę $\varepsilon_{\Delta t}$, a mianowicie

$$\dot{Q}_m = Fk\varepsilon_{\Delta t}\Delta t_{srp}. \quad (6.69)$$

Ponieważ $Fk\Delta t_{srp} = \dot{Q}_p$, więc

$$\dot{Q}_m = \varepsilon_{\Delta t}Q_p. \quad (6.70)$$

Wydażność wymiennika o prądach krzyżowych lub mieszanych jest równa wdajności wymiennika przeciwprądowego w tych samych warunkach, pomnożonej przez $\varepsilon_{\Delta t}$.

Sprawność η_m wymienników krzyżowego i mieszanego

$$\eta_m = \frac{\dot{Q}_m}{\dot{Q}_{\max}} = \varepsilon_{\Delta t} \frac{\dot{Q}_p}{\dot{Q}_{\max}} = \varepsilon_{\Delta t}\eta_p \quad (6.71)$$

równa się sprawności wymiennika przeciwprądowego pomnożonej przez poprawkę $\varepsilon_{\Delta t}$.

6.2.3.5. Obliczanie wielkości wymiennika krzyżowego i mieszanego

Dla wymienników krzyżowego i mieszanego o tej samej wydażności, jaką ma wymiennik przeciwprądowy, przy nie zmienionych temperaturach czynników na wlocie i wylocie oraz tym samym współczynniku przenikania ciepła, związki między wielkościami, tj. powierzchniami lub długościami, można przedstawić następująco:

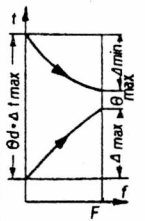
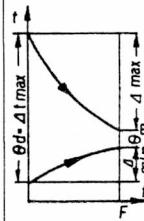
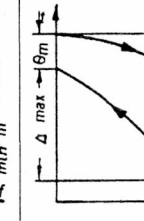
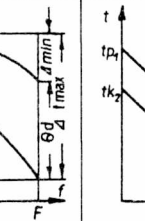
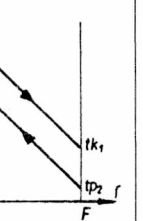
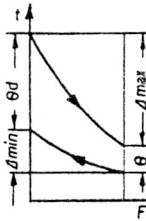
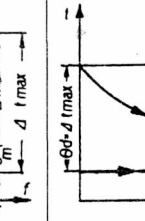
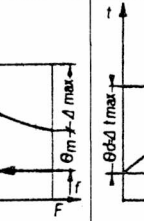
$$Q_m = F_mk\varepsilon_{\Delta t}\Delta t_{srp} = F_pk\Delta t_{srp} = Q_p, \quad (6.72)$$

gdzie

F_m — wielkość wymiennika o prądach skrzyżowanych lub mieszanych,

F_p — wielkość wymiennika przeciwprądowego.

Tabela 6.2. Zestawienie ważniejszych wzorów stosowanych do obliczeń wymienników ciepła

Lp.	Wielkość								
		współprąd		przeciwprąd		dowolny kierunek prądu			
		$W_1 > W_2$	$W_1 < W_2$	$W_1 > W_2$	$W_1 = W_2$	$W_1 < W_2$	$W_1 > 0; W_2 = \infty$	$W_2 > 0; W_1 = \infty$	
							parownik	skraplacz	
1	$\frac{1}{W_z}$	$\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}$	$\frac{1}{W_2} = \frac{1}{W_1}$	$\frac{1}{W_1} = \frac{1}{W_2}$	$\frac{1}{W_1} - \frac{1}{W_2}$	$\frac{1}{W_1}$	$\frac{1}{W_2}$		
2	Δt_{sr}	$\frac{\Theta_d - \Theta_m}{\ln \frac{\Theta_d}{\Theta_m}}$		$\frac{\Delta t_{max}}{1 + N}$		$\frac{\Theta_d - \Theta_m}{\ln \frac{\Theta_d}{\Theta_m}}$			
3	$\dot{Q}_{max}$	$W_{min} \Delta t_{max} = W_{min} (t_{p1} - t_{p2})$							
4	η	$\frac{1 - e^{-N(1 + R)}}{1 + R}$	$\frac{1 - e^{-N(1 - R)}}{1 - Re^{-N(1 - R)}}$	$\frac{N}{1 + N}$ *)	$\frac{1 - e^{-N(1 - R)}}{1 - Re^{-N(1 - R)}}$	$1 - e^{-N}$			
5	$\dot{Q}$	$Fk \Delta t_{sr} = \eta W_{min} (t_{p1} - t_{p2}) = \eta W_{min} \Delta t_{max}$							
		$W_{min} \Delta_{max} = W_{max} \Delta_{min}$					$W_{min} \Delta_{max}$		

$$R = \frac{W_{min}}{W_{max}}; \quad N = \frac{kF}{W_{min}}; \quad \Delta t_{max} = t_{p1} - t_{p2}$$

*) Wzór otrzymano stosując regułę del'Hospitala.

Z tego wynika

$$F_m = \frac{F_p}{\varepsilon_{\Delta t}} \quad (6.73)$$

lub, gdy posługujemy się długościami rur,

$$L_m = \frac{L_p}{\varepsilon_{\Delta t}}, \quad (6.74)$$

gdzie

L_m — długość rur wymiennika krzyżowego lub mieszanego,

L_p — długość rur wymiennika przeciwbieżnego.

Ważniejsze wzory zestawiono w tab. 6.2.

6.2.4. Przykłady obliczeniowe

Obliczyć sumaryczne zapotrzebowanie rur stalowych $\varnothing 57/50$ ($\lambda = 40 \text{ W/m} \cdot \text{K}$), potrzebnych do zbudowania wymiennika ciepła o wydajności $\dot{Q} = 100\,000 \text{ W}$, w którym olej jest chłodzony wodą. Współczynnik przejmowania ciepła dla wody wynosi $\alpha = 3000 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$, jej temperatura na dopływie $t_{p2} = 15^\circ\text{C}$. Dla oleju $\alpha = 300 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$. Olej należy schłodzić od temperatury $t_{p1} = 70^\circ\text{C}$ do $t_{k1} = 40^\circ\text{C}$. Woda przepływa wewnątrz rury. Obliczenie przeprowadzić dla układów prądów:

- współprądu,
- przeciwprądu,
- prądu krzyżowego.

Obliczenie oporu cieplnego przenikania (współczynnika Pécleta) dla rury:

$$R_{kr} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{\ln \frac{d_2}{d_1}}{2\lambda} + \frac{1}{\alpha_2 d_2},$$

$$R_{kr} = \frac{1}{3000 \cdot 0,050} + \frac{\ln \frac{57}{50}}{2 \cdot 40} + \frac{1}{300 \cdot 0,057} = 0,0670 \text{ m} \cdot \text{K/W},$$

$$k_r = \frac{1}{R_{kr}} = \frac{1}{0,0670} = 14,95 \text{ W/m} \cdot \text{K}.$$

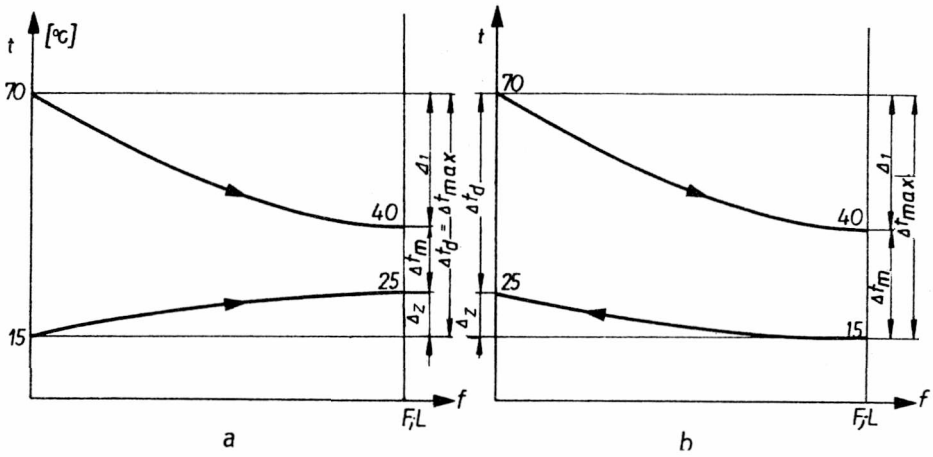
Oliczenie za pomocą średniej różnicy Δt_{sr} temperatur:

- dla współprądu (rys. 6.17a); przyjmuje się podgrzanie wody w wymienniku do 25°C :

$$\Theta_d = 70 - 15 = 55 \text{ K},$$

$$\Theta_m = 40 - 25 = 15 \text{ K},$$

$$\Delta t_{srw} = \frac{\Theta_d - \Theta_m}{\ln \frac{\Theta_d}{\Theta_m}} = \frac{55 - 15}{2,3 \lg \frac{55}{15}} = 30,9 \text{ K};$$



Rys. 6.17. Rozkłady temperatur w wymienniku – szkic do obliczeń:
a – współprądu, b – przeciwpądu

obliczenie ilości potrzebnych rur:

$$L = \frac{\dot{Q}}{\pi k_r \Delta t_{sr}} = \frac{100\,000}{\pi 14,95 \cdot 30,9} = 69 \text{ m},$$

b) dla przeciwpądu (rys. 6.17b):

$$\Delta t_{srp} = \frac{45 - 25}{2,3 \lg \frac{45}{25}} = 33,8 \text{ K},$$

$$L = \frac{100\,000}{\pi \cdot 14,95 \cdot 33,8} = 63,0 \text{ m},$$

c) dla prądów skrzyżowanych:
wielkości pomocnicze

$$X = \frac{\Delta_1}{\Delta t_{\max}} = \frac{70 - 40}{70 - 15} = 0,547,$$

$$Y = \frac{\Delta_2}{\Delta t_{\max}} = \frac{25 - 15}{70 - 15} = 0,182,$$

dla obliczonych wartości X i Y z tab. 6.1,

$$\varepsilon_{\Delta t} \cong 0,961,$$

$$\Delta t_m = \varepsilon_{\Delta t} t_{srp} = 0,961 \cdot 33,8 = 32,5 \text{ K},$$

$$L = \frac{100\,000}{\pi \cdot 14,95 \cdot 32,5} = 65,5 \text{ m}.$$

Obliczenie za pomocą pojęcia sprawności wymiennika

a) dla współprądu:

$$\eta = \frac{\Delta_{\max}}{\Delta t_{\max}} = \frac{70-40}{70-15} = 0,55,$$

$$R = \frac{W_{\min}}{W_{\max}} = \frac{\Delta_{\min}}{\Delta_{\max}} = \frac{25-15}{70-40} = 0,33$$

dla $\eta = 0,55$ i $R = 0,33$ z rys. 6.15 (lub z tab. 15.11)

$$N \cong 0,98,$$

$$N = \frac{kF}{W_{\min}} = \frac{k_r \pi L}{W_{\min}},$$

z tego zaś

$$L = \frac{1}{\pi} N \frac{W_{\min}}{k_r} = \frac{1}{\pi} N \frac{\dot{Q}}{\Delta_{\max} k_r},$$

$$L = \frac{1}{\pi} 0,98 \frac{100\,000}{(70-40) \cdot 14,95} = 69,5 \text{ m}$$

b) dla przeciwprądu:

dla $\eta = 0,55$, $R = 0,33$ z rys. 6.16 (lub z tab. 15.13), $N = 0,89$

$$L = \frac{1}{\pi} N \frac{\dot{Q}}{\Delta_{\max} k_r} = \frac{1}{\pi} 0,89 \frac{100\,000}{(70-40) \cdot 14,95} = 63,2 \text{ m},$$

c) dla prądów skrzyżowanych:

zgodnie z (6.74)

$$L_m = \frac{L_p}{\varepsilon_{dt}} = \frac{63,2}{0,961} = 65,8 \text{ m}.$$

7. Wybrane równania różniczkowe stosowane w przekazywaniu ciepła

Jeżeli rozpatrujemy zjawisko w dużym obszarze przestrzeni i dużym przedziale czasu, zmienność w czasie i przestrzeni parametrów opisujących zjawisko utrudnia lub wręcz uniemożliwia znalezienie związku matematycznego między tymi parametrami. Z reguły postępujemy wtedy następująco: zmniejszamy obszar do niewielkich rozmiarów (np. dx , dy , dz) i w niewielkim przedziale czasu ^{*)} ($d\tau$) szukamy związku między parametrami. Jeśli mamy odpowiednią ilość informacji, otrzymujemy w wyniku równania różniczkowe opisujące dane zjawisko, tzn. podające związek między parametrami w postaci różniczkowej.

W rozdziale tym przytacza się wybrane, dość ogólne różniczkowe, stosowane w przekazywaniu ciepła. Nie zajmujemy się tu metodami ich rozwiązywania dla skończonego konkretnego obszaru przestrzeni i dowolnego przedziału czasu.

7.1. Różniczkowe równania przejmowania ciepła

Jeżeli rozpatrujemy przejmowanie ciepła między powierzchnią ciała F (z reguły stałego) a płynem, przy czym współczynnik α przejmowania ciepła zmienia się wraz ze zmianą położenia danego punktu na powierzchni, to przyjmując, że na wycinku dF powierzchni współczynnik ten jest stały, zgodnie z prawem Newtona otrzymamy:

$$d\dot{Q} = \alpha(\vartheta - t) dF. \quad (7.1)$$

Jest to wzór określający część strumienia ciepła przejmowanego na wycinku powierzchni dF . Ta część strumienia jest przewodzona przez warstwę graniczną,

^{*)} W niewielkim obszarze przestrzeni i przedziale czasu przyjmujemy, że parametry opisujące zjawisko są niezależne od czasu i przestrzeni, czyli są w tym obszarze stałe.

a zwłaszcza przez jej część laminarną, można więc do jej wyliczenia zastosować prawo Fouriera

$$d\dot{Q} = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} dF. \quad (7.2)$$

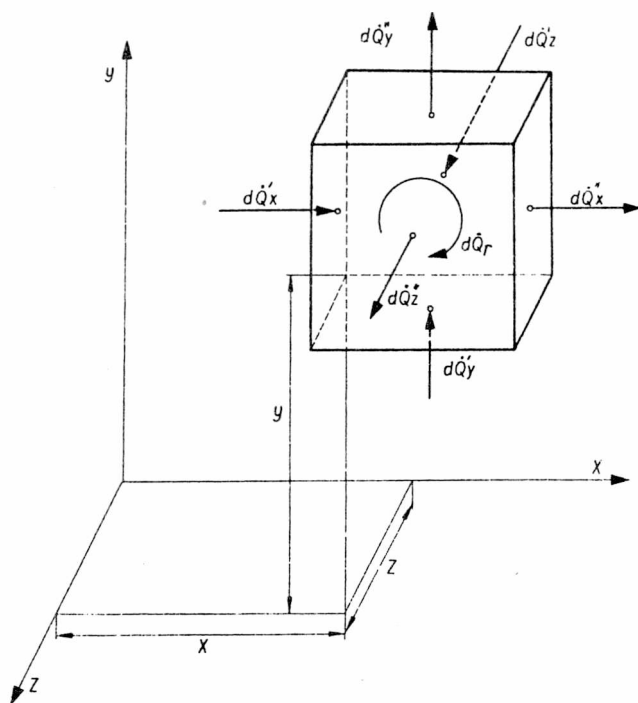
Z porównania (7.1) i (7.2) wynika odnoszący się do powierzchni ciała związek

$$\alpha = \frac{\lambda}{(\vartheta - t)} \frac{\partial t}{\partial n}, \quad (7.3)$$

w którym $\partial t / \partial n$ – gradient temperatury w płynie omywającym powierzchnię zewnętrzną ciała.

7.2. Różniczkowe równanie przewodnictwa ciepłego

Wyobraźmy sobie przedstawiony na rys. 7.1 dowolnie położony niewielki (dyskretny) prostopadłościan o bokach dx , dy i dz . Przez nieruchomy układ odniesienia może przepływać substancja. Załóżmy, że przepływa i niech to będzie



Rys. 7.1. Rozkład przewodzonych strumieni ciepła w substancji przepływającej przez ściany prostopadłościenne wycinka: $dF_x = dy dz$, $dF_y = dx dz$, $dF_z = dx dy$ – wycinki powierzchni, $d\dot{Q}'_x$, $d\dot{Q}'_y$, $d\dot{Q}'_z$, $d\dot{Q}''_x$, $d\dot{Q}''_y$, $d\dot{Q}''_z$ – składowa strumieni ciepła przewodzone przez wycinki powierzchni

płyn. Dla określonych współrzędnych położenie dyskretnego sześciangu nie zmienia się, a tylko płyn może przez niego przepływać. Pole temperatury $t(x, y, z, \tau)$ substancji znajdującej się w układzie nie jest ustalone. Substancja ma wewnętrzne źródła ciepła o wydajności $\dot{q}_r$.

Naszym celem jest ustalenie związku między zmianami temperatury i czasu dla dowolnego położenia rozpatrywanego punktu pola temperatur.

Składowe strumienia ciepła doprowadzonego do prostopadłościennego wycinka substancji, zwanego dalej układem, są oznaczone odpowiednio przez $d\dot{Q}'_x, d\dot{Q}'_y, d\dot{Q}'_z$. Składowe strumienia ciepła odprowadzanego oznaczono $d\dot{Q}''_x, d\dot{Q}''_y, d\dot{Q}''_z$ przekazywane przewodzeniem przez odpowiednie ściany $dF_x = dy dz$; $dF_y = dx dz$; $dF_z = dx dy$ prostopadłościennego wycinka.

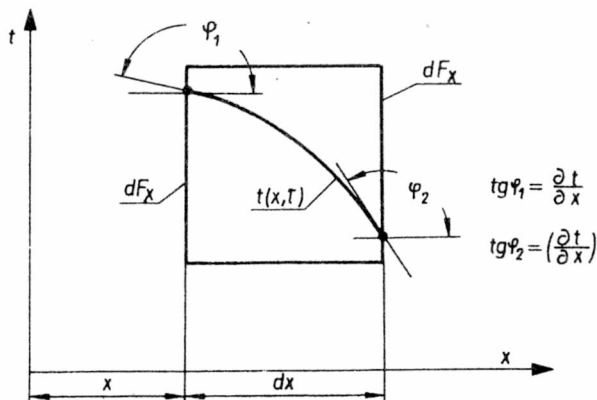
Rozpatrując przewodzenie ciepła w kierunku osi x możemy na podstawie prawa Fouriera obliczyć składową strumienia ciepła przewodzonego do układu

$$d\dot{Q}'_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} dF_x \quad (7.4)$$

i składową strumienia ciepła odprowadzonego z układu

$$d\dot{Q}''_x = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right) dF_x, \quad (7.5)$$

w którym $\partial t / \partial x$ jest składową gradientu temperatury na powierzchni dF_x odległej od początku układu o x , a $(\partial t / \partial x)$ jest składową gradientu powierzchni dF_x odległej o $x + dx$ (patrz rys. 7.2).



Rys. 7.2. Zmiana wzdłuż osi x składowej $\partial t / \partial x$ gradientu temperatury

Składowa $\partial t / \partial x$ gradientu wzdłuż osi x na odcinku dx zmienia się o pewien przyrost składowej, czyli

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right) = \frac{\partial t}{\partial x} + d \frac{\partial t}{\partial x}, \quad (7.6)$$

z czego po obliczeniu otrzymujemy

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right) = \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} dx. \quad (7.7)$$

Jeśli (7.7) wstawimy do (7.5), otrzymamy:

$$d\dot{Q}_x'' = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} dx \right) dF_x. \quad (7.8)$$

Ze składowej strumienia ciepła przewodzonego wzdłuż osi x pozostaje w układzie:

$$d\dot{Q}_x = d\dot{Q}_x' - d\dot{Q}_x'', \quad (7.9)$$

Po podstawieniu równań (7.4) i (7.8) do (7.9) otrzymujemy (gdy $\lambda = \text{const}$):

$$d\dot{Q}_x = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} dx. \quad (7.10)$$

Ponieważ $dF_x = dy dz$, więc w wyniku otrzymujemy

$$d\dot{Q}_x = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} dx dx dz. \quad (7.11)$$

Postępując podobnie otrzymujemy ze składowej strumienia ciepła przewodzonego wzdłuż osi y

$$d\dot{Q}_y = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} dx dy dz, \quad (7.12)$$

a ze składowej strumienia wzdłuż osi z

$$d\dot{Q}_z = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} dx dy dz. \quad (7.13)$$

Równocześnie z wewnętrznych źródeł ciepła o wydajności^{*)} objętościowej $\dot{q}_r$ w układzie powstania strumień $d\dot{Q}_r$ ciepła

$$d\dot{Q}_r = \dot{q}_r dx dy dz. \quad (7.14)$$

^{*)} Źródła ciepła mogą być rozłożone na powierzchni równomiernie w całej objętości wzdłuż linii lub mogą być rozłożone punktowo nieregularnie, z wydajnościami stałymi lub zmiennymi w czasie i przestrzeni.

Po zastosowaniu bilansu energii^{*)} otrzymamy strumień $d\dot{Q}$ ciepła przemiany w rozważanym układzie:

$$d\dot{Q} = d\dot{Q}_x + d\dot{Q}_y + d\dot{Q}_z + d\dot{Q}_r. \quad (7.15)$$

Po podstawieniu do równania (7.15) równań (7.11)–(7.14) i przekształceniu otrzymujemy

$$d\dot{Q} = \left[\lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \dot{q}_r \right] dx dy dz. \quad (7.16)$$

Jeśli przyjmiemy, że zmiany ciśnienia płynu w czasie przepływu są pomijane, to zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki strumień ciepła przemiany płynu znajdującego się w układzie jest równy przyrostowi strumienia entalpii tego płynu, czyli

$$d\dot{Q} = d\dot{I}. \quad (7.17)$$

Przyrost strumienia $d\dot{I}$ entalpii

$$d\dot{I} = c_p \rho dx dy dz \frac{Dt}{d\tau}, \quad (7.18)$$

przy czym

c_p — ciepło właściwe płynu przy stałym ciśnieniu,

ρ — gęstość płynu,

$Dt/d\tau$ — tak zwana substancjalna pochodna temperatury, określająca całkowity przyrost Dt temperatury w danym punkcie w czasie $d\tau$.

Gdy $dx dy dz$ dąży do zera, przyrost temperatury w prostopadłościennym wycinku dąży do przyrostu temperatury w danym punkcie.

Po porównaniu (7.18) oraz (7.16) i podzieleniu obustronnie przez $dx dy dz$ otrzymamy

$$c_p \rho \frac{Dt}{d\tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \dot{q}_r. \quad (7.19)$$

Substancjalną pochodną temperatury rozpiszemy w następujący sposób: temperatura w dowolnym punkcie pola

$$t = t(x, y, z, \tau). \quad (7.20)$$

Tak zwaną różniczką zupełną funkcji $t(x, y, z, \tau)$ jest wyrażenie

$$Dt = \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial t}{\partial x} dx + \frac{\partial t}{\partial y} dy + \frac{\partial t}{\partial z} dz. \quad (7.21)$$

^{*)} Ciepło z wewnętrznych źródeł ciepła w bilansie energetycznym traktuje się jako doprowadzone z zewnątrz; ciepło w upustach (ujemnych źródłach ciepła) jako odprowadzone.

Po podzieleniu (7.21) obustronnie przez $d\tau$ otrzymamy:

$$\frac{Dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial t}{\partial z} \frac{dz}{d\tau}. \quad (7.22)$$

Ponieważ $dx/d\tau$, $dy/d\tau$ i $dz/d\tau$ są odpowiednimi składowymi w_x , w_y , w_z prędkości przepływu substancji, więc substancjalną pochodną temperatury możemy zapisać w postaci

$$\frac{Dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial x} w_x + \frac{\partial t}{\partial y} w_y + \frac{\partial t}{\partial z} w_z, \quad (7.23)^*)$$

gdzie wpływ zmian lokalnych $(\partial t/\partial \tau)$ i konwekcyjnego ruchu substancji $(\partial t/\partial x)w_x + (\partial t/\partial y)w_y + (\partial t/\partial z)w_z$ jest rozdzielony na przyrost temperatury w danym punkcie.

Gdy (7.23) wstawimy do (7.19) i podzielimy obustronnie przez iloczyn $c_p \rho$, otrzymamy nieliniowe równanie różniczkowe drugiego rzędu, określające związek między zmianami temperatury i czasu w dowolnym punkcie przestrzeni dla przepływającego płynu

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial x} w_x + \frac{\partial t}{\partial y} w_y + \frac{\partial t}{\partial z} w_z = a \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right) + \frac{\dot{q}_r}{c_p \rho}, \quad (7.24)$$

w którym $a = \lambda/c_p \rho$ jest to tzw. współczynnik wyrównywania temperatury, zwany także współczynnikiem przewodzenia temperatury.

Na podstawie różniczkowego operatora ∇^2 Laplace'a

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (7.25)$$

równanie (7.24) można zapisać w uproszczonej formie

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial x} w_x + \frac{\partial t}{\partial y} w_y + \frac{\partial t}{\partial z} w_z = a \nabla^2 t + \frac{\dot{q}_r}{c_p \rho}. \quad (7.26)$$

Gdy przepływająca substancja nie ma wewnętrznych źródeł ciepła, równanie (7.26) przechodzi w równanie Fouriera–Kirchhoffa

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial y} w_x + \frac{\partial t}{\partial y} w_y + \frac{\partial t}{\partial z} w_z = a \nabla^2 t. \quad (7.27)$$

*) Podobnie liczy się substancjalną pochodną innych niż temperatura wielkości fizycznych, np. ciśnienia, prędkości, gęstości i innych, gdy wpływ na zmianę w czasie tych wielkości mają zmiany lokalne i przepływ substancji. Jeżeli wielkości te ogólnie zaznaczymy przez φ , to $\varphi = (x y z \tau)$, pochodna substancjonalna

$$\frac{D\varphi}{d\tau} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} w_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} w_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} w_z.$$

Jeśli mamy do czynienia z płynem nieruchomym lub ciałem stałym, to $w_x = w_y = w_z = 0$. Wtedy przyrost temperatury w czasie zależy tylko od zmian lokalnych. Równanie Fouriera–Kirchhoffa uprości się i, np. dla ciała stałego, przyjmie postać różniczkowego równania Fouriera dla nieustalonego przewodzenia ciepła

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = a \nabla^2 \vartheta. \quad (7.28)^*)$$

Jeżeli mamy do czynienia z ustalonym przekazywaniem ciepła, czyli wówczas, gdy $\vartheta \neq \vartheta(\tau)$ a $\partial\vartheta/\partial\tau = 0$, równanie różniczkowe Fouriera przyjmie postać równania Laplace'a

$$\nabla^2 \vartheta = 0. \quad (7.29)$$

Dla jednoosiowego ustalonego przewodzenia ciepła przyjmuje ono najprostszą postać:

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = 0. \quad (7.30)$$

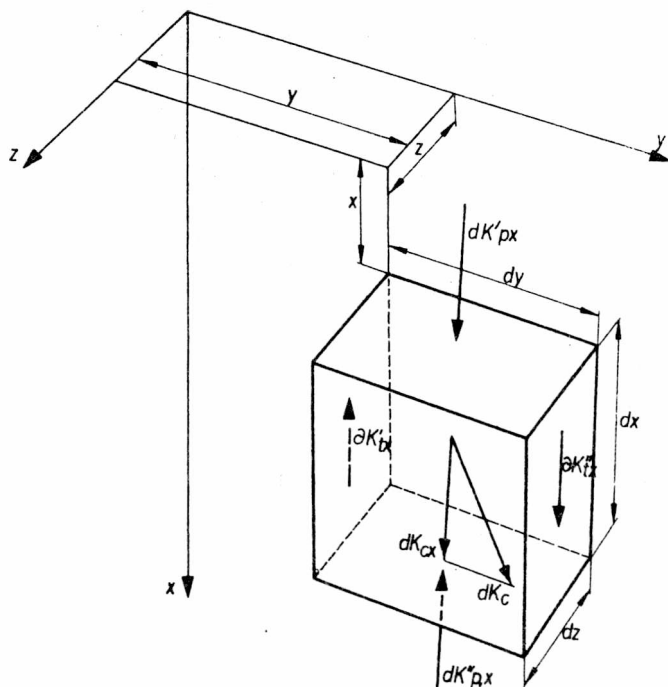
którą można się posłużyć np. do określenia wzoru (3.21) dla ścianki płaskiej.

7.3. Różniczkowe równanie ruchu płynu

W przekazywaniu ciepła w ciałach płynnych lub między ciałem stałym a omywającym je płynem ruch płynu ma duże znaczenie. W ośrodku lepkiem ruch ten zawsze jest wywołany siłami działającymi na płyn lub na jego część. Wyobraźmy sobie prostopadłościenny wycinek o bokach dx , dy i dz , dowolnie położony w układzie x , y , z , usytuowany nieruchomo w poruszającym się płynie. Ruch płynu w tym wycinku powodują siły różnego pochodzenia. Są to działające od zewnątrz na płyn siły parcia, wynikające z różnych ciśnień oddziałujących z zewnątrz na rozpatrywany wycinek płynu, siła ciężkości i siły tarcia. Składowe tych sił w kierunku osi x przedstawiono na rys. 7.3. Zwroty tych sił są tak ustalone, jak gdyby płyn poruszał się zgodnie z osią x .

Algebraiczna suma sił działających na substancję, zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona, równa się iloczynowi masy zawartej w rozpatrywanym prostopadłościennym wycinku i przyspieszenia. Przyspieszenie jest substancjalną pochodną prędkości płynu (patrz odsyłacz do równania (7.23)). Składowe siły wypadkowej (algebraicznej sumy sił) nadają składowe przyspieszenia płynowi.

*) Równanie to najczęściej jest stosowane do obliczania przewodzenia ciepła w ciałach stałych, dlatego temperaturę oznaczono przez ϑ .



Rys. 7.3. Składowe w kierunku osi x sił działających na płyn przepływający przez nieruchomy prostopadłościenny wycinek

Jeżeli na poruszający się płyn nie działają z zewnątrz siły parcia, mówimy, że ruch jest swobodny. Jest on wtedy wywołany tak zwanymi siłami grawitacyjnymi, tj. siłami wyporu. Siły te wynikają z różnic gęstości między rozpatrywanym elementem płynu a jego bliższym lub dalszym otoczeniem w polu grawitacyjnym.

Jeżeli na masę przepływającego płynu, znajdującego się w prostopadłościennym wycinku przestrzennym, zwaną dalej elementem płynu, działają siły przedstawione na rys. 7.3, to składowe tych sił wylicza się w następujący sposób:

Siła ciężkości dK_c elementu płynu równa się iloczynowi masy przez przyspieszenie grawitacyjne

$$dK_c = \rho g dx dy dz, \quad (7.31)$$

przy czym

ρ — gęstość płynu,

g — przyspieszenie grawitacyjne o składowych, g_x , g_y , g_z .

Składowa tej siły w kierunku osi x wynosi

$$dK_{c,x} = \rho g_x dx dy dz. \quad (7.32)$$

Siła parcia $K_{p1,x}$, działająca na element płynu od góry,

$$dK'_{p,x} = p dy dz, \quad (7.33)$$

gdzie p jest to ciśnienie działające na górną powierzchnię $dF_x = dy dz$.

Siła parcia $dK_{p,x}$, działająca na element płynu od dołu,

$$dK''_{p,x} = -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy dz, \quad (7.34)$$

gdzie $p + (\partial p / \partial x) dx$ — ciśnienie działające na płyn od dołu (patrz rys. 7.4).

Znak minus w (7.34) wskazuje, że siła działa z przeciwnym zwrotem niż oś x .

Algebraiczna suma sił parcia $dK_{p,x}$ jest składową sił zewnętrznych, działających na element płynu

$$dK_{p,x} = dK'_{p,x} + dK''_{p,x}. \quad (7.35)$$

Po wstawieniu (7.33) i (7.34) do (7.35) i wyliczeniu otrzymujemy

$$dK_{p,x} = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz. \quad (7.36)$$

Poza tym występują siły tarcia wynikające z lepkości płynu. Składowe s_x tych sił, działające na jednostkę powierzchni, przedstawiono na rys. 7.4. Zgodnie z równaniem Newtona na jednostkę powierzchni omywanej lepkiem płynem działa w kierunku x siła

$$s_x = \eta \frac{\partial w_x}{\partial y}, \quad (7.37)$$

przy czym η — współczynnik lepkości dynamicznej.

Na powierzchnię $dF_y = dx dz$, odległą o y od początku układu, działa siła tarcia

$$dK'_{t,x} = -s_x dx dz, \quad (7.38)$$

na powierzchnię dF_y , odległą o $y + dy$ działa siła

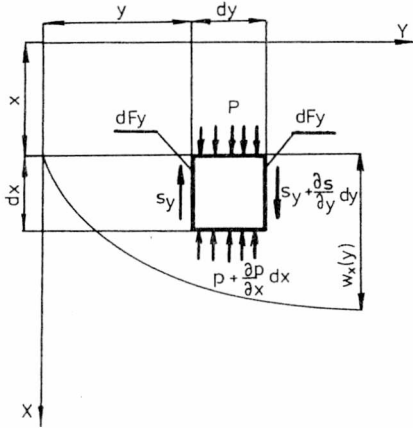
$$dK''_{t,x} = \left(s_x + \frac{\partial s_x}{\partial y} dy\right) dx dz. \quad (7.39)$$

Na podstawie (7.38) i (7.39) częściową składową wypadkowej siły tarcia (algebraiczna suma) możemy zapisać w postaci:

$$\partial K_{t,x} = dK'_{t,x} + dK''_{t,x} = \frac{\partial s_x}{\partial y} dx dy dz. \quad (7.40)$$

Po zróżniczkowaniu według y równania (7.37) przy stałym η otrzymamy:

$$\frac{\partial s_x}{\partial y} = \eta \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}. \quad (7.41)$$



Rys. 7.4. Ciśnienie i siły tarcia działające na wycinek płynu: p — ciśnienie, s — jednostkowa siła tarcia

Jeśli do (7.40) wstawimy (7.41), otrzymujemy wzór określający częściową składową sił tarcia

$$\partial K_{t,x} = \eta \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} dx dy dz. \quad (7.42)$$

Na rysunku 7.4 przedstawiono dla danego x zarys profilu składowej w_x prędkości w zależności od y . Gdy przepływ rozpatrujemy ogólnie jak na rys. 7.3, to w niewielkim przedziale $d\tau$ czasu składowa prędkości $w_x = w_x(x, y, z)$. Należy więc uwzględnić, oprócz częściowej prędkości składowej sił tarcia, wyliczonej za pomocą równania (7.42), także częściowe składowe wynikające z gradientów prędkości w_x w innych kierunkach. Całkowita składowa $dK_{t,x}$ w kierunku osi x sił tarcia, działających na element płynu, wynosi

$$dK_{t,x} = \eta \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right) dx dy dz. \quad (7.43)$$

Na podstawie różniczkowego operatora Laplace'a równanie to można zapisać w skróconej formie

$$dK_{t,x} = \eta \nabla^2 w_x dx dy dz. \quad (7.44)$$

Siła wypadkowa dK_x , działająca na element płynu w kierunku osi x , jest algebraiczną sumą składowych siły ciężkości, sił parcia i sił lepkości. Możemy napisać

$$dK_x = dK_{c,x} + dK_{p,x} + dK_{t,x}. \quad (7.45)$$

Jeżeli do równania (7.45) wstawimy (7.32), (7.36) i (7.44), to w wyniku sumowania otrzymamy

$$dK_x = \left(g_x \rho - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \nabla^2 w_x \right) dx dy dz. \quad (7.46)$$

Siła wypadkowa dK_x nadaje masie dm płynu zawartego w prostopadłościennym wycinku przyspieszenie a_x w kierunku osi x

$$dK_x = a_x dm. \quad (7.47)$$

Masa płynu

$$dm = \rho dx dy dz. \quad (7.48)$$

Przyspieszenie a_x jest pochodną prędkości w_x względem czasu. Ponieważ $w_x = w_x(x, y, z, \tau)$, więc przyspieszenie jest znaną nam (patrz odsyłacz do równania (7.23)) pochodną substancjalną $Dw_x/d\tau$

$$a_x = \frac{Dw_x}{d\tau} = \frac{\partial w_x}{\partial \tau} + \frac{\partial w_x}{\partial x} w_x + \frac{\partial w_x}{\partial y} w_y + \frac{\partial w_x}{\partial z} w_z. \quad (7.49)$$

Jeżeli równania (7.46) i (7.47) przyrównamy do siebie, zamiast dm i a_x wstawimy odpowiednio (7.48) i (7.49), obie strony podzielimy przez iloczyn $dx dy dz$, to otrzymamy:

$$g_x \rho - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \nabla^2 w_x = \rho \left(\frac{\partial w_x}{\partial \tau} + \frac{\partial w_x}{\partial x} w_x + \frac{\partial w_x}{\partial y} w_y + \frac{\partial w_x}{\partial z} w_z \right). \quad (7.50)^*)$$

Jeśli podobnie przeanalizujemy siły działające w kierunku osi y oraz skutki ich działania, dojdziemy do równania

$$g_y \rho - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \nabla^2 w_y = \rho \left(\frac{\partial w_y}{\partial \tau} + \frac{\partial w_y}{\partial x} w_x + \frac{\partial w_y}{\partial y} w_y + \frac{\partial w_y}{\partial z} w_z \right). \quad (7.50a)$$

podobnie dla kierunku z

$$g_z \rho - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \nabla^2 w_z = \rho \left(\frac{\partial w_z}{\partial \tau} + \frac{\partial w_z}{\partial x} w_x + \frac{\partial w_z}{\partial y} w_y + \frac{\partial w_z}{\partial z} w_z \right). \quad (7.50b)$$

Układ równań różniczkowych ruchu płynu (7.50) zwie się układem Naviera–Stokesa. Podają one dla dowolnego położenia cząstki płynu o stałej lepkości**) związek między przyrostami prędkości i czasu w polu sił ciężkości, sił zewnętrznych i tarcia.

Podczas ruchu swobodnego w układzie równań znikają cząstkowe pochodne przestrzenne ciśnienia ($\partial p / \partial x = \partial p / \partial y = \partial p / \partial z = 0$). Ruch odbywa się wtedy na skutek sił wyporu, więc w układzie równań zamiast składowych odniesionych do jednostki objętości siły ciężkości $g_x \rho$, $g_y \rho$, $g_z \rho$ pojawiają się odpowiednie składowe siły wyporu***) $W = g(\rho - \rho_o)$, mianowicie $g_x(\rho - \rho_o)$, $g_y(\rho - \rho_o)$ i $g_z(\rho - \rho_o)$; ρ_o jest gęstością w temperaturze t_o płynu w pewnej odległości od wycinka.

7.4. Różniczkowe równanie ciągłości

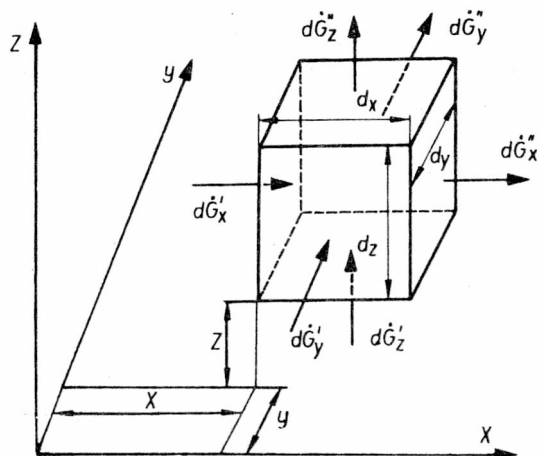
Równanie ciągłości wynika z bilansu substancji. Jeżeli w przepływającym płynie wyobrazimy sobie prostopadłościenny, nieruchomy, dowolnie położony wycinek przestrzenny o bokach dx , dy , dz , to po zastosowaniu do wpływającego do niego

*) Wszystkie składniki układu równań (7.50) mają wymiar siły odniesionej do objętości.

**) Lepkość nie jest stała. Przy stałym ciśnieniu jest funkcją temperatury $\eta = \eta(t)$. W przedziale $d\tau$ czasu temperatura $t = t(x, y, z)$, więc i lepkość $\eta = \eta(x, y, z)$. Gdy uwzględnimy tę zmianę lepkości różniczkując równania (7.37), to we wzorze (7.43) określającym składową siły tarcia otrzymamy dodatkowy człon różniczkowy. Człon ten wejdzie do układu równań (7.50).

***). Siłę wyporu W , odniesioną do jednostki objętości, można wyrazić za pomocą współczynnika rozszerzalności objętościowej β . Przy stałym ciśnieniu związek między gęstością w temperaturze t i gęstością w temperaturze t_o jest wyrażony przez $\rho_o = \rho(1 + \beta \Delta t)$, stąd $\rho - \rho_o = -\rho \beta \Delta t$, więc siła wyporu $W = -g \rho \beta \Delta t$.

i wypływającego płynu bilansu substancji otrzymamy różniczkowe równanie ciągłości (rys. 7.5). Prostopadłościenny wycinek przestrzenny z zawartym w nim płynem będziemy dalej nazywali wycinkiem.



Rys. 7.5. Składowe strumieni substancji płynu dopływającego do prostopadłościennego wycinka przestrzennego

Przez ścianę $dF_x = dydz$, odległą o x od początku układu odniesienia, do rozpatrywanego wycinka wpływa zgodnie z osią x strumień substancji

$$d\dot{G}'_x = \rho w_x dy dz. \quad (7.51)$$

Przez ścianę dF_x , odległą od początku układu odniesienia o $x+dx$, z wycinka wypływa w kierunku osi x

$$d\dot{G}''_x = \left[\rho w_x + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} dx \right] dy dz. \quad (7.52)$$

Przyrost strumienia substancji w kierunku osi x na długości dx wycinka powoduje ubytek strumienia $d\dot{G}_x$ substancji z obszaru wycinka

$$d\dot{G}_x = d\dot{G}''_x - d\dot{G}'_x, \quad (7.53)$$

Po wstawieniu (7.51) i (7.52) i wykonaniu działań otrzymamy

$$d\dot{G}_x = \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} dx dy dz. \quad (7.54)$$

Podobnie dla przepływu wzdłuż osi y

$$d\dot{G}_y = \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} dx dy dz \quad (7.55)$$

i wzdłuż osi z

$$d\dot{G}_z = \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} dx dy dz. \quad (7.56)$$

Całkowity przyrost strumienia substancji w obszarze wycinka jest sumą przyrostów wzdłuż osi x , y oraz z

$$d\dot{G} = d\dot{G}_x + d\dot{G}_y + d\dot{G}_z. \quad (7.57)$$

Jeżeli wstawimy (7.54), (7.55) i (7.56) do równania (7.57) określającego całkowity odniesiony do czasu przyrost ilości substancji wypływającej z obszaru wycinka, otrzymamy wzór:

$$d\dot{G} = \left[\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} \right] dx dy dz. \quad (7.58)$$

Odniesiony do czasu przyrost $d\dot{G}$ ilości substancji wypływającej z obszaru wycinka powoduje w tym obszarze odniesiony do czasu spadek gęstości o $\partial\rho/\partial\tau$. Obowiązuje więc równość

$$d\dot{G} = -\frac{\partial\sigma}{\partial\tau} dx dy dz. \quad (7.59)$$

Po przyrównaniu (7.58) z (7.59), podzieleniu przez iloczyn $dx dy dz$ i przeniesieniu wyrazów na jedną stronę otrzymamy obowiązującą w każdym punkcie przepływającego płynu (gazu lub cieczy) zależność

$$\frac{d\rho}{d\tau} + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0, \quad (7.60)$$

zwaną różniczkowym równaniem ciągłości.

Jeżeli mamy do czynienia tylko z cieczą, dla której można przyjąć $\rho = \text{const}$, to

$$\frac{d\rho}{d\tau} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} = \rho \frac{\partial w_x}{\partial x}.$$

Dla cieczy różniczkowe równanie ciągłości przyjmuje postać

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0. \quad (7.61)$$

W każdym punkcie suma przyrostów prędkości cieczy wzdłuż osi x , y i z jest równa zero.

8. Teoria podobieństwa

Równania różniczkowe nie nadają się do bezpośredniego wykorzystania w projektowaniu i eksploatacji konkretnych maszyn i urządzeń technicznych. Mogą być przydatne jedynie do określania kierunku zmian wielkości występujących w zjawiskach opisanych równaniem, bez określenia konkretnych liczb interesujących nas wielkości.

W wyniku całkowania równania różniczkowego też nie otrzymujemy konkretnych liczb potrzebnych w postępowaniu technicznym. Dopiero wówczas, gdy wyznaczy się stałe całkowania, równanie staje się konkretnym wzorem obliczeniowym. Niejednokrotnie brak nam informacji do ustalenia warunków koniecznych do wyznaczenia stałych całkowania, a nieraz operacje matematyczne utrudniają lub wręcz uniemożliwiają analityczne wyznaczenie tych stałych. Z tych względów niejednokrotnie jesteśmy zmuszeni do szukania rozwiązań eksperymentalnych. Nawet jeśli mamy już wyliczony konkretny wzór obliczeniowy, to poprawność przyjętych założeń i uproszczeń umożliwiających wyznaczenie stałych całkowania można niezawodnie sprawdzić zazwyczaj za pomocą badań eksperymentalnych^{*)}.

Gdy decydujemy się na postępowanie eksperymentalne, nasuwają się pytania:

- jakie wielkości mierzyć w prowadzonych badaniach?
- w jaki sposób opracować wyniki badań prowadzonych na konkretnym obiekcie, czy można wyniki te przenieść na obiekty inne, podobne?

Odpowiedź na te pytania zawiera teoria podobieństwa zjawisk. Teorię tę nazywa się nieraz teorią modeli, ponieważ badania prowadzimy zwykle nie na gotowych obiektach (bo te na przykład mają być dopiero budowane), ale na modelach. Teoria ta jest stosowana w przekazywaniu ciepła, a zwłaszcza w konwencji i promieniowaniu. Aby móc mówić o podobieństwie zjawisk, najpierw musimy ustalić warunki konieczne do jednoznacznego ich określenia.

^{*)} W odniesieniu do zjawisk, w których nie jesteśmy w stanie ustalić matematycznych zależności między wielkościami nawet w postaci różniczkowej, badania eksperymentalne są jedynym sposobem rozwiązywania.

8.1. Warunki jednoznaczności

Zjawisko fizyczne nie jest jeszcze jednoznacznie określone, gdy znamy różniczkowy związek między wielkościami decydującymi o jego przebiegu. Odnosi się to także do przypadku, gdy znamy zależność ogólną (całkę ogólną).

Występujące tam ogólne stałe całkowania umożliwiają uzyskanie różnych i wcale niepodobnych, konkretnych wyników.

Oprócz równania różniczkowego lub ogólnego równania całkowego, aby jednoznacznie pod względem matematycznym określić zjawiska, należy sprecyzować tzw. warunki jednoznaczności. Obejmują one:

- a) warunki geometryczne obiektu (kształtu),
- b) właściwości fizyczne obiektu i opływającego go płynu,
- c) warunki dotyczące przekazywania ciepła na powierzchni obiektu, czyli tzw. warunki brzegowe,
- d) warunki przekazywania ciepła w konkretnej chwili, czyli tzw. warunki czasowe (początkowe lub końcowe); te ostatnie są stosowane podczas badań nieustalonego procesu przekazywania ciepła).

Dopiero zespół równań różniczkowych lub ogólnych całkowych i warunków jednoznaczności określają jednoznacznie pod względem matematycznym zjawisko i jego przebieg.

8.2. Niezmienniki zjawiska ^{*)}

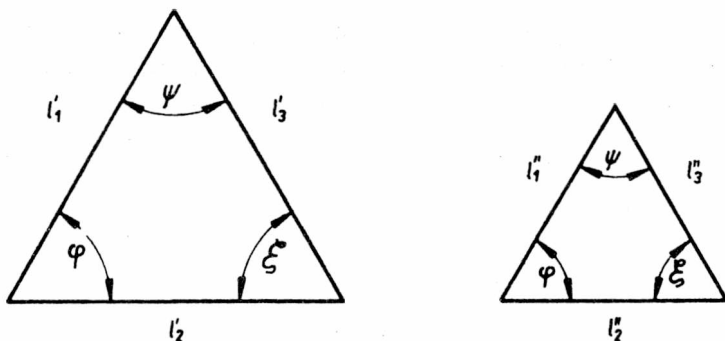
Teoria podobieństwa zjawisk wywodzi się z podobieństwa figur geometrycznych. Dwie figury są podobne, jeśli stosunki odpowiednich wymiarów liniowych obu figur są sobie równe (rys. 8.1)

$$\frac{l'_1}{l''_1} = \frac{l'_2}{l''_2} = \frac{l'_3}{l''_3} = C_l. \quad (8.1)$$

Gdy jest spełniony warunek proporcjonalności wymiarów liniowych, wówczas odpowiednie kąty w obu figurach są sobie równe, są niezmiennicze.

Jeśli rozpatrujemy podobieństwo dwu zjawisk fizycznych, to musimy pamiętać, że stosunki odpowiednich wielkości opisujących te zjawiska nie muszą być i z reguły nie są stałe. Są one bezwymiarowe, ponieważ odnosimy do siebie wielkości tego samego rodzaju, a więc o tym samym wymiarze. Nie można ich wszystkich przyjmować dowolnie, chociaż są one różne.

^{*)} Niezmienniki zjawiska nazywa się także liczbami znamionymi, liczbami kryterialnymi lub modułami bezwymiarowymi.



Rys. 8.1. Trójkąty podobne: $l'_1/l'_1 = l'_2/l'_2 = l'_3/l'_3 = C_1$

Rozpatrzmy przykładowo zjawisko ruchu ciała sztywnego poddanego działaniu siły. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona

$$K = m a, \quad (8.2)$$

przy czym m — masa, K — siła, a — przyspieszenie.

W pierwszym zjawisku zachodzi równość

$$K' = m' a', \quad (8.3)$$

a w drugim

$$K'' = m'' a''. \quad (8.4)$$

Stosunki odpowiednich wielkości decydujących o przebiegu zjawiska, zwane stałymi podobieństwa, są następujące:

$$\frac{K'}{K''} = C_k; \quad \frac{m'}{m''} = C_m; \quad \frac{a'}{a''} = C_a, \quad (8.5)$$

na ogół

$$C_k \neq C_m \neq C_a.$$

Na podstawie stosunków C_k , C_m oraz C_a wielkości decydujące o przebiegu pierwszego zjawiska K' , m' i a' możemy wyrazić za pomocą wielkości z drugiego zjawiska

$$K' = C_k K''; \quad m' = C_m m''; \quad a' = C_a a'', \quad (8.6)$$

Po wstawieniu zależności (8.6) do równania (8.3) otrzymamy

$$C_k K'' = C_m C_a m'' a''. \quad (8.7)$$

Zjawisko pierwsze wyraziliśmy za pomocą parametrów zjawiska drugiego. Ponieważ w równaniu (8.4) i (8.7) występują te same parametry, równość (8.7) może być spełniona jedynie na zasadzie tożsamości z równaniem (8.4). Wtedy

$$C_k = C_m C_a, \quad (8.8)$$

co można napisać w postaci

$$\frac{C_m C_a}{C_k} = 1. \quad (8.9)$$

Równanie to ogranicza możliwość dowolnego doboru liczb podobieństwa C_k , C_m oraz C_a .

Jeżeli zależności (8.5) wykorzystamy w równaniu (8.9) i odpowiednio rozdzielimy wielkości opisujące oba zjawiska, otrzymamy:

$$\frac{m' a'}{K'} = \frac{m'' a''}{K''} = \text{idem}. \quad (8.10)$$

Ponieważ rozpatrujemy dwa dowolne zjawiska opisane równaniem Newtona, więc dla wszystkich zjawisk tego typu zachodzi równość:

$$\frac{m a}{K} = \text{idem} = \text{Ne}. \quad (8.10a)$$

Jest ona niezmiennikiem zjawiska, zwanym liczbą znamioną Newtona^{*)}. Możemy powiedzieć, że dwa zjawiska ruchu ciała sztywnego poddanego działaniu siły są podobne, jeśli liczby znamienne Ne w obu zjawiskach są równe.

Omówione zjawisko ruchu substancji jest stosunkowo proste, opisuje je tylko jeden niezmiennik. Postarajmy się obecnie tą metodą^{**)} znaleźć niezmienniki tych zjawisk, które są opisane równaniem różniczkowym w rozdz. 7. Są to zjawiska przekazywania ciepła w ciałach stałych i poruszającym się płynie, więc głównie zjawiska konwekcji.

Dla uproszczenia zastosujemy równania w postaci nie najogólniejszej.

Ruch płynu jest opisany równaniem ciągłości

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0 \quad (8.11)$$

i równaniami Naviera-Stokesa, które napiszemy tylko dla kierunku x

$$g_x \rho - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \nabla^2 w_x = \left(\frac{\partial w_x}{\partial \tau} + \frac{\partial w_x}{\partial x} w_x + \frac{\partial w_x}{\partial y} w_y + \frac{\partial w_x}{\partial z} w_z \right). \quad (8.12)$$

^{*)} Nazwy liczb znamionnych tworzy się od pierwszych liter nazwisk uczonych i badaczy, którzy zasłużyli się w rozwoju danej dyscypliny nauki.

^{**)} Są znane inne sposoby określenia liczb znamionnych.

Dla dwu różnych zjawisk opisanych tymi samymi równaniami możemy napisać układy równań:

– dla zjawiska pierwszego

$$\begin{aligned} \frac{\partial w'_x}{\partial x'} + \frac{\partial w'_y}{\partial y'} + \frac{\partial w'_z}{\partial z'} &= 0, \\ g'_x \rho' - \frac{\partial p'}{\partial x'} + \eta' \nabla^2 w'_x &= \rho' \left(\frac{\partial w'_x}{\partial \tau'} + \frac{\partial w'_x}{\partial x'} w'_x + \frac{\partial w'_x}{\partial y'} w'_y + \frac{\partial w'_x}{\partial z'} w'_z \right); \end{aligned} \quad (8.13)$$

– dla zjawiska drugiego

$$\begin{aligned} \frac{\partial w''_x}{\partial x''} + \frac{\partial w''_y}{\partial y''} + \frac{\partial w''_z}{\partial z''} &= 0, \\ g''_x \rho'' - \frac{\partial p''}{\partial x''} + \eta'' \nabla^2 w''_x &= \rho'' \left(\frac{\partial w''_x}{\partial \tau''} + \frac{\partial w''_x}{\partial x''} w''_x + \frac{\partial w''_x}{\partial y''} w''_y + \frac{\partial w''_x}{\partial z''} w''_z \right). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Dla wielkości zmiennych opisujących zjawiska możemy napisać stałe podobieństwa

$$\begin{aligned} \frac{x'}{x''} = \frac{y'}{y''} = \frac{z'}{z''} &= C_l; \quad \frac{w'_x}{w''_x} = \frac{w'_y}{w''_y} = \frac{w'_z}{w''_z} = C_w; \\ C_\eta = \frac{\eta'}{\eta''}; \quad \frac{\tau'}{\tau''} &= C_\tau; \quad \frac{\rho'}{\rho''} = C_\rho; \quad \frac{p'}{p''} = C_p; \quad \frac{g'}{g''} = C_g. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Jeśli wielkości opisujące zjawisko pierwsze wyrazimy za pomocą wielkości opisujących zjawisko drugie oraz stałych podobieństwa, otrzymamy

$$\begin{aligned} x' &= C_l x''; \quad w'_x = C_w w''_x; \quad \tau' = C_\tau \tau''; \\ \rho' &= C_\rho \rho''; \quad p' = C_p p''; \quad g'_w = C_g g''_w. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Po wstawieniu zależności (8.16) do (8.13) otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{C_w}{C_l} \left(\frac{\partial w''_x}{\partial x''} + \frac{\partial w''_y}{\partial y''} + \frac{\partial w''_z}{\partial z''} \right) &= 0, \\ C_g C_\rho g''_x \rho'' - \frac{C_p}{C_l} \frac{\partial p''}{\partial x''} + \frac{C_\eta C_w}{C_l^2} \eta'' \nabla^2 w''_x &= \\ = \frac{C_\rho C_w}{C_\tau} \rho \frac{\partial w''_x}{\partial \tau''} + \frac{C_\rho C_w^2}{C_l} \rho \left(\frac{\partial w''_x}{\partial x''} w''_x + \frac{\partial w''_x}{\partial y''} w''_y + \frac{\partial w''_x}{\partial z''} w''_z \right). \end{aligned} \quad (8.17)^*$$

*) Stałe podobieństwa pochodnych (także zapisanych operatorem) wyznaczamy następująco:

$$\frac{\partial (C_w w'')}{\partial (C_l x'')} = \frac{C_w}{C_l} \frac{\partial w''}{\partial x''}; \quad \frac{\partial^2 (C_\eta \varphi)}{\partial (C_l x'')^2} = \frac{\partial}{\partial (C_l x'')} \frac{\partial (C_\eta \varphi)}{\partial (C_l x'')} = \frac{C_\eta}{C_l^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2}.$$

Zjawisko pierwsze możemy opisać parametrami zjawiska drugiego, jeśli układy równań (8.14) i (8.17) są odpowiednio tożsame.

Wynikają stąd równości

$$\frac{C_w}{C_l} = \text{const}$$

oraz

$$C_\rho C_g = \frac{C_p}{C_l} = \frac{C_\eta C_w}{C_l^2} = \frac{C_\rho C_w}{C_\tau} = \frac{C_\rho C_w^2}{C_l}. \quad (8.18)^*)$$

Gdy przyrównamy odpowiednio wyrażenia zawierające stałe podobieństwa z równania ruchu, możemy napisać:

$$\frac{C_\rho C_w}{C_\tau} = \frac{C_\rho C_w^2}{C_l}, \quad \text{stąd} \quad \frac{C_w C_\tau}{C_l} = 1, \quad (8.19)$$

$$\frac{C_\rho C_w^2}{C_l} = C_\rho C_g, \quad \text{stąd} \quad \frac{C_g C_l}{C_w^2} = 1, \quad (8.20)$$

$$\frac{C_\rho C_w^2}{C_l} = \frac{C_p}{C_l}, \quad \text{stąd} \quad \frac{C_p}{C_\rho C_w^2} = 1, \quad (8.21)$$

$$\frac{C_\rho C_w^2}{C_l} = \frac{C_\eta C_w}{C_l^2}, \quad \text{stąd} \quad \frac{C_\rho C_w C_l}{C_\eta} = 1. \quad (8.22)$$

Jeśli w równaniach (8.19) do (8.22) za stałe podobieństwa wstawimy odpowiednio (8.16) i rozdzielimy zmienne opisujące zjawisko pierwsze i drugie, to otrzymamy

$$\frac{w' \tau'}{l'} = \frac{w'' \tau''}{l''} \quad \text{lub} \quad \frac{w \tau}{l} = \text{Ho} = \text{idem}, \quad (8.23)$$

$$\frac{l' g'}{w'^2} = \frac{g'' l''}{w''^2} \quad \text{lub} \quad \frac{g l}{w^2} = \text{Fr} = \text{idem}. \quad (8.24)$$

$$\frac{p'}{\rho' w'^2} = \frac{p''}{\rho'' w''^2} \quad \text{lub} \quad \frac{p}{\rho w^2} = \text{Eu} = \text{idem}, \quad (8.25)$$

$$\frac{\rho' w' l'}{\eta'} = \frac{\rho'' w'' l''}{\eta''} \quad \text{lub} \quad \frac{\rho w l}{\eta} = \text{Re} = \text{idem}. \quad (8.26)$$

Ho, Fr, Eu, Re są to niezmienniki zjawiska ruchu płynu. Niezmienniki te, będące kryteriami tzw. podobieństwa mechanicznego, zwie się odpowiednio liczbami

*) Równania ciągłości napisane dla obu zjawisk są zawsze tożsame bez względu na wielkość stosunku C_w/C_l . Równania te nie stwarzają ograniczeń w doborze stałych podobieństwa.

znamiennymi Hodgsona, Froude'a, Eulera, Reynoldsa. Jeśli zależy nam na uchwyceniu wpływu nie ciśnienia p , lecz jego różnicy, liczbę Eulera przedstawia się w postaci

$$\frac{\Delta p}{\rho w^2} = Eu \quad (8.27)$$

Liczba ta jest stosowana w pomiarach określających spadek ciśnienia w funkcji liczby Reynoldsa.

Liczby znamienne w równaniach (8.23)–(8.26) określają warunki ruchu płynu, który ma duży wpływ na zjawisko przekazywania ciepła, zwłaszcza między ciałem stałym a omywającym to ciało płynem. Zjawisko przekazywania ciepła na powierzchni jest opisane równaniem

$$\alpha = \frac{\lambda}{g-t} \frac{\partial t}{\partial n}. \quad (8.28)$$

Przewodzenia ciepła w poruszającym się płynie dotyczy równanie (7.26)*). Dla uproszczenia, pomijając wpływ wewnętrznych źródeł ciepła, zastosujemy równanie Fouriera-Kirchhoffa

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial x} w_x + \frac{\partial t}{\partial y} w_y + \frac{\partial t}{\partial z} w_z = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right). \quad (8.29)$$

Po zastosowaniu równań (8.28) i (8.29) do zjawiska pierwszego otrzymamy układ równań:

$$\alpha' = \frac{\lambda'}{(g-t)'} \frac{\partial t'}{\partial n'}, \quad (8.30)$$

$$\frac{\partial t'}{\partial \tau'} + \frac{\partial t'}{\partial x'} w'_x + \frac{\partial t'}{\partial y'} w'_y + \frac{\partial t'}{\partial z'} w'_z = a' \left(\frac{\partial^2 t'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 t'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 t'}{\partial z'^2} \right), \quad (8.30)$$

i dla zjawiska drugiego

$$\alpha'' = \frac{\lambda''}{(g-t)''} \frac{\partial t''}{\partial n''}, \quad (8.31)$$

$$\frac{\partial t''}{\partial \tau''} + \frac{\partial t''}{\partial x''} w''_x + \frac{\partial t''}{\partial y''} w''_y + \frac{\partial t''}{\partial z''} w''_z = a \frac{\partial^2 t''}{\partial x''^2} + \frac{\partial^2 t''}{\partial y''^2} + \frac{\partial^2 t''}{\partial z''^2}. \quad (8.31)$$

*) Na podstawie równania (7.26) zwiększa się liczby kryterialne, opisujące zjawisko o liczbę ujmującą wpływ wewnętrznych źródeł ciepła.

W omawianych dwóch zjawiskach przekazywania ciepła stałe podobieństwa są następujące:

$$\begin{aligned} C_\alpha &= \frac{\alpha'}{\alpha''}; & C_l &= \frac{x'}{x''} = \frac{y'}{y''} = \frac{z'}{z''} = \frac{n'}{n''}; & C_t &= \frac{t'}{t''} = \frac{(g-t)'}{(g-t)''}; \\ C_w &= \frac{w'_x}{w''_x} = \frac{w'_y}{w''_y} = \frac{w'_z}{w''_z}; & C_\lambda &= \frac{\lambda'}{\lambda''}; & C_\tau &= \frac{\tau'}{\tau''}; & C_a &= \frac{a'}{a''}. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Jeżeli parametry określające zjawisko pierwsze wyrazimy za pomocą parametrów zjawiska drugiego, pomnożonych przez odpowiednie stałe podobieństwa i wstawimy do układu równań (8.30), otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{C_t}{C_\tau} \frac{\partial t''}{\partial \tau''} + \frac{C_w C_t}{C_l} \left(\frac{\partial t''}{\partial x''} w''_x + \frac{\partial t''}{\partial y''} w''_y + \frac{\partial t''}{\partial z''} w''_z \right) = \\ \frac{C_a C_t}{C_l^2} a'' \left(\frac{\partial^2 t''}{\partial x''^2} + \frac{\partial^2 t''}{\partial y''^2} + \frac{\partial^2 t''}{\partial z''^2} \right), \\ C_\alpha \alpha'' = - \frac{C_\lambda}{C_l} \frac{\lambda''}{(g-t)''} \frac{\partial t''}{\partial n''}. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Z warunku tożsamości układów równań (8.33) i (8.31) wynika

$$\frac{C_t}{C_\tau} = \frac{C_w C_t}{C_l} = \frac{C_a C_t}{C_l^2} \quad \text{oraz} \quad C_\alpha = \frac{C_\lambda}{C_l}. \quad (8.34)$$

Grupując odpowiednio równości możemy napisać:

$$\frac{C_t}{C_\tau} = \frac{C_a C_t}{C_l^2}, \quad \text{z tego zaś} \quad \frac{C_a C_\tau}{C_l^2} = 1, \quad (8.35)$$

$$\frac{C_w C_t}{C_l} = \frac{C_a C_t}{C_l}, \quad \text{z tego zaś} \quad \frac{C_w C_l}{C_a} = 1, \quad (8.36)$$

$$C_\alpha = \frac{C_\lambda}{C_l}, \quad \text{z tego zaś} \quad \frac{C_\alpha C_l}{C_\lambda} = 1. \quad (8.37)$$

Jeżeli w równaniach (8.35), (8.36) i (8.37) zamiast stałych podobieństwa wstawimy stosunki parametrów podane w (8.32) i odpowiednio mnożąc stronami rozdzielimy parametry określające oba zjawiska, to otrzymamy:

$$\frac{\alpha' \tau'}{l^2} = \frac{\alpha'' \tau''}{l''^2}, \quad \text{czyli} \quad \frac{\alpha \tau}{l^2} = \text{Fo} = \text{idem}, \quad (8.38)$$

$$\frac{w' l'}{a'} = \frac{w'' l''}{a''}, \quad \text{czyli} \quad \frac{w l}{a} = \text{Pe} = \text{idem}, \quad (8.39)$$

$$\frac{\alpha' l'}{\lambda'} = \frac{\alpha'' l''}{\lambda''}, \quad \text{czyli} \quad \frac{\alpha l}{\lambda} = \text{Nu} = \text{idem}, \quad (8.40)$$

gdzie Fo, Pe i Nu są niezmiennikami zjawiska, nazywanymi odpowiednio liczbami znamionymi Fouriera-Pecleta i Nusselta. Są to liczby określające tzw. cieplne podobieństwo zjawisk.

Oczywiście w zjawiskach przekazywania ciepła, oprócz podobieństwa cieplnego, muszą być spełnione warunki określające podobieństwo mechaniczne.

W przekazywaniu ciepła, oprócz wymienionych liczb znamionych, spotykamy także inne, powstałe bądź z przekształcenia wymienionych liczb znamionych, bądź otrzymane z innych albo nieco zmienionych równań opisujących zjawiska. Są to:

liczba znamionna Grasshoffa

$$\text{Gr} = \text{Fr} \text{Re}^2 \beta \Delta T = \frac{g \beta l^3 \Delta T}{\nu^2} \quad (8.41)$$

liczba znamionna Prandtla

$$\text{Pr} = \frac{\text{Pe}}{\text{Re}} = \frac{w l}{a} \frac{\nu}{w l}, \quad (8.42)$$

co można przedstawić następująco:

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a} = \frac{\nu}{\lambda} c_p \rho = \frac{\nu c_p \rho}{\lambda}, \quad (8.43)$$

liczba znamionna Stanton

$$\text{St} = \frac{\text{Nu}}{\text{Pe}} = \frac{\alpha l}{\lambda} \frac{\lambda}{w c_p l \rho} = \frac{a}{w \rho c_p}, \quad (8.44)$$

liczba znamionna Biota

$$\text{Bi} = \frac{\alpha l}{\lambda_{sc}}, \quad (8.45)$$

Liczby znamienne Gr Grasshoffa, podobnie jak Fr Froude'a, dotyczą wplywu pola grawitacyjnego na ruch płynu. Liczba znamionna Pr dotyczy tylko parametrów określających właściwości fizyczne ośrodka^{*)}, w którym zjawisko zachodzi.

Liczby znamienne St i Bi, podobnie jak liczba znamionna Nu, są funkcją współczynnika α przejmowania ciepła. Jest to ich wspólną cechą charakterystyczną.

^{*)} Dla gazów idealnych o stałej liczbie cząstek liczba Pr jest stała i dla gazów jednoatomowych $\text{Pr} = 0,67$, dla dwuatomowych $\text{Pr} = 0,72$, trójatomowych $\text{Pr} = 0,8$, cztero- i więcej atomowych $\text{Pr} = 1$. Dla gazów rzeczywistych Pr nie jest stałe i odbiega od wymienionych wartości.

W liczbie Bi, która wyraża się takim samym wzorem jak liczba Nu, występuje współczynnik przewodzenia ciepła ściany λ_{sc} , nie zaś płynu jak w liczbie Nu. W liczbie Stanton nie występują wymiary liniowe opływanego przedmiotu, co jest nieraz korzystne w przedstawieniu wyników badań.

Oprócz wymienionych liczb znamiennych mogą występować liczby znamienne o innej budowie, uzyskane nawet z opisanego układu równań (np. przy innym wykorzystaniu wymienionych w (8.35), (8.36) i (8.37) równości). Ilość znamiennych liczb niezależnych dla danego zjawiska jest ściśle określona.

Z innych sposobów znajdowania niezmienników zjawiska należy wymienić sposób oparty na teoremacie Buckinghama i analizie wymiarowej. Sposób ten jest korzystny zwłaszcza wtedy, gdy nie znamy szczegółowych związków matematycznych między wielkościami opisującymi zjawisko. Znamy tylko zależność ogólną, o której wiemy, że jest wielkościowa i jednorodna^{*)}, homogeniczna.

$$A = f(a, b, c \dots), \quad (8.46)$$

przy czym A, a, b, c są wielkościami wymiarowymi (parametrami), opisującymi zjawiska.

Zgodnie z teorematem Buckinghama, każdą zależność matematyczną powyższego typu, z dostateczną dla praktyki dokładnością, można przedstawić w postaci iloczynu potęgowego

$$A \cong \text{const } a^\alpha, b^\beta, c^\gamma \dots \quad (8.47)$$

o wykładnikach potęgowych $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

To z kolei można przedstawić w postaci równania

$$\Phi(\pi_1 \pi_2 \pi_3 \dots) = 0, \quad (8.49)$$

w którym π_1, π_2, π_3 są bezwymiarowymi modułami (liczbami kryterialnymi).

Ilość modułów bezwymiarowych nie jest dowolna. Zależy ona od liczby n wielkości wymiarowych, ujętych w funkcji (8.46), i od liczby r wymiarów zasadniczych, dających w analizie wymiarowej niezależne równania liniowe wykładników potęgowych. Ilość i modułów wyrazi się liczbą $i = n - r$.

Dla przykładu, za pomocą obecnie omawianej metody wyszukiwania kryteriów podobieństwa rozpatrzmy omówione poprzednio zjawisko ruchu ciała sztywnego poddanego działaniu siły.

Załóżmy, że na podstawie obserwacji i analizy myślowej doszliśmy do przekonania, że siła K działająca na ciało zależy od masy m tego ciała i przyspieszenia a . Przyjmijmy również, że znamy tylko zależność ogólną w postaci

$$K = K(m, a) \quad (8.50)$$

^{*)} Zależności wielkościowe są słuszne w każdym spójnym (koherentnym) układzie jednostek, np. SI; C, g, s, KMS. Zależność jest jednorodna, homogeniczna, jeśli wszystkie jej składniki (wyrazy sumy) mają ten sam wymiar.

i wiemy, że zależność jest wielkościowa i homogeniczna, co zwykle występuje w zjawiskach fizycznych.

Zgodnie z teorematem Buckinghama zależność tę możemy przedstawić w postaci

$$K = C m^{\alpha} a^{\beta}. \quad (8.51)$$

Wymiary występujących wielkości K , m oraz a tworzą równość

$$\left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \right] = [\text{kg}]^{\alpha} [\text{m}/\text{s}^2]^{\beta}. \quad (8.52)$$

Dla zastosowanych jednostek podstawowych kg , m , s możemy ułożyć równania wykładników potęgowych:

$$\text{dla jednostek } \text{kg}, \quad 1 = \alpha, \quad (8.53)$$

$$\text{dla jednostek } \text{m}, \quad 1 = \beta, \quad (8.54)$$

$$\text{dla jednostek } \text{s}, \quad -2 = -2\beta. \quad (8.55)$$

Równania (8.54) i (8.55) są tożsame. Niezależne równania wykładników potęgowych są dwa, wystarczą więc tylko dwa wymiary zasadnicze, np. kg i m lub kg i s do ułożenia niezależnego układu równań.

W naszym przypadku układ równań jest stosunkowo prosty i wynika z niego, że $\alpha = 1$ oraz $\beta = 1$. Równanie (8.51) przyjmie więc postać

$$K = C m a. \quad (8.56)$$

Wiemy skądinąd, że układ równania jest poprawny, określenia wymaga jedynie współczynnik C . Jest to liczba stała i wyznaczyć ją możemy na podstawie eksperymentu. Po przeprowadzeniu eksperymentu w próżni, zmierzeniu siły, masy i przyspieszenia otrzymamy $C = 1$. Gdyby z różnych pomiarów wynikały różne stałe, znaczyłoby to, że w równaniu wyjściowym (8.50) nie uwzględniliśmy wszystkich wielkości mających wpływ na przebieg zjawiska*).

Z równania (8.56) możemy określić niezmiennik podobieństwa, a mianowicie liczbę Newtona

$$\frac{m a}{K} = \text{Ne} = \text{idem}.$$

Ponieważ liczba ta dla rozpatrywanego zjawiska jest zawsze stała, możemy więc powiedzieć, że wszystkie przypadki ruchu ciała sztywnego, poddanego działaniu siły, są podobne. Liczba kryteriów podobieństwa jest równa jedności, a to jest zgodne z poprzednio podanymi zależnościami. Liczba n wielkości wymiarowych wynosi trzy, a liczba r wymiarów użytych do niezależnego układu równań wykładników potęgowych — dwa, więc $i = 3 - 2 = 1$.

*) Na przykład, gdybyśmy analizowali zjawisko spadania ciała w próżni, a dokładny pomiar wykonali w powietrzu, wówczas stała w różnych pomiarach mogłaby być różna. Nie byłaby uwzględniona siła tarcia ośrodka. Po jej uwzględnieniu pomiary byłyby powtarzalne i C byłoby stałe.

8.3. Warunki podobieństwa zjawisk i wnioski

O podobieństwie zjawisk możemy mówić wówczas, gdy jesteśmy w stanie opisać zjawisko matematycznie. Mogą to być konkretne zależności matematyczne lub zapisy różniczkowe z podanymi warunkami jednoznaczności, albo zależności matematyczne w postaci ogólnej, lecz wielkościowe i homogeniczne.

Twierdzenie I (Newtona). Zjawiska do siebie podobne mają takie same liczby znamienne.

Wynika z tego oczywiście, że liczby znamienne, znalezione dla wycinka przestrzeni opisanego równaniem różniczkowym, są słuszne dla całego rozpatrywanego obszaru.

Twierdzenie II (teoremat Buckingham). Zależności matematyczne jednorodne i słuszne w każdym spójnym układzie jednostek, zachodzące między wielkościami określającymi przebieg zjawiska, można przedstawić w postaci zależności ogólnej między liczbami zmiennymi dla tego zjawiska.

$$\Phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3 \dots) = 0.$$

Z twierdzenia tego wynika, że zależność ogólna, znaleziona dla jednego zjawiska, jest słuszna dla wszystkich zjawisk podobnych. Wynika z niego również, że aby zachodziła równość wszystkich liczb zmiennych w zjawiskach podobnych, wystarczy określić tylko pewną, minimalną ilość tych liczb, tzw. liczb zmiennych ustalających (określających), a pozostałe nieustalające (zależne) będą sobie równe.

Poprzednie twierdzenia odnosiły się do zjawisk podobnych. W twierdzeniu III podaje się warunki, jakie muszą być spełnione, aby można było powiedzieć, że rozważane zjawiska są podobne.

Twierdzenie III (Guchmana–Kirpiczewa). Zjawiska są podobne, jeżeli ustalające liczby znamienne dla tych zjawisk są identyczne, a warunki jednoznaczności podobne.

Z twierdzenia tego wynika między innymi warunek geometrycznego podobieństwa kształtu i ułożenia w przestrzeni przedmiotów biorących udział w zjawiskach podobnych^{*)}.

Z omówionych warunków podobieństwa zjawisk wynikają wnioski, które dają odpowiedź na postawione na początku działu pytania dotyczące sposobu przeprowadzania i opracowania wyników eksperymentu.

W przeprowadzonych badaniach eksperymentalnych należy mierzyć te wielkości, które występują w liczbach zmiennych opisujących dane zjawisko.

^{*)} Zdarza się w praktyce, że odstępujemy od bezwzględnego przestrzegania podobieństwa geometrycznego, jeśli stwierdzimy, że odstępstwo od niektórych wymiarów nie powoduje znaczących odchyłań interesującej nas wielkości.

Wyniki badań należy przedstawić w postaci równań uogólnionych, podających związek między liczbami kryterialnymi. Wyrażają one liczbę znamioną nieustającą*) jako funkcję liczb ustalających. Funkcja ta ma zwykle postać iloczynu potęgowego.

W badaniach na modelach, oprócz podobieństwa geometrycznego, należy zachować podobieństwo pozostałych warunków jednoznaczności. Oczywiście, należy spełnić warunki podobieństwa mechanicznego i cieplnego.

*) Jako liczbę nieustalającą stosuje się zwykle liczbę Nu , Bi lub St , gdyż najczęściej zależy nam na określeniu współczynnika α , który w tych liczbach występuje.

9. Unoszenie ciepła — konwekcja

Przekazywanie ciepła przez unoszenie, zwane konwekcją, zachodzi w ośrodku płynnym, w którym występują makroskopowe ruchy płynu, zwane ruchami konwekcyjnymi.

W technice najważniejsze znaczenie ma konwekcja, która zachodzi między powierzchnią ciała stałego a płynem opływającym tę powierzchnię. Rozpatruje się także przypadki konwekcji między dwoma płynami, jeśli można wyraźnie określić powierzchnię styku oddzielającą je, np. powierzchnię rozdziału fazy ciekłej i gazowej.

Omawiane przypadki przekazywania ciepła opisuje pod względem matematycznym różniczkowe równanie przewodnictwa cieplnego (7.26).

Można powiedzieć, że konwekcja jest takim przypadkiem przewodzenia ciepła w płynie, w którym ruch płynu ma wpływ na wielkość przewodzonego strumienia ciepła, a więc na zachowanie się pola temperatury. W kierunku strumienia określonego kierunkiem gradientu temperatury istnieją wtedy różne od zera składowe prędkości makroskopowego ruchu płynu.

Do przewodzenia natomiast (mimo istniejącego ruchu płynu) zaliczamy te przypadki przekazywania ciepła w płynie, w których ruch ten nie ma wpływu na wielkość strumienia ciepła. Zachodzi to wówczas, gdy w kierunku gradientu temperatury nie ma składowych ruchu konwekcyjnego^{*)}, o czym była mowa w p. 2.1.

Przyczyny powstania ruchów konwekcyjnych mogą być różne. Ruchy mogą być spowodowane siłami działającymi z zewnątrz na płyn. Mówimy wtedy, że ruch jest wymuszony. Mogą go powodować siły grawitacyjnego wyporu, tzw. siły grawitacyjne;

^{*)} Ruch płynu nie ma wpływu na wielkość strumienia ciepła, gdy w danym ośrodku gradient temperatury na skutek tego ruchu nie zmienia się. Kierunek gradientu jest normalny do powierzchni izotermicznych. Jeżeli przyjmiemy taki kartezjański układ odniesienia xyz , że kierunek x pokryje się z kierunkiem grad t , to $\partial t / \partial y = \partial t / \partial z = 0$, gdyż płaszczyzna yz jest styczna do powierzchni izotermicznej. Jeżeli rozpatrujemy przypadek przekazywania ciepła w płynie, to w kierunku grad t nie ma składowych prędkości ruchu konwekcyjnego, tzn. że $w_x = 0$. Wtedy pochodna substancjalna $Dt/d\tau = \partial t / \partial \tau + (\partial t / \partial x)w_x + (\partial t / \partial y)w_y + (\partial t / \partial z)w_z$, określająca w danym punkcie zmianę temperatury w czasie, a więc i grad $t(\tau)$, równa się $\partial t / \partial \tau$. Jest to identyczna postać jak dla przypadku braku ruchów konwekcyjnych, gdy $w_x = w_y = w_z = 0$. Ten przypadek przekazywania ciepła traktujemy jako typowe przewodzenie ciepła w ciałach stałych.

wtedy ruch nazywamy ruchem niewymuszonym lub grawitacyjnym. Siły grawitacyjne występują zawsze, gdy w płynie znajdującym się w polu grawitacyjnym istnieją obszary o różnych gęstościach. Różnice gęstości mogą wynikać z różnych rodzajów płynów, a w danym jednorodnym płynie mogą być wywołane różnicami temperatury.

Powstawanie ruchów powodują różne przyczyny. Niezależnie od nich ruch danego płynu zależy od sytuacji geometrycznej i zakresu prędkości.

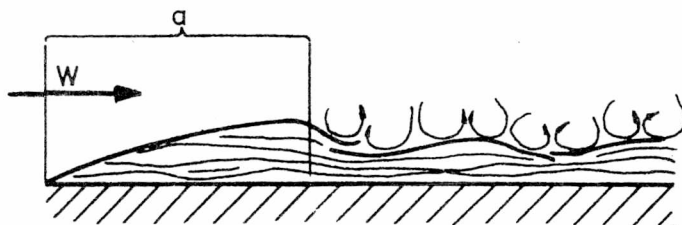
Już w 1884 r. Reynolds – na podstawie obserwacji przepływu w rurociągu zabarwionej strugi – stwierdził, że gdy zostanie przekroczona pewna charakterystyczna dla danego rurociągu i płynu prędkość, zwana prędkością krytyczną, równoległe dotychczas strugi płynu zaburzają się. Wtedy zostaje przekroczona krytyczna liczba $Re_{kr} = 2100$.

W cieczach lepkich przejście z ruchu laminarnego w ruch turbulentny nie odbywa się natychmiast po przekroczeniu Re_{kr} , lecz po przekroczeniu pewnego dodatkowego przedziału, zwanego strefą przejściową. Dla gęstych olejów dopiero po przekroczeniu $Re = 10^4$ mamy pewność, że przepływ jest burzliwy. W cieczach rzadkich, np. gdy ściany przewodów są przeciętnie szorstkie, przejście z ruchu uwarstwionego w ruch burzliwy zachodzi wówczas, gdy $Re > 3000$.

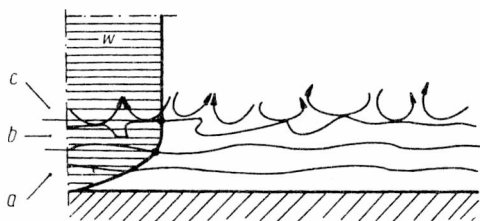
Wymienione tu przyczyny wyjaśniają, że ruch płynu może być bardzo skomplikowany, tak że nie zawsze jesteśmy w stanie opisać go matematycznie w sposób wystarczający. Jest to powodem, że tylko nieliczne przypadki konwekcji są rozwiązane analitycznie. Większość rozwiązań jest oparta na modelowych badaniach eksperymentalnych.

9.1. Warstewka przyścienna, temperatury obliczeniowe

Już Prandtl zauważył, że podczas przepływu wewnątrz kanałów lub opływu zewnętrznego przedmiotów przez płyny lepkie, tuż przy ścianie prędkość płynu maleje i dochodzi w miejscu styku do zera. Zjawisko to występuje nawet wtedy, gdy prawie w całej objętości ruch jest turbulentny. Tę warstwę płynu, w której prędkość wyraźnie maleje, nazywamy warstwą przyścienną. Zwie się ona także warstwą graniczną lub warstwą Prandtla (patrz rys. 9.1 i 9.2).



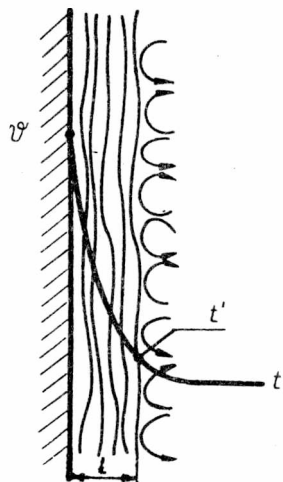
Rys. 9.1. Tworzenie się warstewki przyściennej; a – odcinek rozbiegowy



Rys. 9.2. Warstewka przyścienna: a — część laminarna, b — część przejściowa, c — rdzeń turbulentny

Warstewka graniczna charakteryzuje się tym, że istnieją w niej tylko ruchy laminarne. Jeżeli powstaje ona podczas opływu powierzchni izotermicznej, to zachodzi w niej przewodzenie ciepła w ścisłym znaczeniu. Dopiero poza nią ruchy konwekcyjne mają wpływ na wielkość przekazywanego strumienia ciepła i są one bardzo często dominujące.

Karman sugeruje, że między rdzeniem turbulentnym strugi a warstewką przyścienną istnieje warstewka przejściowa.



Rys. 9.3. Rozkład temperatury w płynie stykającym się ze ścianą

Ścisłe określenie grubości warstewki przyściennej wymaga bliższych określeń, które tutaj nie będą omawiane.

Pojęcie warstewki granicznej pozwala w sposób jakościowy omówić wpływ pewnych parametrów na wielkość współczynnika konwekcji α_k .

Na rysunku 9.3. symbolem t' oznaczono temperaturę na granicy zetknięcia warstwy przyściennej z pozostałym płynem, nazywanym dalej rdzeniem strugi.

Jeśli pominiemy przypuszczalny wpływ promieniowania podczas przekazywania ciepła od ścianki do płynu, to możemy do konwekcji zastosować prawo Newtona

$$\dot{Q} = F\alpha_k(\vartheta - t). \quad (9.1)$$

Podczas opływu ściany przez ciecze, które często odznaczają się dużą zdolnością pochłaniania promieniowania, a więc i dużą nieprzeźroczystością, przejmowanie (wnikanie) ciepła między ścianą a płynem odbywa się w zasadzie przez konwekcję. Jeżeli ścianę opływa gaz, to przejmowanie ciepła najczęściej następuje przez konwekcję i promieniowanie łącznie.

Strumień ciepła przekazany konwekcyjnie między ścianą a płynem jest przewodzony przez warstewkę graniczną. Jeśli opływana powierzchnia jest izotermiczna lub zbliżona do izotermicznej na tyle, abyśmy mogli przyjąć, że gradient temperatury jest normalny do ściany, to zgodnie z równaniami określającymi przewodzenie przez ścianę płaską możemy napisać:

$$\dot{Q} = F \frac{\lambda}{l} (\vartheta - t'). \quad (9.2)$$

Z porównania (9.1) z (9.2) otrzymamy:

$$\alpha_k = \frac{\lambda}{l} \frac{(\vartheta - t')}{(\vartheta - t)}. \quad (9.3)$$

Współczynnik konwekcji α_k jest wprost proporcjonalny do przewodności cieplnej płynu, a odwrotnie proporcjonalny do grubości warstewki przyściennej. Współczynnik proporcjonalności, wyrażony stosunkiem różnic temperatur, zależy od intensywności ruchów konwekcyjnych. Ze wzrostem prędkości zwiększa się wartość tego współczynnika, zmniejsza się natomiast grubość warstewki granicznej. Temperatura wpływa na lepkość i przewodność płynu, przy czym dla cieczy i gazów zawsze stosunek λ/l rośnie z temperaturą.

Równanie (9.3) uzasadnia więc, że zwiększenie się prędkości płynu i jego temperatury powoduje zwiększenie się wartości konwekcyjnego współczynnika przejmowania ciepła. Orientacyjne wartości tego współczynnika podano w tab. 4.1.

W rozdziale poświęconym konwekcji przez symbol α rozumie się **współczynnik konwekcji α_k** .

Z dotychczasowych rozwiązań wynika, że współczynnik konwekcji zależy między innymi od współczynnika λ i grubości warstewki granicznej. Ta z kolei jest uwarunkowana nie tylko prędkością, ale i lepkością płynu η . Współczynnik przewodzenia zależy od gęstości ρ . Na wielkość α ma wpływ także ciepło właściwe płynu c_p i inne wielkości.

Wymienione tu parametry: λ , ρ , η , c_p itd. zależą od temperatury, jest więc istotne, dla jakiej temperatury należy je przyjmować. W zasadzie parametry niezbędne do określenia α przyjmuje się w zależności od potrzeb dla jednej z trzech temperatur obliczeniowych (rys. 9.4):

dla średniej temperatury płynu

$$t_{pl} = \frac{t_p + t_k}{2}, \quad (9.4)$$

gdzie

t_p — temperatura płynu na wlocie,

t_k — temperatura płynu na wylocie;

dla średniej temperatury ściany

$$\vartheta_s = \frac{\vartheta_p + \vartheta_k}{2}, \quad (9.5)$$

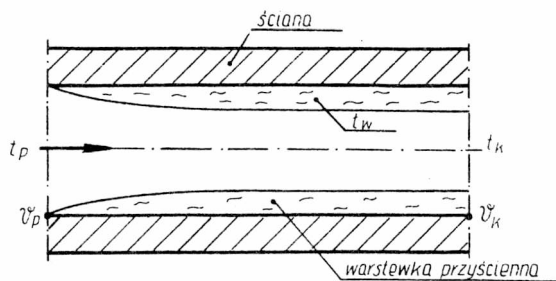
przy czym

ϑ_p — temperatura ściany przy wlocie,

ϑ_k — temperatura ściany przy wylocie;

dla średniej temperatury warstwy przyściennej

$$t_w = \frac{t_{pl} + \vartheta_s}{2}. \quad (9.6)$$



Rys. 9.4. Temperatury czynnika, ściany i warstwy przyściennej

Ilekoć w następnych rozdziałach mówi się, że parametr zależy od temperatury, np. η , i jest oznaczony dodatkowym symbolem np. η_s lub η_w , to znaczy, że parametr ten jest przyjęty lub liczony odpowiednio dla średniej temperatury ściany lub warstwy przyściennej. Brak dodatkowego oznaczenia wskazuje, że parametr jest przyjęty dla średniej temperatury płynu.

9.2. Uogólnione równania i podział konwekcji

Ponieważ w przypadku konwekcji naszym głównym celem jest określenie jej współczynnika, więc jako liczby nieustalającej użyjemy liczby Nu. Uogólnione równanie przyjmie więc postać:

$$Nu = \Phi\left(Fo, Pe, Re, Gr \frac{l_1}{l_2}\right) \quad (9.7)$$

lub

$$Nu = \Phi\left(Fo, Re, Gr, Pr \frac{l_1}{l_2}\right), \quad (9.8)$$

gdzie simpleks l_1/l_2 ujmuje podobieństwo zasadniczych wymiarów określających kształt przedmiotów, jeśli całkowite podobieństwo geometryczne nie musi być zachowane. Jeśli rozpatrujemy podobieństwo zjawisk w obszarach wyodrębnionych, wystąpią w równaniu uogólnionym bezwymiarowe simpleksy położenia x/l_o , y/l_o , z/l_o , w których l_o jest umownym wymiarem odniesienia.

Gdy mamy do czynienia z ustalonym przekazywaniem ciepła, w uogólnionym równaniu nie uwzględniamy liczby Fo, charakterystycznej dla przypadku nieustalonego i upraszczamy równanie:

$$Nu = \Phi\left(Re, Gr, Pr, \frac{l_1}{l_2}\right). \quad (9.9)$$

Dla ruchu tylko wymuszonego lub tylko grawitacyjnego równanie uogólnione przyjmie postać:

dla ruchu wymuszonego

$$\text{Nu} = \Phi\left(\text{Re}, \text{Pr}, \frac{l_1}{l_2}\right), \quad (9.10)$$

dla ruchu grawitacyjnego

$$\text{Nu} = \Phi\left(\text{Gr}, \text{Pr}, \frac{l_1}{l_2}\right). \quad (9.11)$$

Jeżeli rozpatrujemy przypadek ustalonej konwekcji płynów o stałej liczbie Pr, np. równoatomowych gazów, to dla ruchu wymuszonego

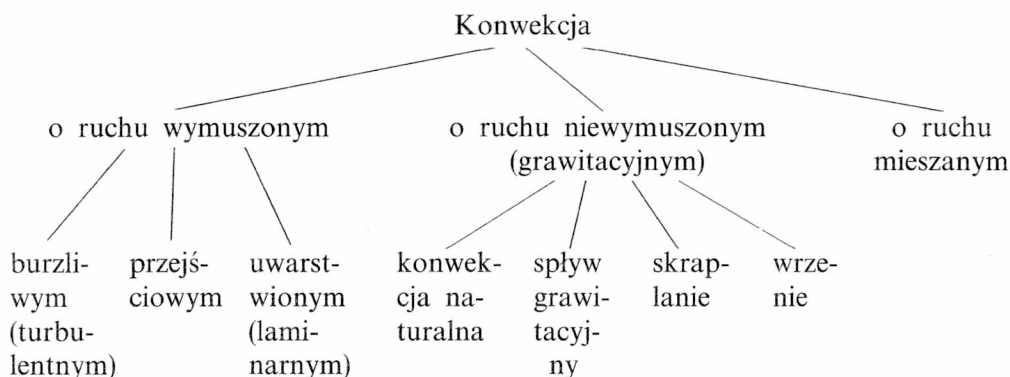
$$\text{Nu} = \Phi\left(\text{Re}, \frac{l_1}{l_2}\right) \quad (9.12)$$

i dla ruchu niewymuszonego

$$\text{Nu} = \Phi\left(\text{Gr}, \frac{l_1}{l_2}\right). \quad (9.13)$$

Wymienione równania uogólnione można wyrazić za pomocą innych liczb znamienych i simpleksów, co nieraz będzie czynione podczas szczegółowego omawiania działów konwekcji.

Schematyczny podział konwekcji na działy



Już z przytoczonych wzorów uogólnionych wynika, że ze względu na skomplikowany przebieg konwekcji, podczas szczegółowego omawiania i eksperymentowania konwekcję należy podzielić na działy. Kryterium podziału stanowi zachowanie się pola temperatury i rodzaj ruchu płynu (patrz schemat).

9.3. Konwekcja o wymuszonym ruchu burzliwym

Z rozważań nie przytoczonych tutaj wynika, że w konwekcji wymuszonej o ruchu burzliwym współczynnik α zależy od średnicy d kanału^{*)}, prędkości w przepływie, gęstości ρ , współczynnika lepkości dynamicznej płynu η , ciepła właściwego c_p i współczynnika przewodzenia ciepła płynu λ . Zależność ogólna ma postać:

$$\alpha = f(d, w, \rho, \eta, c_p, \lambda). \quad (9.14)$$

Zgodnie z (8.47) zależność tę możemy przedstawić w postaci iloczynu potęgowego

$$\alpha = C d^h w^i \rho^j c_p^l \lambda^m \eta^k. \quad (9.15)$$

Równanie ma być homogeniczne, więc wymiary muszą spełniać zależność

$$\frac{\text{kg}}{\text{s}^3 \cdot \text{K}} = [\text{m}]^h \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]^i \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]^j \left[\frac{\text{kg}}{\text{ms}} \right]^k \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{K}} \right]^l \left[\frac{\text{kg m}}{\text{s}^3 \cdot \text{K}} \right]^n \quad (9.16)$$

wyrażoną w jednostkach podstawowych^{**)}.

Do stosowanych jednostek podstawowych (tab. 9.1) można ułożyć równania wykładników potęgowych

$$\begin{aligned} \text{dla kg} & \quad 1 = j + k + n, \\ \text{dla s} & \quad -3 = -i - k - 2l - 3n, \\ \text{dla K} & \quad -1 = -1 - n, \\ \text{dla m} & \quad 0 = h + i - 3j - k + 2l + n. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Równania układu (9.17) są niezależne. Liczba jednostek podstawowych $r = 4$. Liczba występujących w równaniu (9.14) wielkości wymiarowych $n = 7$. Liczba modułów bezwymiarowych opisujących rozważane zjawisko wynosi $7 - 4 = 3$ (moduły te znajdujemy w podany dalej sposób).

^{*)} Jeśli przepływ odbywa się w kanale o przekroju poprzecznym, innym niż kołowy, za średnicę przyjmuje się średnicę hydrauliczną

$$d = d_h = 4F/o,$$

gdzie

F — pole przekroju poprzecznego kanału,

o — obwód zwilżony.

^{**) Analizę wymiarową można przeprowadzić także za pomocą jednostki ciepła J (dżul), którą traktuje się jako pomocniczą jednostkę w systemie jednostek podstawowych.}

Tabela 9.1. Zestawienie jednostek wybranych wielkości termodynamicznych

Lp.	Wielkość	Symbol	Wymiar w jednostkach technicznych	Wymiar w jednostkach podstawowych
1	Ciepło, praca, energia	Q, L, E	J (dżul)	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$
2	Strumień ciepła, moc	$\dot{Q}, N$	W (wat)	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$
3	Współczynnik przejmowania ciepła	α	$\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$	$\text{kg}/\text{m}^3 \cdot \text{K}$
4	Współczynnik przewodzenia ciepła	λ	$\text{W}/\text{m} \cdot \text{K}$	$\text{kgm}/\text{s}^3 \cdot \text{K}$
5	Ciepło właściwe	c_p	$\text{J}/\text{kg} \cdot \text{K}$	$\text{m}^2/\text{s}^2 \cdot \text{K}$
6	Siła	K	N (niuton)	$\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$
7	Ciśnienie	p	$\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2$ (paskal)	$\text{kg}/\text{m} \cdot \text{s}^2$
8	Współczynnik lepkości dynamicznej	η	$\text{kg}/\text{m} \cdot \text{s}$	$\text{kg}/\text{m} \cdot \text{s}$
9	Współczynnik lepkości kinetycznej	ν	m^2/s	m^2/s

Przedstawiony układ czterech równań o sześciu niewiadomych wykładnikach potęgowych możemy sprowadzić do układu równań, w których niewiadome wyraża się za pomocą $6 - 4 = 2$ wybranych wykładników, np. przez n oraz i . Po wykonaniu otrzymamy

$$h = i - 1, \quad j = i, \quad k = 1 - i - n, \quad l = 1 - n. \quad (9.18)$$

Jeżeli otrzymany wynik wstawimy do (9.15), równanie przyjmie postać:

$$\alpha = C d^{i-1} w^i \rho^i \eta^{1-i-n} c_p^{1-n} \lambda^n. \quad (9.19)$$

W równaniu tym wielkości można zgrupować w zespoły bezwymiarowe

$$\frac{\alpha d}{\lambda} = C \left(\frac{w \rho d}{\eta} \right)^i \left(\frac{\eta c_p}{\lambda} \right)^{1-n}, \quad (9.20)$$

przy czym $\alpha d/\lambda = \text{Nu}$; $w \rho d/\eta = \text{Re}$; $\eta c_p/\lambda = \text{Pr}$. Ogólną zależność (9.11) można więc zapisać w postaci równania modułowego

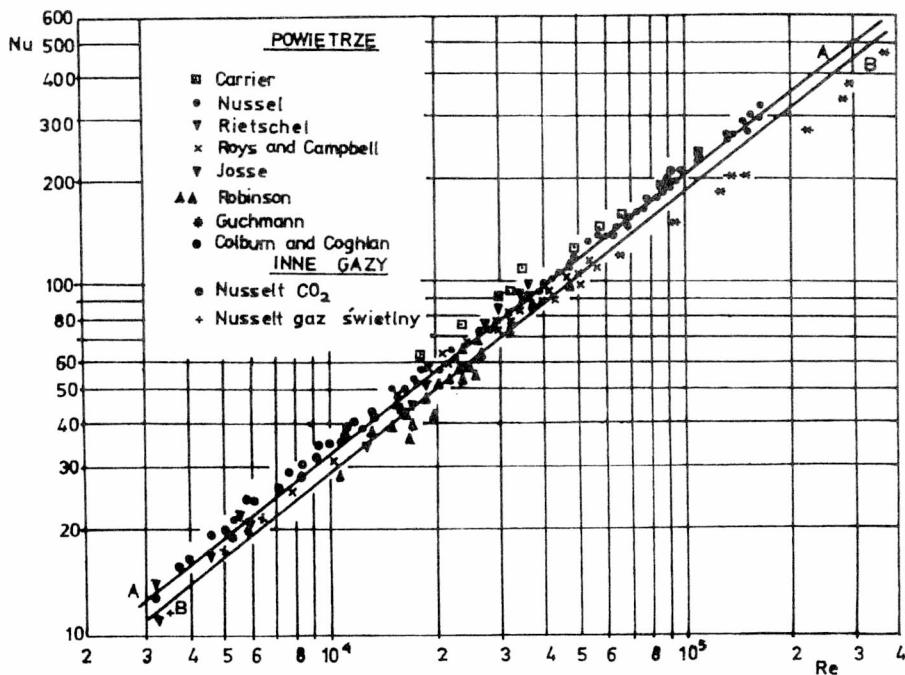
$$\text{Nu} = C \text{Re}^A \text{Pr}^B, \quad (9.21)$$

Wzór ten jest uogólnionym równaniem dla konwekcji wymuszonyj o ruchu burzliwym.

Współczynniki C , A , B wyznacza się eksperymentalnie dla danej sytuacji geometrycznej i kształtu przedmiotów. Podano je w tab. 9.2.

Tabela 9.2. Współczynniki C , A , B do wzoru (9.21) według Hoblera

Lp.	Przypadek	C	A	B	Uwagi
1	Przepływ w rurze — mała lepkość czynnika (rys. 9.5)	0,023	0,8	0,4	$Re > 2100$
2	Przepływ w rurze — duża lepkość czynnika $\eta > 2\eta$ wody	$0,027 \left(\frac{\eta}{\eta_s} \right)^{0,14}$	0,8	0,33	(Sieder i Tate) η_s lepkość przy tempera- turze ściany $Re > 10\,000$
3	Przepływ prostopadły do rury pojedynczej	0,26	0,6	0,3	$Re > 1000$
4	Przepływ prostopadły do 10 rzędów rur ustawionych szachowo	0,33	0,6	0,33	(Colburn) $Re > 2000$ Obliczone na prędkość między rurkami
5	Przepływ prostopadły do 10 rzędów rur ustawionych korytarzowo	0,26	0,6	0,33	Obliczone na prędkość między rurkami
6	Przepływ prostopadły do drutu	0,86	0,43	0,3	(Davis) $Re = 0,1-200$



Rys. 9.5. Przepływ gazów o liczbie $Pr = 0,74$ (dwuatomowych) wewnątrz rury (według Mc Adamsa):
linia A–A spełnia równanie $Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,4}$

Wzór (9.21) można przedstawić w układzie podwójnie logarytmicznym jako prostą lub zbiór prostych równoległych. Po zlogarytmowaniu (9.21) otrzymamy:

$$\lg \text{Nu} = \lg C + A \lg \text{Re} + B \lg \text{Pr}. \quad (9.22)$$

Jeśli jedną ze zmiennych liczb Re lub Pr potraktujemy jako stałą lub parametr, to (9.22) w układzie podwójnie logarytmicznym przedstawia równanie linii prostej lub zbiór linii równoległych.

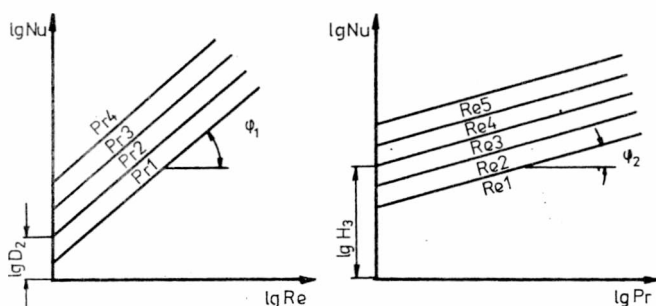
Po zlogarytmowaniu (9.21) otrzymamy

$$\lg \text{Nu} = \lg D + A \lg \text{Re}, \quad (9.23)$$

gdy Pr jest stałe lub jest parametrem oraz

$$\lg \text{Nu} = \lg H + B \lg \text{Pr}, \quad (9.24)$$

gdy Re jest stałe lub jest parametrem.



Rys. 9.6. Graficzne przedstawienie równań (9.23) i (9.24)

Równania (9.23) i (9.24) przedstawiono na rys. 9.6.

Jeżeli wzór jest stosowany w szerokim przedziale zmiennej niezależnej (np. liczby Re , rys. 9.7), to wyniki doświadczeń nie zawsze uzasadniają liniowy przebieg zależności uogólnionej w układzie podwójnie logarytmicznym, zwłaszcza wtedy, gdy zmienność Re jest w takim zakresie, że wychodzimy z obszaru o ruchu burzliwym do przejściowego lub laminarnego. Wyniki doświadczeń przedstawia się niekiedy za pomocą nieliniowej zależności typu

$$\text{Nu} = (C' + C \text{Re}^4) \text{Pr}^B. \quad (9.25)$$

Dla niektórych przebadanych przypadków w tab. 9.3 podano wartości współczynników C' , C , A i B .

Tabela 9.3. Współczynniki C' , C , A , B do wzoru (9.25)

Lp.	Przepływ	C'	C	A	B	Uwagi
1	Przepływ prostopadły do rury pojedynczej	0,35	0,47	0,52	0,3	$Re = 0,1-1000$
2	Przepływ prostopadły do pęku rurek (10 rzędów) ustawionych szachowo	0,437	0,587	0,52	0,3	$Re = 0,1-2000$, obliczone na prędkości między rurkami
3	Przepływ prostopadły do rurek w szeregu (10 rzędów) ustawionych korytarzowo	0,35	0,47	0,52	0,3	$Re = 0,1-2000$, obliczone na prędkość między rurkami

Uwaga. Parametry przyjmować dla temperatury warstwy przyściennej

Podczas opływania pęczków rur wielkość współczynnika konwekcji zależy między innymi od tak zwanego równoległego i szachowego ich ustawienia. Widać to w różnych współczynnikach podanych w tab. 9.2 (poz. 4 i 5). Podano tam wzór Colburna, w którym nie uwzględnia się podziałki ustawienia rur. Są też inne wzory (Grimson) do tego przypadku uwzględniające podziałkę (rys. 9.8). Wizualizację tego przepływu pokazano na rys. 9.9.

Gdy napływ czynnika na rurkę nie zachodzi pod kątem prostym do osi rury, wtedy należy stosować poprawkę ε_φ zależną od kąta φ padania strugi. Podobnie jest dla napływu na pęk rur (rys. 9.10a i b):

$$\alpha_\varphi = \alpha_\perp \varepsilon_\varphi \quad (9.26)$$

przy czym

α_φ — współczynnik konwekcji przy kącie padania φ ,

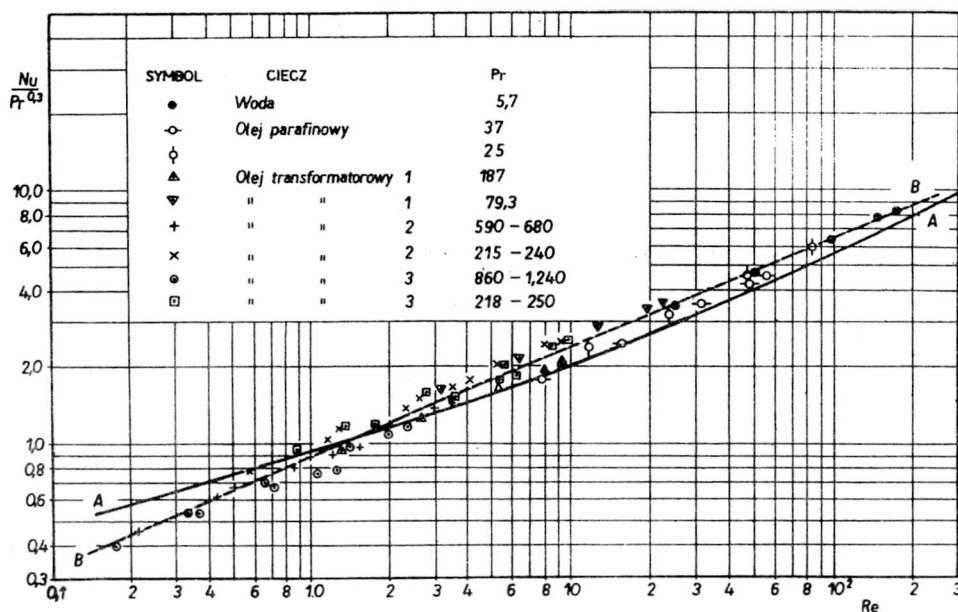
$\alpha_\perp$ — współczynnik konwekcji dla napływu prostopadłego.

Jeżeli przepływ czynnika w kanale ujemuje wlot do tego kanału, a stosunek długości do średnicy $L/d < 60$, należy uwzględnić poprawkę wynikającą z istnienia strefy rozbiegowej.

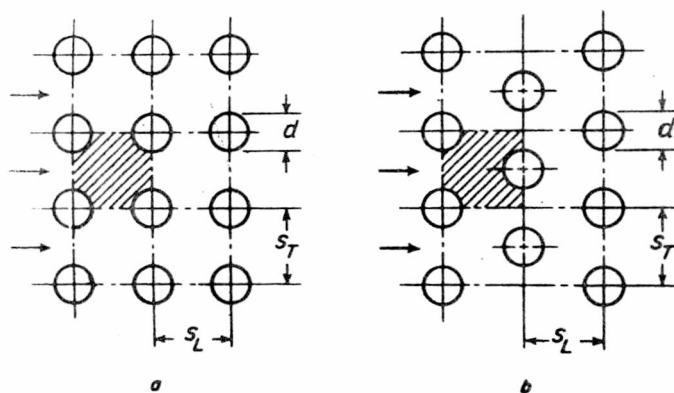
Strefę tę przedstawiono na rys. 9.1. Na wlocie warstewka graniczna jest cieńsza (tworzy się) i współczynnik konwekcji jest tam większy. Gdy są krótkie odcinki rurociągów, wpływ odcinka rozbiegowego na średnią wartość jest szczególnie duży. Podobnie jest podczas opływu ścian.

Jeżeli przez α_u oznaczymy współczynnik konwekcji dla przepływu ustabilizowanego (poza odcinkiem rozbiegowym), to średnią wartość współczynnika α z uwzględnieniem odcinka rozbiegowego obliczymy ze wzoru

$$\alpha = \alpha_u \varepsilon_L, \quad (9.27)$$



Rys. 9.7. Optyw poprzeczny pojedynczego walca (według Mc Adamsa):
linia B-B dla cieczy według formuły Davisa (tab. 9.2, poz. 6), linia A-A dla gazów

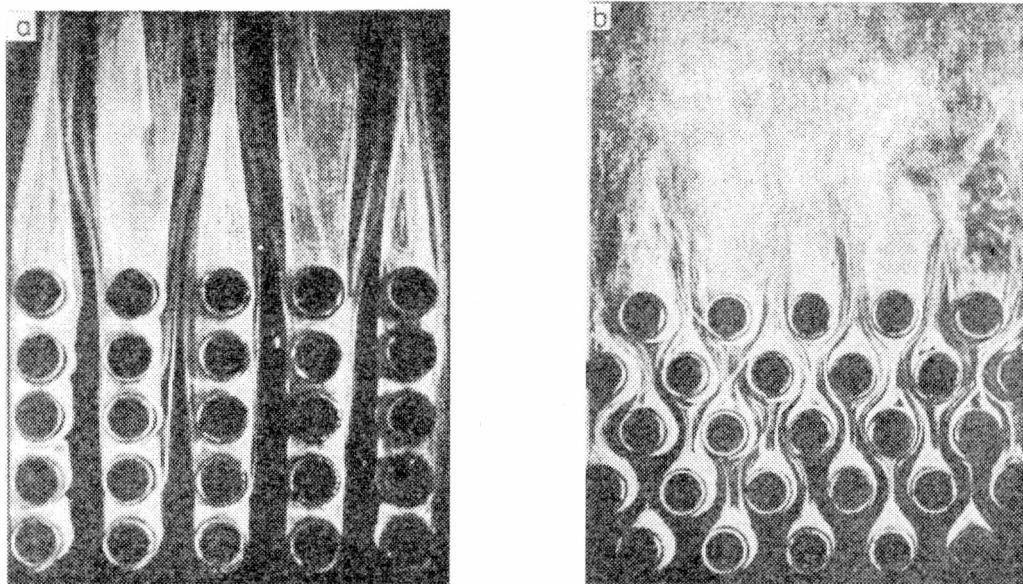


Rys. 9.8. Układ pęku rur: a – równoległy – korytarzowy,
b – przestawny – szachowy

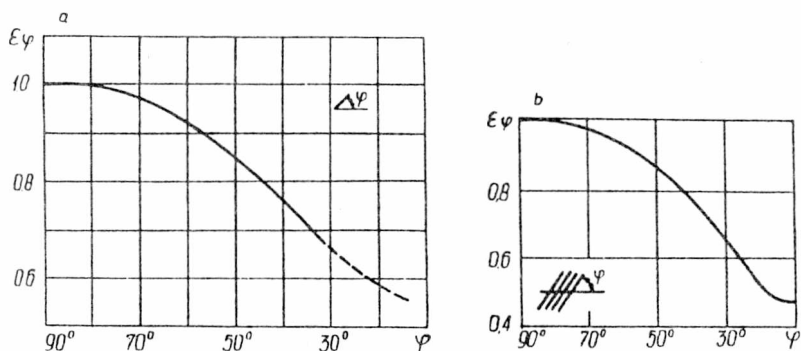
przy czym ε_L jest poprawką obliczoną ze wzoru opracowanego przez Boeltera, Younga i Iversena dla $L/d > 5$,

$$\varepsilon_L = 1 + F \frac{d}{L}, \quad (9.28)$$

gdy d jest wewnętrzną średnicą rury, a L jej długością.



Rys. 9.9. Przepływ prostopadły przez pęczki rur (według H. T. Thoma):
a – układ równoległy – korytarzowy, b – układ przestawny – szachowy



Rys. 9.10. Współczynnik ε_φ poprawkowy dla napływu płynu
pod innym kątem niż 90° do osi rury:
a – dla rury pojedynczej, b – dla pęku rur

Współczynnik F dla różnych kształtów wlotów należy przyjąć z tab. 9.4, sporządzonej na podstawie wyników badań wymienionych autorów.

Jeszcze podaje wzór określający przepływ płynów przez węzownice o promieniu zagięcia R i średnicy wewnętrznej $d = 2r$:

$$\alpha_R = \alpha_{pr} \left(1 + 3,54 \frac{r}{R} \right), \quad (9.29)$$

przy czym

α_R – współczynnik konwekcji dla węzownicy,

α_{pr} – współczynnik konwekcji dla rury prostej.

Zwiększenie burzliwości strumienia zakrzywieniem kanału powoduje wzrost α .

9.3.1. Opływ powierzchni żebrowanych

Dla opływu przez płyny powierzchni żebrowanych żebrowymi prostymi i okrągłymi, Norris i Spofford ustalili wzór uogólniony, który można zapisać w postaci:

$$Nu = Re^{0,5} \cdot Pr^{0,33} \quad (9.30)$$

gdzie

$Nu = \alpha Z_p / \lambda$ – zastępcza liczba Nusselta,

Z_p – zastępczy wymiar liniowy,

$Re = \dot{g} Z_p / \eta$ – zastępcza liczba Reynoldsa, w której gęstość $\dot{g}$ strumienia substancji jest liczona w przekroju najwęższym,

$Pr = c_p \eta_w / \lambda$ – liczba Prandtla liczona dla średniej temperatury*) płynu.

Wzór został przebadany w zakresie $Re = 260-12000$ dla żeber o dobrym kontakcie metalicznym z rurą, na której są one osadzone, np. przez ocynkowanie.

Omówienia wymaga zastępczy wymiar liniowy Z_p . W żebrach prostych jest on równy podwójnej drodze wzdłużnego opływu żebra

$$Z_p = 2L, \quad (9.31)$$

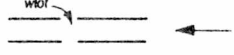
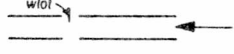
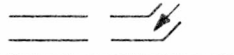
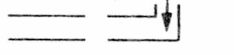
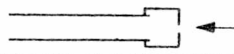
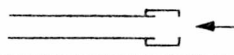
w żebrach okrągłych jest równy podwójnej drodze opływu zastępczego żebra prostego o tej samej powierzchni, przekroju poprzecznym i wysokości, jakie ma żebro okrągłe. Wynika z tego zależność (rys. 9.11).

$$Z_p = 2 \sqrt{\frac{F_z}{2}}. \quad (9.32)$$

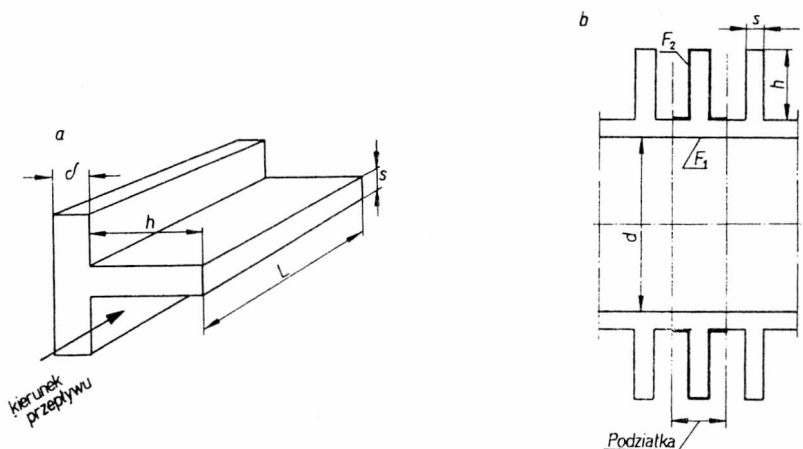
W pracy Kaysa i Londona przytoczono wiele wykresów opracowanych dla pęczków rur żebrowanych wysokimi żebrami śrubowymi i żeber płytowych. Wykresy te przedstawiają uogólnioną zależność

Tabela 9.4. Współczynnik F
do wzoru (9.28)

$L/D_0 > 5$

kształt wlotu	F
	$\sim 0,7$
	$1,2$
	~ 3
	$1,4$
	~ 5
	~ 7
	~ 16
	~ 7

*) Hobler podaje, że α należy liczyć dla średniej temperatury t_w warstwy przyściennej.



Rys. 9.11. Żebra: a – proste, b – okrągłe

$$\text{St} \text{Pr}^{2/3} = f(\text{Re}), \quad (9.33)$$

przy czym

$\text{St} = \alpha / \dot{q} c_p$ – liczba Stanton,

$\text{Re} = \dot{q} d_h / \eta$ – liczba Reynoldsa,

$\dot{q}$ – gęstość strumienia substancji w najwyższym przekroju pęczka,

$d_h = 4L(F_w/F_z)$ – zastępcza średnica hydrauliczna pęczka,

c_p – ciepło właściwe,

F_z – pole powierzchni ożebrowania pęczka,

F_w – minimalne pole powierzchni przekroju wolnego,

L – długość pęczka mierzona w kierunku przepływu (równa iloczynowi l podziałki i liczby n rzędów),

F_s – pole przekroju kanału,

F_p – pole przekroju pęczka rur (poprzecznego),

F_c – minimalna powierzchnia wolnego przekroju przepływu,

F – powierzchnia wymiennika.

W tabeli 9.5 podano charakterystykę pęczków z rur żebrowanych żebrami śrubowymi, a w tab. 9.6 i 9.7 charakterystyki powierzchni płytowych z żebrami gładkimi. Dla wymienionych typów powierzchni żebrowanych na wykresach od 9.12 do 9.20 przedstawiono zależności (9.33) w szczegółowej postaci.

9.3.2. Optymizacja różnych profili

Podczas opływu przez płyn powierzchni walcowej, np. o przekroju kołowym, współczynnik konwekcji nie jest stały na całym obwodzie przekroju, lecz zależy od położenia rozważanego punktu. Na rysunkach 9.21 i 9.22 przedstawiono w układzie

Tabela 9.5. Charakterystyka geometryczna pęczków rur z żebrami śrubowymi w układzie szachownicowym

Umowne oznaczenia pęczka, jednostki			A	B	C
Średnica zewnętrzna rurek	D ,	mm	9,65	9,65	10,67
Średnica zewnętrzna żeber	D_z ,	mm	23,4	23,4	21,9
Podziałka w kierunku poprzecznym	D_1 ,	mm	24,77	24,77	24,77
Podziałka w kierunku wzdłużnym	S_2 ,	mm	20,38	20,38	20,38
Liczba żeber na odcinku rury długości 1 m	n ,	szt.	289	343,3	343,3
Średnica hydrauliczna ^{*)}	$d_h = 4r_h$,	mm	4,75	3,93	4,42
Grubość żeber	s ,	mm	0,457	0,457	0,483
Względny swobodny przekrój pęczka	F_s/F_p ,	—	0,538	0,524	0,494
Powierzchnia odniesiona do jednostki objętości pęczka	F_z/V ,	m ² /m ³	459,3	534,8	446,9
Stosunek powierzchni żeber do całkowitej powierzchni zewnętrznej	F_z/F	—	0,892	0,910	0,876

Tabela 9.6. Charakterystyka geometryczna żeber płytowych gładkich

Umowne oznaczenia pęczka, jednostki			D	E
Układ rurek w pęczki			w szachownicę gładkie	
Typ ożebrowania				
Średnica zewnętrzna rurek	D ,	mm	10,2	17,2
Liczba żeber na odcinku rury długości 1 m	n ,	szt.	315	305
Średnica hydrauliczna	$d_h = 4r_h$,	mm	3,64	3,87
Grubość żebra	s ,	mm	0,33	0,41
Względny swobodny przekrój pęczka	F_s/F_p	—	0,534	0,497
Powierzchnia odniesienia do jednostki objętości pęczka	F_z/V ,	m ² /m ³	585	515
Stosunek powierzchni żeber do całkowitej powierzchni zewnętrznej	F_z/F	—	0,839	0,905

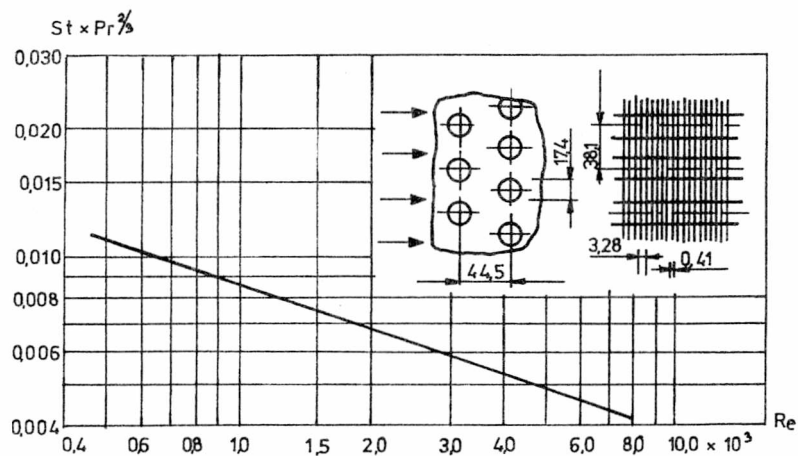
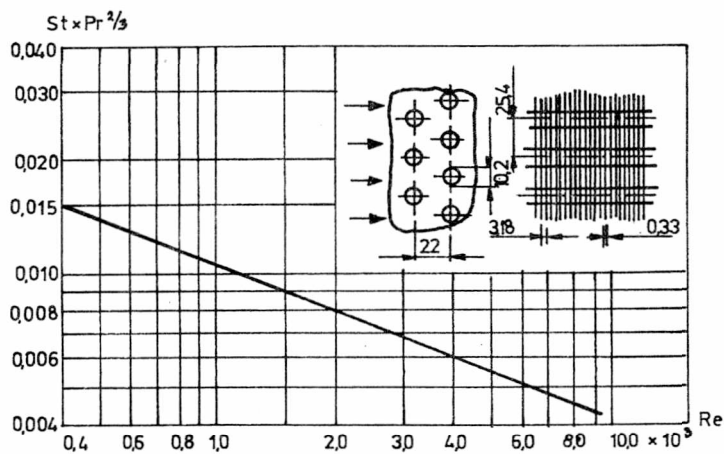
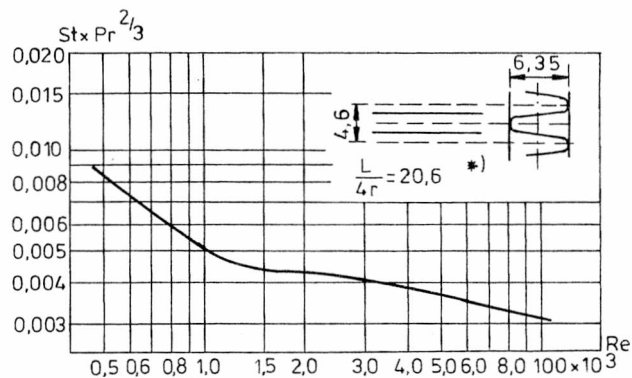
Tabela 9.7. Charakterystyka geometryczna powierzchni płaskich z żebrami gładkimi

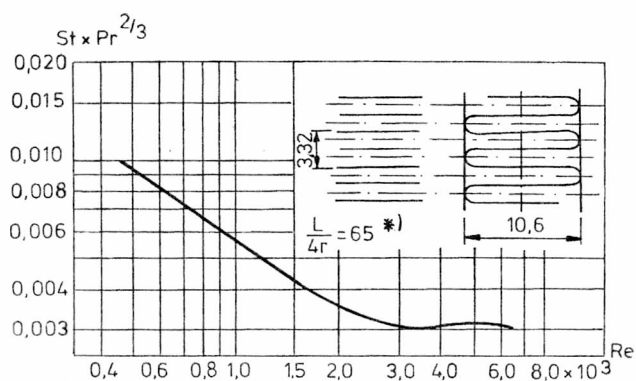
Umowne oznaczenia powierzchni, jednostki			F	G	H	J
Odległość między płytami	h ,	mm	6,35	12,20	10,60	6,35
Liczba żeber na 1 m szerokości pakietu	n ,	szt.	437,0	437,4	593,7	781,9
Średnica hydrauliczna	$d_h = 4r_h$,	mm	3,08	3,52	2,67	1,857
Grubość żeber	s ,	mm	0,152	0,203	0,152	0,152
Długość żebra mierzona w kierunku przepływu czynnika	L ,	mm	63,50	203,20	173,74	63,75
Powierzchnia odniesiona do jednostki objętości między płytami	F_z/V ,	m ² /m ³	1204,05	1023,60	1358,25	1840,53
Stosunek powierzchni żeber do całkowitej powierzchni wymiany ciepła	F_z/F ,	—	0,756	0,854	0,870	0,849

^{*)} $4r_h/L = 4F_c/F = d_h/L$,
gdzie

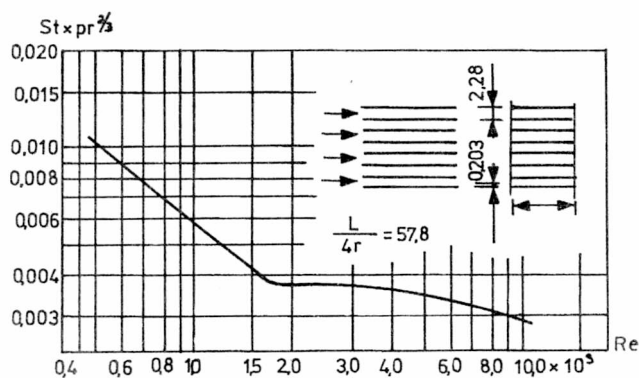
$4r_h = d_h$ — średnica hydrauliczna,

L — długość powierzchni wymiennika.

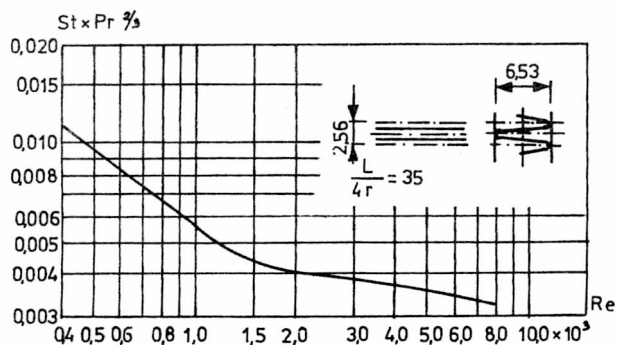
Rys. 9.12. Zależność $St \cdot Pr^{2/3} = f(Re)$ dla żeber płytowychRys. 9.13. Zależność $St \cdot Pr^{2/3} = f(Re)$ dla żeber płytowychRys. 9.14. Zależność $St \cdot Pr^{2/3} = f(Re)$ dla powierzchni rozwiniętych



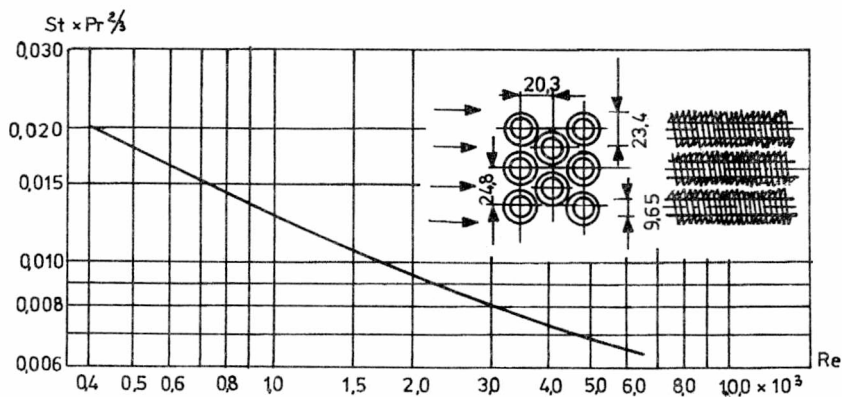
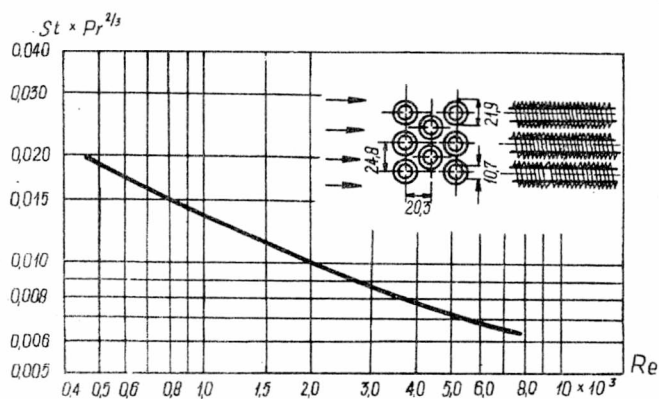
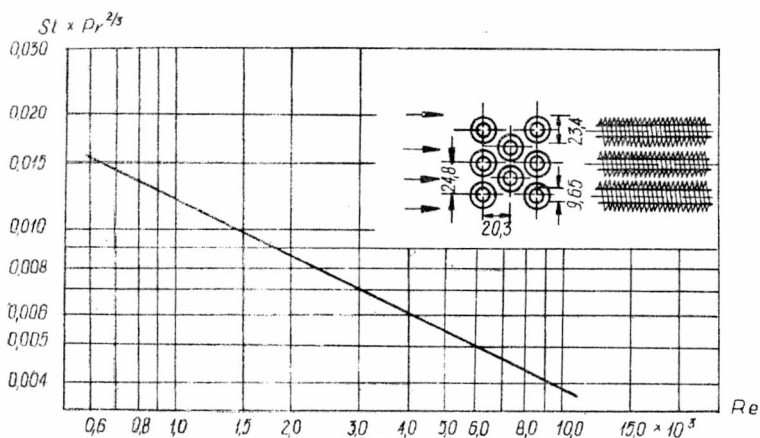
Rys. 9.15. Zależność $St \cdot Pr^{2/3} = f(Re)$ dla powierzchni rozwiniętych

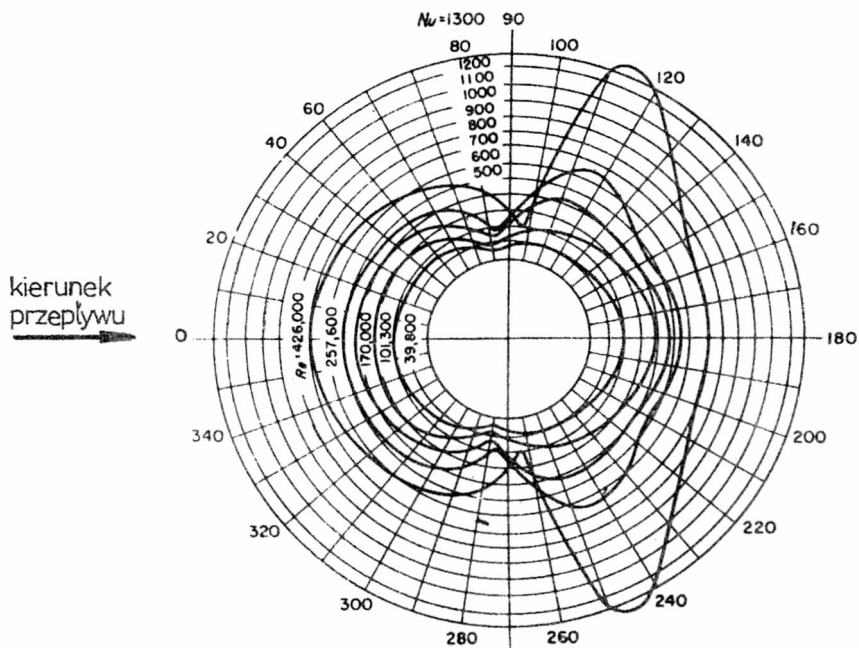


Rys. 9.16. Zależność $St \cdot Pr^{2/3} = f(Re)$ dla powierzchni rozwiniętych (patrz przypis s. 143)

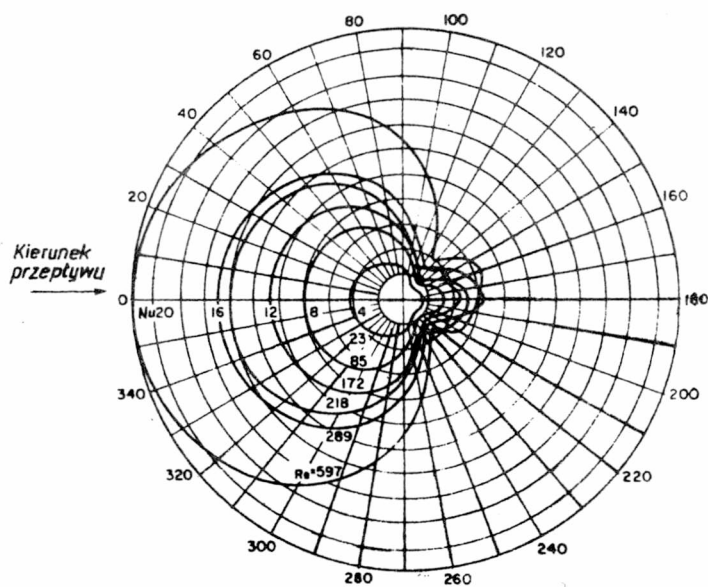


Rys. 9.17. Zależność $St \cdot Pr^{2/3} = f(Re)$ dla powierzchni rozwiniętych (patrz przypis s. 143)

Rys. 9.18. Zależność $St \cdot Pr^{2/3} = f(Re)$ dla żeber śrubowychRys. 9.19. Zależność $St \cdot Pr^{2/3} = f(Re)$ dla żeber śrubowychRys. 9.20. Zależność $St \cdot Pr^{2/3} = f(Re)$ dla żeber śrubowych



Rys. 9.21. Zależność lokalnej wartości $Nu = f(Re)$ od kąta na obwodzie — duża prędkość opływu



Rys. 9.22. Zależność lokalnej wartości $Nu = f(Re)$ od kąta na obwodzie — mała prędkość opływu

biegunowym zależność lokalnej liczby Nu od kąta określającego położenie punktu dla różnych liczb Re . Wynika z niej, że gdy jest mniejsza Re , a więc i prędkości, największa wartość α znajduje się w miejscu czołowego (rys. 9.21) napływu na powierzchnię walcową. Gdy prędkości są większe, powstające za opływającym walcem, wiry powodują wzrost α po stronie przeciwnej niż miejsce czołowego napływu (patrz rys. 9.22).

We wzorach obliczeniowych podaje się wartość średnią na całym obwodzie.

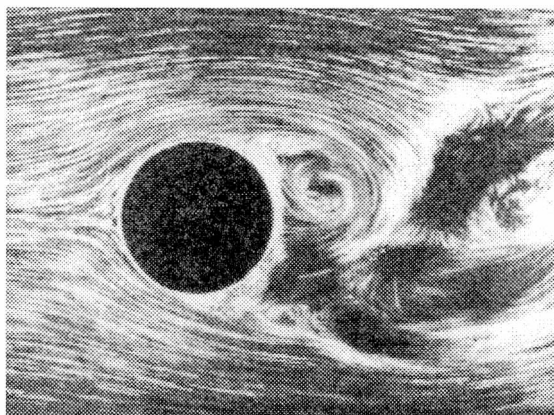
Badania opływu poprzecznego pojedynczych rur i różnych profili prowadzili Reiher i Hilpert. Wyniki tych badań zostały ujęte w postaci wzoru uogólnionego

$$Nu = C \cdot Re^n. \quad (9.34)$$

W tabeli 9.8 podano wartości dla opływu pojedynczej rury gazami lub cieczą.

Tabela 9.8. Stałe C i n do wzoru (9.34) dla opływu pojedynczej rury (rys. 9.23)

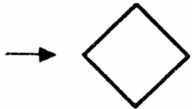
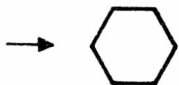
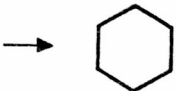
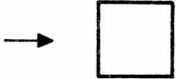
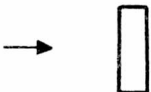
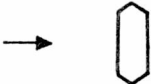
Re	n	C	
		gazy	ciecze
1–4	0,33	0,891	$0,979 \cdot Pr^{1/3}$
4–40	0,385	0,821	$0,911 \cdot Pr^{1/3}$
40–4000	0,466	0,615	$0,683 \cdot Pr^{1/3}$
4000–40 000	0,618	0,174	$0,193 \cdot Pr^{1/3}$
40 000–250 000	0,805	0,0239	$0,0266 \cdot Pr^{1/3}$



Rys. 9.23. Opływ rury pojedynczej (Prandtl-Tietjens)

W tabeli 9.9 podano wartości C i n dla opływu przez powietrze różnych pojedynczych profili oraz zakres stosowalności wzoru (9.34).

Tabela 9.9. Stałe C i n do wzoru (9.34) dla opływu pojedynczych profili powietrzem

Profil	Zakres Re	C	n	Uwagi
	5000–100 000	0,222	0,588	Hilpert
	2500–15 000	0,224	0,612	Reiher
	5000–100 000	0,138	0,638	Hilpert
	5000–19 500	0,144	0,638	Hilpert
	5000–100 000	0,092	0,675	Hilpert
	4000–15 000	0,205	0,731	Reiher
	19 500–100 000	0,053	0,782	Hilpert
	3000–15 000	0,083	0,804	Reiher

9.3.3. Wzory uproszczone

Ze względu na nieskomplikowaną budowę wzory uproszczone są chętnie używane mimo ograniczenia zakresu stosowalności. Jeśli stosowanie uogólnionego wzoru dla przepływu płynu wewnątrz rurociągu $Nu = C Re^A Pr^B$ ograniczyć do gazów, dla których można przyjąć stałość liczby Pr , to ulegnie on uproszczeniu i przyjmie postać

$$Re = C' Re^A. \quad (9.35)$$

Ponieważ $\text{Pr} = c_p \eta / \lambda$, więc

$$\eta = \frac{\text{Pr} \lambda}{c_p}. \quad (9.36)$$

Jeżeli to równanie zastosujemy do obliczenia Re we wzorze (9.35), otrzymamy

$$\text{Nu} = C' \left(\frac{\dot{g} d c_p}{\text{Pr} \lambda} \right)^A = \text{const} \left(\frac{w \rho d c_p}{\lambda} \right)^A. \quad (9.36)$$

Wyrażenie w $\rho d c_p / \lambda$ jest bezwymiarowe i zwie się liczbą Pécleta

$$\text{Nu} = \text{const} \cdot \text{Pe}^A, \quad (9.37)$$

czyli

$$\frac{\alpha d}{\lambda} = \text{const} \left(\frac{w \rho d c_p}{\lambda} \right)^A. \quad (9.38)$$

Dla gazów można przyjąć uproszczenie:

$$w \rho = w_o \rho_o, \quad (9.39)$$

przy czym

$w_o = w(T_o/T)$ — prędkość zredukowana na warunki normalne,

T — temperatura gazu,

ρ_o — gęstość gazu w warunkach normalnych.

Jeżeli (9.39) wstawimy do (9.38) i przekształcimy, to otrzymamy:

$$\alpha = \text{const} \lambda^{1-A} (\rho_o c_p)^A w_o^A / d^{1-A}. \quad (9.40)$$

Po uzgodnieniu (9.40) z wynikami doświadczeń różnych badaczy Schack zaproponował równanie:

$$\alpha = 24,3 (\rho_o c_p)^{0,77} \cdot \lambda^{0,23} \cdot \frac{w_o^{0,75}}{d^{0,25}}, \quad \text{W/m}^2 \cdot \text{K}. \quad (9.41)$$

Ponieważ dla danego gazu o stałym ciśnieniu c_p i λ są funkcją tylko temperatury, a $\rho_o = \text{const}$, (9.41) można zapisać w postaci

$$\alpha = \varphi \frac{w_o^{0,75}}{d^{0,25}}, \quad (9.42)$$

przy czym $\varphi = \varphi(t)$. Wartość liczbową tego współczynnika dla różnych gazów podano w tab. 9.10.

Tabela 9.10. Wartość funkcji φ do wzoru (9.42) dla gazów o ciśnieniu 0,1 MPa, przepływających wewnątrz rur

Czynnik	φ	Czynnik	φ
Powietrze	$4,13 + 0,195 \frac{t}{100}$	CH ₄	$4,84 + 1,05 \frac{t}{100}$
CO ₂	$0,335 T$	C ₂ H ₄	$4,95 + 1,73 \frac{t}{100}$
H ₂	$6,33 + 0,34 \frac{t}{100}$	Gaz koksowniczy	$6,07 + 0,65 \frac{t}{100}$
H ₂ O (gaz)	$4,21 + 0,35 \frac{t}{100}$	Spaliny (CO ₂ – 17,6% H ₂ O – 6,5%)	$4,19 + 0,26 \frac{t}{100}$

Dla odpływu pęczków rur przez gazy Schack podaje inny wzór

$$\alpha = f_a \varphi_p \frac{w_{o,\max}^{0,61}}{d^{0,39}}, \quad \text{W/m}^2 \cdot \text{K}, \quad (9.43)$$

w którym

f_a – współczynnik zależy od układu rur,

$$f_a = 1,07 - 0,65(s_L/d)^{1,5}/(s_T/d)^4 \quad \text{– dla układu korytarzowego}, \quad (9.44)$$

$$f_a = 0,874 + \frac{0,286}{(s_T/d)^2} + 0,84 s_L/d \quad \text{– dla układu szachowego}, \quad (9.45)$$

$w_{o,\max}$ – prędkość w najwęższym przekroju zredukowana do warunków normalnych,

s_T, s_L – podziałka (patrz rys. 9.8),

$\varphi_p = \varphi_p(t)$ – współczynnik, który dla różnych gazów podano w tab. 9.11.

Tabela 9.11. Wartość współczynnika φ_p do wzoru (9.43)

Czynnik	φ_p	Czynnik	φ_p
Powietrze	$1,60 \sqrt[4]{T}$	gaz koksowniczy	$0,712 \sqrt{T}$
Spaliny	$1,72 \sqrt[4]{T}$	H ₂	$2,08 \sqrt[3]{T}$
Para	$0,356 \sqrt[4]{T}$		
CO	$6,52 + 1,07 \frac{t}{100}$	CH ₄	$7,71 + 0,161 \frac{t}{100}$

Wzór (9.43) obowiązuje dla $w_{o,\max} d < 0,2$.

Dla cieczy przepływającej burzliwie wewnątrz kanałów Schack podaje wzór o bardzo prostej postaci:

$$\alpha = \varphi_e \cdot w^{0,85}, \quad \text{W/m}^2 \cdot \text{K}, \quad (9.46)$$

w którym φ_e należy obliczyć dla średniej temperatury płynu z zależności podanych w tab. 9.12 dla różnych płynów.

Tabela 9.12. Współczynnik φ_e do wzoru (9.46)

Czynnik	φ_e
Woda	$3372(1 + 0,014 t)$
Olej lekki	$350(1 + 0,014 t)$
Olej ciężki	$170(1 + 0,014 t)$

9.3.4. Przykłady obliczeniowe

W rurach o średnicy wewnętrznej 50 mm płynie powietrze ze średnią prędkością 15 m/s, średnia temperatura powietrza wynosi 100°C, ciśnienie 0,1 MPa. Obliczyć współczynnik konwekcji α .

Dla powietrza o ciśnieniu 1 MPa, temperaturze 100°C, z tab. 14.2 wynika: $\lambda = 0,0311 \text{ W/m} \cdot \text{K}$, $\vartheta = 23,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $\text{Pr} = 0,708$. Po sprawdzeniu liczby Re otrzymujemy

$$\text{Re} = \frac{wd}{\nu} = \frac{15 \cdot 0,050}{23,3 \cdot 10^{-6}} = 32\,200 > \text{Re}_{kr}.$$

Przepływ jest burzliwy i wymuszony (co wynika ze znacznej prędkości przepływu), obowiązuje więc wzór

$$\text{Nu} = C \text{Re}^A \text{Pr}^B.$$

Z tabeli 9.2 otrzymujemy

$$C = 0,023; \quad A = 0,8; \quad B = 0,4,$$

$$\text{Nu} = 0,023 \cdot 32\,200^{0,8} \cdot 0,708^{0,4} = 80,91.$$

Współczynnik α wynosi

$$\alpha = \frac{\text{Nu}\lambda}{d} = \frac{80,91 \cdot 0,0311}{0,050} = 52 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}.$$

Obliczenie za pomocą uproszczonego wzoru Schacka

$$\alpha = \varphi \frac{w_o^{0,75}}{d^{0,25}}.$$

Z tabeli 9.10 dla powietrza otrzymujemy

$$\varphi = 4,13 + 0,195 \frac{t}{100} = 4,13 + 0,195 \frac{100}{100} = 4,325,$$

$$w_o = w \frac{273,2}{273,2 + t} = 15 \frac{273,2}{273,2 + 100} = 11 \text{ m/s},$$

$$\alpha = 4,325 \frac{11^{0,75}}{0,050^{0,25}} = 55 \text{ W/m} \cdot \text{K}.$$

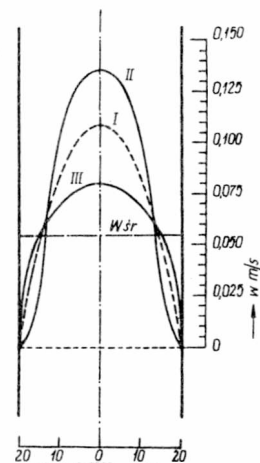
9.4. Konwekcja o wymuszonym ruchu uwarstwionym

Jest to dział konwekcji, któremu poświęcono stosunkowo najwięcej rozważań analitycznych dzięki uwarstwieniu strug. Zgodność z wynikami doświadczeń jest jednak wystarczająca tylko dla bardzo małej liczby Graetza Gz (dalej omówionej). Dzieje się tak, ponieważ mimo stosunkowo prostego ruchu płynu wpływ zmienności parametrów, zwłaszcza lepkości, jest przy większych prędkościach niepomijalny. Gdy średnice kanałów są większe, dochodzi dodatkowo wpływ sił grawitacyjnych, powodujący zaburzenie strug przepływu laminarnego. Na ruch wymuszony nakładają się elementy ruchu swobodnego.

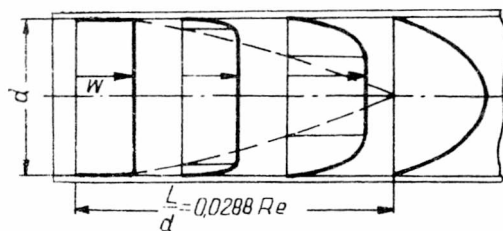
Na wlocie do kanału powstaje odcinek rozbiegowy (patrz rys. 9.25). Jeżeli przepływ odbywa się w kanale stosunkowo krótkim, to wpływ tego odcinka jest szczególnie duży. Wpływ ten jest ujęty stosunkiem d/L , określającym smukłość przewodu (rys. 9.24 i 9.25).

Gdy lepkość jest niezmienna, profil prędkości w rurociągu kołowym w ustalonym przepływie laminarnym jest paraboliczny (patrz rys. 9.24).

Jeżeli uwzględnimy zmianę lepkości wynikającą ze zmian temperatury w poprzecznym przekroju strugi, to zależnie od tego, czy mamy do czynienia z grzaniem płynu (temperatura ścianki wyższa od temperatury płynu), czy chłodzeniem, profil prędkości w tym samym kanale ulegnie zmianom (rys. 9.24).



Rys. 9.24. Profil prędkości podczas laminarnego przepływu: I — gdy lepkość płynu jest stała, gdy lepkość zależy od temperatury: II — podczas chłodzenia, III — podczas grzania



Rys. 9.25. Tworzenie się profilu parabolicznego u wlotu rury

Jeżeli do wlotu rurociągu dopływa płyn ze stałą prędkością, to w odcinku rozbiegowym następuje ustalenie profilu prędkości do parabolicznego (patrz rys. 9.25), gdy po ustaleniu profilu przepływ odbywa się z liczbą Reynoldsa $Re < Re_{kr}$.

Zależność ogólną dla wymuszonego przepływu płynu w kanale, gdy ruch jest laminarny, można przedstawić w postaci:

$$\alpha = f(\dot{G}, c_p, \lambda, d, L). \quad (9.47)$$

przy czym

$\dot{G} = (\pi d^2/4)\dot{g}$ — strumień substancji,

$\dot{g} = w\rho$ — gęstość strumienia substancji,

c_p — ciepło właściwe,

λ — współczynnik przewodzenia ciepła płynu,

d — średnica kanału,

L — długość kanału.

Po zastosowaniu teorematu Buckinghama i analizy wymiarowej zależność (9.47) można przedstawić w postaci uogólnionej

$$\text{Nu} = \text{const} \left(\frac{4}{\pi} \text{Gz} \right)^a, \quad (9.48)$$

gdzie $\text{Gz} = \dot{G}c_p/\alpha L$ jest liczbą Graetza, charakterystyczną dla wymuszonego przepływu laminarnego.

Wyrażenie $(4/\pi)\text{Gz}$ można przedstawić w postaci

$$\frac{4}{\pi} \text{Gz} = \frac{4}{\pi} \frac{\dot{G}c_p}{\lambda L} = \frac{d^2 \dot{g} c_p}{\lambda L} \quad (9.49)$$

i dalej

$$\frac{4}{\pi} \text{Gz} = \left(\frac{d\dot{g}}{\eta} \right) \left(\frac{c_p \eta}{\lambda} \right) \left(\frac{d}{L} \right) = \text{Re Pr} \frac{d}{L}. \quad (9.50)$$

Uogólnioną zależność (9.48) można także zapisać w postaci

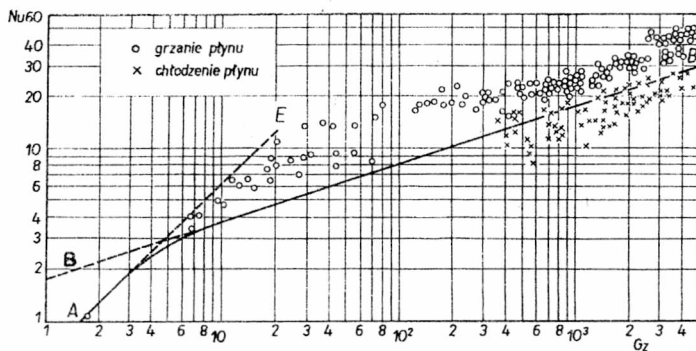
$$\text{Nu} = \text{const} \text{Re}^a \text{Pr}^a \left(\frac{d}{L} \right)^a. \quad (9.51)$$

Wszystkie omówione wcześniej przyczyny powodują, że dla wymuszonego laminarnego przepływu płynu w rurociągu stosuje się różne wzory, zależnie od tzw. zakresu laminarności określonego wielkością liczby Graetza lub wyrażeniem do niej proporcjonalnym [6], a wynikającym z równości

$$\frac{4}{\pi} \text{Gz} = \text{Re Pr} \frac{d}{L}.$$

Na rysunku 9.26 przedstawiono linią ciągłą zależność liczby Nu od Gz. Gdy

$$\frac{4}{\pi} \text{Gz} = \text{Re Pr} \frac{d}{L} < 4,5,$$



Rys. 9.26. $Nu = f(Gz)$ dla wymuszonego przepływu laminarnego

linia ta dąży do teoretycznej zależności (linia A–E na rys. 9.26), określonej równaniem

$$Nu = 0,5 \left(\frac{4}{\pi} Gz \right) = 0,5 Re Pr \frac{d}{L}. \quad (9.52)$$

Gdy $(4/\pi)Gz = RePrd/L > 13$, zależność jest określona równaniem doświadczalnym

$$Nu = 1,62 \left(\frac{4}{\pi} Gz \right)^{1/3} = 1,62 Re^{1/3} Pr^{1/3} \left(\frac{d}{L} \right)^{1/3} \quad (9.53)$$

(linia B na rys. 9.26).

W równaniu (9.53) nie są uwzględnione zmiany liczby Nu w zależności od grzania lub chłodzenia, które – jak wynika z przeprowadzonych pomiarów (patrz rys. 9.26) – są jednak niepomijalne. Z tego względu dla danego zakresu laminarności ($RePrd/L > 13$) Sieder i Tate przeprowadzili korelację wyników doświadczeń różnych badaczy, ustalając powszechnie stosowany wzór

$$Nu = 1,86 \left(\frac{\eta}{\eta_s} \right)^{0,14} Gz^{1/3}, \quad (9.54)$$

w którym wpływ grzania lub chłodzenia ujmuje stosunek lepkości $(\eta/\eta_s)^{0,14}$.

Wzór można zapisać w postaci:

$$Nu = 1,86 \left(\frac{\eta}{\eta_s} \right)^{0,14} Re^{1/3} Pr^{1/3} \left(\frac{d}{L} \right)^{1/3} \quad (9.55)$$

przy czym

η – współczynnik lepkości liczony dla średniej temperatury płynu,

η_s – współczynnik lepkości liczony dla średniej temperatury ściany.

Wpływ sił wyporu, czyli konwekcji swobodnej, na wielkość współczynnika konwekcji podczas wymuszonego przepływu laminarnego przez poziomy kanał, określa się wzorem przytoczonym przez Michiejewa

$$Nu = 0,17 Re^{0,33} Pr^{0,43} Gr^{0,1} \left(\frac{Pr}{Pr_s} \right)^{0,25}, \quad (9.56)$$

w którym wpływ konwekcji naturalnej wyraża liczba znamienna Grasshoffa Gr , charakterystyczna dla tej konwekcji

$$Gr = \frac{g\beta\Delta T d_h^3 \rho^2}{\eta^2},$$

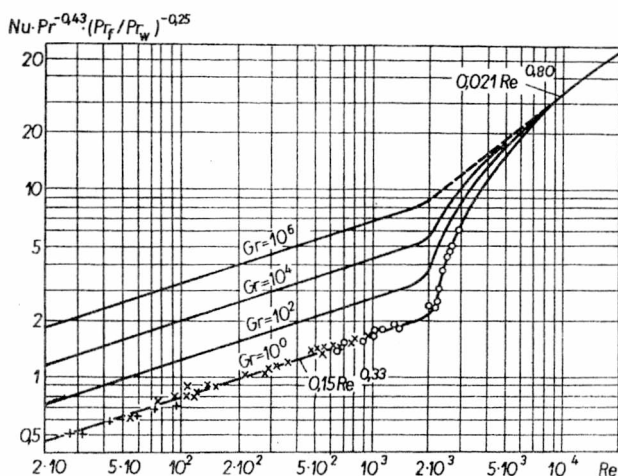
Pr_s — liczba Prandtla liczona dla średniej temperatury ściany,

Pr — liczba Prandtla liczona dla średniej temperatury płynu,

ΔT — średnia różnica temperatury ściany i płynu (liczona jako średnia arytmetyczna na wlocie i wylocie),

d_h — średnica hydrauliczna przewodu.

Równanie (9.56) przedstawiono wykreślnie na rys. 9.27.



Rys. 9.27. Konwekcja o ruchu laminarnym w kanale poziomym (według wzoru (9.56))

Wzór (9.56) ma charakter ogólny i jest słuszny dla różnych płynów i przekrojów kanałów. Jest on opracowany dla kanałów długich, dla których $L/d > 50$. Jeżeli kanał jest krótszy, to współczynnik konwekcji wyliczony z (9.56) należy pomnożyć przez poprawkę ε_L wziętą z tab. 9.13.

Tabela 9.13. Mnożnik ε_L dla rurociągów krótkich

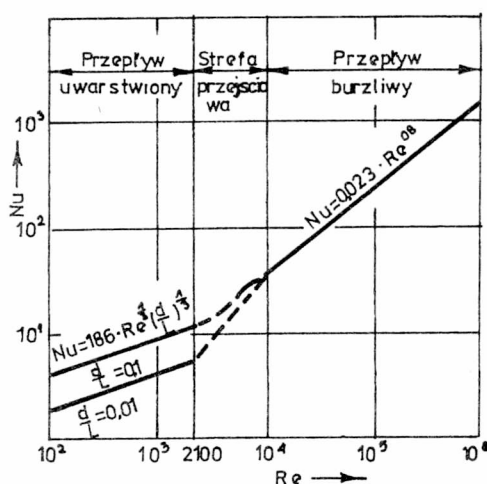
L/d	1	2	5	10	15	20	30	40	50
ε_L	1,90	1,70	1,44	1,28	1,18	1,13	1,05	1,02	1

9.5. Konwekcja o wymuszonym ruchu przejściowym

Przejście płynów lepkich z ruchu laminarnego do turbulentnego lub odwrotnie zachodzi w tak zwanej strefie przejściowej. Płyn poruszający się burzliwie w tej strefie nie uwarstwia się samoczynnie, a uwarstwiony nie zaburza. Zaburzenie ruchu laminarnego w tej strefie nie powoduje samoczynnego powrotu do ruchu uwarstwowionego.

W płynach gęstych strefa przejściowa rozciąga się w zakresie liczb $Re = 2100-10^4$.

Na rysunku 9.28 przedstawiono zmienność liczby Nu w różnych zakresach ruchu wymuszonego dla płynu o liczbie $Pr = 1$ oraz $\eta/\eta_s = 1$.

Rys. 9.28. Położenie strefy przejściowej na wykresie $Nu = f(Re)$

Proces przekazywania ciepła w strefie przejściowej nie jest ustabilizowany i otrzymane wyniki badań nie są jednolite. Z tego względu jako przybliżenie można polecić w układzie podwójnie logarytmicznym liniową interpolację liczby Nu . Interpolować należy między wartościami Nu obliczonymi dla $Re = 2100$ ze wzoru określającego przepływ laminarny i dla $Re = 10^4$ w wypadku ruchu burzliwego.

Żawronkow, Malusowa i Małafiejew dla przepływu w kanałach cylindrycznych podają wzór:

$$Nu = 0,00069 \cdot Pr^{0,5} Re^{1,24}, \quad (9.57)$$

sprawdzony w zakresie $200 < Re < 10^4$.

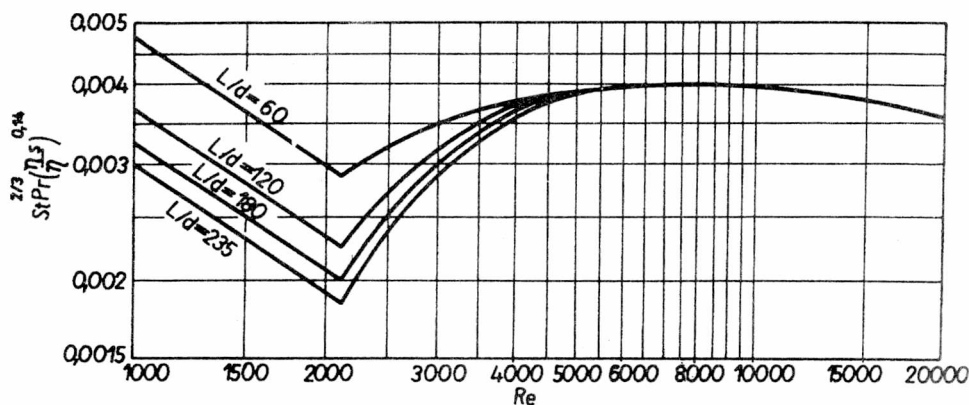
Hausen dla przepływu w strefie przejściowej w zakresie $2300 < Re < 10^6$ proponuje równanie

$$Nu = 0,116(Re^{2/3} - 125)Pr^{1/3} \left[1 + \left(\frac{d}{L} \right)^{2/3} \right] \left(\frac{\eta}{\eta_s} \right)^{0,14}, \quad (9.58)$$

Colburn opracował dla przepływu w strefie przejściowej wykres, określający funkcję (patrz rys. 9.29)

$$St Pr^{2/3} \left(\frac{\eta}{\eta_s} \right)^{0,14} = f(Re), \quad (9.59)$$

w której St – liczba Stanton.



Rys. 9.29. Wykres dla strefy przejściowej (Colburn)

9.6. Konwekcja naturalna (swobodna)

W konwekcji naturalnej ruch jest spowodowany siłami grawitacyjnymi, czyli siłami wyporu wynikającymi z różnic gęstości płynu znajdującego się w polu grawitacyjnym.

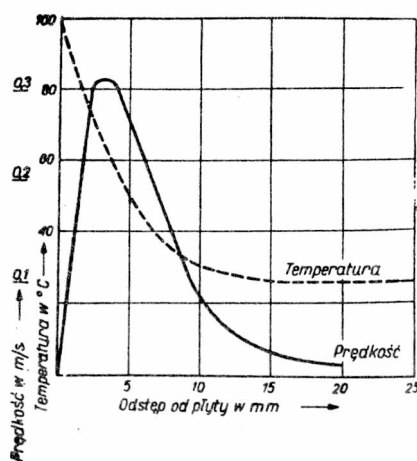
Jeżeli między przedmiotem a otaczającym go płynem istnieje różnica temperatur, to istnieje ona również w samym płynie, choćby tylko w warstwie granicznej. Różnica ta przy stałym ciśnieniu powoduje lokalne zmiany gęstości, a te z kolei grawitacyjny ruch płynu. W konwekcji naturalnej zachodzi ścisły związek między polem temperatury i polem prędkości. Na rysunku 9.30 przedstawiono profil temperatury i prędkości płynu podczas opływania ściany pionowej.

Dla danego płynu, zależnie od różnicy temperatur, wysokości opływającego przedmiotu, a także jego kształtu, ruch może mieć charakter laminarny, przejściowy lub turbulentny. Z tego względu konwekcję naturalną rozpatruje się w trzech zakresach.

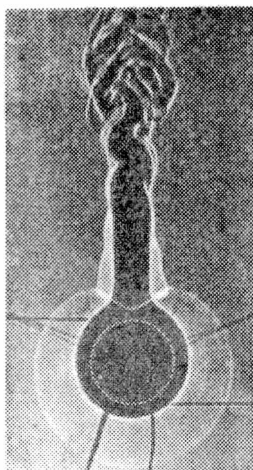
Za kryterium podziału przyjmuje się zwykle iloczyn $GrPr$.

Charakter ruchu jest niezwykle ważny w procesie tworzenia się warstewki przyściennej, wpływa bowiem na wielkość współczynnika konwekcji.

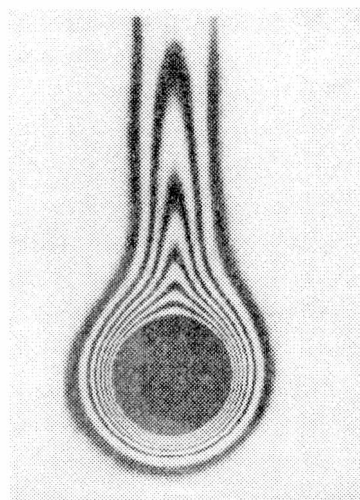
Warstewkę przyścienną można uwidocznić na kliszy fotograficznej za pomocą metody cieni lub metody interferencyjnej. Gdy stosuje się metodę interferencyjną, są uwidocznione także powierzchnie izotermiczne. Na fotografiach (rys. 9.31 i 9.32) pokazano obraz warstewki przyściennej wykonany obu metodami.



Rys. 9.30. Temperatura i prędkość płynu przy płycie pionowej — ruch grawitacyjny



Rys. 9.31. Swobodny opływ rury poziomej. Prądy uwidocznione metodą cieni (Schmidt)



Rys. 9.32. Swobodny opływ rury poziomej. Prądy uwidocznione metodą interferencyjną. Widoczny rozkład izoterm (Eckert, Sochengen)

Podczas opływu wysokiej płyty (patrz rys. 9.33) można zaobserwować wszystkie trzy rodzaje ruchu. Na skutek wzrostu prędkości, spowodowanego dłuższym czasem działania siły wyporu, ruch początkowo (u dołu) laminarny przechodzi na pewnej wysokości w burzliwy. Widać to także na rys. 9.31; struga ciepłego płynu nad rurą zaburza się na pewnej wysokości.

Współczynnik konwekcji naturalnej

$$\alpha = f(\lambda, \eta, c_p, \Delta T, h, \rho, \beta, g) \quad (9.60)$$

w ogólnym ujęciu zależy od współczynnika przewodzenia ciepła λ , lepkości η , ciepła właściwego c_p , różnicy temperatur ΔT , wymiaru h pionowego opływającego przedmiotu (dla rury poziomej $h = d$), gęstości ρ , współczynnika rozszerzalności objętościowej β płynu^{*)} i przyspieszenia grawitacyjnego g .

Zależność ogólną można ująć w postaci modułowego równania uogólnionego o postaci

$$Nu = C Gr^i Pr^i, \quad (9.61)$$

w którym

$$Nu = \alpha h / \lambda,$$

$$Gr = g \beta \Delta T h^3 \rho^2 / \eta^2.$$

Jeżeli wprowadzimy [6] pojęcie współczynnika

$$\mathfrak{G}_z = \left(\frac{\eta^2}{g \rho^2} \right)^{1/3}, \quad (9.62)$$

który ma wymiar w jednostkach długości i spełnia rolę zastępczego wymiaru poprzecznego strugi, co zostanie uzasadnione w p. 9.4.2.1, to

$$Gr = \frac{(\beta \Delta T) h^3}{\mathfrak{G}_z^3} = V \left(\frac{\mathfrak{G}_z}{h} \right)^{-3}. \quad (9.63)$$

We wzorze (9.63)

$$V = \beta \Delta T$$

i spełnia warunki liczby kryterialnej.

Równanie (9.61) można przekształcić do postaci:

$$\left(\frac{\alpha \mathfrak{G}_z}{\lambda} \right) \frac{h}{\mathfrak{G}_z} = C V^i \left(\frac{\mathfrak{G}_z}{h} \right)^{-3i} Pr^i. \quad (9.64)$$

Rys. 9.33. Opływ ściany pionowej. Prądy uwidocznione metodą interferencyjną

^{*)} Wielu badaczy zaleca liczenie współczynnika rozszerzalności objętościowej β gazów w sposób przybliżony $\beta \cong 1/T, 1/K$, gdzie T jest średnią temperaturą płynów wyrażoną w K (dla gazów doskonałych $\beta = 1/273,2$).

Po wykorzystaniu pojęcia zastępczej liczby Nusselta

$$\text{Nu} = \frac{\alpha \vartheta_z}{\lambda}, \quad (9.64a)$$

(9.61) możemy zapisać za pomocą następującego wzoru uogólnionego:

$$\text{Nu} = C V^i \text{Pr}^i \left(\frac{\vartheta_z}{h} \right)^{1-3i}. \quad (9.65)$$

Równanie (9.65) jest zapisanym za pomocą innych liczb znamionnych równaniem (9.61).

Wartość wykładnika potęgowego i dla różnych zakresów konwekcji podano w tab. 9.14.

Tabela 9.14.*) Wartość wykładnika i do wzoru (9.61) i (9.65)

dla $\text{GrPr} = V \text{Pr}(\vartheta_z/h)^{-3} = X < X_1$	$i < \frac{1}{4}$
dla $\text{GrPr} = V \text{Pr}(\vartheta_z/h)^{-3} = X = X_1$ do X_2	$i = \frac{1}{4}$
dla $\text{GrPr} = V \text{Pr}(\vartheta_z/h)^{-3} = X > X_2$	$i = \frac{1}{3}$

Uwaga. W konwekcji naturalnej parametry przyjmuje się dla średniej temperatury t_w warstwy przyściennej.

Wartości współczynnika C dla różnych zakresów konwekcji podano w tab. 9.15.

Tabela 9.15.*) Wartość współczynnika C do wzorów (9.61) i (9.65) [6]

Lp.	Układ	Zakresy stosowalności C dla wartości $X = \text{GrPr} = V \text{Pr}(\vartheta_z/h)^{-3}$					
		od X_1	do X_2	C	powyżej X_2	C	Źródło
1	Ściana pionowa, cylinder pionowy	10^4 $5 \cdot 10^2$	10^9 $2 \cdot 10^7$	0,59 0,54	$> 10^9$ $> 2 \cdot 10^7$	0,13	Weise, Sandera, Mc Adams, Michiejew
2	Rura pozioma, drut	10^3 10^3	10^9 10^9	0,53 0,47	$> 10^9$	0,11	Eberle, Warmsler, Koch, Mc Adams, Rice, Braun i Marco
3**)	Płyta pozioma, odda- jąca ciepło ku górze	10^5	$2 \cdot 10^7$	0,54	$> 2 \cdot 10^7$	0,14	Fischenden i Sandaurs
4	Płyta oddająca ciepło w dół	10^3	10^9	0,35	$> 10^9$	0,08	Braun i Marco

*) W obliczeniach uproszczonych w przybliżeniu można przyjąć, że wartości liczb X_1 i X_2 , podane w tab. 9.15 ($X = \text{GrPr} = V \text{Pr}(\vartheta_z/h)^{-3}$), wynoszą $X_1 \approx 10^3$, $X_2 \approx 10^9$.

**) Dla płyty poziomej h jest równe mniejszemu bokowi, dla płyt w których $h > 0,6$ m, należy przyjąć $h_{\max} = 0,6$ m.

9.6.1. Konwekcja naturalna w szczelinach

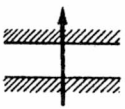
Przekazywanie ciepła przez płyny umieszczone w wąskich przestrzeniach ujmuje się zwykle w ten sposób, że wprowadza się dla tych płynów pojęcie skorygowanego współczynnika przewodzenia ciepła λ_r . Jeżeli λ jest współczynnikiem przewodzenia ciepła dla płynu, gdy nie ma w nim ruchów konwekcyjnych, to λ_r ujmuje istniejące w szczelinie ruchy konwekcyjne.

Dla różnego kształtu szczelin Niemann ustalił następującą zależność:

$$\frac{\lambda_r}{\lambda} = 1 + \frac{m(\text{Gr Pr})^r}{\text{Gr Pr} + n}. \quad (9.66)$$

Na podstawie badań Niemanna w tab. 9.16 podano wartości współczynników m , n , r dla różnych szczelin i kierunków przekazywania ciepła.

Tabela 9.16. Współczynniki m , n , r do wzoru (9.66)

Kształt szczeliny i kierunek strumienia ciepła	m	n	r
	0,119	$1,45 \cdot 10^4$	1,270
	0,070	$1,32 \cdot 10^2$	1,333
	0,0236	$1,01 \cdot 10^4$	1,393
	0,043	$0,41 \cdot 10^4$	1,360
	0,025	$1,30 \cdot 10^4$	1,360

Gdy $\text{Gr Pr} < 1700$, ruchy konwekcyjne w szczelinie nie mają wpływu na wielkość strumienia ciepła, tzn. $\lambda_r/\lambda = 1$.

Wzory innych badaczy ujmują także wpływ szerokości δ i wysokości H szczeliny.

Jacob na podstawie wyników badań Mulla, Reihera Nusselta oraz Schmidta podał wzory dla szczelin pionowych wypełnionych powietrzem, w których H/δ jest zawarte w przedziale od 11 do 42:

$$\frac{\lambda_r}{\lambda} = 0,18 \text{Gr}^{1/4} \left(\frac{\delta}{H} \right)^{1/9}, \quad (9.67)$$

gdy $2 \cdot 10^4 < \text{Gr} < 2 \cdot 10^5$ oraz

$$\frac{\lambda_r}{\lambda} = 0,065 \text{Gr}^{1/3} \left(\frac{\delta}{H} \right)^{1/9}, \quad (9.68)$$

gdy $2 \cdot 10^5 < \text{Gr} < 11 \cdot 10^6$.

We wzorach (9.66), (9.67) należy przyjmować parametry odpowiadające średniej temperaturze gazu w szczelinie, równej średniej temperaturze otaczających szczelinę ścian.

9.6.2. Wzory uproszczone

Jeśli ograniczy się stosowalność wzorów uogólnionych, można uzyskać wzory o prostej budowie, przydatne do ważniejszych rozwiązań praktycznych.

W wypadku ściany pionowej, gdy (według tab. 9.14 i 9.15) $5 \cdot 10^2 < \text{GrPr} = V \text{Pr} (\vartheta_z/h)^{-3} < 2 \cdot 10^7$, $i = 1/4$, $C = 0,54$, wzór (9.61) można sprowadzić do postaci:

$$\alpha = A \left(\frac{\Delta t}{h} \right)^{1/4}, \quad \text{W/m}^2 \cdot \text{K}, \quad (9.69)$$

gdzie współczynnik A jest funkcją tylko temperatury.

Wartość tego współczynnika dla powietrza i wody podano w tab. 9.17 i 9.18.

Tabela 9.17. Wartość współczynnika A do wzoru (9.69) dla powietrza

t_w	0	50	100	200	300	500	1000
A	1,42	1,32	1,27	1,22	1,10	0,99	0,81

Tabela 9.18. Wartość współczynnika A do wzoru (9.69) dla wody

t_w	0	20	40	60	80	100	150	200
A	70	111	149	178	205	226	273	305

Jeżeli $\text{GrPr} = V\text{Pr}(\vartheta_z/h)^{-3} > 2 \cdot 10^7$, $i = 1/3$, $C = 0,135$, wzór (9.61) przyjmie postać:

$$\alpha = A \cdot \Delta t^{1/3}, \quad \text{W/m}^2 \cdot \text{K}, \quad (9.70)$$

gdzie A jest także funkcją temperatury; wartość tego współczynnika dla powietrza i wody podano w tab. 9.19 i 9.20.

Tabela 9.19. Wartość współczynnika A do wzoru (9.70) dla powietrza

t_w	0	50	100	200	300	500	1000
A	1,68	1,47	1,33	1,13	0,99	0,81	0,56

Tabela 9.20. Wartość współczynnika A do wzoru (9.70) dla wody

t_w	0	20	40	60	80	100	150	200
A	102	198	291	362	425	480	610	714

W celu szybkiego sprawdzenia, w jakim znajdujemy się zakresie naturalnej konwekcji, wystarczy sprawdzić tylko wartość iloczynu $\Delta t \cdot h^3$ i skorzystać z wyrażenia B

$$B = \frac{10^9 \vartheta_z^3}{\beta \text{Pr}}, \quad (9.71)$$

którego wartość dla powietrza i wody podano w tab. 9.21.

Gdy $\Delta t h^3 < B$, wówczas $\text{GrPr} < 10^9$,

gdy $\Delta t h^3 > B$, wówczas $\text{GrPr} > 10^9$.

Tabela 9.21. Wartość B

dla powietrza							
t_w	50	100	200	300	500	1000	
B	15,65	29,45	79	184	682	5760	
dla wody							
t_w	20	40	60	80	100	150	200
B	0,067	0,026	0,015	0,01	0,007	0,003	0,002

Gdy mamy do czynienia z opływem innego przedmiotu niż ściana pionowa, wówczas we wzorze (9.61) ulegnie zmianie współczynnik C pociągając za sobą zmianę współczynnika A . W tym celu należy wprowadzić poprawiony współczynnik A' do wzorów (9.69) i (9.70) obliczony z zależności

$$A' = A \frac{C'}{C}, \quad (9.72)$$

w której C ma wartość 0,54, gdy $5 \cdot 10^2 < \text{GrPr} < 2 \cdot 10^7$ lub 0,135, gdy $\text{GrPr} > 2 \cdot 10^7$, C' zaś jest odpowiednim współczynnikiem z tab. 9.15 dla danej sytuacji geometrycznej i zakresu konwekcji.

W ten sposób stosowność wzorów (9.69) i (9.70) rozszerza się na przypadki, gdy jest znany współczynnik C' .

9.6.3. Przykłady obliczeniowe

Ściana pieca o wysokości $h = 8$ m ma zewnętrzną temperaturę 90°C . Temperatura otoczenia wynosi 15°C , a ciśnienie 0,098 MPa. Obliczyć α konwekcji.

Wzór ogólny (9.61) ma postać

$$\text{Nu} = C \text{Gr}^i \text{Pr}^i; \quad \text{Nu} = \alpha h / \lambda$$

lub (9.65)

$$\text{Nu}_z = C V^i \text{Pr}^i (\vartheta_z / h)^{1-3i}; \quad \text{Nu}_z = \alpha \vartheta_z / \lambda.$$

Średnia temperatura warstwy przyściennej (wzór 9.6) wynosi

$$t_w = \frac{t_{pr} + \vartheta_s}{2} = \frac{90 + 15}{2} = 52,5^\circ\text{C}.$$

Na podstawie tabel 14.2 i 14.7 dla $t_w = 52,5^\circ\text{C}$ i ciśnienia 0,098 MPa możemy napisać

$$\lambda = 2,74 \cdot 10^{-2} \text{ W/m} \cdot \text{K}; \quad \text{Pr} = 0,722; \quad \vartheta_z = 330 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$$

Wstępne określenie zakresu konwekcji naturalnej:

$$V = \beta \Delta t \cong \frac{1}{T_w} \Delta t = \frac{1}{273,2 + 52,5} (90 - 15) = 0,231,$$

$$\text{GrPr} = V \left(\frac{\vartheta_z}{h} \right) = 0,231 \left(\frac{330 \cdot 10^{-6}}{8} \right)^{-3} = 2,38 \cdot 10^{12} > 10^9.$$

Z tabeli 9.14 i 9.15 wynika, że gdy $\text{GrPr} > 10^9$, wówczas $C = 0,135$, $i = 1/3$.

Dla rozpatrywanego zakresu konwekcji wzór ogólny przyjmie postać

$$\text{Nu} = 0,135 (\text{GrPr})^{1/3}$$

lub

$$\text{Nu}_z = 0,135 (V \text{Pr})^{1/3},$$

$$\text{Nu} = 0,135 (2,38 \cdot 10^{12})^{1/3} = 1800,$$

$$\alpha = \frac{\text{Nu}\lambda}{h} = \frac{1800 \cdot 0,0274}{8} = 6,18 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}.$$

Obliczenie za pomocą uproszczonego wzoru (9.70), słusznego gdy $\text{GrPr} > 10^9$:

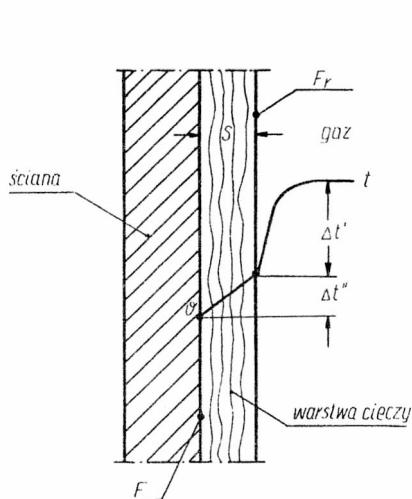
$$\alpha = A\Delta t^{1/3}.$$

Z tabeli 9.19 wynika, że gdy $t_w = 52,5^\circ\text{C}$, $A \cong 1,46$, wówczas

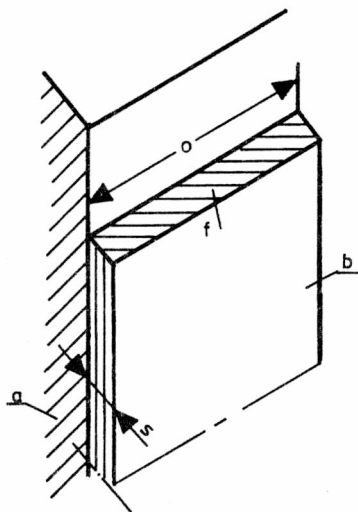
$$\alpha = 1,46(90 - 15)^{1/3} = 6,15 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}.$$

9.7. Spływ grawitacyjny

Rozważa się tutaj przypadki konwekcji zachodzące między powierzchnią przedmiotu a omywającym tę powierzchnię gazem, oddzielonym od ściany spływającą warstwą cieczy (rys. 9.34).



Rys. 9.34. Rozkład temperatury podczas grawitacyjnego spływu cieczy



Rys. 9.35. Spływ po ścianie warstwy cieczy:
a — ściana, b — warstwa płynu

Zjawisko zmienia się zasadniczo wraz ze wzrostem ilości cieczy spływającej na jednostkę długości ściany przedmiotu. Inaczej przebiega ona, gdy warstwa jest bardzo cienka, inaczej — gdy jest gruba; wtedy z reguły ciecz spływa burzliwie. Gdy warstwy są bardzo cienkie, przekazywanie ciepła w dużej mierze zależy od właściwości ośrodka gazowego. Jeśli warstwa jest gruba, konwekcja zachodzi głównie między powierzchnią przedmiotu a spływającą cieczą; wpływ ośrodka gazowego jest zwykle pomijalny.

Jeżeli s jest średnią grubością spływającej warstwy cieczy (rys. 9.35), możemy napisać równania:

$$\dot{Q} = F_c \alpha_g \Delta t', \quad (9.73)$$

w którym

α_g — współczynnik konwekcji między powierzchnią spływającej cieczy a gazem,
 $\Delta t'$ — różnica temperatur gazu i cieczy stykającej się z gazem powierzchni spływającej cieczy (patrz rys. 9.34),

F_c — zewnętrzna powierzchnia spływającej cieczy,
 oraz

$$\dot{Q} = F \frac{\lambda}{s} \Delta t'', \quad (9.74)$$

w którym

$\Delta t''$ — różnica temperatur ściany i powierzchni cieczy nie stykającej się ze ścianą (patrz rys. 9.34),

F — powierzchnia ściany,

s — grubość spływającej strugi.

Jeżeli grubość s warstwy cieczy nie jest duża, to niezależnie od kształtu powierzchni chłodzącej $F_c = F$. Po przekształceniu (9.73) i (9.74) w ten sposób, że po prawej stronie pozostaną różnice temperatur, i dodaniu stronami otrzymamy:

$$\frac{\dot{Q}}{F} \left(\frac{1}{\alpha_g} + \frac{s}{\lambda} \right) = \Delta t' + \Delta t'' = \vartheta - t, \quad (9.75)$$

gdzie

ϑ — temperatura ściany,

t — temperatura otoczenia gazowego.

Wprowadźmy pojęcie zastępczego oporu konwekcyjnego przekazywania ciepła dla spływu grawitacyjnego, który w odniesieniu do niezbyt grubych warstw cieczy w postaci

$$\frac{1}{\alpha} \cong \frac{1}{\alpha_g} + \frac{s}{\lambda}. \quad (9.76)$$

Opór s/λ warstwy cieczy jest tu traktowany jako dodatkowy opór pogrubionej o s warstwy przyściennej. Z tego względu można mówić o dwu składnikach oporu cieplnego dla spływu grawitacyjnego: $1/\alpha_g$ dla gazu i $1/\alpha_z$ dla warstwy cieczy, gdzie

$$\frac{1}{\alpha_z} = \frac{s}{\lambda}. \quad (9.77)$$

Po wprowadzeniu (9.77) można (9.76) przedstawić następująco:

$$\alpha = \frac{\alpha_g \cdot \alpha_z}{\alpha_g + \alpha_z}. \quad (9.78)$$

α_g należy obliczyć oddzielnie. Współczynnik ten zależy od właściwości ośrodka gazowego; metody jego obliczenia są podane w innych rozdziałach poświęconych konwekcji. Tutaj natomiast zajmiemy się bliżej współczynnikiem α_z , który wynika z istniejącej cienkiej warstwy spływającej cieczy.

9.7.1. Spływ grawitacyjny cienkich warstw

Zjawisko takiego spływu występuje między innymi podczas chłodzenia mieszanin gazowych, gdy jeden ze składników na skutek zetknięcia z zimną ścianką skrapla się tworząc ciekłą warstwę cieczy na ścianie. Temperatura ściany jest wtedy niższa od tzw. punktu rosy dla skraplającego się gazu. Zjawisko takie spotykamy np. podczas chłodzenia wilgotnego powietrza.

W rozważanym tu przypadku konwekcji grubość warstwy cieczy nie jest stała. Jest równa zero u góry przedmiotu, a maksymalna u dołu. Gdy są opływane poziomo rury lub niewysokie ściany, spływ jest zwykle laminarny. Dla bardzo wysokich ścian, zwłaszcza w niższych partiach ściany, może dojść do spływu burzliwego.

Można uzasadnić analitycznie (por. równanie (9.83)), że średnia grubość s_{sr} warstwy skroplin dla rury pionowej

$$s_{sr} = \frac{1}{1,47} g_z \text{Re}_z^{1/3}, \quad (9.79)$$

dla rury poziomej (skraplanie na zewnątrz)

$$s_{sr} = \frac{1}{1,2} g_z \text{Re}_z^{1/3}, \quad (9.80)$$

przy czym

$$\text{Re}_z = \dot{g} d_z / \eta = \dot{g} 4f / \eta_o = 4\Gamma / \eta,$$

$d_z = 4f/o$ — zastępcza średnica hydrauliczna spływającej warstwy (patrz rys. 9.35),

$\Gamma = \dot{G}/o$ — ilość $\dot{G}$ cieczy spływająca u dołu wymiennika cieczy, przypadająca na jednostkę długości o obwodzie zwilżonego.

Wzory (9.79) i (9.80) można zapisać w jednej postaci, jako:

$$s_{sr} = \frac{1}{C} g_z \text{Re}_z^{1/3}, \quad (9.81)$$

gdzie C jest odpowiednią stałą.

Ponieważ $\alpha_z = \lambda/s_{sr}$, więc:

$$\alpha_z = C \frac{\lambda}{g_z} \text{Re}_z^{-1/3}, \quad (9.82)$$

co można przedstawić w postaci

$$\text{Nu}_z = C \text{Re}_z^{-1/3}, \quad (9.83)$$

przy czym $\text{Nu}_z = \alpha_z \vartheta_z / \lambda$ jest zastępczą liczbą Nusselta.

Analityczny wzór (9.83) znajduje potwierdzenie w doświadczeniach, gdy $\text{Re}_z < 2100$, czyli w odniesieniu do spływu laminarnego (lub pseudolaminarnego). Na podstawie wyników eksperymentów należy przyjąć

- dla rury pionowej $C = 1,5$; $\Gamma = \dot{G}/2L$; L – długość rury,
- dla rury poziomej $C = 1,2$; $\Gamma = \dot{G}/\pi d$; d – średnica rury.

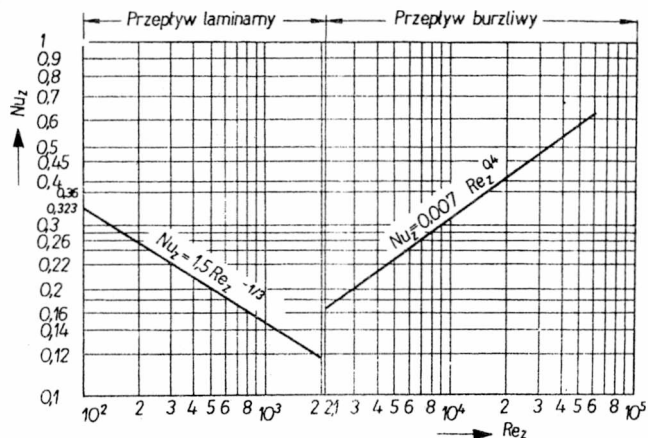
Interesująca jest interpretacja fizyczna parametru ϑ_z , wprowadzonego już wcześniej w p. 9.6.

W odniesieniu do ściany pionowej (a w przybliżeniu także do rury poziomej) można napisać:

$$s \approx \vartheta_z \text{Re}_z^{1/3} \quad \text{dla} \quad \text{Re}_z = 1 \quad s \approx \vartheta_z.$$

Parametr ϑ_z równa się więc grubości strugi cieczy spływającej po ścianie, jeżeli liczba znamionowa spływu wynosi $\text{Re}_z = 1$. Z tego względu ϑ_z nazwano zastępczą grubością strugi. Jako wymiar strugi parametr ten jest szczególnie korzystny, gdy ciecz nie przepływa kanałem.

Podczas spływu warstwy skroplin, gdy $\text{Re}_z > 2000$, przebieg zjawiska i obliczenie przebiegają odmiennie niż dla spływu laminarnego.



Rys. 9.36. $\text{Nu}_z = f(\text{Re}_z)$ dla spływu grawitacyjnego

Dla rury pionowej Kirkbride i Badger podają równanie:

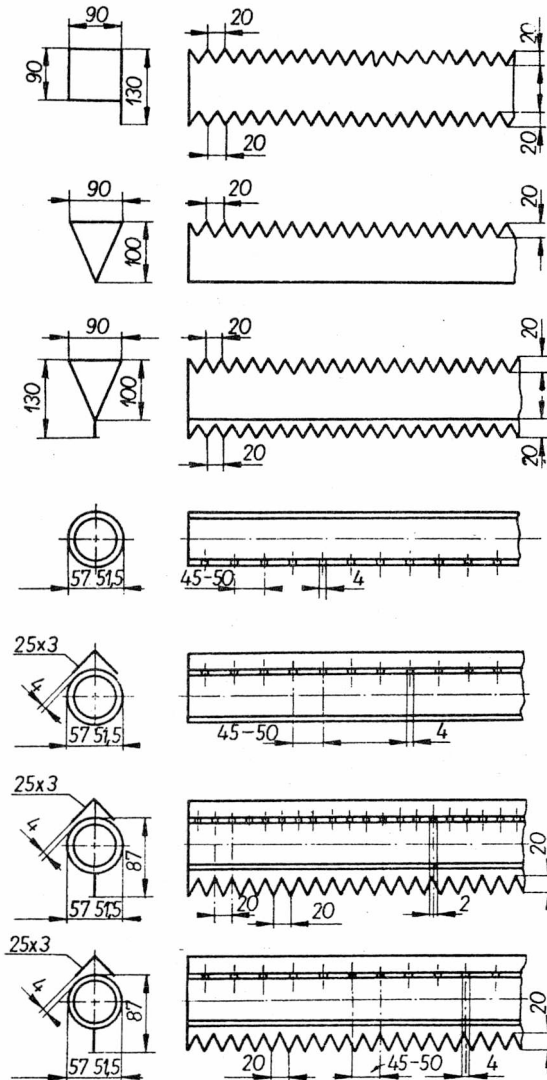
$$\text{Nu}_z = 0,0076 \text{Re}_z^{0,4}. \quad (9.84)$$

Przebieg zależności Nu_z od Re_z w odniesieniu do rury pionowej przedstawiono na rys. 9.36. Dla cienkich warstw, a więc dla spływu laminarnego, wzrost grubości warstwy, a zatem Re_z , powoduje spadek Nu , gdy $\text{Re} > 2000$ liczba Nu , a więc i α ,

rośnie wraz ze wzrostem Re . Burzliwość powoduje, że warstewka graniczna jest wtedy znacznie cieńsza od grubości spływającej strugi.

9.7.2. Grawitacyjny spływ laminarny

Rozpatrywane tu przypadki spływu laminarnego odnoszą się do warstw cieczy uzyskanych za pomocą tzw. urządzeń zraszających (rys. 9.37). Obliczony z przyto-



Rys. 9.37. Przykłady urządzeń zraszających [6]

czonych dalej wzorów współczynnik konwekcji dotyczy strumienia ciepła przekazanego od ściany do spływającej cieczy.

Van der Ploeg podaje, że aby utrzymać pełne pokrycie powierzchni cieczą, minimalna ilość wody konieczna do rozprowadzenia na rurze poziomej powinna wynosić nie mniej niż 300 kg na 1 metr bieżący ($\Gamma_{\min} = 150 \text{ kg/m}$ na każdą stronę). Tworząca się warstwa spływającej cieczy ma charakter laminarny lub pseudo-laminarny.

Gdy zwiększa się ilość wody, grubość strugi rośnie. Za maksymalną ilość $\Gamma_{\max}$ zraszającej cieczy uznajemy umownie tę ilość, przy której odprysk spływającej warstwy wody przekracza 15% całej ilości.

Minimalna ilość zraszającej wody nie zależy w zasadzie od konstrukcji urządzenia zraszającego i można ją obliczyć w sposób przybliżony

$$\Gamma_{\min} = 30d^{0,37} - 0,5t + 5, \quad \text{kg/m} \cdot \text{h}, \quad (9.84a)$$

gdzie d — średnica, t — średnia temperatura wody.

Maksymalna ilość zraszającej wody natomiast w znacznej mierze zależy od konstrukcji urządzenia zraszającego. Spotykane wartości stosunku $\Gamma_{\max}/\Gamma_{\min}$:

dla rur gładkich $\Gamma_{\max}/\Gamma_{\min}$ wynosi od 1,3 do 1,85,

dla rur z blachami ząbkowanymi $\Gamma_{\max}/\Gamma_{\min}$ wynosi od 3,5 do 5,5,

przy czym rozrzut wynika ze stosowanych konstrukcji i odstępów rur.

Do obliczenia współczynnika konwekcji w omywanych wodą rurach poziomych Mc Adams podaje wzór, który przeliczony na jednostki układu SI ma postać

$$\alpha = 217 \left(\frac{\Gamma}{d} \right)^{1/3}, \quad \text{W/m}^2 \cdot \text{K} \quad (9.85)$$

Van der Ploeg podaje równanie doświadczalne opracowane dla rur poziomych omywanych różnymi płynami

$$\alpha = m \frac{0,267}{L_h^{0,05}} (1 + nt), \quad \text{W/m}^2 \cdot \text{K}, \quad (9.86)$$

w którym

$L_h = (\pi d/2)x$ — sumaryczna droga ścieku cieczy,

x — liczba rzędów rur.

Współczynniki m oraz n podano w tab. 9.22

Tabela 9.22. Współczynniki m oraz n do wzoru (9.86)

Płyn	m	n
Woda	406	0,0135
Gliceryna 19,2%	321	0,0093
Gliceryna 46,5%	183	0,0126

Dla laminarnego ($Re_z > 2000$) spływu po ścianach lub rurach pionowych Mc Adams podaje wzór, który można zapisać w postaci modułowej:

$$Nu_z = 0,67 Re_z^{1,9} Pr^{1/3} \left(\frac{g_z}{h} \right)^{1/3}, \quad (9.87)$$

w którym $Nu_z = \alpha g_z / \lambda$, $Re_z = r\Gamma / \eta$.

9.7.3. Grawitacyjny spływ burzliwy

W spływie tego typu wpływ otoczenia gazowego można zwykle pominąć, choć niewątpliwie oddziałuje ono na intensywniejsze przekazywanie ciepła między powierzchnią chłodzonego przedmiotu a spływającą po jego powierzchni cieczą. Jest to ważne zwłaszcza wtedy, gdy ciecz spływa po zewnętrznej powierzchni rury. Przekazywanie ciepła zachodzi jednak głównie między ścianą a cieczą. Intensywne przekazywanie ciepła między ścianą a cieczą zachodzi przy dużej prędkości przepływu cieczy. Nie zawsze jest wygodne i opłacalne uzyskiwanie dużych prędkości przepływu w pełnym strumieniu w kanałach. Niejednokrotnie wygodniejsze jest uzyskanie dużych prędkości cieczy przez spływ grawitacyjny warstwy płynu po ścianie. Tego typu chłodzenie stosuje się w ociekowych skraplaczach amoniaku wchodzących w skład wyposażenia urządzeń chłodniczych, ociekowych chłodnicach brzożki w piwowarstwie i in. Eksploatacja tego typu wymienników jest w wielu wypadkach bardziej opłacalna. Współczynniki konwekcji dla burzliwego spływu grawitacyjnego, gdy $Re_z > 2000$, można wyliczyć ze wzoru o budowie modułowej:

$$Nu_z = 0,001 Re_z^{1/3} Pr^{1/3}, \quad (9.88)$$

w którym $Nu_z = \alpha g_z / \lambda$, $Re_z = r\Gamma / \eta$ dla średniej temperatury t_w warstwy przyściennej.

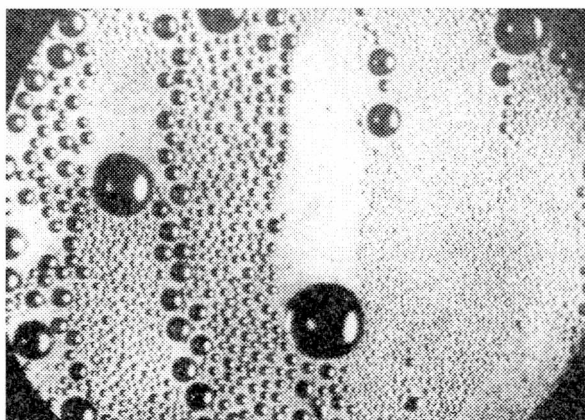
9.8. Skraplanie

Zjawisko skraplania występuje zawsze, gdy temperatura ściany jest niższa od temperatury nasycenia pary dla jej ciśnienia.

Drobne nierówności powierzchni ściany są ośrodkami kondensacji i tam powstają pierwsze kropelki cieczy. Kropelki te zwykle łączą się i tworzą tzw. błonkę, czyli film kondensatu, który spływa po powierzchni w dół. W tym wypadku dalsza kondensacja zachodzi na zewnętrznej powierzchni błonki. Jest ona w tym wypadku zasadniczym ośrodkiem kondensacji. Możliwe są jednak sytuacje, że kropelki

kondensatu odrywają się od ściany i opadają nie tworząc błonki. Zjawisko to występuje wówczas, gdy siły napięcia powierzchniowego kropli przewyższają siły przylegania (adhezji). Taką kondensację nazywamy kondensacją kropłową albo perlistą i zachodzi ona wtedy, gdy stosujemy tzw. materiały niezwilżające ciecz. Kondensacja tego typu występuje zawsze na dolnej powierzchni płyty poziomej. Niezwilżalność powierzchni można także uzyskać przez powlekanie ściany substancją, która ma właściwości niezwilżania, np. tłuszczem, lub przez dodanie odpowiednich substancji do pary. Zjawisko kondensacji kropłowej zachodzi jednak rzadko i występuje wtedy, gdy powierzchnie są świeże. Po pewnym czasie pracy, wskutek powstania wżerów, osadów, zmycia powleczonej substancji, kondensacja przechodzi w kondensację błonkową, która ma zasadnicze znaczenie w aparatach przemysłowych.

Warstewka graniczna płynu podczas skraplania jest inna niż w innych przypadkach konwekcji. Także sam mechanizm przejmowania ciepła jest odmienny. Ruch pary jest skierowany ku ściance, przy której następuje przemiana fazowa pary w ciecz. Znikanie objętości pary na skutek skraplania powoduje, że nowe porcje pary są kierowane ku ściance. Ciepło skroplenia musi być przekazane do ściany, musi więc być przekazywane przez błonkę kondensatu. Grubość tej błonki stanowi o oporze przejmowania przez ściankę ciepła. Błonka kondensatu spełnia więc rolę warstewki przysciennej. Podczas skraplania kropłowego (perlistego — rys. 9.38)



Rys. 9.38. Kondensacja perlista według Hampsona

warstewki tej praktycznie nie ma, więc uzyskuje się maksymalne wartości współczynnika konwekcji (do $120\,000 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$).

Obecność gazów obojętnych (nie skraplających się) w parze utrudnia przejmowanie ciepła. Para musi dyfundować przez te gazy ku ścianie. Zanieczyszczenia powierzchni, np. rdza, powodują pogrubienie błonki, a więc zmniejszenie α .

Ogólne wzory obliczeniowe można uzyskać stosując analizę wymiarową; analitycznie wzory obliczeniowe dla kondensacji błonkowej wyprowadził Nusselt.

Z analizy mechanizmu przejmowania ciepła podczas skraplania otrzymujemy zależność ogólną

$$\alpha = f(r, \Delta t, \lambda_c, \eta_c, \rho_c, h, g), \quad (9.89)$$

którą w wyniku zastosowania reguł analizy wymiarowej można sprowadzić do postaci

$$\frac{\alpha h}{\lambda_c} = C \left(\frac{r \eta_c}{\Delta t \lambda_c} \right)^a \left(\frac{\rho^2 h^3 g}{\eta_c^2} \right)^{b/2}. \quad (9.90)$$

Na podstawie wyników eksperymentów oraz dalej przytoczonych analitycznych rozważań Nusselta można przyjąć, że $a = b/2 = 1/4$, wzór (9.90) można więc zapisać w postaci

$$\frac{\alpha h}{\lambda_c} = C \left(\frac{h^3 \rho_c^2 r g}{\lambda_c \eta_c \Delta t} \right)^{1/4} = C C_v^{1/4}. \quad (9.91)$$

gdzie $\alpha h / \lambda_c = \text{Nu}$ jest liczbą znamioną Nusselta, a wyrażenie w nawiasie, zwane liczbą C_v (skraplania Nusselta), ma charakter modułu podobieństwa. Jeżeli wprowadzimy zastępczy wymiar poprzeczny spływającej warstwy kondensatu

$$\vartheta_z = \left(\frac{\eta_c^2}{g \rho_c^2} \right)^{1/3}, \quad (9.92)$$

to liczba skraplania

$$C_v = \frac{h^3 \rho_c^2 r g}{\lambda_c \eta_c \Delta t} = \frac{r}{c_c \Delta t} \frac{c_c \eta_c}{\lambda_c} \left(\frac{h}{\vartheta_z} \right)^3, \quad (9.93)$$

gdzie

$r / c_c \Delta t = K$ ma charakter liczby znamiennej,

$c_c \eta_c / \lambda_c = \text{Pr}_c$ jest liczbą znamioną Prandtla dla skroplin, czyli

$$C_v = K \text{Pr}_c \left(\frac{\vartheta_z}{h} \right)^{-3}. \quad (9.94)$$

Równanie modułowe (9.91) dla skraplania można zapisać w postaci

$$\frac{\alpha h}{\lambda_c} = C K^{1/4} \text{Pr}_c^{1/4} \left(\frac{\vartheta_z}{h} \right)^{-3/4}, \quad (9.95)$$

a po obustronnym pomnożeniu przez ϑ_z / h

$$\frac{\alpha \vartheta_z}{\lambda_c} = C K^{1/4} \text{Pr}_c^{1/4} \left(\frac{\vartheta_z}{h} \right)^{-3/4} \frac{\vartheta_z}{h}. \quad (9.96)$$

Wyrażenie $\alpha g_z / \lambda_c$ jest wyprowadzoną już poprzednio zastępczą liczbą Nusselta, w której występuje zastępczy wymiar poprzeczny strugi. Wzór (9.91) przyjmie postać

$$\text{Nu}_z = CK^{1/4} \text{Pr}^{1/4} \left(\frac{g_z}{h} \right)^{1/4}. \quad (9.97)^*)$$

Stała C zależy od kształtu i usytuowania powierzchni, na której zachodzi skraplanie (tab. 9.23).

Tabela 9.23. Współczynnik C do wzoru (9.97)

Powierzchnia	C	Uwagi
Ściana pionowa, rura pionowa	1,13	h – wysokość
Rura pozioma, skraplanie zewnętrzne	0,725	$h = d$ – średnica
N rur poziomych jedna pod drugą	$0,725 N^{1/4}$	$h = d$ – średnica rury
Rura żebrowana pozioma, skraplanie zewnętrzne	0,689	$h = D$ zast.

Dla kondensacji błonkowej Nusselt określił wzór do obliczenia α .

Na rysunku 9.39 przedstawiono przekrój poprzeczny spływającego filmu skroplin. Jego grubość $l = l(x)$ jest zmienna, gdy $x = 0$ na górze, jest równa zero i rośnie ku dołowi. Ciepło skroplenia pary musi być przekazane ścianie, więc musi być przewodzone przez warstwę skroplin grubości l . Gęstość przewodzonego strumienia ciepła

$$\dot{q}_x = \frac{\lambda_c}{l} (t_n - \vartheta) = \frac{\lambda_c}{l} \Delta t, \quad (9.98)$$

przy czym

λ_c – współczynnik przewodzenia ciepła skroplin,

ϑ – temperatura ścianki,

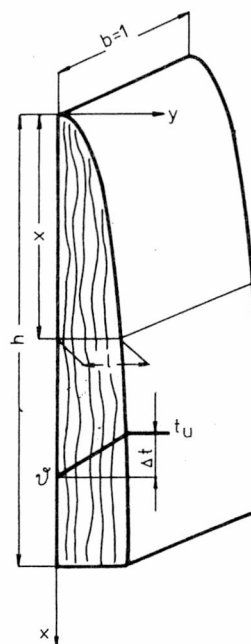
t_n – temperatura nasycenia pary,

a także

$$\dot{q}_x = \alpha_x (t_n - \vartheta) = \alpha_x \Delta t. \quad (9.99)$$

Po porównaniu (9.98) z (9.99) lokalny współczynnik przejmowania ciepła α_x podczas błonkowego skraplania pary możemy wyrazić wzorem

$$\alpha_x = \frac{\lambda_c}{l}. \quad (9.100)$$



Rys. 9.39. Spływ błonki skroplin

*) Wzór (9.97) można zapisać także następująco: $\text{Nu} = C(\text{GaPrK})^{1/4}$, przy czym $\text{Ga} = gh^3/\nu^2$ – liczba znamienna Galileusza.

Aby wyznaczyć α_x , należy znać grubość warstwy skroplin. Lokalna gęstość strumienia powstałych skroplin (liczba skroplin powstająca na jednostce powierzchni w jednostce czasu)

$$\dot{g}_x = \frac{\dot{q}_x}{r}, \quad (9.101)$$

gdzie r — ciepło skroplenia (lub parowania) pary.

Rozpatrzmy spływ błonki skroplin jednakowej szerokości $b = 1$ na ścianie wysokości h (rys. 9.39).

Przyjmijmy w rozważaniach, że temperatura ścianki ϑ jest stała, choć w odniesieniu do ścian wysokich i różnych warunków chłodzenia może ulegać pewnym zmianom. Powierzchnia błonki skroplin na całej wysokości po stronie pary ma stałą temperaturę t_n . Na tej powierzchni tworzą się z pary coraz to nowe skropliny, a następnie spływają w dół. Tak więc przyjmuje się, że niezależnie od położenia rozpatrywanego przekroju błonki x , spadek na niej temperatury $t_n - \vartheta$ jest stały.

Wyobraźmy sobie wycinek rozpatrywanej części błonki o wymiarach dx dy i długości $b = 1$ (patrz rys. 9.39 i 9.40). Ruch wycinka jest wynikiem działania siłami

ciężkości K_c i tarcia K_t na warstwy przyległe. Ponieważ na skutek lepkości ruch powstałych skroplin szybko przechodzi w jednostajny, możemy napisać

$$dK_c + dK_t = 0, \quad (9.101a)$$

gdzie ciężar wycinka

$$dK_c = \gamma_c 1 dx dy, \quad (9.102)$$

a sumaryczna siła tarcia działająca na wycinek

$$dK_t = 1 dx [(s + ds) - s] = 1 dx ds, \quad (9.103)$$

przy czym

γ_c — ciężar właściwy skroplin,

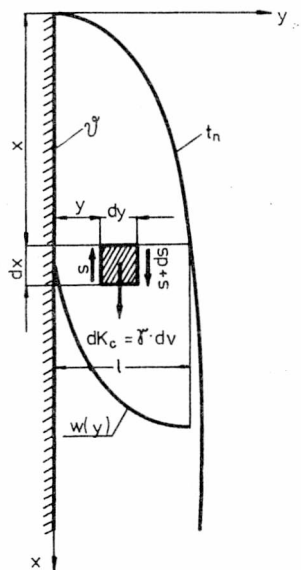
s — siła tarcia działająca na jednostkę powierzchni (patrz rys. 9.40).

Po wstawieniu (9.102) i (9.103) do (9.101) i przekształceniu otrzymujemy

$$ds = -\gamma_c dy. \quad (9.104)$$

Ponieważ zgodnie z prawem Newtona

$$s = \eta_c \frac{dw}{dy}. \quad (9.105)$$



Rys. 9.40. Przekrój poprzeczny spływającej błonki skroplin

więc, gdy η_c jest stałe

$$\frac{ds}{dy} = \eta_c \frac{d^2w}{dy^2}. \quad (9.106)$$

Po porównaniu (9.106) i (9.104) możemy napisać

$$\frac{d^2w}{dy^2} = -\frac{\gamma_c}{\eta_c}. \quad (9.107)$$

Jeśli scałkujemy dwukrotnie różniczkowe równanie (9.107), otrzymamy

$$w = -\frac{\gamma_c}{2\eta_c} y^2 + C_1 y + C_2, \quad (9.108)$$

gdzie C_1, C_2 – stałe całkowania.

Gdy $y = 0$, $w = 0$, prędkość warstwy stykającej się ze ścianą jest równa zero, stąd $C_2 = 0$

$$w = -\frac{\gamma_c}{2\eta_c} y^2 + C_1 y. \quad (9.109)$$

Dla warstwy kropli odległej od ściany o $y = l$, $dw/dy = 0$, gdyż tarcie s powierzchni błonki kondensatu o nasyconą parę można pominąć. Po zróżniczkowaniu (9.109) według y i przyrównaniu do zera otrzymamy

$$\frac{dw}{dy} = -\frac{\gamma_c}{\eta_c} y + C_1 = 0. \quad (9.110)$$

Ponieważ wzór ten przyjmuje wartość zerową, gdy $y = l$, więc

$$C_1 = -\frac{\gamma_c}{\eta_c} l. \quad (9.111)$$

Równanie określające prędkość strugi kondensatu, odległej o y od ściany, ma postać

$$w = -\frac{\gamma_c}{2\eta_c} y^2 + \frac{\gamma_c}{\eta_c} ly. \quad (9.112)$$

Średnia prędkość strug kondensatu

$$w_{sr} = \frac{1}{l} \int_0^l w dy = \frac{\gamma_c}{3\eta_c} l^2. \quad (9.113)$$

Strumień substancji spływającego kondensatu

$$\dot{G} = 1lw_{sr}\rho_c = \frac{\gamma_c\rho_c}{3\eta_c}l^3 = \frac{g\rho_c^2}{3\eta_c}l^3, \quad (9.114)$$

gdyż $\gamma_c = g\rho_c$.

Przyrost strumienia $\dot{G}$ substancji na długości dx

$$d\dot{G} = \frac{g\rho_c^2}{\eta_c}l^2dl \quad (9.115)$$

jest równy różniczce funkcji (9.114). Przyrost ten jest spowodowany wykroploną parą na wycinku powierzchni długości dx , czyli

$$d\dot{G} = 1dx\dot{g} = \frac{\dot{q}_x}{r}dx. \quad (9.116)$$

Na podstawie równania (9.98) możemy napisać

$$d\dot{G} = \frac{\lambda_c}{rl}\Delta t dx. \quad (9.117)$$

Z porównania (9.117) i (9.115) można napisać

$$dx = \frac{g\rho^2r}{\lambda_c\eta\Delta t}l^3dl. \quad (9.118)$$

Po scałkowaniu obu stron otrzymujemy

$$x = \frac{1}{4} \frac{g\rho^2r}{\lambda_c\eta\Delta t}l^4 + C. \quad (9.119)$$

Gdy $x = 0$, grubość l błonki skroplin jest równa zero, stąd $C = 0$. Z równania (9.119) po przyjęciu $C = 0$ można wyliczyć grubość $l = l(x)$, czyli

$$l = \left(\frac{4\lambda_c\eta\Delta t}{g\rho^2rx} \right)^{1/4}. \quad (9.120)$$

Ponieważ zgodnie z (9.100) lokalny współczynnik przejmowania ciepła $\alpha_x = \lambda_c/l$, więc

$$\alpha_x = \left(\frac{g\rho^2r\lambda_c^3}{4\eta\Delta tx} \right)^{1/4}. \quad (9.121)$$

Średnią wartość α współczynnika przejmowania ciepła dla ściany wysokości h , wyliczamy ze wzoru

$$\alpha = \frac{1}{h} \int_0^h \alpha_x dx = \frac{4}{3} \left(\frac{g \rho^2 r \lambda_c^3}{4 \eta \Delta t h} \right)^{1/4}, \quad (9.122)$$

z tego zaś po przeliczeniu szczegółowym otrzymujemy

$$\alpha = 0,94 \left(\frac{g \rho^2 r \lambda_c^3}{\eta \Delta t h} \right)^{1/4}. \quad (9.123)$$

Jest to wywiedziony przez Nusselta wzór do obliczania średniej wartości α dla skraplania na ścianie pionowej.

Współczynnik 0,94 we wzorze (9.123) na podstawie doświadczenia należy skorygować do wartości 1,13

$$\alpha = 1,13 \left(\frac{g \rho^2 r \lambda_c^3}{\eta \Delta t h} \right)^{1/4}, \quad (9.124)$$

Niektórzy badacze tłumaczą to tym, że wobec znacznej wysokości h napięcie powierzchniowe błonki kondensatu powoduje, iż spływ kroplin po ścianie pionowej odbywa się ruchem falowym. To intensyfikuje przekazywanie ciepła. Przy skorygowanym współczynniku wzór Nusselta dotyczy dowolnych czynników.

W wypadku spływu, który odbywa się nie po ścianie pionowej, lecz nachylonej pod kątem φ do poziomu, równanie (9.102) zapiszemy następująco:

$$dK_c = \gamma_c \sin \varphi dx dy. \quad (9.125)$$

Uwzględnienie tego równania pozwala na określenie współczynnika α_φ przejmowania ciepła w odniesieniu do ściany pochyłonej względem poziomu o kąt φ

$$\alpha_\varphi = \alpha \sqrt[4]{\sin \varphi}, \quad (9.126)$$

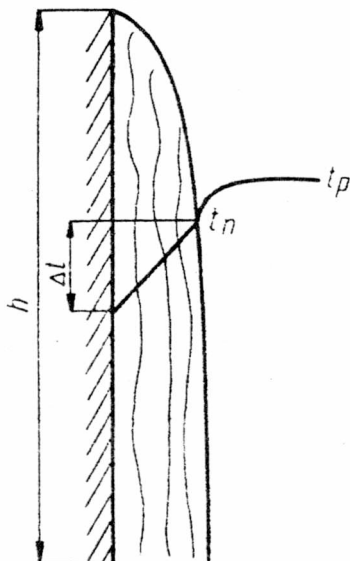
przy czym α jest współczynnikiem dla ściany pionowej.

Podczas skraplania pary zachodzącego na rurze poziomej można zewnętrzną powierzchnię rury traktować jako niewielkie płaszczyzny pochyłone pod kątami φ . Po całkowaniu w zakresie $0 < \varphi < 180^\circ$ otrzymamy wzór określający średnią wartość współczynnika przejmowania ciepła podczas skraplania na rurze poziomej o średnicy d

$$\alpha = 0,72 \left(\frac{g \rho^2 r \lambda_c^3}{\eta \Delta t d} \right)^{1/4}. \quad (9.127)$$

Wzór ten został potwierdzony doświadczalnie.

9.8.1. Wpływ przegrzania pary



Gdy mamy do czynienia ze skraplaniem pary przegrzanej $t_p > t_n$ (rys. 9.41), do wyprowadzenia współczynnika α można się posłużyć rozumowaniem poprzednio przytoczonym z tym, że należy wprowadzić pojęcie zastępczego ciepła skraplania

$$r' = r + q_p, \quad (9.128)$$

gdzie q_p oznacza ciepło przegrzania pary. Pozostałe warunki jak poprzednio:

$$\Delta t = t_n - \vartheta.$$

Rys. 9.41. Skraplanie pary przegrzanej:

t_p – temperatura pary przegrzanej, t_n – temperatura pary nasyconej

Ponieważ $r' > r$, więc zgodnie ze wzorem (9.124) dla skraplania pary przegrzanej α jest większe niż dla nasyconej. Zostało to potwierdzone doświadczalnie przez Gnana. W technice wzrost α najczęściej nie przekracza 3%.

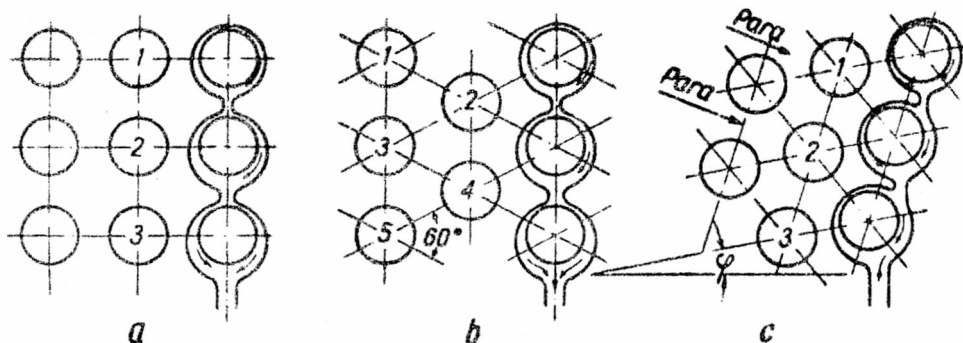
9.8.2. Wpływ usytuowania powierzchni

Podczas konstruowania skraplacza należy odpowiednio usytuować powierzchnie chłodzące, tak by uzyskać w danych warunkach możliwie duże α . Korzystniejszy jest więc układ rur poziomy niż pionowy^{*)}. Rozpatrujemy stosunek α dla pojedynczej rury o średnicy d i długości L w zależności od jej ustawienia poziomego lub pionowego. Zgodnie ze wzorami (9.124) i (9.127)

$$\frac{\alpha_{poz}}{\alpha_{\perp}} = \frac{0,72}{1,15} \sqrt[4]{\frac{L}{d}} \quad (9.129)$$

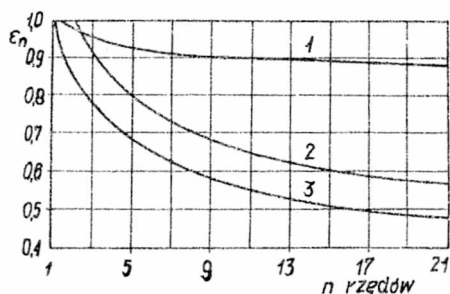
Ze wzoru wynika, że dla smukłych rur o ustawieniu poziomym, np. dla rury, w której $\Phi = 20$ mm, $L = 1$ m, $\alpha_{poz}/\alpha_{\perp} = 1,7$, α jest większe. Jeżeli skraplacz jest zbudowany z większej liczby odcinków rur poziomych, to zależnie od ich rozmieszczenia α może być większe lub mniejsze.

^{*)} W obliczeniach rurę pionową traktujemy jako ścianę pionową o wysokości równej długości rury.



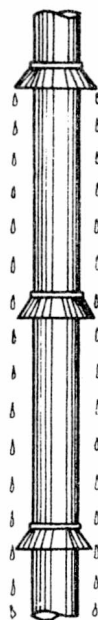
Rys. 9.42. Usytuowanie rur poziomych w skraplaczu: a – korytarzowe, b – przestawne-szachowe, c – przestawne Ginabat

Rys. 9.43. Zależność stosunku $\alpha_n/\alpha = e_n$ od ilości rzędów rur ponad sobą: 1 – układ Ginabat, 2 – szachowy, 3 – korytarzowy, α – współczynnik konwekcji dla jednego rzędu rur, α_n – współczynnik konwekcji, gdy jest n rzędów rur



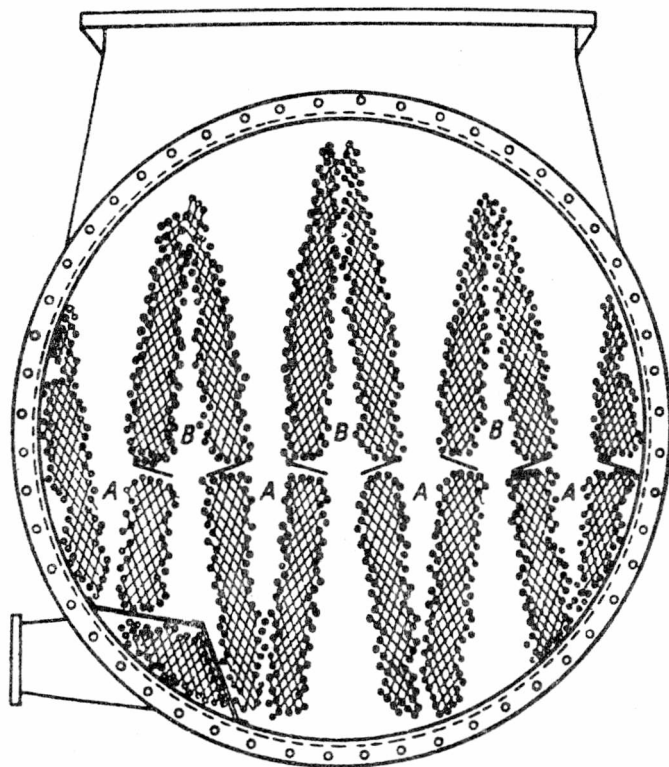
Z wymienionych na rysunku 9.42 usytuowań największe α występuje w układzie przestawnym rur, zwanym układem Ginabat. Na rysunku 9.43 przedstawiono wpływ liczby rzędów rur ułożonych jedna nad drugą na wielkość α . Ze wzrostem liczby rzędów rur rośnie grubość warstwy skroplin i maleje α .

Gdy układ rur jest pionowy, intensyfikację α można przeprowadzić za pomocą nakładania na rurę pierścieni nasadczowych, które odprowadzają skropliny zapobiegając wzrostowi grubości błonki (rys. 9.44).



Rys. 9.44. Pierścienie nasadkowe do odprowadzenia skroplin na rurze pionowej

Konstrukcyjne usytuowanie rur poziomych (typu Ginabat) pokazano na rys. 9.45.

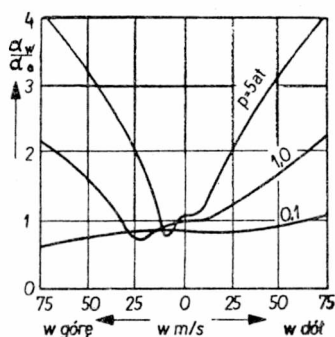


Rys. 9.45. Usytuowanie rur w dużym skraplaczu z rurami poziomymi [19]: A, B – okapy

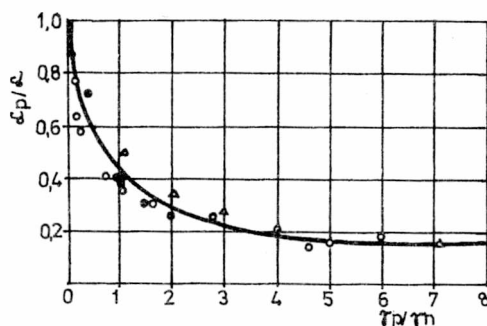
Należy zauważyć, że intensyfikacja α podczas skraplania nie zawsze jest opłacalna w razie przenikania ciepła, gdyż α skraplania zwykle jest znacznie większe od współczynnika α drugiego płynu.

9.8.3. Wpływ prędkości przepływu pary

Prędkość pary do 10 m/s nie ma wpływu na grubość tworzącego się filmu kroplin, a więc i na α . Gdy prędkości są większe od około 25 m/s, jest ważne, czy ruch pary jest zgodny ze sływem kroplin, czy przeciwny. Prędkości powyżej 50 m/s przy wyższych ciśnieniach mają istotny wpływ na α . Na rysunku 9.46 przedstawiono wpływ na zmianę α , wywołaną prędkością przepływu pary.



Rys. 9.46. Wpływ prędkości przepływu pary na α_w/α_o podczas skraplania: α_w – współczynnik konwekcji, gdy para ma prędkość w , α_o – współczynnik konwekcji, gdy $w = 0$



Rys. 9.47. Wpływ na α_p/α zawartości powietrza w skraplającej się parze: α_p – współczynnik konwekcji, gdy w parze jest powietrze, α – współczynnik konwekcji czystej pary, γ_p – ciężar właściwy powietrza w parze, γ_n – ciężar właściwy pary

9.8.4. Wpływ zawartości gazów obojętnych^{*)} w parze

Zawartość gazów obojętnych ma znaczny wpływ na α . Przebieg zjawiska jest wtedy nieco odmienny. Ruch pary ku zimnej ścianie jest utrudniony, gdyż w pobliżu warstwy skroplin gromadzą się gazy obojętne. Koncentracja tych gazów przy ścianie jest znacznie większa niż w pozostałej masie pary. Para skrapla się, a gazy obojętne pozostają przy ścianie, co powoduje wzrost ich koncentracji.

Wzrost koncentracji gazów obojętnych jest ograniczony na skutek dyfuzji tych gazów do jądra pary, gdzie koncentracja jest mniejsza. Ruch pary ku ścianie napotyka więc na dodatkowy opór i odbywa się w pewnej mierze na zasadzie dyfuzji przez warstwę gazów obojętnych. Na rysunku 9.47 przedstawiono zależność stosunku α_p (dla pary zawierającej powietrze) do wielkości α (podczas skraplania czystej pary) od zawartości powietrza w parze.

9.8.5. Obliczenie uproszczone

Parametry γ_c , ρ_c , η_c we wzorach obliczeniowych należy przyjmować w odniesieniu do średniej temperatury skroplin, ciepło zaś parowania r do temperatury nasycenia dla danego ciśnienia pary. Wzór obliczeniowy dla ściany pionowej można zapisać grupując parametry uzależnione od tych samych temperatur

$$\alpha = C \rho r^{1/4} \left(\frac{1}{h \Delta t} \right)^{1/4}, \quad (9.130)$$

przy czym

$\varphi = \varphi(\lambda_c, \rho_c, \eta_c)$ należy przyjąć dla średniej temperatury warstwy skroplin, r – dla temperatury nasycenia.

^{*)} Nie skraplających się.

Tabela 9.24. Współczynnik φ i $r^{1/4}$ do wzoru (9.130)

$t, ^\circ\text{C}$	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
φ	984	1203	1390	1553	1683	1788	1870	1927	1951	1967	1975
$r^{1/4}$	7,05	7,02	7,01	6,98	6,94	6,90	6,87	6,81	6,77	6,69	6,61

W tabeli 9.24 podano wartości φ oraz $r^{1/4}$ dla pary wodnej.

9.8.6. Przykłady obliczeniowe

W skraplaczu na rurach poziomych o zewnętrznych średnicach $\varnothing 57$ mm skrapla się para nasycona o ciśnieniu 540 hPa ($t_n = 83,5^\circ\text{C}$).

Obliczyć średnie (na powierzchni zewnętrznej) α , jeśli różnica temperatur ściany i pary wynosi 7 K.

Obliczenia wykonać:

a) dla rury pojedynczej,

b) dla $N = 4$ warstw rur położonych pionowo nad sobą.

Wzór ogólny (9.97)

$$\text{Nu}_z = CK^{1/4} \text{Pr}^{1/4} \left(\frac{\vartheta_z}{h} \right)^{1/4}.$$

Dla pary nasyconej o $p = 540$ hPa, $r = 2299$ kJ/kg. Średnia temperatura warstwy przyściennej (skroplin), zgodnie ze wzorem (9.6) wynosi

$$t_w = \frac{t_{pl} + \vartheta_s}{2} + \frac{83,5 + (83,5 - 7)}{2} = 80^\circ\text{C}.$$

Dla skroplin o temperaturze $t_w = 80^\circ\text{C}$

$$\text{Pr}_c = 2,25; \quad \vartheta_z = 23,90 \cdot 10^{-6} \text{ m};$$

$$\lambda_c = 0,673 \text{ W/m} \cdot \text{K}; \quad c_e = 4,194 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}.$$

Z tabeli 9.23 wynika:

$C = 0,725$ dla rury pojedynczej,

$C = 0,725 N^{-1/4}$ dla N rur poziomych ułożonych jedna nad drugą,

$h = d$ dla rury poziomej.

$$K = \frac{r}{c_e \Delta t} = \frac{2299}{4,194 \cdot 7} = 78,3.$$

Obliczenie dla rury pojedynczej:

$$\text{Nu}_z = 0,725 \cdot 78,3^{1/4} \cdot 2,25^{1/4} \left(\frac{23,90 \cdot 10^{-6}}{0,057} \right)^{1/4} = 0,378$$

$$\alpha = \frac{\text{Nu}_z \cdot \lambda}{\vartheta_z} = \frac{0,378 \cdot 0,673}{23,90 \cdot 10^{-6}} = 10\,644 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

Obliczenie uproszczone:

$$\alpha = C\varphi r^{1/4} \left(\frac{1}{h\Delta t} \right)^{1/4}.$$

Z tabeli 9.24 dla skroplin, których $t_w = 80^\circ\text{C}$, $\varphi = 1683$, gdy $t_n = 83,5^\circ\text{C}$, $r^{1/4} = 6,94$, wynika:

$$\alpha = 0,725 \cdot 1683 \cdot 6,94 \left(\frac{1}{0,057 \cdot 7} \right)^{1/4} = 10\,654 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}.$$

Obliczenie dla rur o czterech rzędach:

$$C = 0,725 \cdot 4^{-1/4} = 0,513,$$

$$\text{Nu}_z = 0,513 \left(78,1 \cdot 2,25 \frac{23,90 \cdot 10^{-6}}{0,057} \right)^{1/4} = 0,267$$

$$\alpha = \frac{\text{Nu}_z \lambda}{g_z} = \frac{0,267 \cdot 0,673}{23,90 \cdot 10^{-6}} = 7518 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}.$$

Obliczenie uproszczone:

$$\alpha = 0,513 \cdot 1683 \cdot 6,94 \left(\frac{1}{0,057 \cdot 7} \right)^{1/4} = 7539 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}.$$

9.9. Wrzenie

Jeżeli w czasie przekazywania ciepła od ścianki do płynu temperatura ścianki jest wyższa niż temperatura nasycenia pary przy danym ciśnieniu cieczy, to nastąpi wrzenie. Z cieczy otrzymujemy parę, następuje przemiana fazowa. Pierwsze pęcherze powstają przy ściance, rosną, a następnie odrywają się i unoszą ku górze. Jak wykazują obserwacje, objętość unoszących się pęcherzyków pary rośnie. Zwiększa się także ilość pary w pęcherzyku, mimo że jego kontakt bezpośredni z grzejącą ścianą został zerwany. Jest to możliwe, ponieważ w czasie wrzenia temperatura cieczy w swojej masie jest nieco wyższa od temperatury nasycenia, przyjmuje się jednak, że w stanie równowagi jest jej równa. Przeciętnie zwyżka ta mieści się w granicach od 0,4 do 0,8 K, choć Jacob i inni zaobserwowali lokalne przegrzania cieczy nawet powyżej 10 K. Warstwa cieczy bezpośrednio stykającej się ze ścianą (pewien rodzaj warstewki granicznej) ma temperaturę najwyższą. Tam powstają pierwsze pęcherzyki pary. Pęcherzyk po oderwaniu od ścianki przyjmuje postać kulistą lub do niej zbliżoną, co wynika z napięcia powierzchniowego na granicy faz. To napięcie powoduje, że ciśnienie pary w pęcherzyku jest nieco wyższe od ciśnienia otaczającej go cieczy. Nadwyżka ciśnienia Δp zależy od promienia l_r krzywizny pęcherzyka i napięcia powierzchniowego σ . Z warunku równowagi sił wynika

$$\pi l_r^2 \Delta p = 2\pi l_r \sigma, \quad (9.131)$$

z tego zaś

$$\Delta p \approx dp = \frac{2\sigma}{l_r}. \quad (9.132)$$

Powstanie i powiększenie się pęcherzyka jest oczywiście możliwe, gdy $dp \geq 2\sigma/l_r$. Z tego warunku wynika, że pęcherzyk pary powstanie wówczas, gdy promień krzywizny jest większy niż $l_{r\min}$. Jeśli uwzględnimy poprawkę Thomsona określającą podwyżkę ciśnienia nasycenia nad zakrzywionym meniskiem oraz przyjmiemy, że $dp \cong (dp/dt)_n \Delta t$, to wzór określający $l_{r\min}$ możemy zapisać w postaci

$$l_{r\min} = \frac{2\sigma}{(dp/dt)_n \Delta t} \cdot \frac{\rho'}{\rho' - \rho''}, \quad (9.133)$$

przy czym

ρ', ρ'' – gęstość cieczy i pary nasyconej przy danym ciśnieniu cieczy,

Δt – nadwyżka temperatury cieczy nad temperaturą nasycenia.

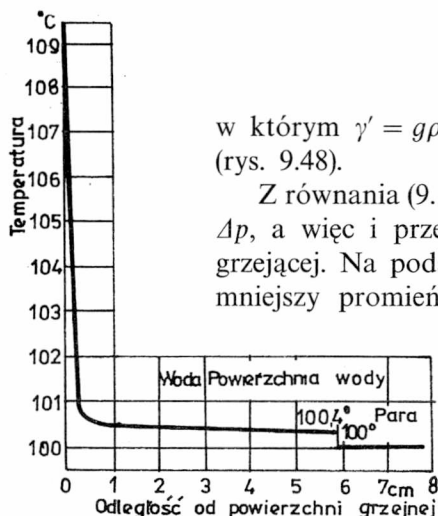
(dp/dt) można obliczyć z równania Clausiusa–Clapeyrona

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_n = \frac{r\gamma'\rho''}{T_n(\rho' - \rho'')}, \quad (9.134)$$

w którym $\gamma' = g\rho'$ – ciężar właściwy cieczy w stanie nasycenia (rys. 9.48).

Z równania (9.132) wynika, że wrzenie rozpoczyna się tam, gdzie Δp , a więc i przegrzanie cieczy jest największe, tj. przy ścianie grzejącej. Na podstawie $l_{r\min}$ określa się także dla danego Δt najmniejszy promień krzywizny ścianki, w którym może powstać

pierwszy pęcherzyk pary, tzw. zarodek. W miarę grzania pęcherzyk rośnie i gdy siła wyporu pokona siły przylegania cieczy otaczającej pęcherzyk, odrywa się on od ściany. Na miejsce oderwanego pęcherzyka napłyne sąsiednia ciecz. W tym samym miejscu powstanie następny pęcherzyk, gdy ciecz osiągnie odpowiednie przegrzanie. Częstotliwość odrywania się pęcherzyków jest zależna od ich średnicy i gęstości strumienia ciepła. Im



Rys. 9.48. Temperatura wody i pary podczas wrzenia nad poziomą powierzchnią grzejącą

średnica mniejsza, tym częstotliwość większa. Wyższa temperatura ściany powoduje także, że warunki w większych zakrzywieniach powierzchni sprzyjają powstawaniu zarodków^{*)}. Jest więc wówczas więcej odrywających się pęcherzyków w jednostce czasu. Wymaga to oczywiście zwiększenia gęstości strumienia ciepła.

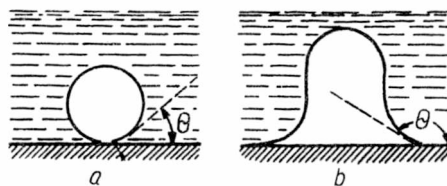
Pęcherze pary nie tworzą się w masie cieczy przegrzanej poza warstwą przyścienną, mają tam jedynie warunki wzrostu. Można powiedzieć, że przegrzana woda

^{*)} Dla wody, gdy jej przegrzanie wynosi $\Delta t = 5$ K, $l_{r\min} = 6,7 \cdot 10^{-3}$ mm; gdy $\Delta t = 25$ K, $l_{r\min} = 1,34 \cdot 10^{-3}$ mm.

jest nośnikiem ciepła od ściany do pęcherzyków pary. Ze względu na krótki czas pozostawania pęcherzyka przy ścianie i znacznie mniejszą zdolność przekazywania ciepła od ścianki do pary niż do płynów ilość ciepła przekazanego w czasie kontaktu pęcherzyka ze ścianką jest niewielka.

W masie cieczy mogą powstać zarodzie jedynie podczas gwałtownego obniżenia ciśnienia cieczy o stanie nasycenia.

Kształt powstającego przy ścianie pęcherzyka zależy od tak zwanej zwilżalności lub niezwilżalności ścianki (rys. 9.49). Zwilżalność jest tym większa, im kąt θ jest mniejszy. Za ciecze nie zwilżające ścianki uważa się takie, w których $\theta > 90^\circ$.



Rys. 9.49. Kształt powstającego pęcherzyka przy ścianie: *a* – zwilżającej, *b* – nie zwilżającej

Dla wody $\theta = 50^\circ$. Średnicę pęcherzyka pary w chwili jego odrywania się od ścianki można obliczyć ze wzoru

$$d_o = 20 \cdot \theta \sqrt{\frac{\sigma}{(\rho' - \rho'')g}}, \quad \text{mm}, \quad (9.135)$$

po wstawieniu θ i σ dla wody otrzymamy

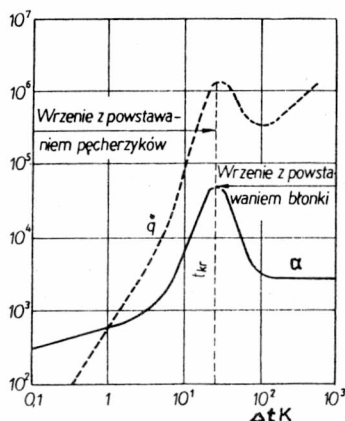
$$d_o = 2,67 \sqrt{\left(\frac{\rho' - \rho''}{1000}\right)^3}, \quad \text{mm}. \quad (9.136)$$

Napięcie powierzchniowe maleje ze wzrostem temperatury, w punkcie krytycznym znika.

9.9.1. Rodzaje wrzenia

Podczas zwiększania gęstości $\dot{q}$ strumienia cieplnego zwiększa się częstotliwość odrywania się pęcherzyków i ich liczba. Ponieważ głównym nośnikiem ciepła jest woda, więc często odrywające się pęcherzyki przerywają warstwę graniczną i wprowadzają dodatkowe w niej ruchy, intensyfikując przekazywanie ciepła, co wyraża się wzrostem α . Ten obszar wrzenia nazywa się wrzeniem pęcherzykowym. Jeżeli na skutek wzrostu $\dot{q}$ liczba powstających przy ścianie pęcherzyków jest duża, pęcherzyki stykając się ze sobą tworzą film lub błonkę parową. Wtedy warunki przekazywania ciepła są gorsze: maleje zarówno przekazywanie ciepła do ośrodka

gazowego, jak i współczynnik α przejmowania ciepła. Ten obszar wrzenia nazywa się wrzeniem błonowym lub filmowym. Przejście od wrzenia pęcherzykowego do błonowego zachodzi po przekroczeniu charakterystycznej dla danego płynu różnicy temperatur między ścianką a płynem, zwanej temperaturą krytyczną. Z tego powodu wrzenie pęcherzykowe nazywa się wrzeniem także podkrytycznym, a błonowe nadkrytycznym. Dla wody $\Delta t_{kr} = 25 \text{ K}$ (rys. 9.50).



Rys. 9.50. Zależność współczynnika konwekcji α i gęstości strumienia ciepła $\dot{q}$ od różnicy temperatury

9.9.2. Wzory obliczeniowe

Z rozpatrywanego przebiegu procesu wrzenia wynika, że współczynnik α zależy od liczby odrywających się pęcherzyków, czyli od gęstości strumienia ciepła, a zatem od różnicy temperatur między ścianką a płynem. Ogólnie więc zależność α można zapisać w postaci

$$\alpha = f(\dot{q}) \quad \text{lub} \quad \alpha = f'(\Delta t), \quad (9.137)$$

gdzie

$$\Delta t = \vartheta - t_n,$$

ϑ — temperatura ściany,

t_n — temperatura nasycenia.

Michiejew przytacza wzory Krużylina^{*)}. Mają one tę zaletę, że są zapisane w postaci modułowej, uogólnionej. Odnoszą się do wrzenia zwilżających powierzchni^{**)} cieczy o większej objętości. Wzory te zostały sprawdzone według danych doświadczalnych, głównie Cichelliego i Bonili i podane w postaci

$$\text{Nu} = 0,075 K_q^{0,7} \cdot K_u^{1/3} \text{Pr}^{-0,5}. \quad (9.138)$$

Dla krytycznej gęstości strumienia ciepła

$$K_q = 995 \text{Pr}^{0,5} K_u^{-0,66} \text{Ar}^{1/4}. \quad (9.139)$$

We wzorach tych:

$$\text{Nu} = \frac{\alpha \delta}{\lambda},$$

gdzie δ — wymiar charakterystyczny, proporcjonalny do wielkości pęcherzyka w chwili odrywania się od ścianki,

^{*)} W oryginalnej pracy Krużylina współczynniki nieco się różnią.

^{**)} Co do wpływu rodzaju materiału ścianki na α poglądy nie są jednoznaczne i brakuje pewnych danych. Według Michiejewa wpływ ten istnieje, gdy gęstość strumienia ciepła $\dot{q} < 10^5$.

$$\delta = \sqrt{\frac{\sigma}{\gamma' - \gamma''}} = \sqrt{\frac{\sigma}{(\rho' - \rho'')g}},$$

$\text{Pr} = c_p \eta / \lambda$ – liczba Prandtla dla cieczy,

$$\text{Ar} = \frac{g \delta^3 p'^2}{\eta^2} \frac{\rho' - \rho''}{\rho'} - \text{liczba Archimedes},$$

$$K_q = \frac{p' \delta^2}{\lambda \sigma} \frac{\rho' - \rho''}{\rho'} \dot{q} - \text{liczba znamienna, ujmująca wpływ ilości czynnych miejsc powstawania pęcherzyków},$$

$$p' = \left(\frac{dp}{dt} \right)_n = \frac{r \gamma' \rho''}{T(\rho' - \rho'')} = \frac{r g \rho' \rho''}{T(\rho' - \rho'')} - \text{pochodna na linii nasycenia według równania Clausiusa-Clapeyrona},$$

$$K_u = \frac{\rho'}{\rho''} \frac{c \sigma}{r \delta p'} \frac{\rho'}{\rho' - \rho''} - \text{liczba znamienna ujmująca wpływ częstości odrywania się pęcherzyków},$$

c, η, λ, σ – parametry odnoszące się do cieczy.

Po rozpisaniu i przekształceniu względem α równania (9.138) otrzymujemy wygodniejszy do obliczeń wzór określający współczynnik konwekcji ciepła podczas wrzenia, o postaci $\alpha = f(\dot{q})$:

$$\alpha = 1,278 \cdot 10^{-2} \left(\frac{\rho'' r}{\rho - \rho''} \right)^{0,033} \left(\frac{\gamma'}{\sigma} \right)^{1/3} \frac{\lambda^{0,8} \dot{q}^{0,7}}{\eta^{0,5} c^{1/6} T^{0,37}}, \quad (9.140)$$

przy czym η w kg/ms, $\gamma' = g \rho'$, cięż. wł. w N/m³, σ w N/m^{*}).

Wzór Krużylina (9.140) można przedstawić w postaci $\alpha = f(\Delta t)$, tj.

$$\alpha = 0,492 \cdot 10^{-6} \left(\frac{\rho'' r}{\rho - \rho''} \right)^{0,1099} \left(\frac{\gamma'}{\sigma} \right)^{1,11} \frac{\lambda^{2,66} \Delta t^{2,33}}{\eta^{1,667} c^{0,555} T^{1,233}}, \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}, \quad (9.141)$$

oznaczenia jak poprzednio.

Równania Krużylina dla wody przyjmują łatwą do obliczeń postać uproszczoną

$$\alpha = 2,65 \cdot 0,10 p^{0,176} q^{0,7}, \quad \text{W/m}^2 \cdot \text{K}, \quad (9.142)$$

lub

$$\alpha = 25,8 \cdot 0,10 p^{0,58} \Delta t^{2,33}, \quad \text{W/m}^2 \cdot \text{K}. \quad (9.143)$$

Równania te przedstawiono wykreślnie na rys. 9.51 i 9.52.

T. Hobler przeprowadził korekcję stałej w równaniu Kiczigina i Tobilewicz, stosując pewne modyfikacje i uproszczenia. Wzór ten wyrażony w jednostkach SI ma postać

$$\text{Nu}_z = 0,242 \left(\frac{V_p}{K} \right)^{1,5} \left(\frac{\delta p}{\sigma} \right)^{1,75}, \quad (9.144)$$

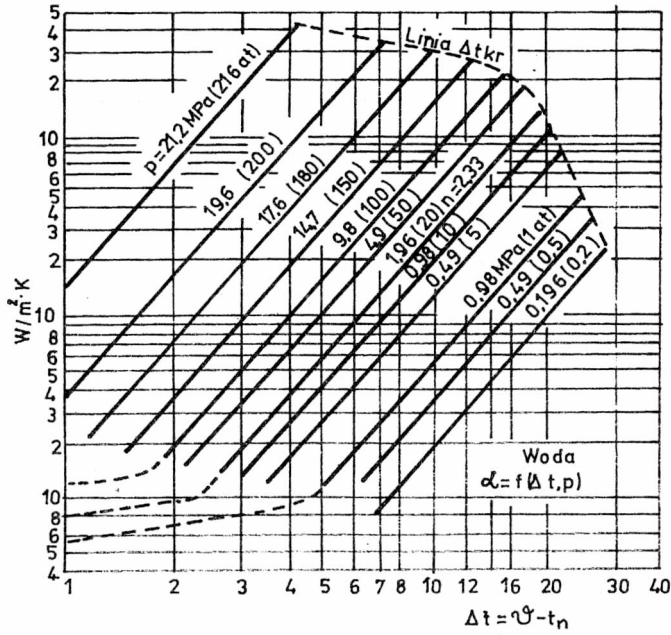
gdzie

$\text{Nu}_z = \alpha \vartheta_z / \lambda$; $V_p = \rho' / \rho''$; p w MPa,

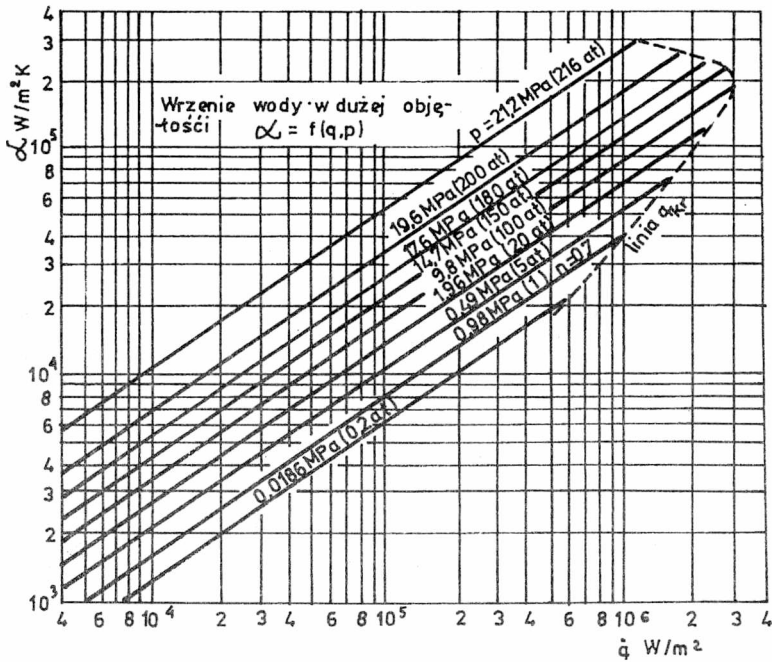
$K = r / c \Delta t$ – liczba znamienna,

$$\sigma = \sqrt{\sigma / \gamma'} = \sqrt{\sigma / \rho' g}.$$

^{*}) Według wzoru Baczyńskiego dla wody $\sigma = 0,070(\rho' - \rho''/1000)^4$ N/m.



Rys. 9.51. $\alpha = f(t, p)$ dla wrzenia wody



Rys. 9.52. $\alpha = f(\dot{q}, p)$ dla wrzenia wody

Jest wiele równań uogólnionych, odnoszących się do wrzenia, jak: Łabuncowa, Nischikawy i Yamagaty, Iwaszkiewicza i in. Jeżeli wrzenie odbywa się w rurach pionowych, proces komplikuje się jeszcze bardziej. Jacob proponuje w tym przypadku podwyższyć wartość α o 25%. Pokrywa się to z badaniami Fritza dla rur pionowych długości 0,46–2 m, który uzyskał wartości o 28% większe niż dla wrzenia na ścianie poziomej.

Mimo istnienia teoretycznych i uogólnionych równań proces wrzenia nie jest jeszcze dosyć dobrze opanowany. Z tego względu stosuje się wzory empiryczne, pewniejsze, lecz o mniejszym zastosowaniu. Zwykle są to wzory o bardzo prostej budowie. Można tu wymienić wzór Jacoba–Fritza dla wrzenia pod ciśnieniem 980 hPa (1 at)

$$\alpha = c + d\dot{q}, \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}. \quad (9.145)$$

Stałe c i d dla różnych płynów podano w tab. 9.25.

Tabela 9.25. Stałe c , d do wzoru (9.145)

Ciecz	c	d	Ciecz	c	d
woda	1080	0,07743	nafta	567	0,05402
amoniak	1080	0,07743	metanol	567	0,05402

Jeżeli wrzenie zachodzi pod ciśnieniem $p \neq 980$ hPa, α należy pomnożyć przez x . Mnożnik x podano w tab. 9.26

Tabela 9.26. Mnożnik x dla wrzenia przy różnych temperaturach (różnych ciśnieniach)

x	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,6	1,8
temperatura wrzenia											
woda	35	53	68	78,3	86,6	93,3	98,9	104	109	200	309
nafta			183,3	193,3	203,3	213,6	220	222			
metanol		18,9	32,2	42,2	51,6	58,9	64,4	68,9	71,6		

Wzór podany przez Kutateladze, sprawdzony w zakresie ok. 0,2–10 barów, ma postać

$$\alpha = 2,75 \cdot \varphi \cdot p^{0,4} \cdot \dot{q}^{0,7}, \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}, \quad (9.146)$$

$\dot{q}$ w W/m^2 , p w barach.

Współczynnik φ dla różnych płynów podano w tab. 9.27.

Tabela 9.27. Współczynnik φ do wzoru (9.146)

Płyn	φ	Płyn	φ
woda	1	alkohol etylowy	0,45
nafta	0,31–0,56	alkohol metylowy	0,36
benzol	0,31	24-proc. roztwór wodny NaCl	0,62
25% roztwór cukru	0,57	9-proc. roztwór wodny NaCl	0,86

9.9.3. Przykłady obliczeniowe

Woda wrze pod ciśnieniem 0,1 MPa (1 bar). Obliczyć α konwekcji, jeśli różnica temperatur między ścianą a wrzącą wodą wynosi 8 K.

Dla ciśnienia 0,1 MPa $T \approx 373$ K; (parametry cieczy przyjęto dla 100°C z tab. 15.3 i 15.5)

$$\rho' = 958,45 \text{ kg/m}^3, \quad \rho'' = 0,598 \text{ kg/m}^3, \quad r = 2256,7 \text{ kJ/kg}, \quad g_2 = 20,63 \cdot 10^{-6} \text{ m},$$

$$\lambda = 0,682 \text{ W/m} \cdot \text{K}, \quad \eta = 277,53 \cdot 10^{-6} \text{ kg/m} \cdot \text{s}, \quad c = 4,211 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}.$$

Obliczenie ze wzoru (9.141) Krużyłina:

$$\alpha = 0,492 \cdot 10^{-6} \left(\frac{\rho'' r}{\rho' - \rho''} \right)^{0,1099} \left(\frac{\gamma}{\sigma} \right)^{1,11} \frac{\lambda^{2,66} \Delta t^{2,33}}{\eta^{1,667} c^{0,555} T^{1,233}},$$

$$\left(\frac{0,598 \cdot 2256,7}{958,45 - 0,598} \right)^{0,1099} = 1,03;$$

$$\sigma = 0,07 \left(\frac{958,45 - 0,598}{1000} \right)^4 = 0,059 \text{ N/m},$$

$$\left(\frac{\gamma}{\sigma} \right)^{1,11} = \left(\frac{9,81 \cdot 958,45}{0,059} \right)^{1,11} = 5,96 \cdot 10^5,$$

$$\lambda^{2,66} = 0,682^{2,66} = 0,361$$

$$\Delta t^{2,33} = 8^{2,33} = 127,1; \quad \eta^{1,667} = (277,53 \cdot 10^{-6})^{1,667} = 1,174 \cdot 10^{-6}$$

$$T^{1,233} = 373^{1,233} \cong 1480,$$

$$\alpha = 0,492 \cdot 10^{-6} \cdot 1,03 \cdot 5,96 \cdot 10^5 \frac{0,361 \cdot 127,1}{1,174 \cdot 10^{-6} \cdot 2,198 \cdot 1480} \cong 3680 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}.$$

Obliczenie z uproszczonego wzoru (9.143) Krużyłina:

$$\alpha = 25,8 p^{0,58} \Delta t^{2,33},$$

$$\alpha = 25,8 \cdot 1,0^{0,58} \cdot 8^{2,33} = 3280 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}.$$

Obliczenie ze wzoru (9.145) Jacoba–Fritza*):

$$\alpha = c + d\dot{q} = c + d\alpha \Delta t,$$

$$\alpha = \frac{c}{1 - d\Delta t}.$$

Z tabeli 9.26 dla wody wynika: $c = 1080$, $d = 0,07743$,

$$\alpha = \frac{1080}{1 - 0,07743 \cdot 8} = 2840 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}.$$

*) Ze wzoru Jacoba–Fritza otrzymuje się wartości niższe, jednak zgodne z nowszymi wzorami podanymi przez tego autora [26] oraz badaniami Cryder i Finalbargo [8], [1]; są to wzory dla wrzenia na powierzchni miedzianej. W pewnych sytuacjach są to wartości bezpieczniejsze. Dla miedzi uzyskuje się wartości α większe niż dla innych materiałów [8].

Obliczenie ze wzoru (9.146) Kutateladze:

$$\alpha = 2,75 \varphi p^{0,4} \dot{q}^{0,7}.$$

Z tabeli 9.27 dla wody ($\varphi = 1$) $\dot{q} = \alpha \Delta t$,

$$\alpha = 2,75 \cdot 1^{0,4} \cdot \alpha^{0,7} \cdot 8^{0,7},$$

$$\alpha^{0,3} = 2,75 \cdot 4,36 = 11,99,$$

$$\alpha = 11,99^{1/0,3} = 3910 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}.$$

Obliczenie ze wzoru (9.144) Hoblera:

$$\text{Nu}_z = 0,242 \left(\frac{V_p}{K} \right)^{1,5} \left(\frac{\delta p}{\sigma} \right)^{1,75}$$

$$V_p = \frac{\rho'}{\rho''} = \frac{958,45}{0,588} = 1603, \quad K = \frac{r}{c \Delta t} = \frac{2256,7}{4,211 \cdot 8} = 67,0, \quad \left(\frac{V_p}{K} \right)^{1,5} = \left(\frac{1603}{66,9} \right)^{1,5} = 117,3,$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\sigma}{g \rho'}} = \sqrt{\frac{0,059}{9,81 \cdot 958,45}} = 2,505 \cdot 10^{-3}; \quad \left(\frac{\delta \cdot p}{\sigma} \right)^{1,75} = \left(\frac{2,505 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{0,059} \right)^{1,75} = 3,95 \cdot 10^{-3},$$

$$\text{Nu}_z = 0,242 \cdot 117,3 \cdot 3,95 \cdot 10^{-3} = 0,112,$$

$$\alpha = \frac{\text{Nu}_z \lambda}{\vartheta_z} = \frac{0,112 \cdot 0,682}{20,63 \cdot 10^{-6}} = 3700 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}.$$

9.10. Konwekcja o ruchu mieszanym

Ruchem mieszanym płynu nazywamy taki ruch, który jest spowodowany równocześnie siłami zewnętrznymi i grawitacyjnymi. W danym ruchu udział sił zewnętrznych i grawitacyjnych może być różny. Gdy jeden z ruchów można pominąć, ruch traktujemy jako tylko wymuszony lub tylko swobodny i przypadek ten rozpatrujemy jako konwekcję wymuszoną albo swobodną. Gdy jednak oba rodzaje sił decydują o ruchu, musimy go traktować jako ruch połączony. Ruchy tego typu nie mają zbyt wielu opracowań, a te które są, dotyczą tylko niektórych przypadków usytuowań powierzchni. W odniesieniu do przepływu mieszanego wewnątrz rury poziomej, gdy $L > 50 d$, Aładiew podaje wzór

$$\text{Nu} = 0,74 \text{Re}^{0,2} (\text{GrPr})^{0,1} \text{Pr}^{0,2}. \quad (9.147)$$

Dla rur krótszych, w których $L < 50 d$, badacz ten podaje poprawkę ε_L (tab. 9.28), którą należy pomnożyć przez α obliczone ze wzoru (9.147)

Tabela 9.28. Poprawka ε_L dla rur, w których $L < 50 d$

L/d	1	2	5	10	15	20	30	40	50
ε_L	1,9	1,7	1,44	1,28	1,18	0,13	1,05	1,02	1,0

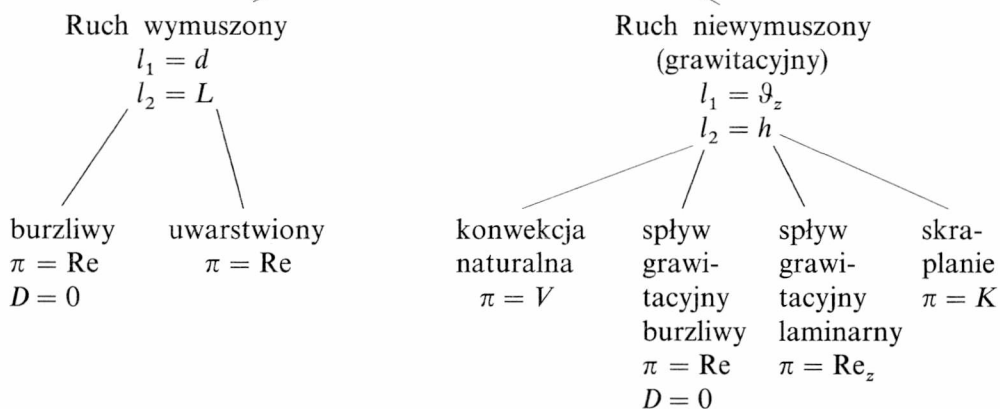
W równaniu (9.147) występują liczby znamienne, charakterystyczne dla ruchu wymuszonego i swobodnego.

9.11. Systematyka budowy wybranych równań uogólnionych

Wprowadzenie przez T. Hoblera w szerszym niż dotychczas zakresie parametru ϑ_z liczb znamiennych V oraz K , oprócz ograniczenia ilości stosowanych liczb znamiennych, umożliwia przytoczenie podanej dalej systematyki. Ze względów dydaktycznych jest ona korzystna, choć nie obejmuje wszystkich przypadków konwekcji.

Równanie ogólne konwekcji ma postać

$$\text{Nu} = \frac{\alpha l_1}{\lambda} = C \pi^A \text{Pr}^B \left(\frac{l_1}{l_2} \right)^D$$



10. Promieniowanie (radiacja)

Wszystkie ciała ($T > 0$ K) są źródłami fal elektromagnetycznych; mówimy, że promieniają. Jest to spowodowane przede wszystkim oscylacjami ładunków elektrycznych w powłoce elektronowej. Fale elektromagnetyczne są nośnikami energii. Prędkość C rozchodzenia się fali zależy tylko od rodzaju ośrodka, w próżni $C = 300\,000$ km/s.

Związek między prędkością, długością λ fali i jej częstotliwością ν wyraża się wzorem

$$C = \lambda \nu. \quad (10.1)$$

Ciała stałe i ciekłe wysyłają promieniowanie, w którym znajdują się, praktycznie biorąc, fale wszystkich długości w zakresie od $\lambda \cong 0$ do $\lambda \cong \infty$. Gazy wysyłają promieniowanie tylko w pewnych zakresach długości fal: mówimy, że promieniają selektywnie. Widmo ciał stałych i ciekłych jest ciągłe; widmo gazów — pasmkowe.

Energię, jaką przekazuje wiązka promieniowania, nazywamy emisją tej wiązki. Znajdujące się w wiązce promieniowania fale elektromagnetyczne, zależnie od ich długości, możemy umownie podzielić na:

- poniżej 10^{-6} μm — promieniowanie kosmiczne,
- od 10^{-6} do 10^{-4} μm — promieniowanie γ ,
- od 10^{-4} do 10^{-2} μm — promieniowanie Roentgena,
- od 10^{-2} do 0,35 μm — promieniowanie ultrafioletowe,
- od 0,35 do 0,70 μm — promieniowanie widzialne (światłne),
- od 0,70 do 400 μm — promieniowanie podczerwone (cieplne),
- od 0,40 do 1000 μm — ultrakrótkie fale radiowe,
- powyżej 1 m — fale radiowe.

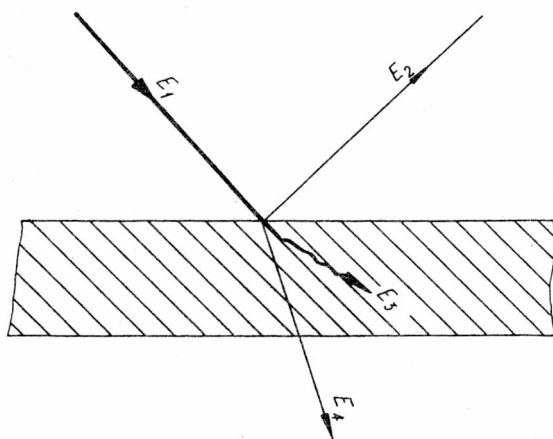
Emisja poszczególnych fal zależy od temperatury, rozmiarów i właściwości ciała wysyłającego promieniowanie. W tabeli 10.1 zestawiono procentowy rozdział emisji tak zwanego ciała doskonale czarnego na zakresy promieniowania.

Tabela 10.1. Procentowy rozdział emisji ciała doskonale czarnego na zakresy promieniowania

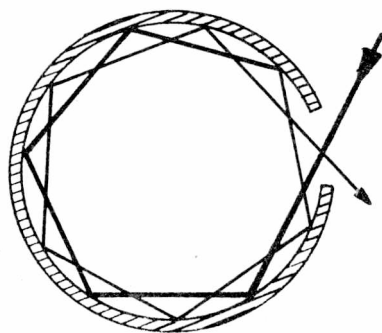
Temperatura ciała emitującego °C	Zakresy promieniowania		
	podczerwone	widzialne	ultrafioletowe
poniżej 1200	100	—	—
2000	98	2	—
2500	95	5	—
4000	75	24	1
6000	45	43	12
10 000	18	40	42

Z tabeli 10.1 wynika, że gdy temperatura ciał wynosi do 2000°C, tzn. jest taka z jaką mamy najczęściej do czynienia w technice, prawie cała emisja jest przenoszona przez promieniowanie podczerwone, które z tego powodu nazywa się promieniowaniem ciepłym.

W zależności od właściwości ciał, na które pada emisja, jest ona rozdzielana na różne części (rys. 10.1).



Rys. 10.1. Rozdział emisji padającej na dane ciało



Rys. 10.2. Model ciała doskonale czarnego

Jeżeli oznaczymy przez E_1 emisję padającą na dane ciało, E_2 — emisję odbitą, E_3 — emisję zaabsorbowaną, E_4 — emisję przenikającą przez dane ciało, to:

$E_2/E_1 = R$ nazywamy zdolnością odbijania emisji albo refleksyjnością ciała,

$E_3/E_1 = A$ zdolnością pochłaniania, absorpcji emisji, albo absorpcyjnością ciała,

$E_4/E_1 = D$ zdolnością przepuszczenia emisji, przezroczystością albo transmisyjnością ciała.

Zachodzi oczywiście związek

$$A + R + D = 1. \quad (10.2)$$

Współczynniki A , R , D mogą przyjmować wartości od 0 do 1. Jeżeli jeden z nich jest równy jedności, to pozostałe muszą być równe zeru. Ciała, dla których wymienione współczynniki przyjmują jedność, mają specjalną nazwę.

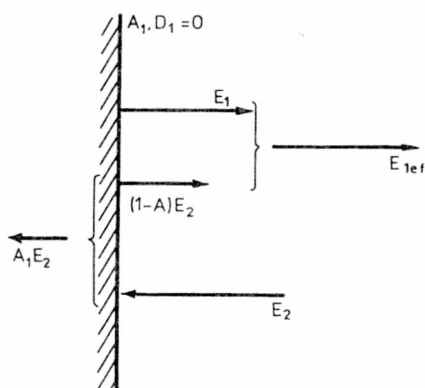
Ciało spełniające warunek $A = 1$ nazywamy ciałem doskonale absorbującym lub doskonale czarnym. Ciało takie w przyrodzie nie występuje. Modelem jego może być mały otwór lub szczelina utworzona w przestrzeni obudowanej ciałem nieprzezroczystym. Promień wpadający do takiej przestrzeni praktycznie nie wychodzi, czyli zostanie całkowicie pochłonięty (patrz rys. 10.2). Najbardziej zbliżone ($A \approx 0,95$) do właściwości ciała doskonale czarnego^{*)} są właściwości sadzy.

Ciało spełniające warunek $R = 1$ nazywamy ciałem doskonale białym, a gdy jest gładkie, wypolerowane – doskonałym zwierciadłem. W przyrodzie nie występuje.

Ciało spełniające warunek $D = 1$ nazywamy ciałem doskonale przezroczystym lub przezroczystym. Gaz dla promieniowania, którego sam on nie emituje, jest doskonale przezroczysty. W innych przypadkach $D < 1$.

Efektywna (mierzalna) emisja danego ciała składa się z emisji własnej i obcej, odbitej przez dane ciało lub przez nie przechodzącej.

Na rysunku 10.3 przedstawiono skład emisji ciała nieprzezroczystego ($D = 0$). E_1 jest to emisja własna ciała, zależna od temperatury i właściwości tego ciała; zwykle dalej krótko nazywa się ją emisją ciała. E_2 jest to emisja padająca na dane ciało, pochodząca z efektywnego promieniowania ciał otaczających dane ciało. Jest ona częściowo pochłonięta w ilości $A_1 E_2$, a reszta $(1 - A_1) E_2$ zostaje odbita. Przez efektywne E_{1ef} promieniowanie danego ciała, tj. takie, które zmierzylibyśmy przyrządem, rozumiemy sumę emisji własnej i odbitej



Rys. 10.3. Skład emisji ciała nieprzezroczystego: E_1 – emisja własna, E_2 – emisja padająca, E_{1ef} – emisja efektywna

$$E_{1ef} = E_1 + (1 - A_1) E_2. \quad (10.3)$$

Należy zauważyć, że skład emisji odbitej nie zależy od temperatury i właściwości (oprócz absorpcyjności) danego ciała.

^{*)} Wielkości będące właściwościami ciała doskonale czarnego lub odniesione do nich dalej oznacza się odnośnikami c , np. E_c , T_c , $A_c = 1$, $\varepsilon_c = 1$.

Jeżeli na drodze emisji wysłanej od danego ciała znajdzie się promieniujące drugie ciało, to między nimi zajdzie przekazywanie Q_{1-2} ciepła drogą promieniowania, a ściślej wymiana emisji.

Ciepło to można liczyć także za pomocą pojęcia tzw. „ciepła rezultatywnego” Q_{r1} , będącego częścią, a przy braku innych działań – całym ciepłem przemiany danego ciała, spowodowanym promieniowaniem

$$Q_{r1} = E_1 - A_1 E_2 = E_{1ef} - E_2, \quad (10.3a)$$

Ciepło rezultatywne jest równe różnicy wypromieniowanej emisji własnej E_1 i pochłoniętej przez to ciało emisji E_2 , padającej na dane ciało.

Uwzględniając przede wszystkim właściwości emisyjne ciał promieniowanie dzielimy na:

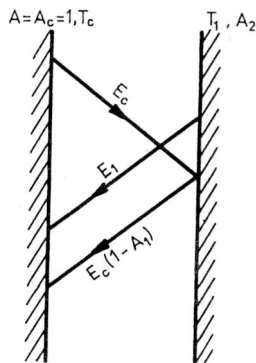
- a) promieniowanie ciał stałych i ciekłych,
- b) promieniowanie gazów,
- c) promieniowanie płomienia świecącego.

10.1. Promieniowanie ciał stałych i ciekłych

Ciała stałe i ciekłe promieniają wszystkimi długościami fal.

10.1.1. Podstawowe prawa promieniowania

10.1.1.1. Prawo Kirchhoffa



Rys. 10.4. Promieniowanie między dowolnym ciałem szarym a doskonale czarnym

Przeprowadźmy bilans wymiany emisji między ciałem doskonale czarnym i dowolnym. Zgodnie z rysunkiem 10.4, gdy E_1 jest emisją (własną) dowolnego ciała nieprzezroczystego, a E_c emisją ciała doskonale czarnego, ciepło wymienione przez promieniowanie

$$Q_{1-2} = E_c - E_1 - E_c(1 - A_1). \quad (10.4)$$

Jak wynika z doświadczenia, temperatury rozpatrywanych ciał wyrównują się po odpowiednim czasie (jeśli nie ma dodatkowych zaburzeń spowodowanych innymi ciałami). Wtedy $Q_{1-2} = 0$, czyli

$$E_1 = E_c(1 - 1 + A_1) = A_1 E_c. \quad (10.5)$$

Jeśli wymienimy dane ciało oznaczone odnośnikiem 1 na inne dowolne bez odnośnika, to

$$E = AE_c, \quad (10.6)$$

czyli dla wszystkich ciał o tej samej temperaturze

$$\frac{E_1}{A_1} = \frac{E_2}{A_2} = \frac{E}{A} = E_c = f(T) \quad (10.7)$$

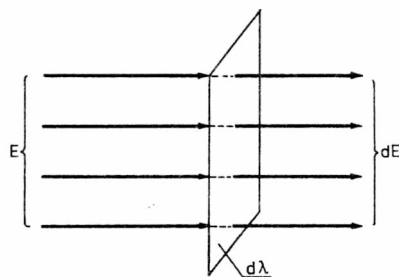
stosunek emisji tych ciał do ich zdolności absorpcyjnych jest stały i równa się emisji ciała doskonale czarnego o tej samej temperaturze. Jest to wypowiedź zwana prawem Kirchhoffa.

10.1.1.2. Prawo Plancka

Jak wynika z tabeli 10.1, fale elektromagnetyczne różnej długości niosą różne części emisji. Intensywność promieniowania (emisji) wyraża się zależnością

$$I_\lambda = \frac{dE}{d\lambda}, \quad (10.8)$$

w której dE — część emisji niesiona przez fale o zakresie długości $d\lambda$ (patrz rys. 10.5).



Rys. 10.5. Przechodzenie części dE emisji przez blendę przepuszczającą fale o zakresie $d\lambda$

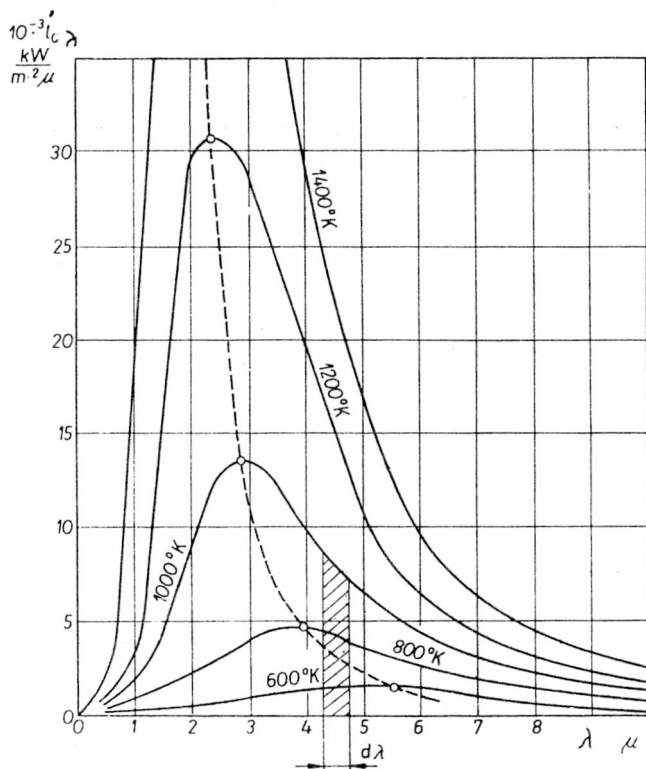
Intensywność promieniowania zależy od długości fali λ , temperatury absolutnej T ciała promieniującego i od jego wielkości; I_λ ciał nieprzezroczystych zależy od temperatury cząstek leżących na lub blisko zewnętrznej powierzchni ciała

$$I_{\lambda c} = f(\lambda, T, F), \quad \text{zaś} \quad i_\lambda = f(\lambda, T) \quad (10.9)$$

Dla ciała doskonale czarnego Planck znalazł teoretyczną zależność

$$i_{\lambda c} = \frac{C_1}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{C_2}{T\lambda}\right) - 1 \right]}, \quad (10.10)$$

zwaną prawem Plancka. Stałe mają wartość $C_1 = 0,374 \cdot 10^{-15} \text{ W} \cdot \text{m}^2$, $C_2 = 0,01438 \text{ m} \cdot \text{K}$. Jeśli T potraktujemy jako parametr, równanie (10.10) możemy przedstawić wykreślnie w układzie dwuosiowym (patrz rys. 10.6).



Rys. 10.6. Zależność $i_{c\lambda} = f(T, \lambda)$ dla ciała doskonale czarnego

10.1.1.3. Prawo Wiena

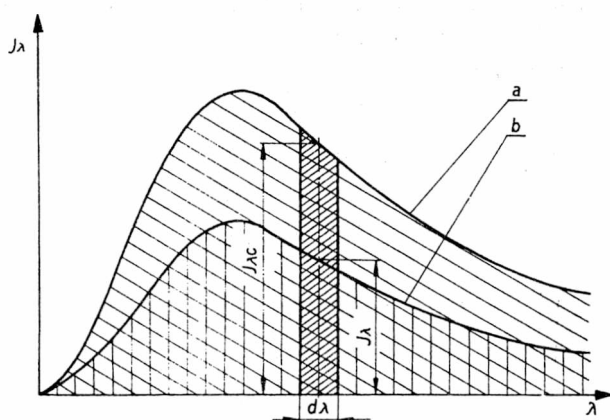
Na rysunku 10.6 widać, że dla ciała doskonale czarnego o danej temperaturze istnieje długość λ_m fali, która ma maksymalną intensywność. Można powiedzieć, że intensywność ta nadaje barwę promieniowaniu.

Ze wzrostem temperatury ciała promieniującego maksimum intensywności przesuwa się ku falom krótszym. Dla emisji ciała doskonale czarnego Wien ustalił związek

$$\lambda_m T = 2,9 \text{ mm} \cdot \text{K}. \quad (10.11)$$

10.1.1.4. Prawo Stefana-Boltzmann

Strumień emisji własnej ciała doskonale czarnego (rys. 10.7)



Rys. 10.7. Promieniowanie ciała doskonale czarnego i szarego:
linia a – dla ciała doskonale czarnego, linia b – dla ciała doskonale szarego

$$\text{diagonal lines} - \dot{E}_c; \quad \text{cross-hatch} - \dot{E}; \quad \varepsilon_\lambda = \frac{I_\lambda}{I_{\lambda c}} = \varepsilon$$

$$\dot{E}_c = F \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} i_{c\lambda} d\lambda. \quad (10.12)$$

Po wstawieniu (10.10) do (10.12) i scałkowaniu otrzymamy

$$\dot{E} = F \frac{6,494 C_1}{C_2^4} T^4 = F \text{ const } T^4. \quad (10.13)$$

Należy nadmienić, że prawo to zostało odkryte doświadczalnie przez Stefana (1879) i uzasadnione teoretycznie przez Boltzmann (1881) jeszcze przed sformułowaniem prawa Plancka (1901).

Ze względu na stałą, do celów technicznych jest wygodniej zapisać prawo Stefana-Boltzmann w postaci:

$$\dot{E}_c = F C_c \left(\frac{T}{100} \right)^4, \quad (10.14)$$

gdzie $C_c = 5,67 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ – stała promieniowania ciała doskonale czarnego.

Z tego wzoru obliczamy emisję własną ciała doskonale czarnego. Ciała rzeczywiste o tej samej temperaturze wysyłają emisję mniejszą, można więc mówić o ich zdolności emisyjnej ε , przy czym

$$\varepsilon = \left(\frac{E}{E_c} \right)_T \quad (10.15)$$

jest to stosunek emisji danego ciała do emisji, jaką by ono miało, gdyby przy tej samej temperaturze było doskonale czarne.

Z (10.15) można napisać

$$\dot{E} = \varepsilon \dot{E}_c, \quad (10.16)$$

czyli dla ciał rzeczywistych ich strumień emisji

$$\dot{E} = F \varepsilon C_c \left(\frac{T}{100} \right)^4, \quad (10.17)$$

co nieraz nazywa się także prawem Stefana–Boltzmann dla ciał rzeczywistych. Zapisuje się je także

$$\dot{E} = F C \left(\frac{T}{100} \right)^4, \quad (10.18)$$

gdzie C — współczynnik promieniowania ciała rzeczywistego, oczywiście

$$C = \varepsilon C_c. \quad (10.19)$$

Ciało, w którym dla każdej długości fali stosunek intensywności promieniowania do intensywności promieniowania ciała doskonale czarnego jest stały i wynosi ε , nazywamy ciałem doskonale szarym (linia b na rys. 10.7).

Zdolność emisyjna ciała doskonale białego $\varepsilon = 0$, a doskonale czarnego $\varepsilon = 1$. Z tego względu ε nazywa się także stopniem „czerni” powierzchni lub czerni.

Na podstawie (10.7) można napisać $E/E_c = A$. Po porównaniu z (10.15) wynika^{*)}, że

$$\varepsilon = \left(\frac{E}{E_c} \right) = A, \quad (10.20)$$

czyli zdolność emisyjna ciał stałych i cieczy równa się zdolności absorpcyjnej.

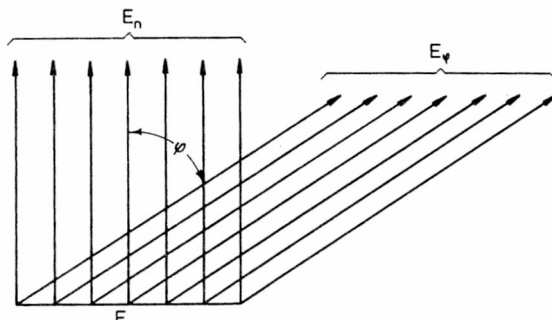
10.1.1.5. Prawo Lamberta

Emisja wysyłana przez dane ciało jest skierowana we wszystkich kierunkach. Sumaryczną, całkowitą emisję własną wysyłaną przez ciało o powierzchni F i danej temperaturze T , obliczamy z prawa Stefana–Boltzmann. Emisja ta nie jest równomiernie rozłożona w przestrzeni. Jeżeli wyobrazimy sobie powierzchnię F płaską ciała (rys. 10.8), to pod kątem φ , mierzonym od normalnej do tej powierzchni, jest skierowana część emisji E_φ

$$E_\varphi = E_n \cos \varphi, \quad (10.21)$$

gdzie E_n — część całkowitej emisji, skierowana normalnie do powierzchni.

^{*)} Prawo Kirchhoffa można zapisać także w postaci: $E_c = E/\varepsilon = f(T)$.



Rys. 10.8. Rozkład emisji kierunkowej

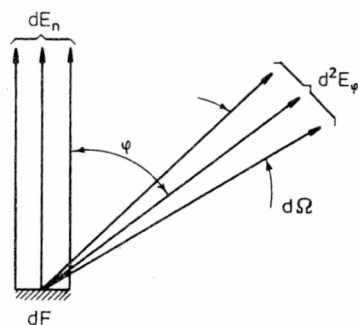
Jeśli mamy do czynienia z powierzchniami nie płaskimi, to wycinek dF powierzchni bez załamów możemy traktować jako płaski. Wtedy

$$d^2 E_\varphi = dE_n \cos \varphi d\Omega \quad (10.22)$$

jest najogólniejszym matematycznym ujęciem prawa Lamberta (patrz rys. 10.9), dE_n jest częścią emisji skierowaną normalnie do elementu dF , $d\Omega$ – kątem bryłowym wiązki promieniowania $d^2 E$, skierowanej pod kątem φ do normalnej.

W równaniach (10.21) i (10.22) niewiadome są E_n . Ponieważ potrafimy obliczyć całkowitą emisję E wypromieniowaną przez płaski element we wszystkich kierunkach półprzestrzeni (z prawa Stefana–Boltzmana), więc całkując w półprzestrzeni emisję kierunkową E_φ wyznaczmy E_n .

Wyobraźmy sobie półprzestrzeń sferyczną opartą na płaszczyźnie, na której leży promieniujący element dF powierzchni. Niech r będzie promieniem sfery. Z elementu dF jest wysłana pod kątem φ i umownie licznym kątem ψ , wiązka $d^2 E_\varphi$ emisji. Kąt bryłowy $d\Omega$ wiązki wycina na powierzchni sfery jej element dF' . Na rysunku 10.10 przedstawiono kąt $d\Omega$ ograniczony kątami płaskimi $d\varphi$ i $d\psi$.



Rys. 10.9. Ilustracja różniczkowego prawa Lamberta

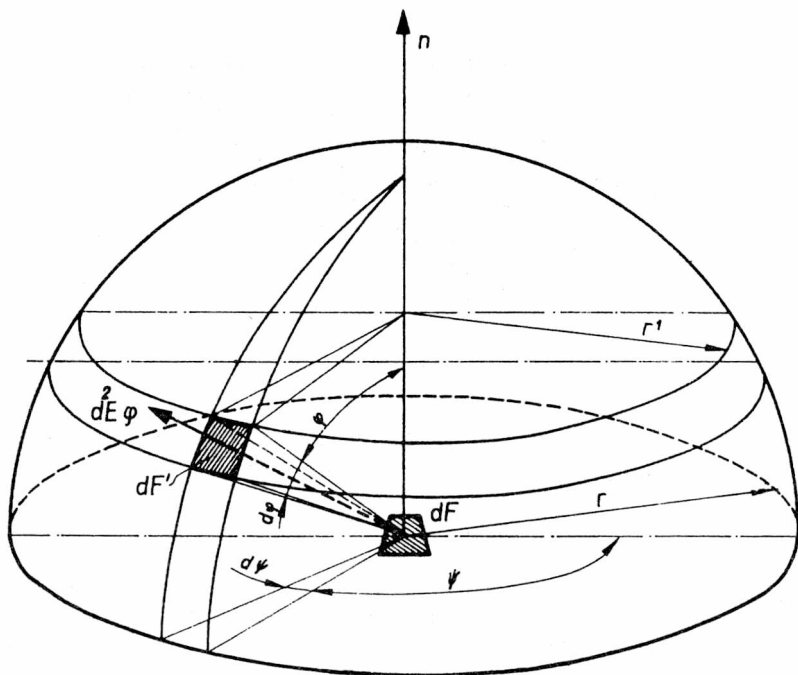
Część emisji skierowana normalnie do elementu dF wynosi:

$$d\dot{E}_n = \dot{e}_n dF, \quad (10.23)$$

gdzie $\dot{e}_n$ – gęstość strumienia emisji skierowanej normalnie do powierzchni.

Na podstawie prawa Lamberta

$$d^2 \dot{E} = \dot{e}_n \cos \psi d\Omega dF. \quad (10.24)$$

Rys. 10.10. Rozkład emisji d^2E_φ w półprzestrzeni

Zgodnie z definicją kąta bryłowego, jego różniczka (przyrost)

$$d\Omega = \frac{dF'}{r^2}. \quad (10.25)$$

Ponieważ dF' równa się iloczynowi boków wycinka sfery, więc

$$dF' = r d\varphi r' d\psi, \quad (10.26)$$

gdzie $r' = r \sin \varphi$, z czego po wstawieniu do (10.25) otrzymamy

$$d^2\Omega = \frac{r^2 \sin \varphi d\varphi d\psi}{r^2} = \sin \varphi d\varphi d\psi. \quad (10.27)$$

Jeśli w (10.24) wykorzystamy (10.27), otrzymamy

$$d^3\dot{E} = \dot{e} dF d\psi \sin \varphi \cos \varphi d\varphi. \quad (10.28)$$

Całka równania (10.28) w przestrzeni sferycznej, to jest gdy φ zmienia się w granicach 0 do $\pi/2$, natomiast ψ w granicach od 0 do 2π , ma postać

$$d\dot{E} = \dot{e}_n dF \int_{\psi=0}^{2\pi} d\psi \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi, \quad (10.29)$$

czyli

$$d\dot{E} = \dot{e}_n dF \psi \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right) \int_0^{\pi/2} = \pi \dot{e}_n dF, \quad (10.30)$$

Z prawa Stefana–Boltzmannia wiemy, że

$$d\dot{E} = \dot{e} dF = C \left(\frac{T}{100} \right)^4 dF = \varepsilon C_c \left(\frac{T}{100} \right)^4 dF, \quad (10.31)$$

z czego po porównaniu z (10.30) otrzymamy

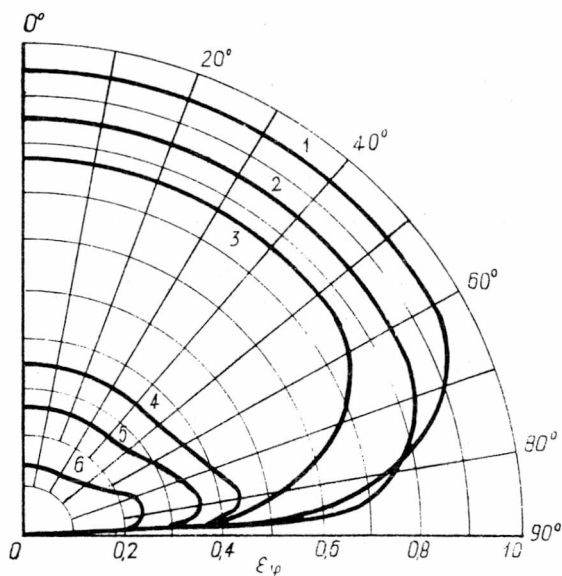
$$\dot{e}_n = \frac{\dot{e}}{\pi} = \frac{\varepsilon C_c}{\pi} \left(\frac{T}{100} \right)^4. \quad (10.32)$$

Ze wzoru tego wynika, że powierzchnia promieniująca w kierunku normalnym wysyła $1/\pi$ część całkowitej, wypromieniowanej przez tę powierzchnię emisji własnej.

Dla ciał szarych wprowadziliśmy pojęcie niezależnej od kąta promieniowania zdolności emisyjnej ε . Można również wprowadzić pojęcie kierunkowej zdolności emisyjnej ε_φ

$$\varepsilon_\varphi = \frac{E_\varphi}{E_{\varphi c}}. \quad (10.33)$$

W tym pojęciu należy ε rozumieć jako wartość średnią kierunkowej zdolności emisyjnej ε_φ .



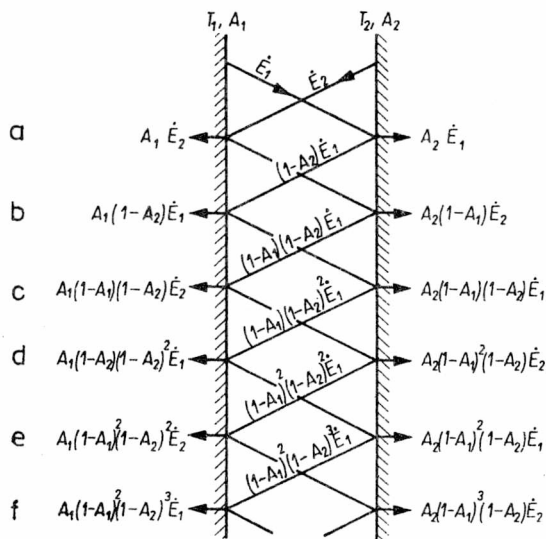
Rys. 10.11. Kierunkowa zdolność emisyjna ε_φ : 1 – drewno, 2 – korund, 3 – utleniona miedź, 4 – bizmut, 5 – brąz aluminiowy, 6 – platyna

Dla ciała doskonale czarnego kierunkowa zdolność emisyjna ε_φ jest stała i wynosi 1. Nie zależy ona od kierunku. Dla ciał rzeczywistych matowych (chropowatych) ε_φ można przyjąć za stałe dla kąta $\varphi < 60^\circ$. Gdy $\varphi \rightarrow 90^\circ$, wówczas $\varepsilon_\varphi \rightarrow 0$ (patrz rys. 10.11). Nie ma to większego praktycznego znaczenia, gdyż dla ciał matowych (chropowatych) średnia wartość $\varepsilon \approx \varepsilon_n$ zdolności emisyjnej w kierunku normalnym. W wypadku ciał wypolerowanych średnia zdolność emisyjna $\varepsilon \approx 1,2\varepsilon_n$. Dla tych ciał, gdy $\varphi > 80^\circ$, ε_φ silnie maleje i dąży do zera. Największe odstępstwa od ε zachodzą, gdy $60^\circ < \varphi < 90^\circ$.

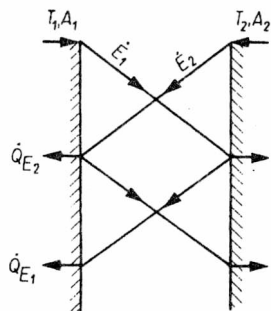
10.1.2. Wzory obliczeniowe ciepła przekazywanego przez promieniowanie

10.1.2.1. Równoległe powierzchnie blisko położone (teoretycznie nieskończenie duże)

Niech płyty mają odpowiednie temperatury i absorpcyjność $T_1 A_1$ oraz $T_2 A_2$ i niech będą nieprzezroczyste $D_1 = D_2 = 0$. Emisje własne płyt wynoszą odpowiednio E_1 i E_2 . Rozpatrzmy zachowanie się emisji płyty pierwszej. Płyta ta wypromieniowuje w kierunku płyty drugiej strumień emisji E_1 oraz po wielokrotnym odbiciu od płyty drugiej absorbuje część własnej emisji, oznaczoną przez $\dot{Q}_{E1}$, pochłania także po wielokrotnym odbiciu część $\dot{Q}_{E2}$ emisji E_2 płyty 2. Proces wielokrotnego odbicia i pochłaniania emisji jest szczegółowo opisany na rys. 10.12. Proces ten, w sposób uproszczony uzasadniający bilansowanie energii, przedstawiono na rys. 10.13.



Rys. 10.12. Wymiana emisji między nieprzezroczystymi powierzchniami równoległymi



Rys. 10.13. Wymiana emisji między nieprzezroczystymi powierzchniami równoległymi — rysunek uproszczony

zgodnie z tym rysunkiem na podstawie bilansu płyty 1 możemy obliczyć

$$\dot{Q}_{1-2} = \dot{E}_1 - \dot{Q}_{E1} - \dot{Q}_{E2}. \quad (10.34)$$

Strumień ciepła przekazanego od płyty 1 do 2 przez promieniowanie $\dot{Q}_{E1}$ jest sumą parzystych wyrazów nieskończonego szeregu zbieżnego, oznaczonych na rys. 10.12 przez b, d, f itd., czyli

$$\dot{Q}_{E1} = \dot{E}_1(1 + p + p^2 + p^3 + \dots)(1 - A_2)A_1, \quad (10.35)$$

gdzie

$$p = (1 - A_1)(1 - A_2) < 1. \quad (10.36)$$

W pierwszym nawiasie równania (10.35) znajduje się suma nieskończonego szeregu zbieżnego. Suma ta ma granicę $1/(1-p)$, zatem

$$\dot{Q}_{E1} = \frac{\dot{E}_1(1 - A_2)A_1}{1 - p} \quad (10.37)$$

Podobnie można obliczyć sumę nieparzystych wyrazów a, c, e itd. W wyniku otrzymujemy

$$\dot{Q}_{E2} = \dot{E}_2(1 + p + p^2 + \dots)A_1 = \frac{\dot{E}_2 A_1}{1 - p}. \quad (10.38)$$

Jeśli (10.37) i (10.38) wstawimy do (10.34), otrzymamy

$$\dot{Q}_{1-2} = \dot{E}_1 - \frac{\dot{E}_1(1 - A_2)A_1}{1 - p} - \frac{\dot{E}_2 A_1}{1 - p}, \quad (10.39)$$

co po rozpisaniu $1 - p$ jako $A_1 + A_2 - A_1 A_2$ można przekształcić do postaci

$$\dot{Q}_{1-2} = \frac{\dot{E}_1 A_2 - \dot{E}_2 A_1}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}. \quad (10.40)$$

Identyczny wzór otrzymamy operując efektywnymi emisjami płyty 1 i 2:

$$\dot{Q}_{1-2} = \dot{E}_{1ef} - \dot{E}_{2ef}, \quad (10.41)$$

gdzie

$$\dot{E}_{1ef} = \dot{E}_1 + (1 - A_1)\dot{E}_{2ef}, \quad (10.42)$$

$$\dot{E}_{2ef} = \dot{E}_2 + (1 - A_2)\dot{E}_{1ef}. \quad (10.43)$$

Po rozwiązaniu układu równań (10.42) i (10.43) względem $\dot{E}_{1ef}$ i $\dot{E}_{2ef}$ otrzymamy

$$\dot{E}_{1ef} = \frac{\dot{E}_1 + \dot{E}_2 - A_1 \dot{E}_2}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}, \quad (10.44)$$

$$\dot{E}_{2ef} = \frac{\dot{E}_1 + \dot{E}_2 - A_2 \dot{E}_1}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}. \quad (10.45)$$

Jeśli (10.44) i (10.45) wstawimy do (10.41), otrzymamy

$$\dot{Q}_{1-2} = \frac{\dot{E}_1 A_2 - \dot{E}_2 A_1}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}, \quad (10.46)$$

wzór ten jest identyczny z (10.40).

Emisje własne $\dot{E}_1$ i $\dot{E}_2$ obliczymy z prawa Stefana-Boltzmann

$$\dot{E}_1 = F \varepsilon_1 C_c \left(\frac{T_1}{100} \right)^4; \quad \dot{E}_2 = F \varepsilon_2 C_c \left(\frac{T_2}{100} \right)^4. \quad (10.47)$$

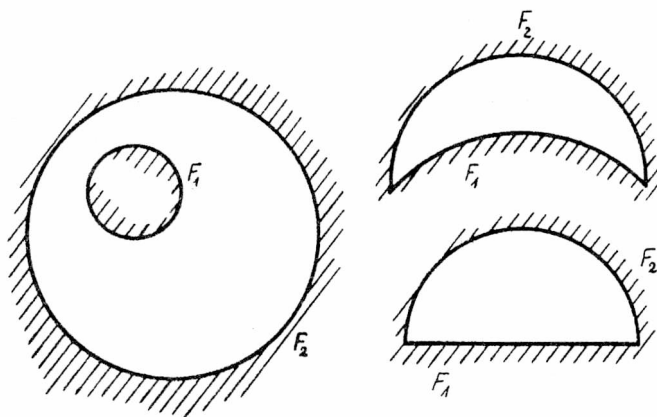
Rozważania są ścisłe, gdy $F = \infty$; otrzymany wzór ma znaczenie praktyczne w odniesieniu do różnych*) od nieskończoności powierzchni skończonych F . Możemy go stosować, gdy w porównaniu z całym strumieniem ciepła, przekazywanym przez płyty, straty emisji na obrzeżach płyt są pomijalne.

Jeśli (10.47) wstawimy do (10.46), otrzymamy

$$Q_{1-2} = F \varepsilon_z C_c \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (10.48)$$

Jest to wzór do obliczania strumienia ciepła przekazanego od płyty 1 do równoległej jej płyty 2, w którym zastępcza zdolność emisyjna

$$\varepsilon_z = \frac{1}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}. \quad (10.49)$$



Rys. 10.14. Powierzchnie zamykające się

*) Gdy powierzchnie równoległe nie są równe, za F należy wstawić powierzchnię mniejszą.

10.1.2.2. Powierzchnie zamykające się (rys. 10.14)

Jeśli przeprowadzimy rozumowanie podobne do poprzedniego, to otrzymamy wzór Christiansena

$$Q_{1-2} = \varepsilon'_z C_c F_1 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (10.50)$$

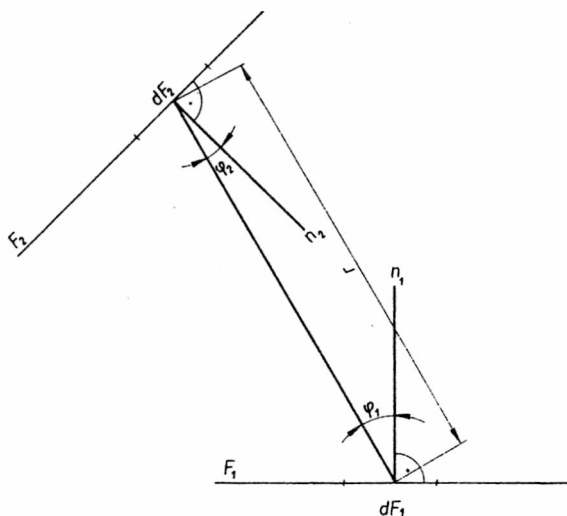
do obliczenia strumienia ciepła przekazanego przez promieniowanie od powierzchni F_1 , mniejszej i niewklęsłej, do powierzchni F_2 .

Zastępczą zdolność emisyjną ε'_z należy obliczyć ze wzoru

$$\varepsilon'_z = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{F_1}{F_2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} \quad (10.51)$$

10.1.2.3. Powierzchnie dowolnie usytuowane

Na rysunku 10.15 przedstawiono dwie powierzchnie F_1 i F_2 dowolnie usytuowane. Podzielimy je na elementy dF_1 i dF_2 . Na rysunku są wybrane dwa dowolnie położone elementy dF_1 i dF_2 powierzchni. Obliczymy strumień ciepła $d^2\dot{Q}_{1-2}$ wymieniony między tymi elementami, a następnie, całkując po powierzchni F_1 i F_2 , obliczymy całkowity strumień $\dot{Q}_{1-2}$ ciepła przekazanego przez promieniowanie od jednej powierzchni do drugiej.



Rys. 10.15. Powierzchnie dowolnie usytuowane

Zgodnie z (10.24) strumień emisji $d^2\dot{E}_{1-2}$ skierowany od elementu dF_1 powierzchni i trafiający w dF_2 przyjmuje postać wzoru:

$$d^2\dot{E}_{1-2} = \dot{e}_{n1} \cos \varphi_1 d\Omega_1 dF_1, \quad (10.52)$$

gdzie $d\Omega$ — bryłowy kąt widzenia wycinka dF_2 z miejsca na wycinku dF_1 ,

$$d\Omega_1 = \frac{dF_2 \cos \varphi_2}{r^2}. \quad (10.53)$$

Podobnie z wycinka dF_2 trafia wiązka emisji $d^2\dot{E}_{2-1}$ na element powierzchni dF_1 :

$$d^2\dot{E}_{2-1} = \dot{e}_{n2} \cos \varphi_2 d\Omega_2 dF_2, \quad (10.54)$$

gdzie $d\Omega_2$ — bryłowy kąt widzenia dF_1 z miejsca na wycinku dF_2 ,

$$d^2\Omega_2 = \frac{dF_1 \cos \varphi_1}{r^2}. \quad (10.55)$$

Z padającej na dF_2 wiązki d^2E_{1-2} emisji wycinek dF_2 powierzchni zaabsorbuje $A_2 d^2E_{1-2}$, a reszta odbita ulega rozproszeniu i nie wraca do dF_1 . Z wiązki d^2E_{2-1} wycinek dF_1 zaabsorbuje $A_1 d^2E_{2-1}$.

Strumień ciepła $d^2\dot{Q}_{1-2}$ przekazany przez promieniowanie z dF_1 do dF_2 ,

$$d^2\dot{Q}_{1-2} = A_2 d^2\dot{E}_{1-2} - A_1 d^2\dot{E}_{2-1}. \quad (10.56)$$

Po podstawieniu (10.52)–(10.55) do (10.56) i uporządkowaniu otrzymamy

$$d^2\dot{Q}_{1-2} = (A_2 \dot{e}_{n1} - A_1 \dot{e}_{n2}) \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{r^2} dF_1 dF_2. \quad (10.57)$$

Zgodnie z (10.32)

$$\dot{e}_{n1} = \frac{1}{\pi} \varepsilon_1 C_c \left(\frac{T_1}{100} \right)^4; \quad \dot{e}_{n2} = \frac{1}{\pi} \varepsilon_2 C_c \left(\frac{T_2}{100} \right)^4. \quad (10.58)$$

Jeśli (10.58) wstawimy do (10.57) i uwzględnimy, że $A_1 = \varepsilon_1$, $A_2 = \varepsilon_2$, możemy napisać

$$d^2Q_{1-2} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 C_c \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_1 dF_2. \quad (10.59)$$

Aby obliczyć strumień ciepła przekazany przez promieniowanie z płyty 1 do 2, różniczkowe równanie (10.59) należy podwójnie scałkować po F_1 i F_2 :

$$Q_{1-2} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 C_c \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \varphi_{1-2}, \quad (10.60)$$

gdzie

$$\varphi_{1-2} = \int_{F_2} dF_2 \int_{F_1} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_1. \quad (10.61)$$

φ_{1-2} nazywa się średnim współczynnikiem kątowym lub współczynnikiem konfiguracji.

W powszechnie stosowanych obliczeniach przyjmuje się, że

$$\varphi = \frac{1}{F} \int_{F_1} \int_{F_2} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_1 dF_2, \quad (10.62)$$

gdzie F jest tzw. powierzchnią obliczeniową (odniesienia). Może nią być F_1 albo F_2 , albo jeszcze inna powierzchnia. Wzór (10.60) przyjmuje wtedy postać

$$\dot{Q}_{1-2} = F \varepsilon_1 \varepsilon_2 C_c \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \varphi. \quad (10.63)$$

Jeśli za powierzchnię odniesienia przyjmiemy F_1 , to $\varphi = \varphi_{1-2}$, jeśli F_2 , to $\varphi = \varphi_{2-1}$; obowiązuje więc związek zwany prawem wzajemności

$$F_1 \varphi_{1-2} = F_2 \varphi_{2-1}. \quad (10.64)$$

Gdy za powierzchnię odniesienia przyjmiemy F_1 , wzór strumienia ciepła przekazany przez promieniowanie z płyty 1 na płytę 2 przyjmie postać

$$Q_{1-2} = F_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 C_c \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \varphi_{1-2}, \quad (10.65)$$

zaś

$$\varphi_{1-2} = \frac{1}{\pi F_1} \int_{F_2} \int_{F_1} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{r^2} dF_1 dF_2. \quad (10.66)$$

Współczynnik konfiguracji określony równaniem (10.66) można także zdefiniować jako

$$\varphi_{1-2} = \frac{\dot{E}_{1-2}}{\dot{E}_1}, \quad (10.67)$$

gdzie

$\dot{E}_{1-2}$ — część emisji własnej wypromieniowanej przez powierzchnię F_1 w kierunku F_2 ,
 $\dot{E}_1$ — emisja własna powierzchni F_1 .

$\dot{E}_{1-2}$ obliczamy z równania (10.52), które po uwzględnieniu (10.53) przyjmuje postać

$$d^2 \dot{E}_{1-2} = \dot{e}_{n1} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{r^2} dF_1 dF_2. \quad (10.68)$$

Po scałkowaniu według F_1 i F_2

$$\dot{E}_{1-2} = \dot{e}_{n1} \int_{F_2} \int_{F_1} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{r^2} dF_1 dF_2. \quad (10.69)$$

Ponieważ $E_1 = F_1 \dot{e}_1$, a zgodnie z (10.32) $\dot{e}_{n1} = \dot{e}_1/\pi$, więc

$$\frac{\dot{E}_{1-2}}{\dot{E}_1} = \frac{1}{\pi F_1} \int_{F_2} \int_{F_1} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{r^2} dF_1 dF_2 = \varphi_{1-2}, \quad (10.70)$$

co było do udowodnienia.

Jeżeli powierzchnię F_1 , oprócz F_2 otaczają jeszcze inne powierzchnie, tak że tworzą krąg zamknięty powierzchni (patrz rys. 10.16), to emisja wybranej z nich, np. F_1 , zostaje rozdzielona na tę samą powierzchnię, gdy F_1 jest powierzchnią wklęsłą, pozostała część zostaje natomiast rozdzielona na powierzchnie pozostałe. Słuszne więc jest równanie dla n powierzchni:

$$\frac{E_{1-1}}{E_1} + \frac{E_{1-2}}{E_1} + \frac{E_{1-3}}{E_1} + \dots + \frac{E_{1-n}}{E_1} = 1, \quad (10.71)$$

czyli

$$\varphi_{1-1} + \varphi_{1-2} + \varphi_{1-3} + \dots + \varphi_{1-n} = 1, \quad (10.72)$$

zwane prawem zamkniętości. Jeśli powierzchnia F_1 jest wypukła lub płaska, $\varphi_{1-1} = 0$.

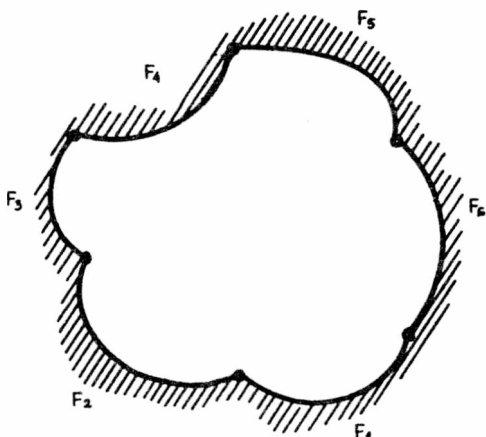
Istnieją różne metody [15, 19] obliczania lub wyznaczania współczynnika konfiguracji. Omówimy metodę optyczną i nitkową Polaka.

Rozpatrzmy najpierw dowolnie usytuowane elementy dF_1 i dF_2 (patrz rys. 10.17). Elementarny współczynnik konfiguracji

$$d\varphi_{1-2} = \frac{d^2 \dot{E}_{1-2}}{d\dot{E}_1} = \frac{\frac{\dot{e}}{\pi} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{r^2} dF_1 dF_2}{\dot{e} dF_1} = \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_2. \quad (10.73)$$

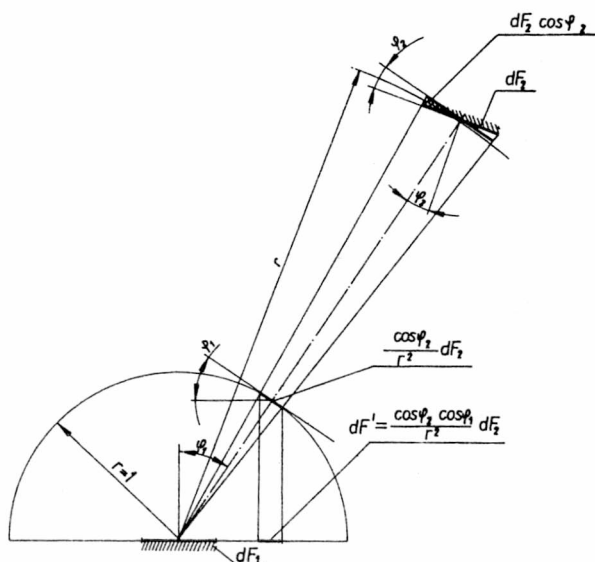
Na rysunku 10.17 wyznacza się graficznie $dF' = (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 / r^2) dF_2$ i zgodnie z (10.73) $d\varphi_{1-2} = dF'/\pi$.

Jeśli mamy do czynienia z powierzchniami całkowitymi F_1 i F_2 , dzielimy je na elementarne wycinki dF_1 i dF_2 . Dla jednego elementu dF_1 , powierzchni pierwszej,

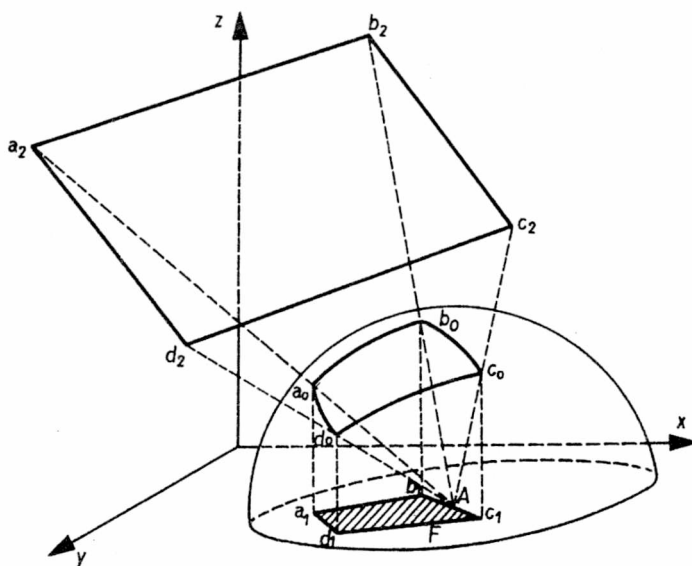


Rys. 10.16. Zamknięty krąg powierzchni

Rys. 10.17. Graficzne wyznaczenie współczynnika konfiguracji między powierzchniami dF_1 i dF_2



całkując po powierzchni F_2 , znajdujemy powierzchnię F jako zakreskowany rzut na rys. 10.18. $\varphi'_{1-2} = F/\pi$ jest stosunkiem otrzymanej powierzchni F do równej π powierzchni koła, którego $r = 1$ na płaszczyźnie xy .



Rys. 10.18. Wykreślne wyznaczenie współczynnika φ_{1-2}

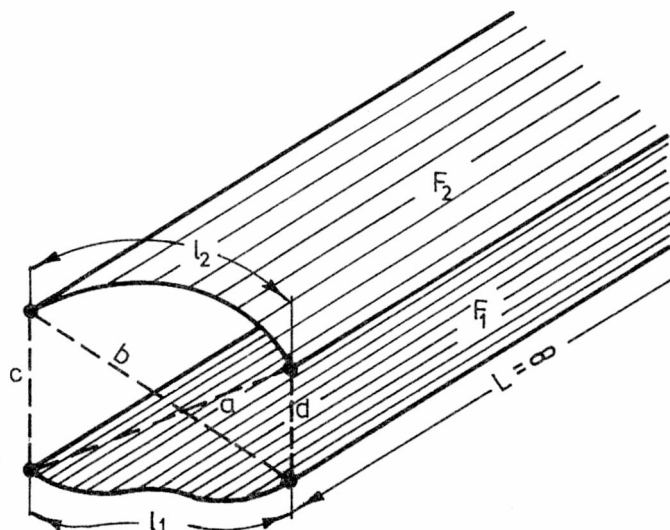
Zmieniając elementy dF_1 (całkując po F_1) wyznaczmy każdorazowo φ'_{1-2} . Po zsumowaniu otrzymanych wartości φ'_{1-2} i podzieleniu przez F_1 znajdziemy φ_{1-2} .

Stosowanie metody optycznej często jest jednak zbyt uciążliwe.

Dla wybranych usytuowań dwu powierzchni walcowych nieskończonych długości (w praktyce długich) Polak podaje prostą analityczną metodę obliczenia φ_{1-2} . Po zastąpieniu, brakujących do zamknięcia, powierzchni pomyślanymi płyszczyznami c i d oraz zastosowaniu prawa zamkniętości znalazł zależność:

$$\varphi_{1-2} = \frac{(a+b) - (c+d)}{2l_1}. \quad (10.74)$$

Metodę tę także zwie się metodą nitkową, gdyż odcinki a, b, c, d i l mierzy się naciągniętą nicią (rys. 10.19, np. dla wykonanego w skali układu rzeczywistego).



Rys. 10.19. Ilustracja do wzoru (10.74)

Dla powierzchni równoległych i zamykających się, omówionych w p. 10.1.2.2, współczynnik konfiguracji $\varphi_{1-2} = 1$. Po podstawieniu do (10.65) nie otrzymujemy jednak wzorów (10.48) ani (10.50). Dzieje się tak, ponieważ podczas wyprowadzania wzoru (10.65) pominęliśmy wtórne odbicia emisji jako nieistotne. W związku z tym niektórzy badacze Mc Adams, Hottel i inni proponują dla powierzchni dowolnie usytuowanych wzór

$$Q_{1-2} = \varphi_{1-2} C_e F_1 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (10.75)$$

w którym

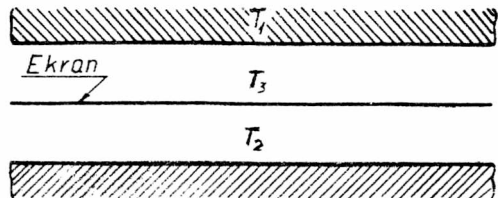
$$\varphi_{1-2} = \frac{1}{\frac{1}{\varphi_{1-2}} + \frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{F_1}{F_2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}. \quad (10.76)^*)$$

*) φ_{1-2} ujmuję także wpływ odbijających właściwości ścian bocznych poza F_1 i F_2 , jeśli takie istnieją.

Gdy $F_1 = F_2$, otrzymujemy wzór (10.48); gdy zaś $F_1 < F_2$ przy $\varphi_{1-2} = 1$, dochodzimy do wzoru Christiansena (10.50).

10.1.2.4. Ekrany

Stosowanie ekranów ma istotny wpływ na zmniejszenie przekazywania ciepła przez promieniowanie. Jeśli przyjąć jednakową zdolność emisyjną powierzchni F_1 , F_2 i ekranu, to wstawienie ekranu o tej samej emisyjności (patrz rys. 10.20) zmniejsza



Rys. 10.20. Ekran między promieniującymi powierzchniami

o połowę strumień ciepła. Zastosowanie n ekranów zmniejsza strumień $n + 1$ razy. Silniej zmniejszany jest strumień ciepła, jeśli $\varepsilon_1 > \varepsilon_{ek} < \varepsilon_2$, przy czym ε_{ek} oznacza zdolność emisyjną ekranu.

10.1.3. Promieniowanie słoneczne

W tabeli 10.12 podano gęstości strumienia emisji Słońca.

Tabela 10.12. Gęstość strumienia emisji Słońca na powierzchni Ziemi pod 40° szerokości geograficznej w jasny dzień, w W/m^2

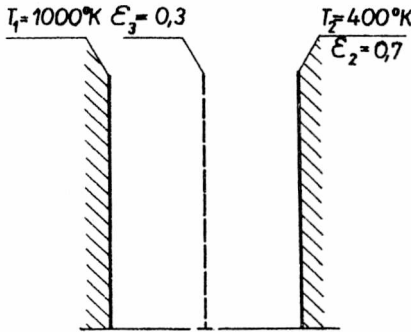
Godziny	Powierzchnia pionowa zwrócona			Powierzchnia pozioma
	na wschód	na południe	na zachód	
6 ⁰⁰	227	—	—	47
9 ⁰⁰	608	81	—	674
12 ⁰⁰	—	244	—	948
15 ⁰⁰	—	81	610	674
18 ⁰⁰	—	—	547	47

10.1.4. Przykłady obliczeniowe

Przykład 1. Dwie duże płaskie płyty blisko położone mają zdolności emisyjne $\varepsilon_1 = 0,8$ i $\varepsilon_2 = 0,7$ oraz temperatury $T_1 = 1000$ K i $T_2 = 400$ K. Obliczyć:

- gęstość strumienia ciepła przekazanego przez promieniowanie,
- gęstość strumienia jeśli między płytami jest wstawiony cienki ekran o jednakowej emisyjności obu stron $\varepsilon_{ek} = 0,3$.

Ze względu na bliskość położenia, płyty rozpatruje się jako równoległe, w których $F = \infty$ (rys. 10.21).



Rys. 10.21. Promieniujące powierzchnie równoległe ze wstawionym ekranem — szkic do obliczeń

Zgodnie ze wzorem (10.48)

$$\dot{q}_{1-2} = \varepsilon_z C_c \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right];$$

a) obliczenie gęstości strumienia:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{0.8} + \frac{1}{0.7}} = 0.604,$$

$$\dot{q}_{1-2} = 0.604 \cdot 5.67 \left[\left(\frac{1000}{100} \right)^4 - \left(\frac{400}{100} \right)^4 \right] = 33943 \text{ W/m}^2;$$

b) obliczenie gęstości strumienia $\dot{q}'_{1-2}$, gdy jest wstawiony ekran:
oznaczamy temperaturę ekranu przez T_e .

$$q_{1-e} = \varepsilon_{z1} C_c \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_e}{100} \right)^4 \right] \quad \text{— strumień liczony między płytą 1 a ekranem,}$$

$$q_{e-2} = \varepsilon_{z2} C_c \left[\left(\frac{T_e}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad \text{— strumień liczony między ekranem a płytą 2,}$$

$$q_{1-e} = q_{e-2} = q'_{1-2};$$

po porównaniu i wyeliminowaniu T_e otrzymamy

$$q'_{1-2} = \frac{\varepsilon_{z1} \cdot \varepsilon_{z2}}{\varepsilon_{z1} + \varepsilon_{z2}} C_c \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right],$$

$$\varepsilon_{z1} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_{ek}} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{0.8} + \frac{1}{0.3} - 1} = 0.279,$$

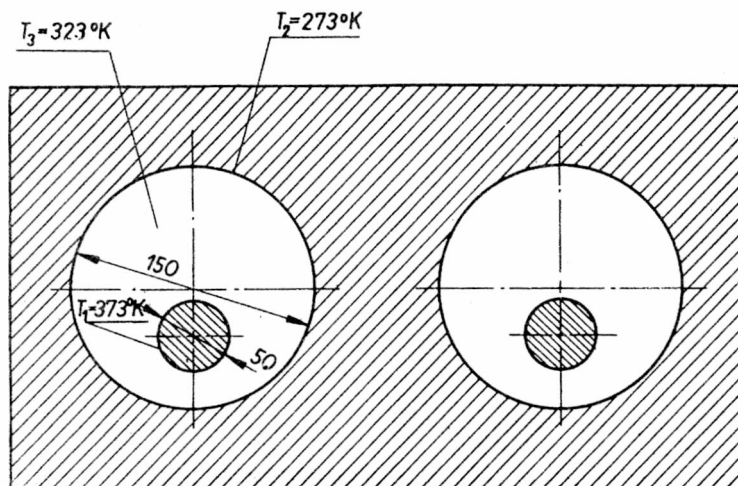
$$\varepsilon_{z2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_{ek}} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{0.3} + \frac{1}{0.7} - 1} = 0.266,$$

$$q'_{1-2} = \frac{0.279 \cdot 0.266}{0.279 + 0.266} 5.67 \left[\left(\frac{1000}{100} \right)^4 - \left(\frac{400}{100} \right)^4 \right] = 7642 \text{ W/m}^2.$$

Przykład 2. W betonowej kanalizacji kablowej o średnicy kanału 150 mm, emisyjności powierzchni $\varepsilon_2 = 0,8$ znajduje się kabel o zewnętrznej średnicy 50 mm i emisyjności $\varepsilon_1 = 0,9$.

Temperatura kabla podczas maksymalnego przepływu prądu wynosi 60°C , temperatura ściany kanału 5°C . Obliczyć:

- przekazany przez promieniowanie jednostkowy (na 1 mb) strumień $\dot{q}_j$ ciepła,
- współczynnik α promieniowania w przeliczeniu na powierzchnię kabla i kanału, jeśli temperatura powietrza w kanale wynosi 30°C (rys. 10.22).



Rys. 10.22. Umieszczenie kabli elektrycznych w kanalizacji kablowej – szkic do obliczeń

Wzór podstawowy (10.50)

$$\dot{Q}_{1-2} = F_1 \varepsilon_z C_c \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right],$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{F_1}{F_2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}; \quad F_1 < F_2,$$

a) obliczenie $\dot{q}_j$:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{\frac{1}{0,9} + \frac{\pi \cdot 0,05 \cdot L}{\pi \cdot 0,150 \cdot L} \left(\frac{1}{0,8} - 1 \right)} = 0,798$$

$$\dot{q}_j = 0,05 \cdot 1 \cdot 0,798 \cdot 5,77 \left[\left(\frac{333,2}{100} \right)^4 - \left(\frac{278,2}{100} \right)^4 \right] = 56,5 \text{ W/mb}$$

b) obliczenie α_r promieniowania:

– dla powierzchni kabla

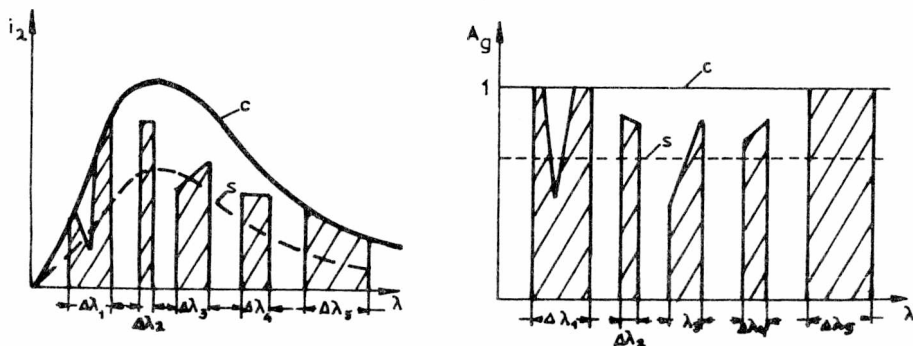
$$\alpha_{r,1} = \frac{\dot{Q}_{1-2}}{F_1 (t - t_a)} = \frac{56,5}{\pi \cdot 0,05 \cdot 1 (60 - 30)} = 12 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K},$$

– dla powierzchni kanału

$$\alpha_{r,2} = \frac{\dot{Q}_{1-2}}{F_2 (t - t_a)} = \frac{56,5}{\pi \cdot 0,150 \cdot 1 (30 - 5)} = 4,8 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}.$$

10.2. Promieniowanie gazów

Gazy promieniają tylko w pewnych zakresach długości fal; promieniowanie ich jest selektywne (rys. 10.23). Dalszą różnicę między gazami a ciałami stałymi i ciekłymi stanowi to, że gazy promieniają w całej swojej objętości, podczas gdy większość ciał



Rys. 10.23. Ilustracja intensywności promieniowania i_λ i zdolności absorpcyjnej A_g gazów na tle promieniowania ciała doskonale czarnego C i szarego S

stałych i cieczy tylko na powierzchni. Każdy promieniający gaz zawiera charakterystyczne widmo promieniowania. Na podstawie analizy spektralnej można określić skład promieniającej mieszaniny gazów, np. dwutlenek węgla wysyła emisję w pasmach długości fali

od $\lambda_1 = 2,36 \mu\text{m}$ do $\lambda'_1 = 3,02 \mu\text{m}$; $\Delta\lambda_1 = 0,66 \mu\text{m}$,

od $\lambda_2 = 4,01 \mu\text{m}$ do $\lambda'_2 = 4,80 \mu\text{m}$; $\Delta\lambda_2 = 0,79 \mu\text{m}$,

od $\lambda_3 = 12,5 \mu\text{m}$ do $\lambda'_3 = 16,5 \mu\text{m}$; $\Delta\lambda_3 = 4,0 \mu\text{m}$.

Gaz absorbuje padającą nań emisję jedynie w tych zakresach długości fali, w których sam emituje, w pozostałych długościach fali jest doskonale przezroczysty. Na zdolność absorpcyjną danego gazu wpływa grubość jego warstwy i zawartość w nim cząstek danego gazu, którą zwykle określa się wielkością ciśnienia cząstkowego. Gdy chodzi o promieniowanie selektywne, zdolność absorpcyjną określa się wzorem

$$A_\lambda = \frac{E_\lambda}{E_{\lambda c}} = \frac{I_\lambda}{I_{\lambda c}} = f(T_g, pl), \quad (10.77)^*)$$

w którym

p — ciśnienie cząstkowe gazu promieniającego,

l — grubość warstwy gazu,

T_g — temperatura gazu.

Należy zwrócić uwagę, że zdolność emisyjna ε_g gazu nie równa się zdolności absorpcyjnej A_g .

*) Operuje się zawsze iloczynem pl .

Jeśli chodzi o emisję gazów jedno- i dwuatomowych, to zakresy w których one emitują są tak wąskie, że gdy interesuje nas tzw. promieniowanie energetyczne, czyli ilość wypromieniowanej emisji, wówczas możemy ją pominąć. Uwzględniamy w obliczeniach emisję gazów trój- i więcej atomowych.

Emisja różnych gazów zależy od różnych temperatur, np. CO_2 emituje z potęgą $T^{3,5}$, para wodna z potęgą T^3 .

W celu ujednolicenia obliczeń przyjmuje się obecnie, że emisja wszystkich gazów

$$E_g = \varepsilon_g C_c \left(\frac{T_g}{100} \right)^4, \quad (10.78)$$

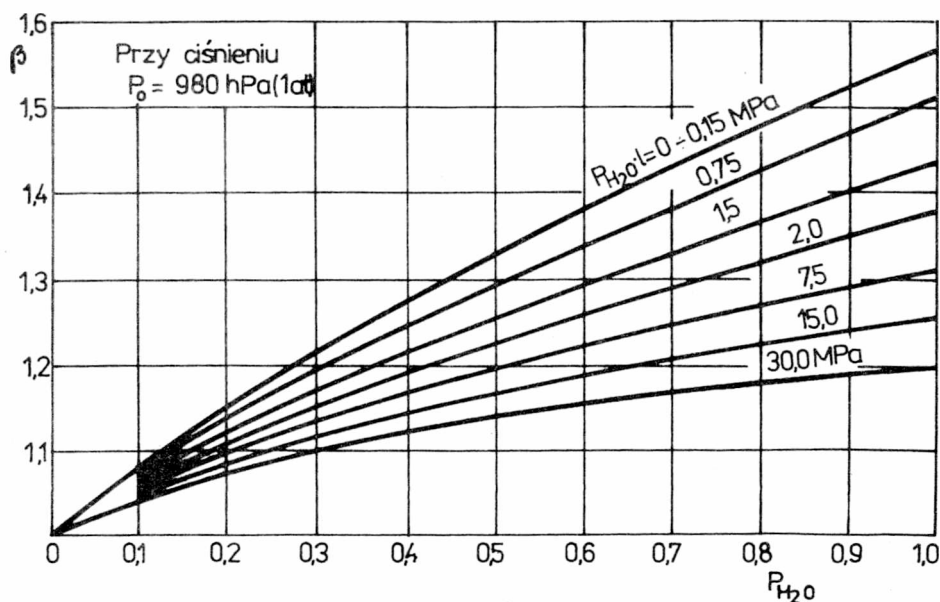
odstępstwa zaś są uwzględnione w zdolności emisyjnej ε_g gazu, czyli

$$\varepsilon_g = f(T, pl).$$

10.2.1. Wzory obliczeniowe dla promieniujących gazów

Strumień ciepła przekazany przez promieniowanie na jednostkę powierzchni, tj. gęstość strumienia ciepła między promieniującą bryłą gazów a ścianą otaczającą tę bryłę oblicza się ze wzoru

$$\dot{q}_{g-s} = \varepsilon'_s C_c \left[\varepsilon_g \left(\frac{T_g}{100} \right)^4 - A_g \left(\frac{T_s}{100} \right)^4 \right], \text{ W/m}^2, \quad (10.80)$$



Rys. 10.24. Poprawka β uwzględniająca większe stężenie pary wodnej w mieszaninie gazów o ciśnieniu całkowitym 980 hPa

w którym

$\varepsilon'_s = (\varepsilon_s + 1)/2$ – efektywna zdolność emisyjna ściany (gdy $\varepsilon_s = 0,8-1$),

$\varepsilon_g = \varepsilon_{\text{CO}_2} + \beta \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} - \Delta \varepsilon_g$ – zdolność emisyjna gazu,

β – poprawka uwzględniająca większe stężenia pary H_2O (z rys. 10.24 lub 10.25),

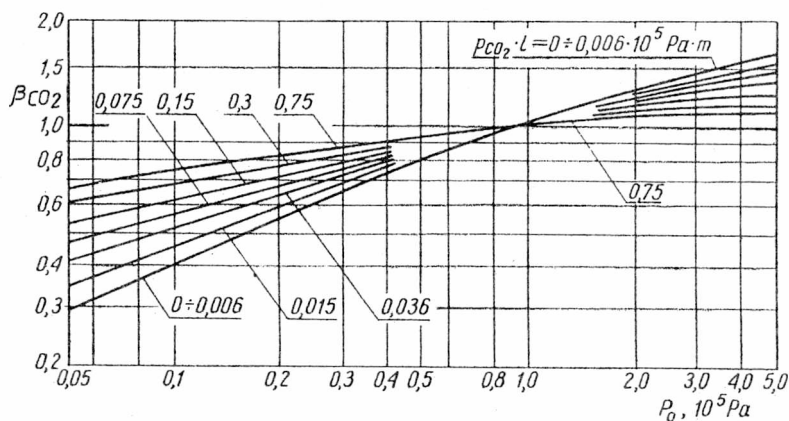
$\Delta \varepsilon_g$ – poprawka uwzględniająca wzajemne pochłanianie emisji różnych gazów promieniujących, gdy pasemka częściowo się nakładają (z rys. 10.26),

T_g, T_s – temperatury odpowiednio gazu i ściany,

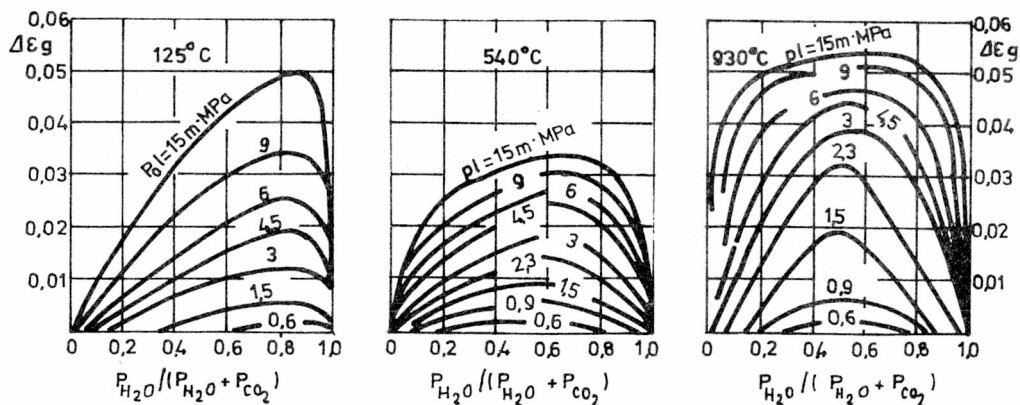
$A_g = \varepsilon_{\text{CO}_2} \left(\frac{T_g}{T_s} \right)^{0,65} + \beta \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} - \Delta \varepsilon_g$ – zdolność absorpcyjna gazu,

$\varepsilon_{\text{CO}_2}$ – z rys. 10.27,

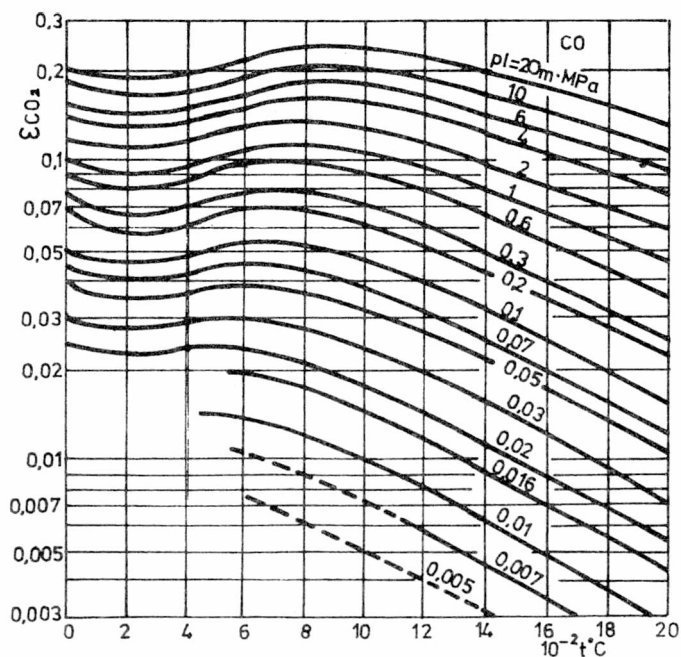
$\varepsilon_{\text{H}_2\text{O}}$ – z rys. 10.28.



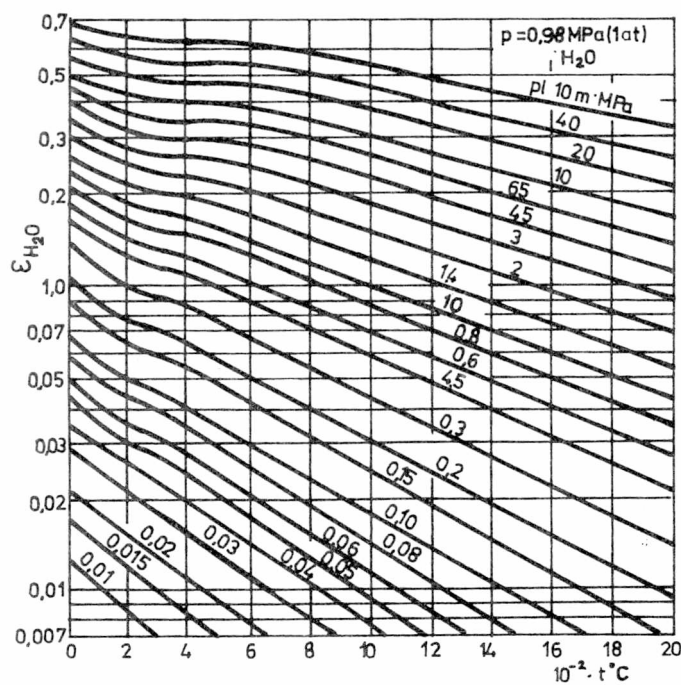
Rys. 10.25. Poprawka β_{CO_2} dla ciśnienia całkowitego, różnego od 980 hPa



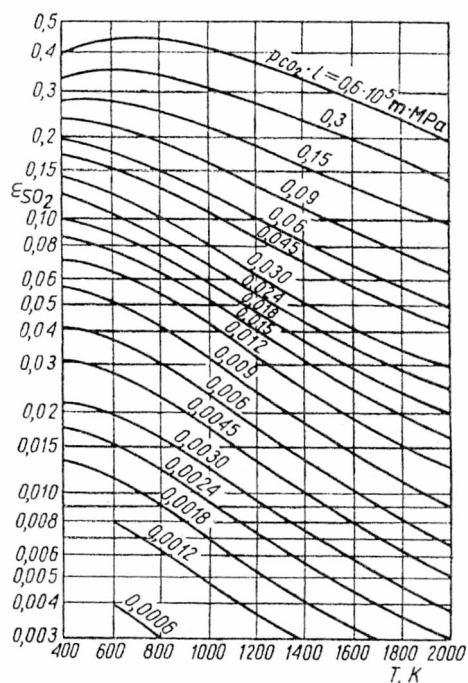
Rys. 10.26. Poprawka $\Delta \varepsilon_g$ dla promieniujących mieszanin pary wodnej i dwutlenku węgla



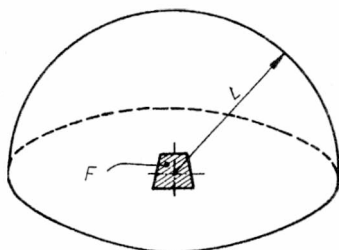
Rys. 10.27. Zdolność ϵ_{CO_2} emisyjna promieniującego CO_2



Rys. 10.28. Zdolność $\epsilon_{\text{H}_2\text{O}}$ emisyjna promieniującej pary wodnej



Rys. 10.29. Zależność emisyjna $\varepsilon_{\text{SO}_2}$ promieniującego gazu SO_2



Rys. 10.30. Opromienianie powierzchni F przez bryłę gazu grubości l

Dla niedużych, zwykle spotykanych w praktyce wartości iloczynu pl , zastępcza grubość l bryły gazu jest około 15% mniejsza od wyliczonych ze wzoru (10.81)

Tabela 10.3. Zastępcza grubość l_z warstwy gazu z uwzględnieniem poprawki dla spotykanych przeciętnie wartości pl

Lp.	Kształt bryły gazu	l_z
1	Kula o średnicy d	0,60 d
2	Sześcian o krawędzi a	0,60 a
3	Walec nieskończenie długi o średnicy d	0,90 d
4	Walec wysokości równej średnicy d – opromienianie ściany bocznej	0,60 d
5	Walec wysokości równej średnicy d – opromienianie na środek podstawy	0,77 d
6	Płaska nieograniczona warstwa grubości δ	1,8 δ

Niewielkie ilości SO_2 w gazie, co występuje w spalinach, można uwzględnić jako $P'_{\text{CO}_2} = P_{\text{CO}_2} + P_{\text{SO}_2}$ i korzystać z wykresu ilustrującego $\varepsilon_{\text{CO}_2}$. Gdy zawartość SO_2 jest większa, ε_g i A_g należy obliczyć z uwzględnieniem $\varepsilon_{\text{SO}_2}$ z wykresu 10.29 (dodając $\varepsilon_{\text{SO}_2}$ do ε_g i A_g).

Omówienia wymaga jeszcze grubość warstwy gazu, która zależy od kształtu bryły. Wzór (10.80) odnosi się do powierzchni (ściany) opromienianej przez półkolistą bryłę gazu o promieniu l (patrz rys. 10.30). Inne kształty bryły gazu sprowadza się do zastępczej grubości l_z równej promieniowi bryły półkolistej o tej samej objętości

$$l_z = \frac{4V}{F}, \quad (10.81)$$

gdzie V , F – objętość bryły gazu i jej powierzchnia zewnętrzna.

10.3. Promieniowanie płomienia świecącego

Płomień świecący jest promieniującym płomieniem gazowym z zawiesiną drobnych cząstek stałych — jest promieniującym solgazem.

Drobne cząstki stałe w płomieniu to: sadza, pył węglowy, popiół, lotny koksik i inne. Sadza wydziela się podczas rozpadu węglowodorów w płomieniu. Drobne cząstki popiołu i lotnego koksiku są porywane ciągiem kominowym z rusztu, pył węglowy jest podawany jako paliwo do palenisk pyłowych.

W wysokiej temperaturze płomienia cząstki stałe, zanim ulegną zgazowaniu, wzmagają emisję promieniując we wszystkich zakresach fal. Gorące gazy znajdujące się w płomieniu emitują selektywnie.

Płomień świecący sprawia wrażenie nieprzezroczystej bryły, jakby promieniującego ciała stałego; ma zwykle barwę żółtopomarańczową (zależną od temperatury płomienia).

Płomień nie świecący jest bryłą gazową promieniującą w pewnych tylko zakresach długości fal; zwykle jest on przejrzysty (nie ma w nim cząstek stałych). Płomień spalanych paliw, zawierających większe ilości węglowodorów, jest zawsze świecący.

Strumień ciepła przekazany od świecącego płomienia do ścianki można obliczyć według wzoru

$$\dot{Q}_{pl-s} = \varepsilon_s \varepsilon_{pl} C_c F_s \left[\left(\frac{T_{pl}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_s}{100} \right)^4 \right], \quad (10.82)$$

w którym

F_s, ε_s, T_s — odpowiednio powierzchnia opromieniowanej ściany, zdolność emisyjna ściany, temperatura ściany,

ε_{pl}, T_{pl} — odpowiednio zdolność emisyjna płomienia i temperatura płomienia.

Zdolność emisyjną płomienia, w zależności od stosowanych paliw, należy przyjmować według tab. 10.4.

Tabela 10.4. Zdolność emisyjna płomienia

Lp.	Rodzaj płomienia i paliwa	ε_{pl} zdolność emisyjna płomienia
1	Nie świecący płomień gazowy i płomień antracytu	0,40
2	Płomień pyłu antracytu	0,45
3	Płomień węgla kamiennego chudego	0,60
4	Płomień węgla kamiennego gazującego, węgla brunatnego i torfu	0,70
5	Płomień mazutu	0,85

Wzór (10.82) jest znany od dawna, ma prostą budowę i służy do określania emisji płomienia.

Jeśli zmienia się temperatura płomienia w palenisku nad rusztem i u wylotu, należy do (10.82) wstawić średnią wartość temperatury wyliczoną ze wzoru

$$T_{pl} = \sqrt{T_p T_k}, \quad (10.83)$$

w którym

T_p — temperatura płomienia w palenisku nad rusztem,

T_k — temperatura spalin u wylotu z komory paleniskowej.

Do obliczenia powierzchni paleniska opromieniowanego Gurwicz i Konakow [19] podają uogólnione wzory oparte na analizie równań procesów spalania. W równaniach tych występują liczby znamienne, charakterystyczne dla tych procesów.

Wzór Gurwicza ma postać:

$$F_s = \frac{\mu \dot{B} W_d \eta_p}{\varepsilon C_c T_p^3 T_K} \sqrt{\left(\frac{T_p}{T_K} - 1\right)^2} \quad (10.84)$$

gdzie

$\dot{B}$ — strumień spalonego paliwa,

W_d — wartość opałowa paliwa,

μ — stosunek ilości ciepła przekazanego do powierzchni opromieniowanych w kotle do ciepła uzyskanego ze spalania paliwa,

η_p — sprawność paleniska (zwykle 0,9–0,97),

C_c — stała promieniowania ciała doskonale czarnego,

T_p — temperatura płomienia nad rusztem,

T_K — temperatura płomienia u wylotu z opromieniowanej komory paleniskowej,

ε — zdolność emisyjna opromieniowanej komory paleniskowej.

Wzór ten po wprowadzeniu liczby znamiennej Bo — Boltzmanna przyjmuje postać

$$\frac{T_K}{T_p} = \frac{Bo^{0,6}}{1 + Bo^{0,6}} \quad (10.85)$$

gdzie

$Bo = \dot{B} V c_p / C_c \varepsilon F_s T_p^3$ liczba znamienna Boltzmanna,

V — objętość spalin otrzymanych z jednostki paliwa,

$V c_p$ — pojemność cieplna spalin uzyskanych z jednostki paliwa.

Zakładając, że istnieje podobieństwo pól temperatury w paleniskach Konakow [19] otrzymał wzór uogólniony dla palenisk w postaci

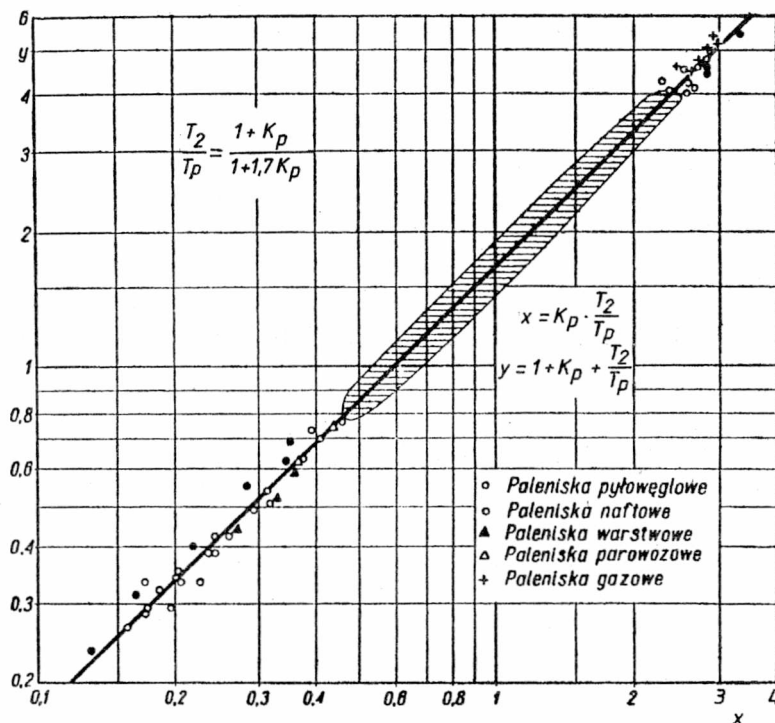
$$\frac{T_K}{T_p} = \frac{1 + K_p}{1 + 1,7 K_p} \quad (10.86)$$

gdzie

K_p — liczba podobieństwa dla palenisk opromieniowanych

$$K_p = \frac{C_c \left(\frac{T}{100}\right)^3 F_s}{B V c_p} \quad (10.87)$$

która jest proporcjonalna do odwrotności liczby Boltzmanna.



Rys. 10.31. Badania różnych palenisk $y = f(x)$
 $y = 1 + K_p + T_2/T_1$ i $x = K_p \cdot T_2/T_1$

Wzór 10.86 o tyle jest wygodniejszy w stosowaniu, że nie jest potrzebna znajomość zdolności emisyjnej opromieniowanych ścian paleniska (zawarta w podobieństwie). Sprawdzony eksperymentalnie błąd wynikający ze wzoru Konakowa nie przekracza 8% (patrz rys. 10.31).

11. Przewodzenie ciepła (część II) wybrane zagadnienia analityczne

11.1. Nieustalone przewodzenie ciepła w ciałach z wewnętrznymi źródłami ciepła

Jeżeli w substancjach przekazujących ciepło zachodzą termiczne reakcje chemiczne lub jądrowe, przepływa prąd elektryczny przy istniejącym oporze substancji lub występuje tarcie, to w wyniku tych działań pojawia się ciepło, które w obliczeniach traktujemy jako pochodzące ze źródeł. Zależnie od sytuacji rozmieszczenie źródeł ciepła może być różne. Mogą to być źródła punktowe rozmieszczone dowolnie lub zaprogramowane, źródła płaskie lub objętościowe. Ich wydajność może być stała lub zmienna.

W wyniku działania źródeł temperatura ciała zostaje dodatkowo podwyższona. W celu sprawdzenia czy nie zostają przekroczone dla danego materiału temperatury dopuszczalne lub w innych celach wyznacza się profil temperatury i określa temperaturę maksymalną. Dane te są konieczne np. do właściwego zaprojektowania wielkości i kształtu elementów reaktorów jądrowych itp.

Przewodzenie ciepła w ciałach z wewnętrznymi źródłami ciepła ujmuje równanie (7.26), które dla nieustalonego przewodzenia w ciałach stałych, w których $w_x = w_y = w_z = 0$, przyjmuje postać

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = a \nabla^2 t + \frac{\dot{q}_r}{c_p \rho}, \quad (11.1)^*)$$

gdzie

∇^2 — operator różniczkowy Laplace'a,

$\dot{q}_r$ — wydajność źródeł ciepła,

$a = \lambda / c_p \rho$ — współczynnik wyrównywania temperatury.

*) Równanie (11.1) we współrzędnych walcowych (r, x, φ) przyjmuje postać

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{\dot{q}_r}{c_p \rho}; \quad (a)$$

w zapisie wektorowym:

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = a \operatorname{div} \operatorname{grad} T + \frac{\dot{q}_r}{c_p \rho}. \quad (b)$$

Rozwiązanie równania (11.1) prowadzi do znalezienia funkcji

$$\vartheta = \vartheta(x, y, z, \tau) \quad (11.1a)$$

tj. temperatury w każdym punkcie rozpatrywanego obszaru w czasie. Rozwiązanie to w postaci ogólnej ma być rozwiązaniem całki, ze szczegółowymi wartościami stałych całkowania. Aby to uzyskać, należy dla równania (11.1) określić warunek początkowy i warunki brzegowe.

Są różne metody rozwiązywania zagadnień brzegowych równania (11.1) przewodzenia ciepła, tj. znalezienia całki ogólnej lub szczegółowej. Są to metody analityczne i przybliżone numeryczne oraz wykresne. Stosunkowo najprostsze są rozwiązania, gdy warunki początkowy i brzegowy są funkcjami jednorodnymi. Kiedy są one podane jako niejednorodne, to przez odpowiednie podstawienie sprowadza się je do funkcji jednorodnych. Stosowane analityczne metody rozwiązań podał już Fourier (1882). Z innych metod należy wymienić rozdzielanie zmiennych, wierne odwzorowanie, stosowanie funkcji Greena, przekształcenie całkowite Laplace'a, Fouriera, Melina i Hankela. Literatura dotycząca wymienionych metod analitycznych jest bardzo obszerna i zainteresowani znajdą odpowiednie dane w pracach Carlsława-Jegera [2], Łykowa [15], Gröbera [5], Schneidera [26], Gduli [4] i in.

11.1.1. Warunek początkowy i warunki brzegowe

Warunek początkowy określa rozkład temperatury w rozpatrywanym obszarze w określonym czasie, najczęściej w chwili początkowej lub końcowej.

Warunki brzegowe mogą określać:

a) temperaturę na powierzchni ciała (może być podana liczbowo lub funkcyjnie) – jest to tzw. warunek brzegowy **pierwszego rodzaju**, zwany też warunkiem brzegowym Dirichleta;

b) strumień ciepła przekazywany na powierzchni S zewnętrznej rozpatrywanego obszaru; jest to warunek brzegowy **drugiego rodzaju**, zwany też warunkiem Neumanna

$$\dot{q}_S = \lambda \left(\frac{d\vartheta}{dn} \right)_S \quad (11.2)$$

c) temperaturę otoczenia i warunki przejmownia ciepła na powierzchni zewnętrznej S obszaru

$$-\lambda \left(\frac{d\vartheta}{dn} \right)_S = \alpha(\vartheta_S - t_o) \quad (11.3)$$

jest to tzw. warunek brzegowy **trzeciego rodzaju**, zwany warunkiem brzegowym Fouriera;

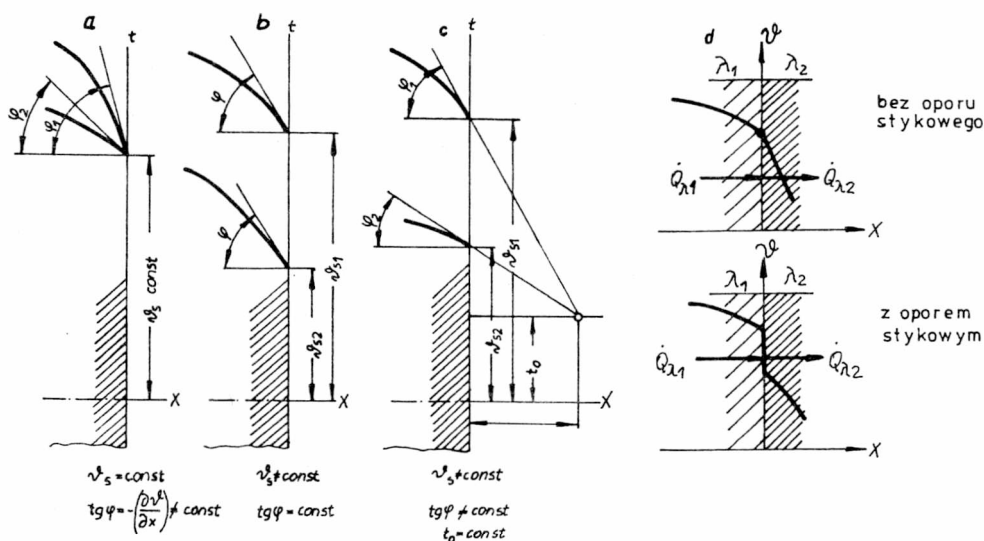
d) równość strumienia ciepła przewodzonego na granicy warstw

$$\lambda_1 \left(\frac{d\vartheta}{dn} \right)_1 = \lambda_2 \left(\frac{d\vartheta}{dn} \right)_2; \quad (11.4)$$

jest to tzw. **czwarty warunek brzegowy**.

Jeżeli styk warstw nie jest dokładny, to może występować tzw. opór cieplny stykowy.

Ilustracją graficzną warunków brzegowych jest rysunek 11.1.



Rys. 11.1. Ilustracja graficzna warunków brzegowych: a – pierwszego, b – drugiego, c – trzeciego, d – czwartego rodzaju

11.1.2. Ustalone przewodzenie w płycie płaskiej

W wypadku ustalonego przewodzenia $d\vartheta/d\tau = 0$ (rys. 11.1); w płycie płaskiej przewodzenie jest jednoosiowe.

Równanie (11.1) przyjmie postać

$$a \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = -\frac{\dot{q}_r}{c_p \rho}. \quad (11.5)$$

Jeżeli wprowadzimy zmienną $\Theta = \vartheta - t_o$ (patrz rys. 11.2), to $d\vartheta = d\Theta$; po podstawieniu $a = \lambda/c_p \rho$ i uproszczeniu

$$\frac{d^2 \Theta}{dx^2} = -\frac{q_r}{\lambda}. \quad (11.6)$$

Całka z (11.4)

$$\frac{d\Theta}{dx} = -\frac{\dot{q}_r}{\lambda}x + C_1. \quad (11.7)$$

Ze względu na symetrię I warunek brzegowy dla $x = 0$, $d\Theta/dx = 0$, czyli stała całkowania $C_1 = 0$.

W wyniku drugiego całkowania otrzymujemy

$$\Theta = -\frac{\dot{q}_r}{2}x^2 + C_2, \quad (11.8)$$

gdzie C_2 — stała całkowania, którą należy wyznaczyć z II warunku brzegowego: $x = \delta_p$, $\Theta = \Theta_p = \vartheta_p - t_o$.

Ciepło $\dot{Q}_p$ przewodzone przez powierzchnię skrajną (dla $x = \delta_p$) musi być przejęte do otoczenia

$$\dot{Q}_p = -F\lambda\left(\frac{d\Theta}{dx}\right)_p = F\alpha\Theta_p, \quad (11.9)$$

stąd

$$\Theta_p = -\frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{d\Theta}{dx}\right)_p. \quad (11.10)$$

Zgodnie z (11.4) dla $x = \delta_p$, gdy $C_1 = 0$, otrzymujemy:

$$\left(\frac{d\Theta}{dx}\right)_p = -\frac{\dot{q}_r}{\lambda}\delta_p. \quad (11.11)$$

Po wstawieniu (11.11) do (11.10) II warunek brzegowy dla $x = \delta_p$ przyjmie postać

$$\Theta = \Theta_p = -\frac{\dot{q}_r}{\alpha}\delta_p, \quad (11.12)$$

po jego wykorzystaniu w (11.8) możemy napisać

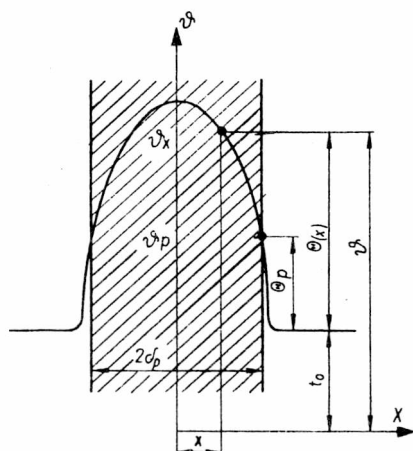
$$\Theta_p = -\frac{\dot{q}_r}{\alpha}\delta_p = -\frac{\dot{q}_r}{2\lambda}\delta_p^2 + C_2 \quad (11.13)$$

i wyznaczyć stałą całkowania

$$C_2 = \frac{\dot{q}_r}{2\lambda}\delta_p^2 - \frac{\dot{q}_r}{\alpha}\delta_p. \quad (11.14)$$

Równanie określające nadwyżkę temperatury w dowolnym przekroju x ściany nad temperaturą otoczenia ma postać paraboliczną; po wstawieniu (11.14) do (11.8) i uporządkowaniu:

$$\Theta = \frac{\dot{q}_r}{2\lambda}(\delta_p^2 - x^2) + \frac{\dot{q}_r}{\alpha}\delta_p. \quad (11.15)$$



Rys. 11.2. Rozkład temperatury w ścianie płaskiej z wewnętrznymi źródłami ciepła: δ_p — połowa grubości ściany

Temperatura w dowolnym przekroju przegrody

$$\vartheta = \frac{\dot{q}_r}{2\lambda}(\delta_p^2 - x^2) + \frac{\dot{q}_r}{\alpha}\delta_p + t_o. \quad (11.16)$$

Maksymalną temperaturę $\vartheta_{\max}$ w przegrodzie obliczymy wówczas, gdy wstawimy $x = 0$

$$\vartheta_{\max} = \frac{\dot{q}_r}{2\lambda}\delta_p^2 + \frac{\dot{q}_r}{\alpha}\delta_p + t_o. \quad (11.17)$$

11.1.3. Ustalony przewodzenie ciepła w pręcie walcowym

Przypadek ten wygodniej rozpatrywać we współrzędnych walcowych r, ϑ, φ . Jeżeli pręt jest dostatecznie długi, a temperatura otoczenia jest stała, to temperatura ϑ zależy tylko od zmiennej r . Równanie (11.1) zapisane we współrzędnych walcowych przyjmuje postać

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{d\vartheta}{dr} \right) + \frac{\dot{q}_r}{c_p \rho}. \quad (11.18)$$

W wypadku ustalonego przewodzenia $d\vartheta/d\tau = 0$, możemy więc napisać

$$a \left(\frac{1}{r} \frac{d\vartheta}{dr} + \frac{d^2\vartheta}{dr^2} \right) + \frac{\dot{q}_r}{c_p \rho} = 0 \quad (11.19)$$

lub, gdy oznaczymy $\Theta = \vartheta - t_o$, $d\vartheta = d\Theta$,

$$a \left(\frac{1}{r} \frac{d\Theta}{dr} + \frac{d^2\Theta}{dr^2} \right) + \frac{\dot{q}_r}{c_p \rho} = 0; \quad (11.20)$$

jeśli podstawimy $d\Theta/dr = z$, to otrzymamy

$$a \left(\frac{1}{r} z + \frac{dz}{dr} \right) + \frac{\dot{q}_r}{c_p \rho} = 0, \quad (11.21)$$

po pomnożeniu obustronnym przez $(rdr)/a$,

$$zdr + rdz + \frac{\dot{q}_r}{\lambda} r dr = 0. \quad (11.22)$$

Gdy przyjmiemy nową zmienną $u = rz$, wówczas $zdr + rdz = du$, czyli

$$du = -\frac{\dot{q}_r}{\lambda} r dr. \quad (11.23)$$

Całka obustronna

$$u = -\frac{\dot{q}_r}{2\lambda} r^2 + C_1, \quad (11.24)$$

gdzie C_1 — stała całkowania; $u = rz$, $z = d\Theta/dr$.

Zatem

$$r \frac{d\Theta}{dr} = -\frac{\dot{q}_r}{2\lambda} r^2 + C_1, \quad (11.25)$$

a po podzieleniu przez r ,

$$\frac{d\Theta}{dr} = -\frac{\dot{q}_r}{2\lambda} r + \frac{C_1}{r}. \quad (11.26)$$

Po powtórным scałkowaniu

$$\Theta = -\frac{\dot{q}_r}{4\lambda} r^2 + C_1 \ln r + C_2. \quad (11.27)$$

Z warunku symetrii wynika I warunek brzegowy: gdy $r = 0$, to $d\Theta/dr = 0$. Wynika z tego, że $C_1 = 0$ (rys. 11.3), czyli (11.27) przyjmie postać

$$\Theta = -\frac{\dot{q}_r}{4\lambda} r^2 + C_2, \quad (11.28)$$

$$\frac{d\Theta}{dr} = -\frac{\dot{q}_r}{2\lambda} r. \quad (11.29)$$

Na zewnętrznej powierzchni pręta przewodzony strumień ciepła musi być przekazany do otoczenia. Zgodnie z (11.9) na powierzchni skrajnej

$$\Theta_p = -\frac{\lambda}{\alpha} \left(\frac{d\Theta}{dr} \right)_p. \quad (11.30)$$

Gdy $r = r_z$, $(d\Theta/dr)_p$, wówczas zgodnie z (11.29)

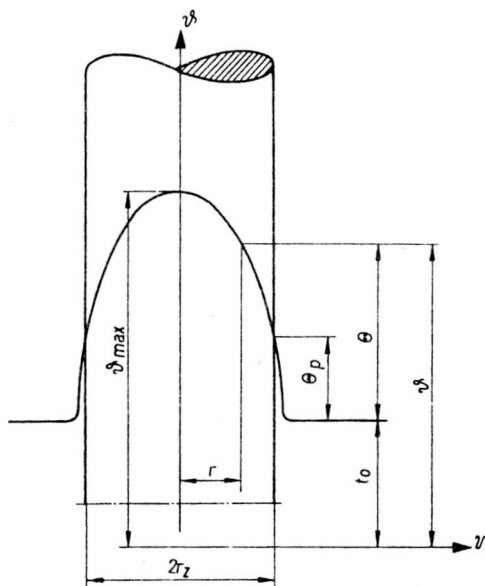
$$\left(\frac{d\Theta}{dr} \right)_p = -\frac{\dot{q}_r}{2\lambda} r_z, \quad (11.31)$$

czyli na zewnętrznej powierzchni

$$\Theta_p = \frac{\dot{q}_r}{2\alpha} r_z. \quad (11.32)$$

Stałą C_2 wyznaczymy z (11.28) za pomocą II warunku brzegowego w postaci: gdy $r = r_z$, wówczas $\Theta = \Theta_p$

$$\Theta_p = \frac{\dot{q}_r}{2\alpha} r_z = -\frac{\dot{q}_r}{4\lambda} r_z^2 + C_2, \quad (11.33)$$



Rys. 11.3. Rozkład temperatury w przecie z wewnętrznymi źródłami ciepła – stan ustalony

stąd

$$C_2 = \frac{\dot{q}_r}{4\lambda} r_z^2 + \frac{\dot{q}_r}{2\alpha} r_z. \quad (11.34)$$

Po wstawieniu (11.34) do (11.28) otrzymamy

$$\Theta = \frac{\dot{q}_r}{4\lambda} (r_z^2 - r^2) + \frac{\dot{q}_r}{2\alpha} r_z. \quad (11.35)$$

Ponieważ $\Theta = \vartheta - t_o$, więc otrzymamy

$$\vartheta = \frac{\dot{q}_r}{4\lambda} (r_z^2 - r^2) + \frac{\dot{q}_r}{2\alpha} r_z + t_o. \quad (11.36)$$

Jest to wzór określający temperaturę w zależności od współrzędnej r . Profil temperatury jest paraboloidą.

Maksymalna temperatura $\vartheta_{\max}$ wystąpi w osi pręta, tj. dla $r = 0$,

$$\vartheta_{\max} = \frac{\dot{q}_r}{4\lambda} r_z^2 + \frac{\dot{q}_r}{2\alpha} r_z + t_o. \quad (11.37)$$

11.1.4. Źródła ciepła w ośrodku półnieskończonym

Wyobraźmy sobie znajdujące się na głębokości h źródło ciepła umieszczone w ośrodku półnieskończonym o współczynniku przewodzenia λ , np. kabel elektryczny zakopany poziomo w ziemi na głębokości h . Załóżmy, że źródło znajduje się na tyle głęboko, że można przyjąć temperaturę powierzchni ośrodka półnieskończonego za stałą (temperatura t_o powierzchni ziemi). Interesuje nas temperatura ϑ_z źródła, jeżeli znamy jego wydajność (ważne np. do sprawdzenia wytrzymałości izolacji) lub, gdy znamy temperaturę źródła i jego wydajność^{*)}. Zagadnienie to rozwiązuje się metodą źródeł i upustów^{**)} podaną już w 1880 r. przez Thomsona. Można ją zastosować do źródła punktowego lub liniowego. Tym drugim przypadkiem jest długi kabel zakopany poziomo w ziemi.

Założmy, że rozważane źródło ciepła, umieszczone w ośrodku półnieskończonym, jest dodatnie. Należy sobie wówczas wyobrazić drugi półnieskończony ośrodek o tym samym λ , w którym jest symetrycznie położony upust o wydajności równej lecz przeciwnego znaku. Wymiary upustu są takie same jak wymiary źródła.

^{*)} Gdy znamy prąd elektryczny płynący przez kabel i jego oporność, możemy określić wydajność liniowego źródła ciepła jako ciepło Joule'a na 1 mb.

^{**)} Upust jest ujemnym źródłem ciepła.

Temperatura upustu jest o tyle niższa od temperatury powierzchni, o ile temperatura źródła jest wyższa

$$\vartheta_z - t_o = t_o - \vartheta_{zi}. \quad (11.38)$$

W ten sposób otrzymaliśmy źródło i upust ciepła umieszczone w ośrodku nieskończonym, i przekazujące ciepło. Ze względu na symetrię temperatura powierzchni rozdziału ośrodków rzeczywistego i fikcyjnego jest stała i nie zostanie zmieniona w stosunku do rzeczywistej t_o .

Rozpatrzmy temperaturę ϑ dowolnego punktu A w ośrodku rzeczywistym. Położenie punktu podano na rys. 11.4.

Jeśli w ośrodku nieskończonym byłoby tylko źródło, to temperatura tego punktu byłaby temperaturą ϑ' powierzchni walcowej o promieniu r . Na podstawie wzoru dla przewodzenia przez powierzchnię walcową

$$\dot{Q} = 2\pi L \lambda \frac{\vartheta_z - \vartheta'}{\ln \frac{r}{r_z}}. \quad (11.39)$$

Jeśli w ośrodku nieskończonym byłoby tylko upust, to temperatura rozpatrywanego punktu byłaby temperaturą ϑ'' powierzchni walcowej o promieniu r_1 , czyli

$$\dot{Q} = 2\pi L \lambda \frac{\vartheta'' - \vartheta_{zi}}{\ln \frac{r_i}{r_{zi}}}. \quad (11.40)$$

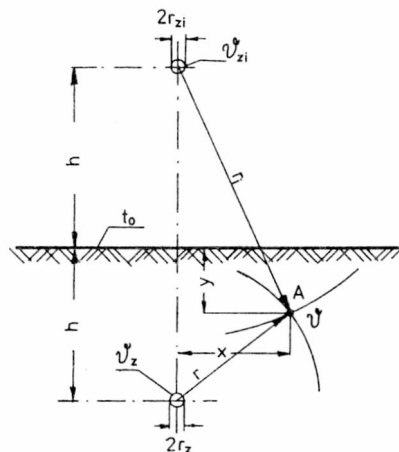
Oznaczamy $\dot{Q}_j = \dot{Q}/L$; wielkość ta jest wydajnością źródła na jednostkę długości. Jeśli przekształcimy (11.39) i (11.40) względem różnic temperatur i wprowadzimy $\dot{Q}_j$, to otrzymamy

$$\vartheta_z - \vartheta' = \frac{\dot{Q}_j}{2\pi\lambda} \ln \frac{r}{r_z}. \quad (11.41)$$

$$\vartheta'' - \vartheta_{zi} = \frac{\dot{Q}_j}{2\pi\lambda} \ln \frac{r_i}{r_{zi}}. \quad (11.42)$$

Gdy od (11.42) odejmiemy stronami (11.41), wówczas otrzymamy

$$(\vartheta' + \vartheta'') - (\vartheta_z + \vartheta_{zi}) = \frac{\dot{Q}_j}{2\lambda} \ln \left(\frac{r_i}{r_{zi}} \frac{r_z}{r} \right). \quad (11.43)$$



Rys. 11.4. Położenie źródła ciepła i upustu w ośrodkach półnieskończonych, rzeczywistym i pomyślnym

Ponieważ $r_z = r_{zi}$ oraz na podstawie (11.38) $\vartheta_z + \vartheta_{zi} = 2t_o$, więc

$$(\vartheta' - t_o) + (\vartheta'' - t_o) = \frac{\dot{Q}_j}{2\pi\lambda} \ln \frac{r_i}{r}. \quad (11.44)$$

Z lewej strony (11.44) jest podana suma częściowych spadków temperatury spowodowanych działaniem tylko źródła i tylko upustu. Działania te nakładają się, powodując całkowity rzeczywisty spadek temperatury $\vartheta - t_o$, czyli

$$\vartheta - t_o = \frac{\dot{Q}_j}{2\pi\lambda} \ln \frac{r_i}{r}. \quad (11.45)$$

We współrzędnych prostokątnych $r = \sqrt{x^2 + (h-y)^2}$, natomiast $r_i = \sqrt{x^2 + (h+y)^2}$, wobec tego

$$\vartheta - t_o = \frac{\dot{Q}_j}{4\pi\lambda} \ln \frac{x^2 + (h+y)^2}{x^2 + (h-y)^2}. \quad (11.46)$$

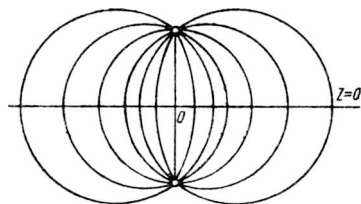
Temperatury ϑ_p punktów leżących w pionie nad kablem (gdy $x = 0$) wynoszą

$$\vartheta_p = t_o + \frac{\dot{Q}_j}{4\pi\lambda} \ln \left(\frac{h+y}{h-y} \right)^2 = t_o + \frac{\dot{Q}_j}{2\pi\lambda} \ln \frac{h+y}{h-y}. \quad (11.47)$$

Aby określić temperaturę powierzchni kabla, należy przyjąć $r = r_z$, czyli $y = h - r_z$, stąd

$$\vartheta_z = t_o + \frac{\dot{Q}_j}{2\pi\lambda} \ln \frac{2h - r_z}{r_z}. \quad (11.48)$$

Jest to wzór do obliczania temperatury źródła (kabla) znajdującego się na głębokości h . $\dot{Q}_j$ – wydajność na 1 mb źródła walcowego o promieniu r_z .



Rys. 11.5. Linie strumieni (adiabat) między walcowym źródłem ciepła i upustem

Gdy znamy temperaturę ϑ_z źródła, możemy ze wzoru (11.47) wyliczyć jednostkową wydajność źródła $\dot{Q}_j$ (rys. 11.5):

$$\dot{Q}_j = 2\pi\lambda \frac{\vartheta_z - t_o}{\ln \frac{2h - r_z}{r_z}}, \quad \text{W/m.} \quad (11.49)$$

11.2. Nieustalone przewodzenie ciepła bez wewnętrznych źródeł ciepła

Wymienione przewodzenie opisuje równanie (7.27) Fouriera–Kirchhoffa. Równanie to w odniesieniu do ciał stałych, dla których $w_x = w_y = w_z = 0$, przechodzi w równanie Fouriera

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = a \nabla^2 \vartheta. \quad (11.50)$$

Rozwiązanie tego równania polega na wyznaczeniu dla każdego punktu ciała temperatury w czasie

$$\vartheta = \vartheta(x, y, z, \tau). \quad (11.51)$$

Jest to wynik całkowania dla konkretnego obiektu, znajdującego się w określonych warunkach. Aby uzyskać jednoznaczne rozwiązanie (11.50), należy określić

- a) kształt przedmiotu i jego własności fizyczne,
- b) warunek początkowy,
- c) warunki brzegowe.

Warunek początkowy określa rozkład temperatury ciała w pewnym, określonym czasie, najczęściej w chwili początkowej lub końcowej (rys. 11.1).

Dla jednoosiowego przewodzenia równanie Fouriera przyjmuje postać:

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = a \frac{d^2 \vartheta}{dx^2}. \quad (11.52)$$

Wiele spotykanych w praktyce przypadków nieustalonego przewodzenia ciepła, np. płytę płaską, pręt, kulę, ścianę rurową, po zastosowaniu odpowiedniego układu można rozpatrywać jako jednoosiowe. Równanie różniczkowe (11.52) ma kilka rozwiązań całkowych (całek ogólnych)

$$\vartheta = e^{-p^2 a \tau} \sin px; \quad \vartheta = e^{-p^2 a \tau} \cos px, \quad (11.53)$$

$$\vartheta = e^{-x \sqrt{p/2a}} \cos(p\tau - x \sqrt{\frac{p}{2a}} + u), \quad (11.54)$$

gdzie p, u – stałe całkowania,

a – współczynnik wyrównywania temperatury.

Każde z równań (11.53) i (11.54) pomnożone przez dowolną stałą jest także rozwiązaniem całkowym (11.52). Odpowiednia suma pomnożona przez stałe jest również rozwiązaniem całkowym

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{n=\infty} C_n e^{-p_n^2 a \tau} \sin p_n x + \sum_{m=1}^{m=\infty} D_m e^{-p_m^2 a \tau} \cos p_m x + C. \quad (11.55)$$

Z podanych całek należy wybrać taką całkę, która oprócz (11.52) spełnia warunki brzegowe i warunek początkowy. Rozwiązanie szczegółowe sprowadza się do wyznaczania stałych. Ich znalezienie wymaga stosowania różnych metod matematycznych, nieraz bardzo żmudnych i nie zawsze dających się zrealizować.

11.2.1. Nieustalone przewodzenie ciepła w nieskończonej płycie płaskiej, znajdującej się w otoczeniu o stałej temperaturze

W rozważanym przykładzie przyjmujemy warunki brzegowe typu c. Przyjmijmy, że warunek początkowy określa temperaturę ϑ_p płyty jako stałą. α jest współczynnikiem przejmowania ciepła między powierzchnią płyty a otoczeniem. Jest to przypadek jednoosiowego przekazywania ciepła. Opisuje je równanie różniczkowe

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}. \quad (11.56)$$

Najwygodniej jest przyjąć taki układ odniesienia $\vartheta - x$, jaki przedstawiono na rys. 11.6.

Warunek początkowy:

$$\tau = 0, \quad \vartheta = \vartheta_p.$$

Warunki brzegowe:

$$x = 0, \quad \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=0} = 0,$$

$$x = \delta, \quad \frac{d\vartheta}{dx} = -\frac{\alpha}{\lambda}(\vartheta_s - t_o) = -\frac{\alpha}{\lambda}\vartheta_s,$$

gdzie ϑ_s — temperatura powierzchni skrajnej (gdy $x = \pm\delta$).

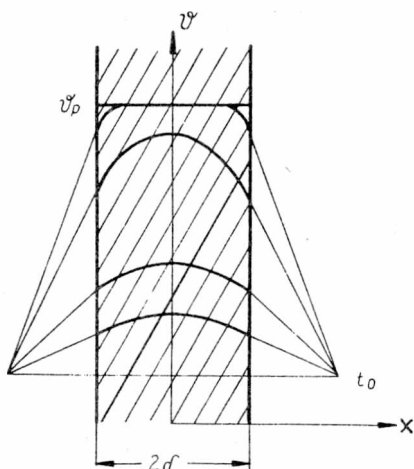
W celu uproszczenia rozważań przyjęliśmy, że $t_o = 0$. Gdy jest inaczej, przypadek taki otrzymamy przez przesunięcie układu odniesienia.

Szukamy rozwiązania w postaci iloczynu funkcji X i Z , gdzie $X = X(x)$ jest funkcją tylko zmiennej x , natomiast $Z = Z(\tau)$ (tzw. metoda rozdzielania zmiennych)

$$\vartheta = XZ. \quad (11.57)$$

Po zróżniczkowaniu (11.57) według czasu:

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = X \frac{dZ}{d\tau} \quad (11.58)$$



Rys. 11.6. Rozkład temperatur w stygnącej płycie

i podwójnie podług x :

$$\frac{d^2 g}{dx^2} = Z \frac{d^2 X}{dx^2}, \quad (11.59)$$

po wstawieniu (11.58) i 11.59) do (11.56), otrzymamy

$$\frac{1}{a} \frac{dZ}{Z} \frac{1}{d\tau} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}. \quad (11.60)$$

Ponieważ równanie to musi być spełnione dla wszystkich wartości zmiennych x i τ , więc lewa strona, będąca tylko funkcją τ , i prawa strona, będąca tylko funkcją x , muszą się równać stałej. Stałą tę najwygodniej oznaczyć przez $-\mu^2$

$$\frac{1}{a} \frac{dZ}{Z} \frac{1}{d\tau} = -\mu^2, \quad (11.61)$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\mu^2. \quad (11.62)$$

Po pomnożeniu obustronnie (11.61) przez $a d\tau$ i scałkowaniu otrzymamy

$$Z = A' e^{-\mu^2 a \tau}. \quad (11.63)$$

Całka ze wzoru (11.62) ma postać

$$X = B' \cos \mu x + C' \sin \mu x. \quad (11.64)$$

Zgodnie z (11.57) rozwiązanie ma postać

$$g = e^{-\mu^2 a \tau} (A \cos \mu x + B \sin \mu x). \quad (11.65)$$

Stałe $A = A'B'$, $B = A'C'$ oraz μ , które spełnia w (11.65) rolę parametru, należy wyznaczyć z warunków brzegowych i warunku początkowego.

Gdy $x = 0$, $dg/dx = 0$, czyli

$$\left(\frac{dg}{dx} \right)_{x=0} = e^{-\mu^2 a \tau} (-A\mu \sin \mu x + B\mu \cos \mu x)_{x=0} = 0. \quad (11.66)$$

Ze wzoru tego wynika, że $B = 0$. Rozwiązanie przyjmie postać

$$g = e^{-\mu^2 a \tau} A \cos \mu x, \quad (11.67)$$

po pochodna według x natomiast

$$\frac{dg}{dx} = -e^{-\mu^2 a \tau} A \mu \sin \mu x. \quad (11.68)$$

Parametr μ wyznaczmy z warunku brzegowego $x = \delta$:

$$(d\vartheta/dx)_{x=\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda}\vartheta_s, \quad (11.68a)$$

z (11.68) po wstawieniu $x = \delta$ obliczamy

$$\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=\delta} = -e^{-\mu^2\alpha\tau}A\mu\sin\mu\delta, \quad (11.69)$$

gdy $x = \delta$, $\vartheta = \vartheta_s$, z (11.67) otrzymujemy

$$\vartheta_s = e^{-\mu^2\alpha\tau}A\cos\mu\delta. \quad (11.70)$$

Po wykorzystaniu (11.69) i (11.70) w wymienionym warunku brzegowym (11.68a) możemy napisać

$$-e^{-\mu^2\alpha\tau}A\mu\sin\mu\delta = -\frac{\alpha}{\lambda}e^{-\mu^2\alpha\tau}A\cos\mu\delta, \quad (11.71)$$

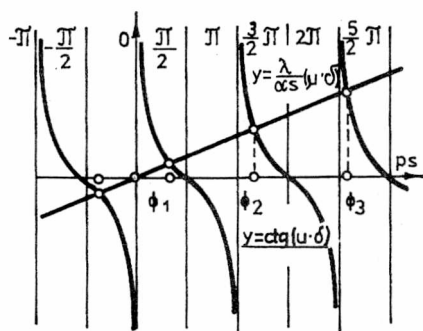
z tego zaś po podzieleniu przez $\sin\mu\delta$ i uproszczeniu przez A oraz $e^{-\mu^2\alpha\tau}$ otrzymujemy

$$\operatorname{ctg}\mu\delta = \frac{\lambda}{\alpha\delta}\mu\delta. \quad (11.72)$$

Ponieważ $\frac{\alpha\delta}{\lambda} = \operatorname{Bi}$ jest liczbą znamioną Biota więc

$$\operatorname{ctg}\Phi = \frac{\Phi}{\operatorname{Bi}}. \quad (11.73)$$

gdzie $\Phi = \mu\delta$ jest iloczynem parametru μ i δ połowy grubości ściany; Φ jest nowym parametrem. Jest wiele Φ_n rozwiązań równania (11.73). Wartości parametrów $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \dots$ można wyznaczyć graficznie (patrz rys. 11.7).



Rys. 11.7. Graficzne wyznaczenie parametru Φ_n

Jest wiele od $n = 1$ do $n = \infty$ rozwiązań równania (11.67) względem parametru $\mu_n\delta = \Phi_n$. Wtedy także dla każdego innego Φ_n stała A przyjmuje różne wartości A_n .

Rozwiązanie ogólne jest sumą rozwiązań szczególnych, czyli

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-\mu_n^2\delta^2\alpha\tau/2}A_n\cos\mu_n\delta\frac{x}{\delta}. \quad (11.74)$$

Ponieważ $\alpha\tau/\delta^2 = \operatorname{Fo}$ jest liczbą Fouriera, a $\mu_n^2\delta^2 = \Phi_n^2$, więc ogólne rozwiązanie równania (11.52) dla podanych warunków dla płyty płaskiej

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-\Phi_n^2 Fo} A_n \cos \Phi_n \frac{x}{\delta}. \quad (11.75)$$

Należy jeszcze wyznaczyć stałe A_n , gdy n wynosi od 1 do ∞ . Metodę wyznaczania podał Fourier.

Z warunku początkowego $\tau = 0$, to jest $Fo = 0$, $\vartheta = \vartheta_p$, otrzymamy

$$\vartheta_p = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cos \Phi_n \frac{x}{\delta}. \quad (11.76)$$

Jeżeli równanie (11.76) pomnożymy obustronnie przez $\cos \Phi_m(x/\delta)$ i scałkujemy w granicach od 0 do δ , otrzymamy wyrażenie

$$\int_0^{\delta} \vartheta_p \cos \Phi_m \frac{x}{\delta} dx = A_n \int_0^{\delta} \cos \Phi_n \frac{x}{\delta} \cos \Phi_m \frac{x}{\delta} dx. \quad (11.77)$$

które po prawej stronie dla $m \neq n$ jest równe zeru, a gdy $m = n$, nie równa się zeru. Gdy $m = n$

$$\int_0^{\delta} \vartheta_p \cos \Phi_n \frac{x}{\delta} dx = A_n \int_0^{\delta} \cos^2 \Phi_n \frac{x}{\delta} dx, \quad (11.78)$$

stąd po scałkowaniu i przekształceniu otrzymamy

$$A_n = \frac{2\vartheta_p \sin \Phi_n}{\Phi_n + \sin \Phi_n \cos \Phi_n}. \quad (11.79)$$

Ostatecznie temperaturę w dowolnym przekroju płyty płaskiej, grubości 2δ , odległym o x od płaszczyzny symetrii, i dowolnym czasie obliczamy ze wzoru

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-\Phi_n^2 Fo} \frac{2\vartheta_p \sin \Phi_n}{\Phi_n + \sin \Phi_n \cos \Phi_n} \cos \Phi_n \frac{x}{\delta}. \quad (11.80)$$

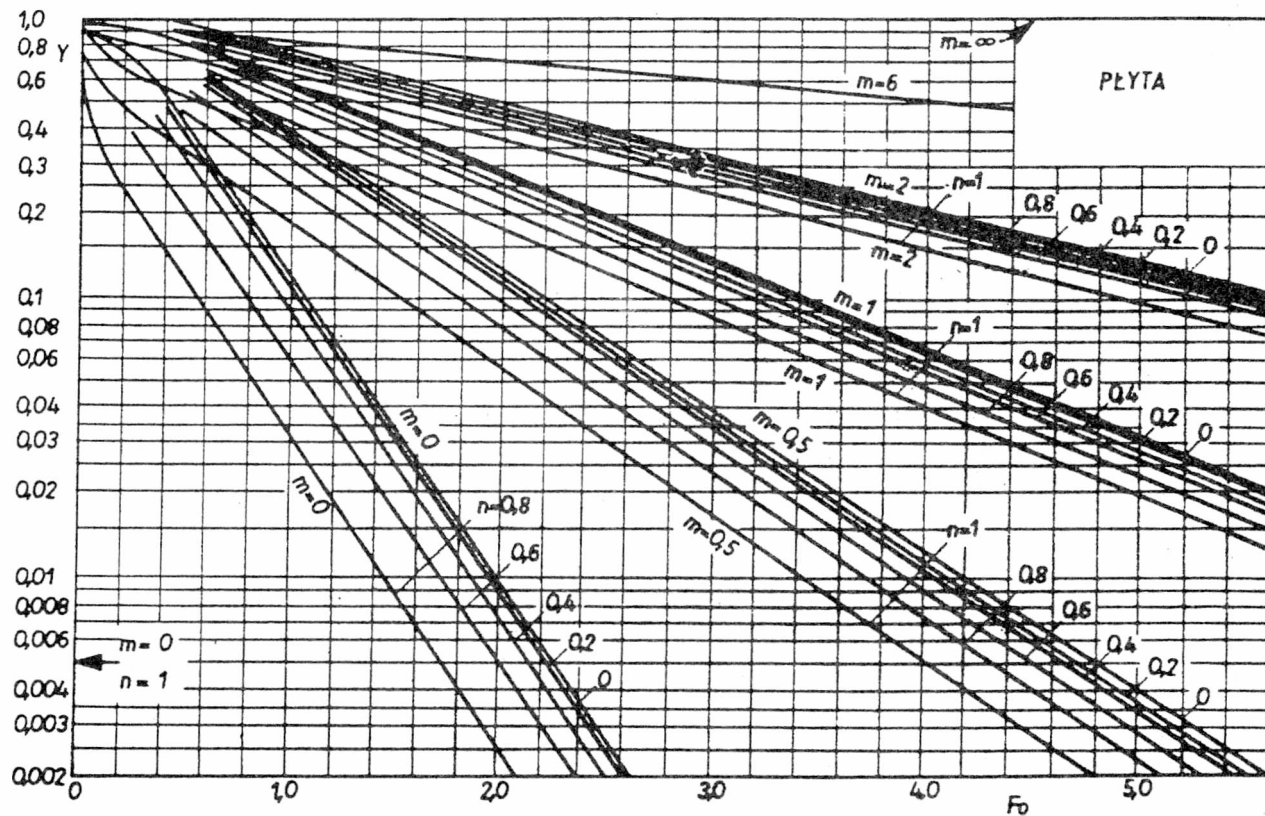
W zapisie ogólnym bezwymiarowa temperatura Y jest wyrażona jako funkcja liczb Fo , Bi i bezwymiarowej odległości x/δ .

$$Y = \frac{\vartheta}{\vartheta_p} = f\left(Fo, Bi, \frac{x}{\delta}\right). \quad (11.81)$$

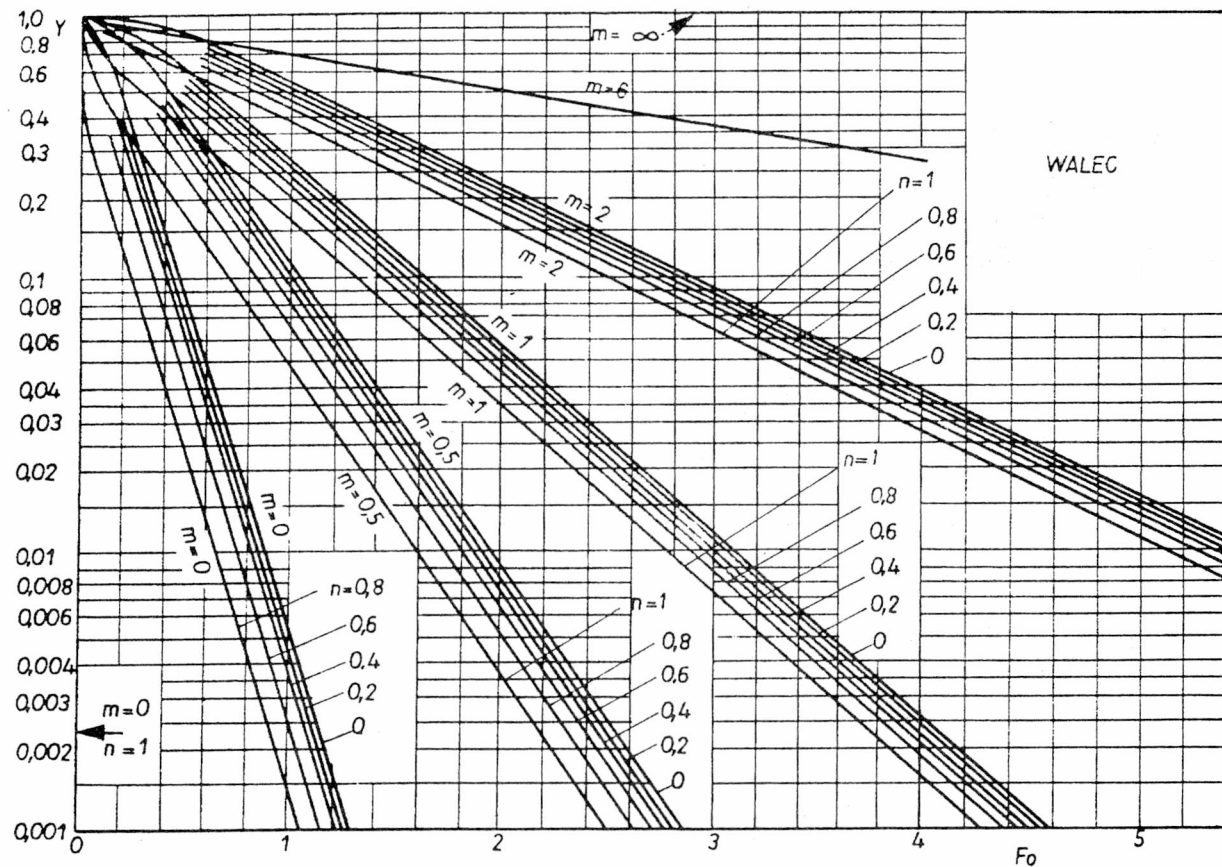
Do obliczeń praktycznych funkcje (11.80) lub (11.81) przedstawiono wykreślnie (rys. 11.8).

Podobnie bezwymiarową temperaturę Y można przedstawić w wypadku cylindrycznego pręta i kuli jako funkcję Fo , Bi i x/δ , gdzie δ jest odpowiednim wymiarem liniowym, charakterystycznym dla danego kształtu ciała (rys. 11.9 i 11.10).

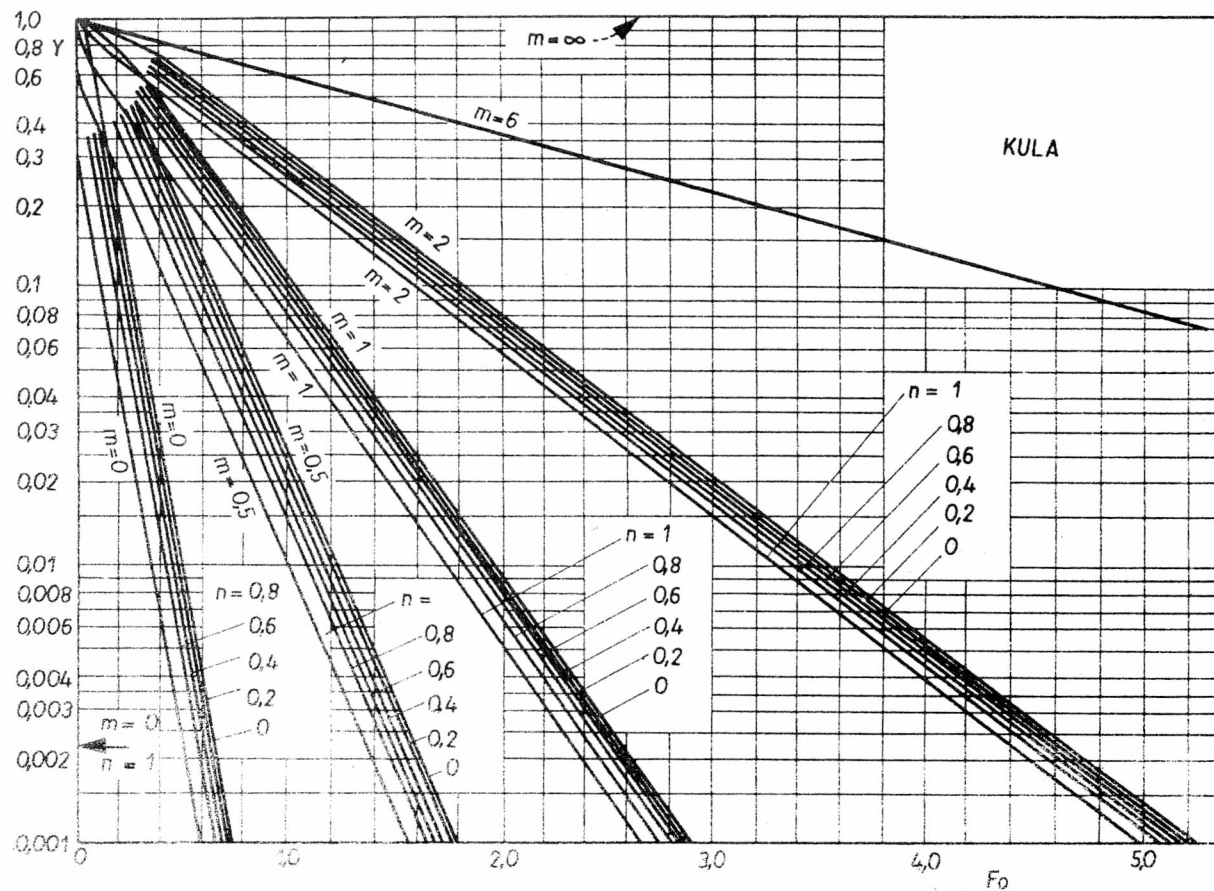
Zredukowane temperatury w osi i na powierzchni ściany płaskiej, pręta oraz kuli jako funkcję czasu podano na rys. 11.11–11.4.



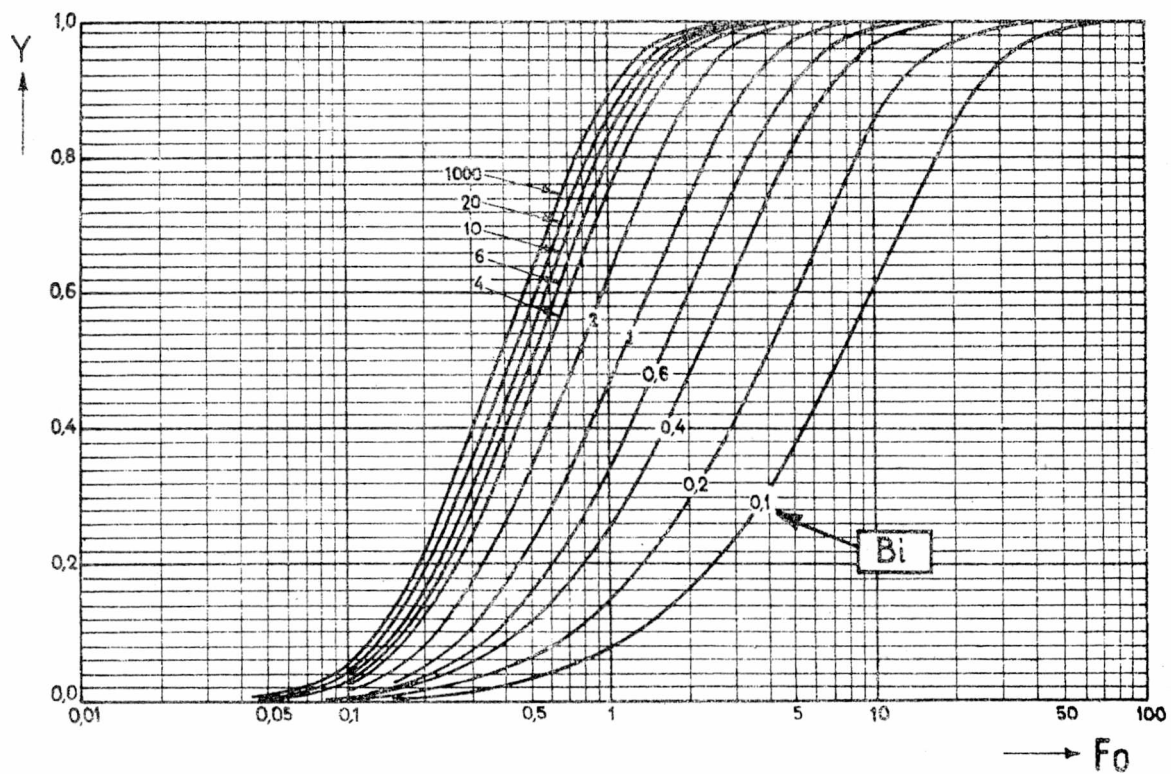
Rys. 11.8. $Y = f(Fo, Bi) = m$; $x/\delta = n$; bezwymiarowa temperatura Y dla płyty; δ — połowa grubości płyty



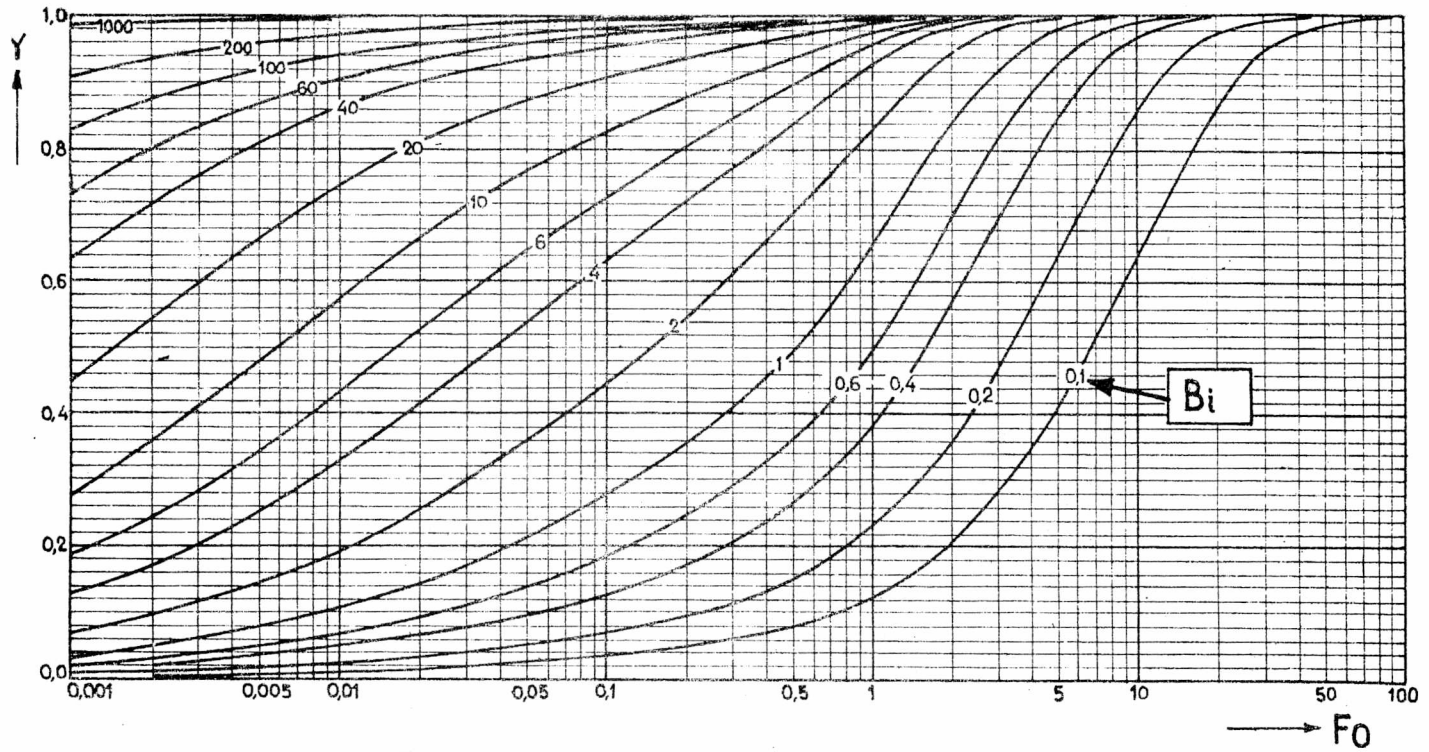
Rys. 11.9. $Y = f(Fo, Bi) = m$; $x/r = n$; bezwymiarowa temperatura Y dla walca; r – promień zewnętrzny walca



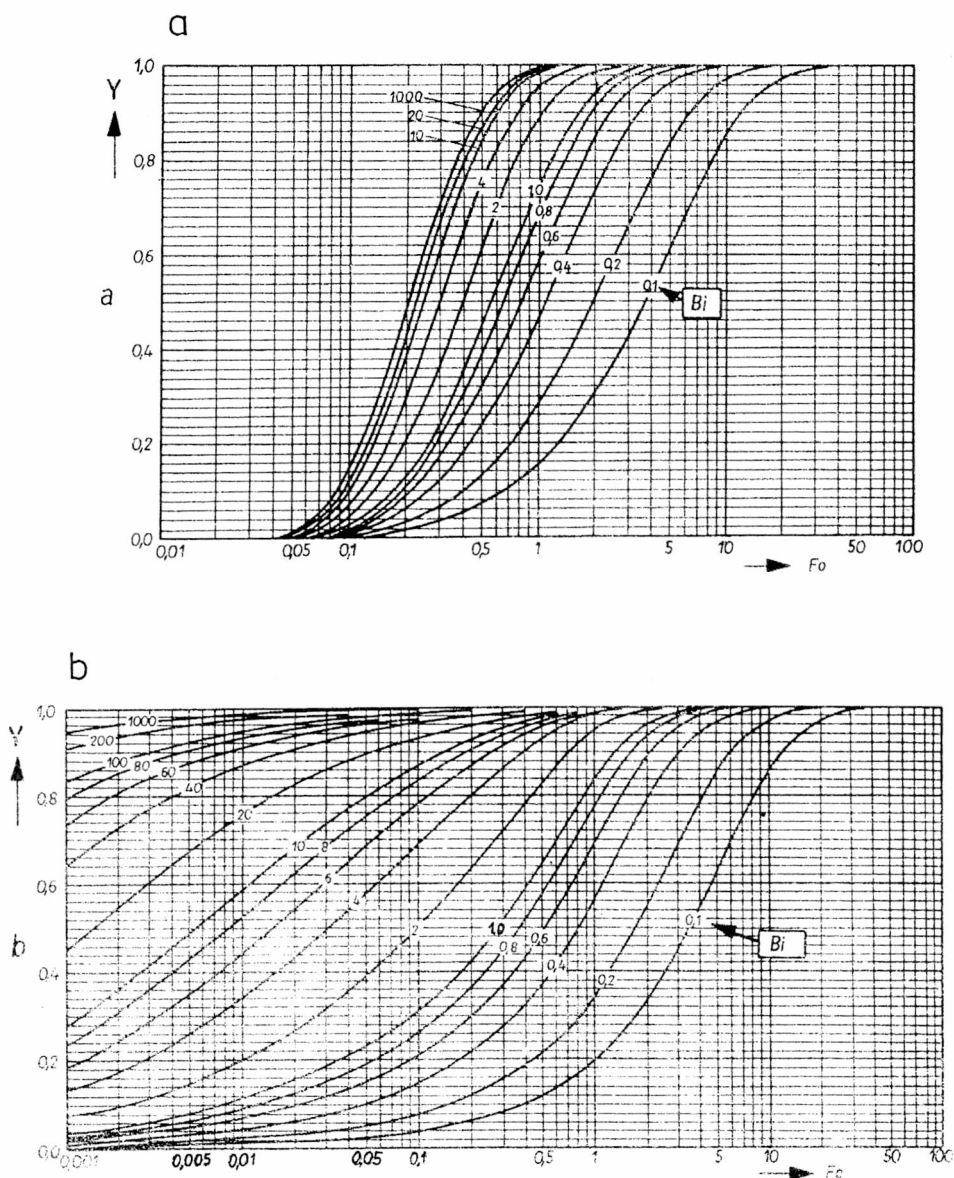
Rys. 11.10. $Y = f(Fo, Bi) = m$; $x/r = n$; bezwymiarowa temperatura Y dla kuli; r – promień zewnętrzny kuli



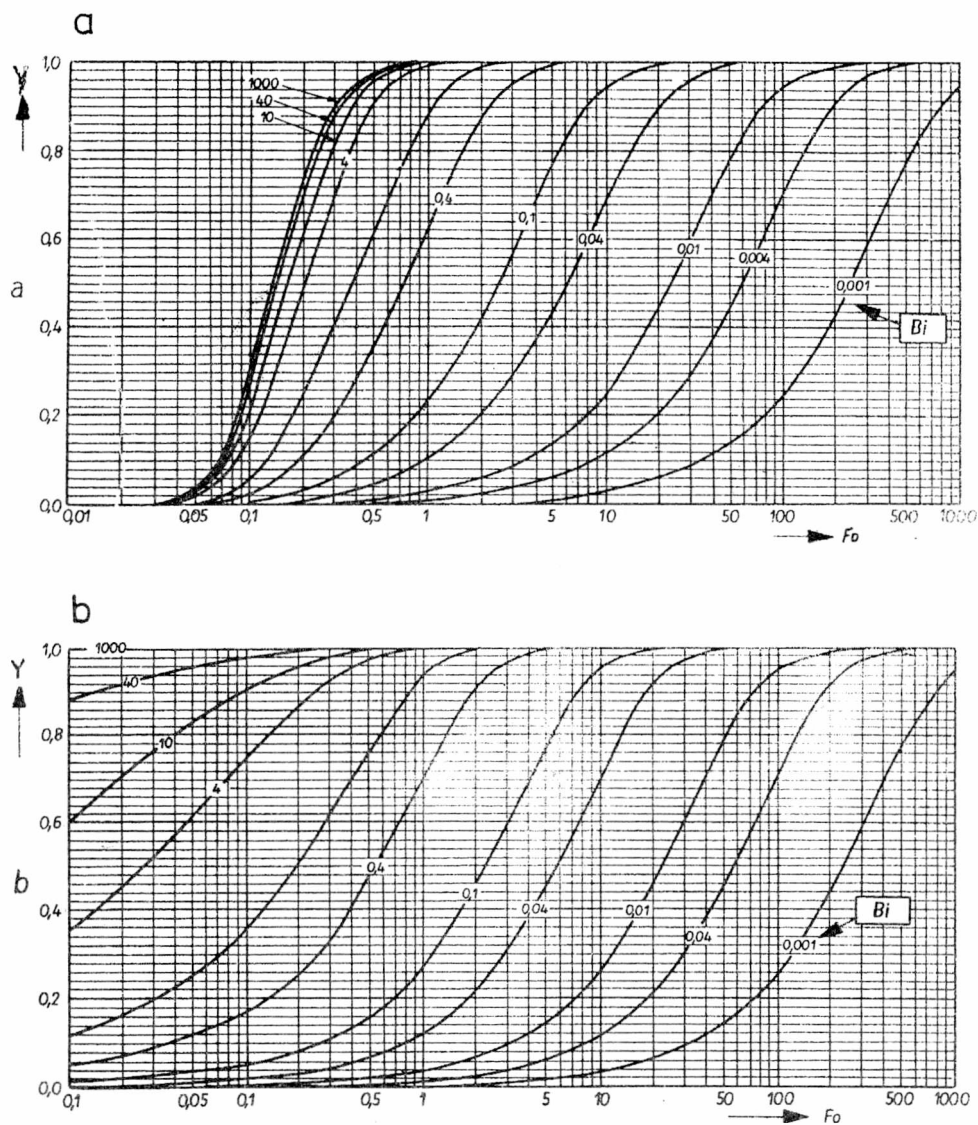
Rys. 11.11. Zredukowane temperatury $Y = f(Fo, Bi)$ przy nieustalonym przekazywaniu ciepła w środku płyty płaskiej



Rys. 11.12. Zredukowane temperatury $Y = f(Fo, Bi)$ przy nieustalonym przekazywaniu ciepła na powierzchni skrajnej płyty płaskiej



Rys. 11.13. Zredukowane temperatury $Y = f(Fo, Bi)$ przy nieustalonym przewodzeniu ciepła w walcu: a – w osi walca, b – na powierzchni walca



Rys. 11.14. Zredukowane temperatury $Y = f(Fo, Bi)$ przy nieustalonym przewodzeniu ciepła w kuli: a – w środku kuli, b – na powierzchni kuli

11.2.2. Stan uporządkowany w obliczeniach nieustalonego przewodzenia ciepła

Proces zmian temperatury ciała bez wewnętrznych źródeł ciepła o dowolnym rozkładzie temperatury, określonym jako warunek początkowy, które zostało umieszczone w ośrodku o stałej temperaturze, możemy podzielić na trzy okresy:

W okresie I zachodzą nieregularne zmiany temperatury w różnych miejscach ciała, co jest spowodowane tym, że początkowy rozkład temperatury jest w dużej mierze przypadkowy i nie jest związany z tempem chłodzenia w ośrodku.

Okres II charakteryzuje się tym, że proces chłodzenia określa tempo zmian temperatury w różnych punktach ciała. Zmiany zachodzą w sposób uporządkowany. Mówimy, że przewodzenie ciepła zachodzi w stanie uporządkowanym.

W okresie III ciało osiąga stan równowagi termodynamicznej z otoczeniem (teoretycznie po czasie nieskończenie długim).

Przewodzenie ciepła określa równanie, które można zapisać jako

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-\mu_n^2 \alpha \tau} A_n U_n(xyz), \quad (11.82)$$

gdzie $U_n(xyz)$ jest funkcją tylko położenia punktu (por. równanie (11.75)). Dla określonego punktu funkcja ta przyjmuje wartość stałą. Należy zauważyć, że szereg wyrazów pod znakiem sumy jest silnie zbieżny i w praktyce najczęściej wystarczy przyjąć tylko wyraz pierwszy

$$\vartheta \cong e^{-\mu_1^2 \alpha \tau} A_1 U_1, \quad (11.83)$$

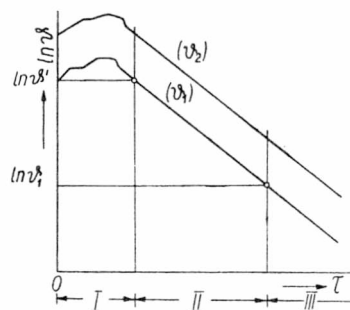
co uzasadnia równanie przytoczone przez Kondratiewa

$$\ln \vartheta = -m\tau + C, \quad (11.84)$$

które jest podstawą do obliczeń w stanie uporządkowanym. W tym okresie nie zmienia się tempo zmiany temperatury $d\vartheta/d\tau$ dowolnego punktu, czyli

$$\frac{d(\ln \vartheta)}{d\tau} = -m \quad (11.85)$$

jest stałe. Przebieg tempa chłodzenia dowolnego punktu w układzie $\ln \vartheta$ i τ symbolizuje linia prosta (patrz rys. 11.15).



Rys. 11.15. Okresy nieustalonego chłodzenia ciała: I – okres początkowy, II – okres stanów uporządkowanych, III – okres ustalania równowagi termodynamicznej

Z nieprzytoczonej tu analizy wynika, że

$$m = \psi S \frac{\alpha}{C_V}, \quad (11.86)$$

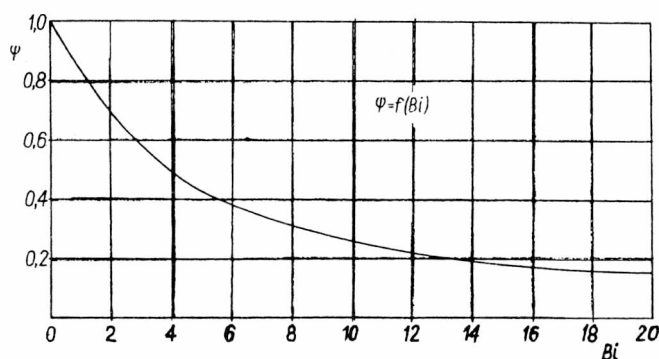
gdzie

α — współczynnik przejmowania ciepła,

C_V — pojemność cieplna ciała,

S — powierzchnia zewnętrzna ciała,

ψ — współczynnik wyrażający stosunek średniej temperatury powierzchni do średniej temperatury wewnątrz ciała. Współczynnik ten liczy się w zależności od liczby Bi (Biota); dla kuli jest przedstawiony wykreślnie na rys. 11.16.



Rys. 11.16. Współczynnik ψ dla kuli

Tempo chłodzenia m można łatwo wyznaczyć doświadczalnie mierząc temperaturę ϑ_1 i ϑ_2 dowolnego punktu ciała w dwu chwilach τ_1 i τ_2 . Zgodnie z (11.85)

$$m = \frac{\ln \vartheta_1 - \ln \vartheta_2}{\tau_2 - \tau_1}. \quad (11.87)$$

12. Przewodzenie ciepła (część III) – rozwiązania numeryczne

W ostatnich latach obserwujemy niezwykle intensywny rozwój rozwiązań zagadnień przekazywania ciepła, a szczególnie przewodzenia ciepła. Spowodowane to zostało wprowadzeniem do obliczeń komputerów nowej generacji o silnie zwiększonej pamięci obliczeniowej oraz operacyjnej oraz o zmniejszonych wymiarach. Dzisiejszy komputer osobisty PC-AT ma zdolność obliczeniową porównywalną z maszyną liczącą typu Odra. O ile metody przybliżonych (numerycznych) rozwiązań są znane od dawna, o tyle dopiero wprowadzenie elektronicznych maszyn liczących skróciło czas obliczeń do sensownego okresu.

Rozwiązanie numeryczne polega na dyskretyzacji zmiennych ciągłych (czasowych i przestrzennych), co pozwala skomplikowane rozwiązania analityczne zamienić w zbiór rozwiązań liniowych. Ponieważ zbiory te mogą być bardzo liczne, z tego względu rozwiązania numeryczne wymagają stosowania rachunku macierzowego.

Metoda numeryczna powinna — uwzględniając pamięć maszyny, krok dyskretyzacji i algorytm — tak działać, by czas jej pracy był możliwie krótki. Jednak obecny skok w wielkości pamięci obliczeniowej i operacyjnej komputerów, możliwość jej powiększania i osobisty dostęp do nich powodują, że omówione ograniczenia odgrywają coraz mniejszą rolę.

Stosowanie metod numerycznych jest ograniczone do obszarów skończonych. Jest wtedy efektywne, tak więc nie należy uważać, że rozwiązania te zastąpią wszelkie rozwiązania analityczne, które ciągle są wzorem i modelem rozwiązań.

Metody numeryczne są także pomocne w rozwiązaniach analitycznych, np. tam gdzie równanie na uzyskanie wartości własnych ma budowę zbyt skomplikowaną dla rozwiązania analitycznego.

Spośród rozlicznych stosowanych do przekazywania ciepła metod numerycznych omawia się te, które są stosunkowo ogólne. Są to:

1. Metoda różnic skończonych.
2. Metoda bilansów elementarnych.
3. Metoda elementów skończonych.
4. Niektóre metody statystyczne (probabilistyczne).
5. Metoda wykreślna.

Metody 1 i 3 są ogólne. Metoda 2 bilansu energetycznego jest obecnie coraz częściej stosowana przede wszystkim ze względu na zgodność przebiegu obliczeń z sensem fizycznym. Z metod statystycznych jest stosowana głównie metoda Monte Carlo i jej modyfikacja „exodus”.

Oprócz metod omawianych, można wymienić metodę elementów brzegowych, w której ilość elementów dyskretnych jest stosunkowo mała (tylko na powierzchni), ale do rozwiązania są pełne macierze. W niektórych tylko przypadkach stosowanie tej metody jest efektywne. Są także specjalne metody do rozwiązywania zagadnień odwrotnych, w których na podstawie znajomości pól temperatury dochodzi się do warunków brzegowych. Zagadnienia te są zazwyczaj źle uwarunkowane i do ich rozwiązania należy podchodzić indywidualnie.

12.1. Dyskretyzacja zmiennej ciągłej

Oznaczmy zmienną ciągłą (czasu i przestrzeni) przez Y . Niech będzie określony przedział, w którym zmienna ta nie ma załamań

$$Y_1 < Y < Y_2. \quad (12.1)$$

Jeżeli w tym przedziale utworzymy I miejsc podziałów, to powstanie $I-1$ elementów ΔY_j zmiennej. Zmienna Y_i będzie przedstawiona przez

$$Y_i = Y_1 + \sum_{j=1}^{i-1} \Delta Y_j. \quad (12.2)$$

W ten sposób funkcję ciągłą (kontinuum) zastąpiliśmy zbiorem elementów. Punkty Y_i nazywa się węzłami, a ΔY_i krokiem siatki różnicowej.

Jeżeli istnieje funkcja ciągła $f(Y)$, to poszczególnym wartościom Y_i są przyporządkowane wartości funkcji

$$f_i = f(Y_i). \quad (12.3)$$

Dla punktów Y' leżących między węzłami siatki funkcję $f(Y)$ interpoluje się liniowo między f_i i f_{i+1} .

12.2. Wymagania dotyczące metod różnicowych

Od metod różnicowego rozwiązania zagadnień przewodzenia ciepła (ogólnie zagadnień brzegowych) wymaga się, by były one efektywne. Dla danej mocy komputera, tj. dla określonej pojemności pamięci operacyjnej i obliczeniowej wynik był możliwie dokładny, a czas obliczenia nie za długi. Aby to uzyskać, stosowana metoda powinna spełniać warunek tzw. **zgodności aproksymacji różnicowej**, tj. by dla malejącego przedziału zmiennej niezależnej, np. $\Delta x \rightarrow 0$, operatory różnicowe prze-

chodziły w różniczkowe. Dalej metoda różnicowa powinna być **stabilna**, tzn. niewielkie zaburzenie, np. warunku początkowego lub brzegowego, albo wystąpienie w trakcie obliczeń błędu numerycznego, w dalszych krokach obliczeń występowały (tj. zaburzenie lub błąd) z malejącą amplitudą.

Dalszym wymaganiem dotyczącym metody numerycznej jest **fizyczna poprawność schematu różnicowego**. Można to rozumieć tak, by podwyższenie temperatur w otoczeniu rozważanego punktu prowadziło w następnym kroku obliczeniowym do podwyższenia temperatury tego punktu. Ten ostatni warunek jest szczególnie ważny w obliczeniach nieustalonego przekazywania ciepła.

Jeżeli metoda numeryczna ma być stosowana praktycznie, powinna ona spełniać wszystkie wymienione warunki.

Stosowane metody różnicowe do rozwiązywania zagadnień przewodzenia ciepła są obciążone niedokładnością obliczeń — błędem (są one przybliżone). W zasadzie są dwa rodzaje niedokładności obliczeń numerycznych.

Pierwszy rodzaj błędu wynika z aproksymacji zagadnienia ciągłego różnicami skończonymi. Jest to niejako błąd organiczny metody. Błąd ten można oszacować. Gdy jest spełniony warunek zgodności aproksymacji różnicowej, zmniejszenie kroku różnicowego prowadzi do zmniejszenia błędu i wtedy można ten błąd oszacować porównując uzyskane wyniki obliczeń.

Drugi rodzaj błędu wynika z wielkości słowa maszynowego komputera. Jest niedokładnością obliczeń wynikających z zaokrągleń maszyny liczącej. Jest więc błędem związanym z jakością komputera.

Należy zwrócić uwagę, że w trakcie obliczeń błędy te mogą się dodawać i przy niewielkiej stabilności metody może to prowadzić do wyników błędnych. Mówimy wtedy o braku zbieżności metody.

W metodach statystycznych dochodzi jeszcze błąd wynikający z prawdopodobieństwa probabilistycznego (też dający się oszacować).

12.3. Metoda różnic skończonych

Metoda ta jest podstawowa dla rozwiązań numerycznych [4], [25]. Istotny jest w niej sposób aproksymacji pochodnych ciągłych różnicami skończonymi.

12.3.1. Aproksymacja funkcji ciągłych różnicami skończonymi

Posłużmy się metodą współczynników nieoznaczonych; otrzymamy

$$\frac{d^k f(Y)}{dY^k} = \frac{1}{\Delta Y} k \sum_{j=-I}^J a_j f(Y + j\Delta Y) + h(\Delta Y^p), \quad (12.4)$$

gdzie $j = -I, -I+1, \dots, II \geq 0$; $J \geq 0$; $I+J \geq k+p-1$, zaś $h(\Delta Y^p)$ jest niedokładnością aproksymacji rzędu p względem ΔY ($h \ll \Delta Y$).

Rozwijając $f(Y + j\Delta Y)$ w szereg Taylora, otrzymujemy

$$f(Y + j\Delta Y) = f(Y) + j\Delta Y \frac{df(Y)}{dY} + \frac{(j\Delta Y)^2}{2!} \frac{d^2f(Y)}{dY^2} + \dots + \frac{(j\Delta Y)^{k+p}}{(k+p)!} \frac{d^{k+p}f(Y)}{dY^{k+p}}. \quad (12.5)$$

Po wstawieniu (12.4) do (12.5) i przyrównaniu współczynników przy jednakowych potęgach $(\Delta Y)^j$ otrzymujemy układ równań na nieznane współczynniki a_j

$$\begin{aligned} \sum_j a_j &= 0, \\ \sum_j j a_j &= 0, \\ \sum_j j^k a_j &= k! \\ \sum_j j^{k+1} a_j &= 0, \\ \sum_j j^{k+p-1} a_j &= 0, \end{aligned} \quad (12.6)$$

Układ równań (12.6) ma jednoznaczne rozwiązanie, jeśli przyjmujemy $I + J = k + p - 1$.

Dla pochodnej pierwszego rzędu należy przyjąć

$$\begin{aligned} k &= 1, & p &= 1, \\ I &= 0, & J &= 1, \end{aligned}$$

wtedy równanie (12.4) przyjmie postać

$$\frac{df(Y)}{dY} = \frac{1}{\Delta Y} [a_0 f(Y) - a_1 f(Y + \Delta Y)] + h(\Delta x). \quad (12.7)$$

Z układu równań (12.6) dla $k = 1$ otrzymujemy $a_0 = -1$, $a_1 = 1$, więc pomijając błąd aproksymacji h uzyskamy

$$\frac{df(Y)}{dY} \cong \frac{f(Y + \Delta Y) - f(Y)}{\Delta Y}. \quad (12.8)$$

Oznaczmy dla uproszczenia

$$f(Y) = f_i, \quad (12.9)$$

$$f(Y + \Delta Y) = f_{i+1}, \quad (12.10)$$

otrzymamy

$$\frac{df(Y)}{dY} \cong \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta Y}, \quad (12.11)$$

przy czym pamiętamy, że Y określa funkcję ciągłą zarówno czasu (τ), jak i przestrzeni (x , y , z).

Równanie (12.11) nazywamy **ilorazem różnicowym przednim** (albo metodą różnicową wprost).

Jeżeli przyjmujemy $I = 1$ oraz $J = 0$ dla pochodnej pierwszego rzędu, otrzymamy

$$\frac{df(Y)}{dY} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta Y}, \quad (12.12)$$

wyrażenie to nazywamy **ilorazem różnicowym wstecznym**.

Jeżeli chcemy zwiększyć dokładność aproksymacji do wartości $h(\Delta Y^2)$, należy przyjąć

$$k = 1, \quad p = 2,$$

oraz

$$I = 1, \quad J = 1,$$

wtedy otrzymamy wyrażenie (pomijając błąd aproksymacji różnicowej)

$$\frac{df(Y)}{dY} \simeq \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}. \quad (12.13)$$

Wyrażenie to nazywamy **ilorazem różnicowym centralnym** (albo metodą kierunków naprzemianległych).

Drugą pochodną funkcji $f(Y)$ wyznaczymy przyjmując

$$k = 2, \quad p = 2 \quad \text{oraz} \quad I = 1, \quad J = 2,$$

wtedy z układu równań (12.6) otrzymamy

$$a_{-1} = a_1 = 1 \quad a_0 = -2 \quad a_2 = 0, \quad (12.14)$$

zatem

$$\frac{d^2f(Y)}{dY^2} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta Y^2} + h(\Delta Y^2), \quad (12.15)$$

$h(\Delta Y^2)$ jest niedokładnością aproksymacji różnicowej, którą w obliczeniach numerycznych pomija się, czyli

$$\frac{\partial^2 f(Y)}{\partial Y^2} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta Y^2}. \quad (12.16)$$

12.3.2. Aproksymacja warunków brzegowych

Pierwszy warunek brzegowy określa temperaturę na brzegu obszaru jako funkcję położenia:

$$\vartheta = \vartheta(S), \quad (12.17)$$

gdzie S jest brzegiem obszaru.

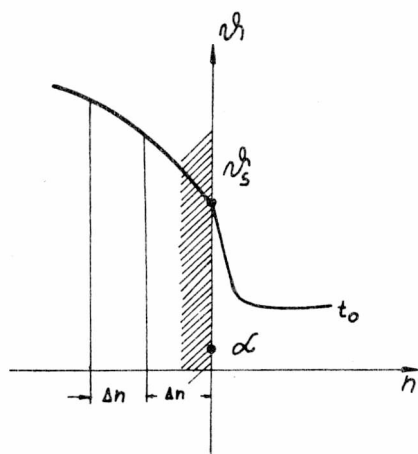
Nie wymaga to interpretacji różnicowej, podobnie jak warunek brzegowy drugiego rodzaju (12.18), gdzie na powierzchni jest określony strumień ciepła. Oczywiście powierzchnia zewnętrzna składa się z powierzchni dyskretnych elementów różnicowych leżących na skraju obszaru

$$Q = Q(S), \quad (12.18)$$

Warunek brzegowy trzeciego rodzaju ma postać (rys. 12.1):

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \alpha(\vartheta_s - t_o), \quad (12.19)$$

gdzie ϑ_s — temperatura brzegu obszaru,
 t_o — temperatura otoczenia (płyну).



Rys. 12.1. Ilustracja do warunku brzegowego trzeciego rodzaju: ϑ_s — temperatura powierzchni skrajnej, t_o — temperatura płynu, α — współczynnik przejmowania ciepła, n — normalna do powierzchni

Wymaga to aproksymacji różnicowej i ma ona postać

$$\lambda \frac{\vartheta_1 - \vartheta_s}{\Delta n} = \alpha(\vartheta_s - t_o). \quad (12.20)$$

Warunek brzegowy czwartego rodzaju o postaci

$$\lambda_1 \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_1 = \lambda_2 \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_2 \quad (12.21)$$

w zapisie różnicowym daje

$$\lambda_1 \frac{\vartheta_{i-1} - \vartheta_i}{\Delta x_1} = \lambda_2 \frac{\vartheta_i - \vartheta_{i+1}}{\Delta x_2}. \quad (12.22)$$

Najwygodniej jest przyjąć $\Delta x_1 = \Delta x_2$, ale nie jest to konieczne. W pierwszym i drugim ciele można przyjąć różne kroki siatki różnicowej. Jednak zmiana kroku obu siatek musi zachodzić na granicy

styku warstw. Gdy styk jest niedokładny, można do tego warunku wprowadzić opór stykowy (patrz rys. 11.1d).

12.3.3. Ustalone jednokierunkowe przewodzenie ciepła

Rozpatrzmy przykład chłodzenia nieskończonej płyty płaskiej, grubości $\delta = 1$, mającej wewnętrzne objętościowe źródła ciepła (patrz rys. 12.2).

Równanie różniczkowe dla tego przypadku ma postać

$$\frac{d\vartheta}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (12.23)$$

Przyjmujemy warunki brzegowe pierwszego rodzaju dla:

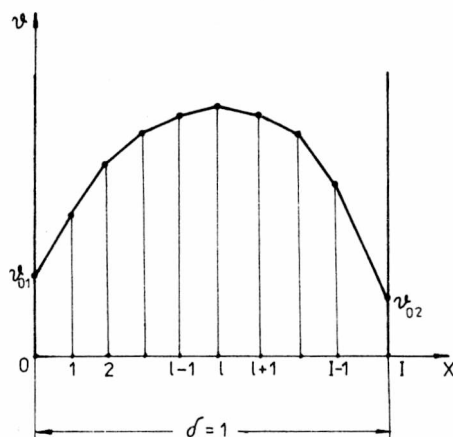
$$\vartheta_x = \vartheta_{01}, \quad \text{dla} \quad x = 0,$$

$$\vartheta_x = \vartheta_{02}, \quad \text{dla} \quad x = \delta.$$

Dyskretyzacja równania (12.23) prowadzi do wyrażenia

$$\frac{\vartheta_{i-1} - 2\vartheta_i + \vartheta_{i+1}}{(\Delta x)^2} = -\frac{q_v}{\lambda} \quad (12.24)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, I-1,$$



Rys. 12.2. Ilustracja do chłodzenia nieskończonej płyty płaskiej grubości δ , z wewnętrznymi źródłami ciepła

temperatury warstw skrajnych można wyeliminować posługując się warunkami brzegowymi i uzyskać następujący układ równań

$$\left. \begin{aligned} \frac{2(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{(\Delta x)^2} &= \frac{\vartheta_{01}}{(\Delta x)} + \frac{q_v}{\lambda} \\ \frac{-\vartheta_{i-1} + 2\vartheta_i - \vartheta_{i+1}}{(\Delta x)^2} &= \frac{q_v}{\lambda} \quad i = 2, 3, 4, \dots, I-2, \\ \frac{-\vartheta_{I-2} + 2\vartheta_{I-1}}{(\Delta x)^2} &= \frac{\vartheta_{02}}{(\Delta x)} + \frac{q_v}{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (12.25)$$

Układ ten da się przedstawić w postaci macierzowej

$$\mathbf{A}\vartheta = \mathbf{C}, \quad (12.26)$$

w której $\mathbf{A}$ jest macierzą współczynników.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (12.27)$$

zaś ϑ i C macierze kolumnowe, wektora niewiadomych i wektora wyrazów wolnych

$$\vartheta = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vdots \\ \vartheta_{I-1} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{I-1} \end{bmatrix}. \quad (12.28)$$

Wektor C_i wyrazów wolnych

$$C_i = \begin{cases} \frac{q_v}{\lambda} + \frac{\vartheta_{01}}{(\Delta x)^2} & \text{dla } i = 1 \\ \frac{q_v}{\lambda} & \text{dla } i = 2, 3, \dots, I-2. \\ \frac{q_v}{\lambda} + \frac{\vartheta_{02}}{(\Delta x)^2} & \text{dla } i = I-1 \end{cases} \quad (12.29)$$

Macierz A jest symetryczna. Tak jest zawsze dla ustalonego przewodzenia ciepła. Dla przewodzenia jednoosiowego jest to macierz diagonalna, a dla wieloosiowego pasmowa.

Zastosowanie warunku brzegowego trzeciego rodzaju nie nastrocza trudności, jeśli siatka różnicowa pokrywa się z granicami obszaru. Stosując ten warunek możemy także wyeliminować temperatury brzegu obszaru. Mogą wystąpić dodatkowe komplikacje, jeśli brzeg obszaru nie pokrywa się z siatką różnicową, np. brzeg jest krzywoliniowy — wtedy eliminacji temperatur skrajnych dokonamy posługując się wzorem (12.32).

Pochodną w kierunku normalnym do powierzchni zewnętrznej obszaru (patrz rys. 12.3) wyznaczamy z równania

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right)_1 \cos \varphi + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \right)_1 \sin \varphi, \quad (12.30)$$

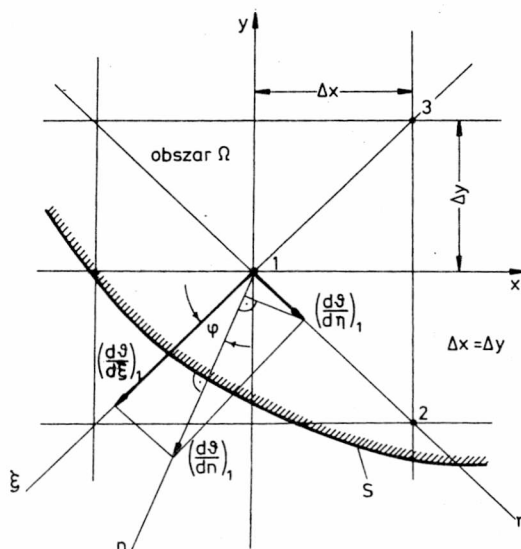
co w zapisie różnicowym daje

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \frac{\vartheta_3 - \vartheta_1}{h} \cos \varphi + \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{h} \sin \varphi, \quad (12.31)$$

gdzie $h = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Po wykorzystaniu warunku brzegowego (12.19) w (12.31) i przekształceniu otrzymamy wzór określający temperaturę ϑ_1 w węźle elementu na zakrzywionym brzegu obszaru

$$\vartheta_1 = \frac{\alpha t_o + \frac{\lambda}{h} (\vartheta_2 \sin \varphi + \vartheta_3 \cos \varphi)}{\alpha + \frac{\lambda}{h} (\sin \varphi + \cos \varphi)}. \quad (12.32)$$



Rys. 12.3. Element różnicowy skrajny z węzłem nr 1 przy zakrzywionym brzegu S obszaru Ω

12.3.4. Nieustalone jednoosiowe przewodzenie ciepła

Rozpatrujemy przypadek, gdy istnieją źródła ciepła o wydajności $\dot{q}_v$. Równanie różniczkowe (11.1) przyjmuje postać

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}_v}{\rho c_p} \quad (12.33)$$

z warunkami brzegowymi pierwszego rodzaju

$$\vartheta = \vartheta_{01}(\tau) \quad \text{dla } x = 0$$

$$\vartheta = \vartheta_{02}(\tau) \quad \text{dla } x = \delta$$

i warunkiem początkowym

$$\vartheta = \vartheta_p(x) \quad \text{dla } \tau = 0.$$

Jeżeli dokonamy podziału obszaru δ na I elementów, to krok siatki różnicowej $\Delta x = \delta/I$. Ponieważ współczynnik wyrównywania temperatury $a = \lambda/c_p \rho$ więc równanie (12.33) w zapisie różnicowym można zapisać

$$\frac{1}{a} \frac{d\vartheta_i}{d\tau} = \frac{\vartheta_{i-1} - 2\vartheta_i + \vartheta_{i+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{q_v}{\lambda}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, I-1 \quad (12.34)$$

z warunkami brzegowymi jw., zaś warunek początkowy

$$\vartheta_i = \vartheta_p(x_i) = \vartheta_{oi}.$$

Jest to układ równań różniczkowych zwyczajnych, który można zapisać w postaci macierzowej

$$\frac{1}{a} \frac{d\mathbf{g}}{d\tau} = \mathbf{A}\mathbf{g} + \mathbf{C}, \quad (12.35)$$

zaś

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 \quad \text{dla } \tau = 0.$$

Istnieją znane metody rozwiązywania układu równań różniczkowych zwyczajnych i można je zastosować wprost. Zwykle jednak układ ten rozwiązuje się przez numeryczne całkowanie w przedziale czasu

$$\tau^k \leq \tau \leq \tau^{k+1},$$

gdzie

$$\tau^{k+1} - \tau^k = \Delta\tau.$$

Jeśli przez $\bar{g}_i$ oraz $\bar{C}$ oznaczymy średnią całkową wartość w przedziale czasu $\Delta\tau$, to równanie (12.35) da się przedstawić w postaci

$$\frac{g_i^{k+1} - g_i^k}{a\Delta\tau} = \frac{\bar{g}_{i-1}^k - 2\bar{g}_i^k + \bar{g}_{i+1}^k}{(\Delta x)^2} + \bar{C}_i^k, \quad (12.36)$$

gdzie

$$\bar{g}_i^k = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau^k}^{\tau^{k+1}} g_i d\tau; \quad \bar{C}_i^k = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau^k}^{\tau^{k+1}} C_i d\tau. \quad (12.37)$$

Całki (12.37) można różnie aproksymować, choć zwykle stosuje się trzy formuły

$$\bar{g}_i^k = \begin{vmatrix} g_i^k \\ g_i^{k+1} \\ \frac{1}{2}(g_i^k + g_i^{k+1}) \end{vmatrix}; \quad \bar{C}_i^k = \begin{vmatrix} C_i^k \\ C_i^{k+1} \\ \frac{1}{2}(C_i^k + C_i^{k+1}) \end{vmatrix}, \quad (12.38)$$

wtedy dostajemy trzy najczęściej stosowane schematy różnicowe do rozwiązywania jednoosiowego nieustalonego przewodzenia ciepła z wewnętrznymi źródłami ciepła.

Schemat jawny (lub metoda ilorazu różnicowego wprost)

$$\frac{g_i^{k+1} - g_i^k}{a\Delta\tau} = \frac{g_{i-1}^k - 2g_i^k + g_{i+1}^k}{(\Delta x)^2} + C_i^k. \quad (12.39)$$

Schemat niejawny (metoda ilorazu różnicowego wstecznego)

$$\frac{g_i^k - g_i^{k-1}}{a\Delta\tau} = \frac{g_{i-1}^k - 2g_i^k + g_{i+1}^k}{(\Delta x)^2} + C_i^k. \quad (12.40)$$

oraz **schemat niejawny Cranka–Nicolsona** (lub metoda ilorazu różnicowego centralnego)

$$\frac{\vartheta_i^{k+1} - \vartheta_i^k}{a\Delta\tau} = \frac{\vartheta_{i-1}^{k+1} - 2\vartheta_i^{k+1} + \vartheta_{i+1}^{k+1}}{2(\Delta x)^2} + \frac{\vartheta_{i-1}^k - 2\vartheta_i^k + \vartheta_{i+1}^k}{2(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}(C_i^{k+1} + C_i^k). \quad (12.41)$$

Najchętniej jest stosowana metoda różnicowa wprost, ponieważ pozwala ona na rozwikłanie układu równań różnicowych względem poszukiwanej temperatury ϑ_i^{k+1} .

Jeżeli wprowadzimy różnicową liczbę znamioną Fouriera w postaci

$$\Delta Fo = \frac{a\Delta\tau}{(\Delta x)^2}, \quad (12.42)$$

równanie (12.41) po rozwikłaniu da się przedstawić w postaci

$$\vartheta_i^{k+1} = \Delta Fo \vartheta_{i-1}^k + (1 - 2\Delta Fo) \vartheta_i^k + \Delta Fo \vartheta_{i+1}^k + a\Delta\tau C_i^k \quad (12.43)$$

dla $i = 1, 2, \dots, I-1$.

Postulat fizycznej zgodności wymaga, by wszystkie współczynniki przy temperaturach były nieujemne, a stąd wynika dla jednoosiowego nieustalonego przewodzenia ciepła

$$\Delta Fo \leq \frac{1}{2}. \quad (12.44)^*)$$

Warunek ten zapewnia stabilność metody.

Są przypadki rozwiązań zagadnienia, gdzie metody ilorazu różnicowego wstecznego lub Cranka–Nicolsona mogą być efektywniej stosowane. Metoda ilorazu różnicowego wstecznego nie jest zależna od wielkości kroku czasowego. Metoda Cranka–Nicolsona jest natomiast dokładniejsza, ale nie zawsze jest zgodna z przebiegiem fizycznym zjawiska. Dla stabilności tej metody (ilorazu centralnego) jest wymagany warunek

$$\Delta Fo \leq 2. \quad (12.45)$$

12.4. Metoda bilansów elementarnych

Metoda ta jest szczególnym przypadkiem ogólnej metody różnic skończonych. Jej zaletą jest zawsze zgodność z fizycznym przebiegiem zjawiska.

Dla poszczególnych układów dyskretnych przeprowadzamy bilans energii i dzięki zastosowaniu prawa Fouriera dochodzimy do układu równań różnicowych. Nie musimy korzystać z równań różniczkowych dla danego brzegowego zagadnienia przewodzenia ciepła – zresztą równania te wprowadzono opierając się na bilansie energii (patrz p. 7.2).

*) Dla dwuosowego nieustalonego przewodzenia ciepła z takimi samymi warunkami brzegowymi stabilność jest zapewniona, gdy $\Delta Fo \leq 1/4$.

Metoda ta jest stosowana zwłaszcza w obszarach o nieregularnym brzegu i w układach wielowarstwowych. O ile wewnątrz obszaru projektuje się równomierne podział siatki różnicowej, o tyle na brzegu może być element nieregularny dostosowany do kształtu powierzchni brzegu — patrz (12.33).

W obszarach złożonych z wielu warstw o różnej przewodności cieplnej można stosować różny krok siatki różnicowej w poszczególnych warstwach, jednak zmiana kroku musi zachodzić na powierzchni rozdziału warstw.

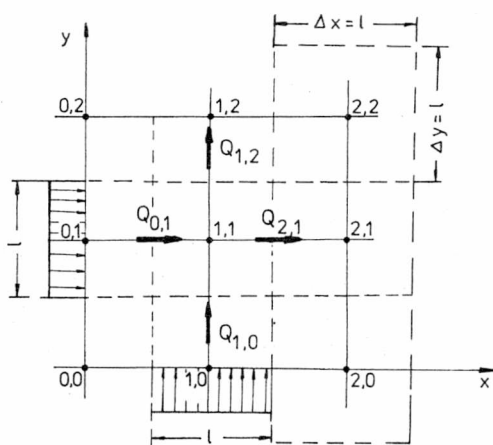
Metoda bilansów elementarnych umożliwia uwzględnienie zmian od temperatury współczynników materiałowych — przykład podano dalej. Zresztą w ogóle metody numeryczne umożliwiają uwzględnienie wielu nieliniowości.

Istotą metody jest elementarne obliczanie oporów, a wygodniej — przewodności cieplnych między elementami dyskretnymi. Z kolei liczymy elementarne strumienie ciepła stosując odpowiednie równanie przewodnictwa cieplnego (Fouriera), przystosowane do danego układu odniesienia. Po sporządzeniu elementarnego bilansu energii uzyskujemy równanie różnicowe do rozwiązania danego zagadnienia brzegowego.

Założmy, że mamy do czynienia z obszarem Ω o powierzchni S zewnętrznej. Dzielimy obszar na elementy różnicowe (dyskretne) i numerujemy je. Elementy skrajne domykamy płaszczyznami o położeniu zbliżonym do elementu powierzchni S ewentualną powierzchnią cylindryczną. Sposób postępowania z brzegiem zakrzywionym podano w p. 12.3.3.

Weźmy na uwagę płaski obszar, w którym podział wewnętrzny przedstawiono na rys. 12.4, gdzie stosujemy siatkę równomierną, tzn. $\Delta x = l$ oraz $\Delta y = l$. W zasadzie najwygodniej jest umieścić węzły siatki różnicowej w środku ciężkości elementu dyskretnego. Można jednak także postępować inaczej.

12.4.1. Ustalone dwukierunkowe przewodzenie ciepła



Rys. 12.4. Ilustracja do obliczeń dwukierunkowego przewodzenia ciepła

Na rysunku 12.4 przedstawiono elementy środkowe siatki różnicowej. Jeśli przekazywanie ciepła jest ustalone, to z bilansu elementarnego wynika

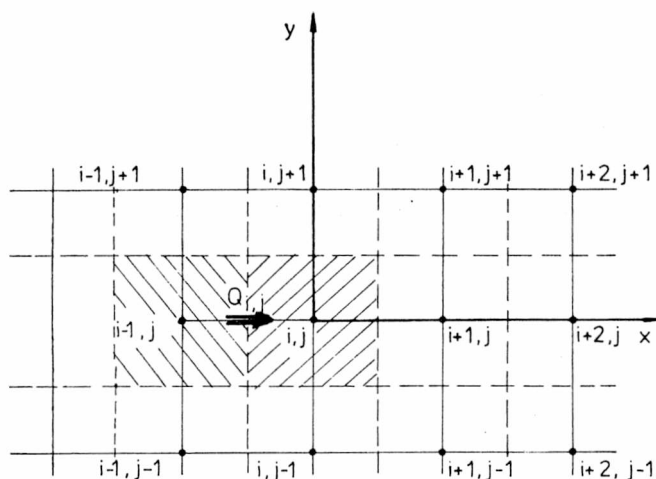
$$Q_{01} + Q_{10} = Q_{12} + Q_{21}. \quad (12.46)$$

Strumień ciepła interpretujemy jako płynące kanałami szerokości l i grubości 1 , ogólnie jeśli rozważamy dowolny węzeł i, j — patrz rys. 12.5, to

$$Q_{i,j} = S_{i,j} \frac{\lambda_{i,j}}{l} (\vartheta_i - \vartheta_j) = K_{ij} (\vartheta_i - \vartheta_j), \quad (12.47)$$

gdzie

$K_{i,j} = \frac{\lambda_{i,j} S_{i,j}}{l}$ – przewodność cieplna między elementami i i j , co jest odwrotnością oporu cieplnego między tymi elementami (tu $R_{i,j} = l/\lambda_{i,j}$)^{*)},
 zaś $\lambda_{i,j}$ – współczynnik przewodzenia ciepła między tymi elementami,
 zaś $S_{i,j}$ – powierzchnia przewodząca strumień $Q_{i,j}$ między elementami dyskretnymi siatki i i j .



Rys. 12.5. Dwuosiowy schemat różnicowy (oznaczenie węzłów dwucyfrowe, oznaczenie elementów jednocyfrowe);

 – element i ,  – element j

Ogólnie możemy zapisać bilans energii

$$\begin{aligned} K_{i-1,j}(\vartheta_{i-1,j} - \vartheta_{ij}) + K_{i,j+1}(\vartheta_{i,j+1} - \vartheta_{ij}) = \\ = K_{i+1,j}(\vartheta_{ij} - \vartheta_{i+1,j}) + K_{i,j-1}(\vartheta_{ij} - \vartheta_{i,j-1}), \end{aligned} \quad (12.48)$$

dlatego szukana temperatura ϑ_i w węźle i, j

$$\vartheta_i = \frac{K_{i-1,j}\vartheta_{i-1,j} + K_{i,j+1}\vartheta_{i,j+1} + K_{i+1,j}\vartheta_{i+1,j} + K_{i,j-1}\vartheta_{i,j-1}}{K_{i-1,j} + K_{i,j+1} + K_{i+1,j} + K_{i,j-1}} \quad (12.49)$$

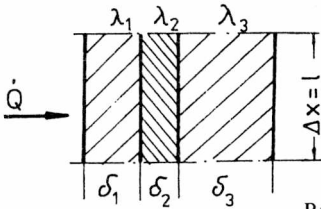
jest średnią ważoną z temperatur węzłów sąsiednich. Jeśli ośrodek jest izotropowy, to wzór (12.49) przechodzi w

$$\vartheta_i = \frac{1}{4}(\vartheta_{i-1,j} + \vartheta_{i,j+1} + \vartheta_{i+1,j} + \vartheta_{i,j-1}). \quad (12.50)$$

^{*)} Należy zwrócić uwagę, że w porównaniu do ogólnie rozpatrywanego pojęcia oporu cieplnego, w ośrodkach dyskretnych we wzorze określającym R_{ij} występuje w mianowniku powierzchnia.

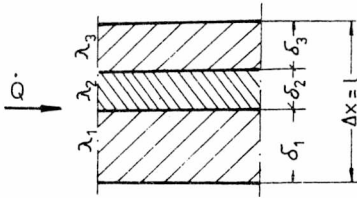
Jeżeli obszar dyskretny składa się z n warstw złożonych szeregowo (patrz rys. 12.6), to

$$R_{ij} = \frac{l}{S_{i,j}} \sum_{m=1}^n \frac{\delta_m}{\lambda_m}, \quad \text{tzn.} \quad K_{ij} = \frac{1}{\frac{1}{S_{i,j}} \sum_{m=1}^n \frac{\delta_m}{\lambda_m}}, \quad (12.51)$$



Rys. 12.6. Opory cieplne łączone szeregowo

natomiast, gdy ustawienie jest równoległe (patrz rys. 12.7),



Rys. 12.7. Opory cieplne łączone równoległe

$$K_{i,j} = \frac{1}{\frac{1}{S_{i,j}} \sum_{m=1}^n \delta_m \lambda_m} \cdot l. \quad (12.52)$$

12.4.2. Nieustalone dwukierunkowe przewodzenie ciepła

Bilans dla elementu i o węźle i, j

$$C_i \frac{d\vartheta_i}{d\tau} = \sum_j Q_{i,j} + V_i \dot{q}_{vi}, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3, \dots, I-1 \\ j = 1, 2, 3, \dots, J-1 \end{matrix} \quad (12.53)$$

gdzie $C_i = c_p \rho V_i$ – pojemność cieplna dyskretnego elementu siatki o objętości V_i ,
cieple właściwym c_p i gęstości ρ .

Zależnie od aproksymacji prawej strony równania (12.53) uzyskamy następujące schematy różnicowe, jeśli k oznacza numer kroku czasowego

– jawny (iloraz różnicowy wprost)

$$\frac{C_{i,j}}{\Delta\tau} (\vartheta_i^{k+1} - \vartheta_i^k) = \sum_j Q_{i,j}^k + V_i \dot{q}_{vi}^k \quad (12.54)$$

– niejawnny (**iloraz różnicowy wsteczny**)

$$\frac{C_{i,j}}{\Delta\tau}(\vartheta_i^{k+1} - \vartheta_i^k) = \sum_j Q_{i,j}^{k+1} + V_{i,j} \dot{q}_{vi,j}^{k+1} \quad (12.55)$$

– niejawnny (**iloraz różnicowy centralny – Cranka–Nicolsona**)

$$\frac{C_{i,j}}{\Delta\tau}(\vartheta_i^{k+1} - \vartheta_i^k) = \frac{1}{2}(\sum Q_{i,j}^{k+1} + \sum Q_{i,j}^k + V_i \dot{q}_{vi}^{k+1} + V_i \dot{q}_{vi}^k) \quad (12.56)$$

Równanie bilansu dla dowolnego elementu i o węźle i, j , po zastosowaniu schematu różnicowego jawnego (12.54), przyjmie postać

$$C_i(\vartheta_i^{k+1} - \vartheta_i^k) = \Delta\tau[K_{i,j}(\vartheta_{i-1}^k - \vartheta_i^k) + K_{i+1,j}(\vartheta_{i+1}^k - \vartheta_i^k) + K_{i,j-1}(\vartheta_{j-1}^k - \vartheta_i^k) + K_{i,j+1}(\vartheta_{j+1}^k - \vartheta_i^k) + V_i \dot{q}_{vi}^k]. \quad (12.57)$$

Równanie to łatwo rozwikłać względem poszukiwanej temperatury ϑ_i^{k+1} .

12.4.3. Nieustalone trójosiowe przewodzenie ciepła o zmiennych z temperaturą parametrach ciała

Jeżeli parametry określające właściwości ciała są zmienne, to równanie przewodnictwa ciepłego jest bardzo skomplikowane i ma postać

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{\lambda}{c\rho} \nabla^2 \vartheta + \frac{1}{c\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta} \left[\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right)^2 \right]. \quad (12.58)$$

Jedynie dla ciał stałych i cieczy można przyjąć, że gęstość jest stała; w dokładnych obliczeniach należy uwzględnić zmianę współczynnika λ przewodzenia ciepła i c ciepła właściwego od temperatury. Dla dość dużego zakresu temperatury można przyjąć, że zależność ta jest liniowa, czyli

$$\lambda = \lambda_o + b\vartheta, \quad (12.59)$$

$$c = c_o + \beta\vartheta, \quad (12.60)$$

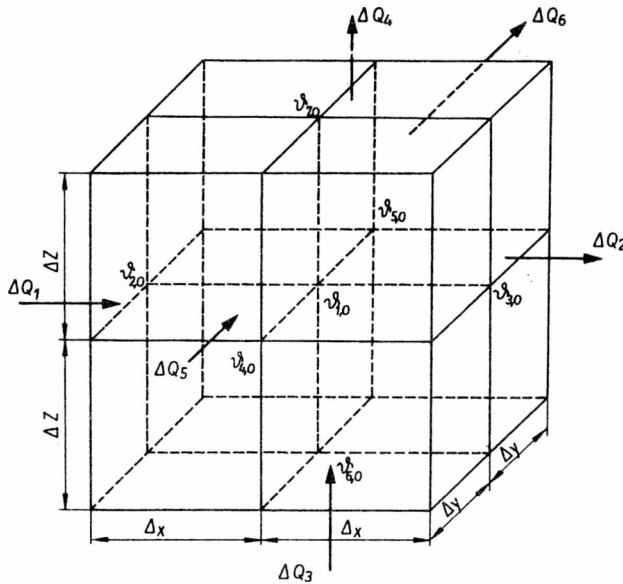
gdzie

b i β są współczynnikami stałymi,

λ_o i c_o są współczynnikami λ i c w umownej temperaturze $\vartheta = 0$; są to wielkości stałe.

Do rozwiązania zagadnienia przewodzenia ciepła w sposób analityczny równanie (11.94) jest zbyt skomplikowane; ma znaczenie tylko teoretyczne. Wpływ zmienności

parametrów λ i c możemy uwzględnić stosując metodę przybliżonego rozwiązania, metodę bilansów elementarnych. W tym celu ciało dzielimy na elementarne sześciany o bokach Δx , Δy , Δz (rys. 12.8).



Rys. 12.8. Podział ciała na elementarne sześciany: $\vartheta_{1,0} \dots \vartheta_{8,0}$ — temperatury w węzłach w chwili początkowej, $\Delta Q_1 \dots \Delta Q_6$ — częściowe strumienie przewodzonego ciepła

Najwygodniej jest stosować stały skok podziału we wszystkich trzech kierunkach. Podział musi być na tyle gęsty, aby w obszarze elementarnego sześcianu można było przyjąć, iż parametry ρ , c , λ są stałe^{*)}; nie zależą od zmieniającej się w bardzo małym stopniu temperatury w sześcianie. Podczas przeprowadzania bilansu strumieni ciepła przewodzonych przez zewnętrzne ściany wybranego (dowolnego) sześcianu przyrost jego temperatury ϑ w czasie liczymy jako sumę strumieni ciepła

$$c_t \rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{d\vartheta}{d\tau} = (c_o + \beta \vartheta) \rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{d\vartheta}{d\tau} = \sum_{i=1}^6 \Delta \dot{Q}_i. \quad (12.61)$$

Dopływający strumień elementarny wzdłuż osi x

$$\Delta \dot{Q}_1 = -\lambda_{\vartheta} \frac{\vartheta_{2,0} - \vartheta_{1,0}}{\Delta x} \Delta y \Delta z = -(\lambda_o + b \vartheta_{1-\Delta x/2,0}) \frac{\vartheta_{2,0} - \vartheta_{1,0}}{\Delta x} \Delta y \Delta z, \quad (12.62)$$

gdzie $\vartheta_{1-\Delta x/2,0} = \vartheta_{1,0} + \frac{\vartheta_{2,0} - \vartheta_{1,0}}{2} = \frac{\vartheta_{1,0} + \vartheta_{2,0}}{2}$.

^{*)} Dla tak pomyślanego obszaru znika drugi człon prawej strony równania (12.58).

Jeżeli podobnie obliczymy strumienie dla kierunków y i z (dopływające i odpływające) i wstawimy je do (12.58), to po rozwiązaniu otrzymujemy wzór do obliczenia temperatury ϑ w węźle 1 po upływie czasu $\Delta\tau$, czyli

$$\begin{aligned}\vartheta_{1,1} = & A_1\vartheta_{1,0} + A_2\vartheta_{2,0} + A_3\vartheta_{3,0} + A_4\vartheta_{4,0} + \\ & + A_5\vartheta_{5,0} + A_6\vartheta_{6,0} + A_7\vartheta_{7,0}.\end{aligned}\quad (12.63)$$

Temperatury oznacza się dwoma indeksami, z których pierwszy odnosi się do położenia rozważanego punktu, drugi do okresu trwania zjawiska mierzonego liczbą $\Delta\tau$ kroków czasowych. $A_1, \dots, A_7$ są to stałe, które należy liczyć według wzoru

$$\begin{aligned}A_1 = & 1 - \frac{\Delta\tau(2\lambda_o + b\vartheta_{1,0})}{\rho(c_o + \beta\vartheta_{1,0})} \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right), \\ A_2 = & \frac{\Delta\tau(\lambda_o + \frac{1}{2}b\vartheta_{2,0})}{\rho\Delta x^2(c_o + \beta\vartheta_{1,0})}, \\ A_3 = & \frac{\Delta\tau(\lambda_o + \frac{1}{2}b\vartheta_{3,0})}{\rho\Delta x^2(c_o + \beta\vartheta_{1,0})}, \\ A_4 = & \frac{\Delta\tau(\lambda_o + \frac{1}{2}b\vartheta_{4,0})}{\rho\Delta y^2(c_o + \beta\vartheta_{1,0})}, \\ & \dots\dots\dots \\ A_7 = & \frac{\Delta\tau(\lambda_o + \frac{1}{2}b\vartheta_{7,0})}{\rho\Delta z^2(c_o + \beta\vartheta_{1,0})}.\end{aligned}\quad (12.64)$$

W równaniu (12.61) określamy temperaturę $\vartheta_{1,1}$ danego dowolnego punktu po upływie interwału czasowego $\Delta\tau$ za pomocą temperatur w sąsiednich węzłach, przed upływem tego czasu. Aby zapewnić dokładność obliczeń, należy przyjmować nie większe interwały czasowe niż mniejszy z wyliczonych $\Delta\tau'_{\max}$ i $\Delta\tau''_{\max}$

$$\Delta\tau'_{\max} = \frac{\rho(c_o + \beta\vartheta_{\max})}{(2\lambda_o + b\vartheta_{\max}) \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)}, \quad (12.65)$$

$$\Delta\tau''_{\max} = \frac{\rho(c_o + \beta\vartheta_{\min})}{(2\lambda_o + b\vartheta_{\min}) \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)}, \quad (12.66)$$

gdzie $\vartheta_{\max}$ i $\vartheta_{\min}$ – maksymalna i minimalna temperatura ciała występująca w czasie trwania zjawiska [19].

12.5. Metoda elementów skończonych

Metoda ta została opracowana przez Zienkiewicza i zespół z nim współpracujący [32], [33] do numerycznego rozwiązania zagadnień wytrzymałościowych. Okazało się, że opracowana metoda może służyć także do określenia teorii pól potencjałów, a więc i pól temperatury. Fizykalna zgodność metody w zagadnieniach wytrzymałości prowadzi do szukania ekstremum funkcjonału, którym w tym przypadku jest minimum energii potencjalnej układu. Energia ta w stanie równowagi osiąga minimum. W zastosowaniu do pól temperatury takiej zgodności nie ma. Jedynie dla przypadków ustalonego przewodzenia ciepła można doszukać się zgodności fizykalnej metody, ponieważ ekstremum funkcjonału jest minimum produkcji źródeł entropii (minimalne rozpraszanie energii). Jednak brak fizykalnej zgodności w innych przypadkach nie ogranicza możliwości stosowania metody elementów skończonych do rozwiązania wszystkich zagadnień ustalenia pola temperatury. Czyli, że metoda ta jest ogólna, podobnie jak metoda różnic skończonych. Zaletą tej metody jest możliwość jej stosowania nie tylko do obszarów foremnych, ale także do dowolnego kształtu obszaru geometrycznego jak i czasu, co nie prowadzi do znaczącego utrudnienia efektywności metody.

12.5.1. Ogólne sformułowanie metody

Rozważany obszar geometryczny dzielimy na skończoną ilość elementów, w których chcemy określić poszukiwaną temperaturę. Oczywiście błąd metody maleje po zwiększeniu liczby elementów. Kształt elementów dyskretyzacji obszaru w zasadzie może być dowolny, także o krzywoliniowych brzegach lecz najczęściej stosuje się elementy kwadratowe. Stosując transformację konforemą elementy takie można przekształcić w prostokąty lub czworoboki krzywoliniowe. Jednak najwygodniej jest aproksymować obszar elementami trójkątnymi, gdyż wtedy postać funkcji kształtu jest najprostsza. Dla tych kształtów najłatwiejsza jest aproksymacja złożonych kształtów obszaru, jak też jest najwięcej gotowych komercyjnych programów obliczeniowych.

Poszukiwaną temperaturę określamy w węzłach siatki stosując funkcję próbną

$$T(\chi) = \sum_i^n N_i(\chi) T_i, \quad (12.67)$$

gdzie $\chi = (\chi_1 \dots \chi_m)$, χ są zmiennymi zarówno przestrzennymi, jak i czasowymi, a m jest wymiarem zagadnienia.

Sumowanie przebiega przez wszystkie węzły siatki $i = (1, 2, \dots, n)$. N_i jest funkcją kształtu.

12.5.2. Funkcje kształtu

Funkcja kształtu zgodnie z (12.67) musi spełniać warunki

$$\begin{aligned} N_i &= 1 \text{ dla wężła } i \\ N_i &= 0 \text{ dla pozostałych wężłów.} \end{aligned} \quad (12.68)$$

Poza tym zależnie od rozwiązywanego zagadnienia brzegowego funkcja ta w obszarze rozpatrywanego elementu różnicowego musi być ciągła, a dla zagadnień nieustalonego przekazywania ciepła powinna mieć ciągłą pochodną w tym elemencie. Ten drugi warunek można niekiedy ominąć stosując przekształcenie całkowania obszaru objętościowego w powierzchniowe za pomocą funkcji Greena.

Jednak pozostańmy przy elementach powierzchniowych trójkątnych. Wtedy zamiast układu odniesienia ortogonalnego możemy posłużyć się zmiennymi powierzchniowymi p .

Zgodnie z rys. 12.9 współrzędne wierzchołków możemy określić jako

$$\begin{aligned} x &= p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3, \\ y &= p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3, \\ p_1 + p_2 + p_3 &= 1. \end{aligned} \quad (12.69)$$

W punkcie 1 $p_1 = 1$, a p_2 i $p_3 = 0$. Spełniony jest więc warunek (12.68). Po rozwiązaniu układu równań (12.69) otrzymamy

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2}(a_1 + b_1 x + b_1 y)F, \\ p_2 &= \frac{1}{2}(a_2 + b_2 x + b_2 y)F, \\ p_3 &= \frac{1}{2}(a_3 + b_3 x + b_3 y)F, \end{aligned} \quad (12.70)$$

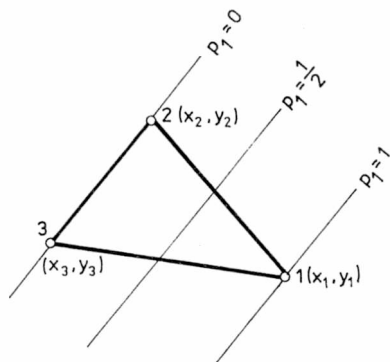
gdzie F jest powierzchnią trójkąta z rys. 12.9.

Powierzchnię tę można obliczyć rozwiązując macierz

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}. \quad (12.71)$$

Współczynniki wielomianów (12.69) można przedstawić jako

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j, \\ b_i &= y_j - y_k, \\ c_i &= x_k - x_j. \end{aligned} \quad (12.72)$$



Rys. 12.9. Element różnicowy trójkątny w układzie zmiennych p powierzchniowych. Oznaczono położenie wężłów w układzie prostokątnym x, y

Najprostszymi funkcjami kształtu dla powierzchni złożonej z elementów różnicowych trójkątnych są

$$N_1 = p_1; \quad N_2 = p_2; \quad N_3 = p_3. \quad (12.73)$$

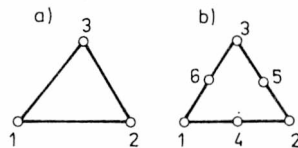
Stosując związek rekurencyjny, złożony z odpowiednich wielomianów La Grange'a [32], można uzyskać funkcje kształtu wyższych rzędów (wymagane przy ciągłości pochodnych funkcji kształtu); dla rzędu drugiego

$$N_i = (2p_i - 1)p_i, \quad i = 1, 2, 3, 1, 2 \dots \quad (12.74)$$

dla węzłów narożnych,

$$N_k = \frac{9}{4} p_i p_{i+1} (3p_i - 1), \quad k = 4, 5, 6 \quad (12.75)^*)$$

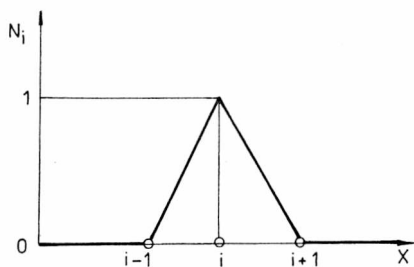
dla węzłów leżących na bokach (rys. 12.10).



Rys. 12.10. Element różnicowy trójkątny z węzłami: *a* — pierwszego rzędu, *b* — drugiego rzędu

Dla elementu różnicowego jednoosiowego funkcję kształtu można przedstawić wykreślić jak na rys. 12.11. Wtedy

$$N_i = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} & \text{dla } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x}{\Delta x_i} & \text{dla } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{dla } x < x_{i-1} \quad \text{oraz} \quad x > x_{i+1}. \end{cases} \quad (12.76)$$



Rys. 12.11. Funkcja kształtu pierwszego rzędu dla *i*-tego elementu jednoosiowego przewodzenia ciepła

*) *i* jest cykliczne; dla *i* = 3, *i* + 1 = 1.

12.5.3. Rozwiązanie zagadnienia

Funkcję próbną (12.67) rozwiązuje się za pomocą opisu całkowego. Wartością poszukiwaną są temperatury węzłów. Temperatury te wyznacza się z układów równań.

Zależnie od sposobu formułowania równań rozróżniamy podejścia: wariacyjne, residualne (Galerkina) i bilansowe.

Formułowanie **wariacyjne** polega na poszukiwaniu funkcjonału takiego, by jego rozwiązanie ekstremalne (tutaj minimum) było rozwiązaniem różniczkowym zagadnienia.

Formułowanie **bilansowe** polega na bilansowaniu odpowiednich skalarów w obszarach kontrolnych związanych z węzłami siatki różnicowej. Postępuje się podobnie jak w metodzie bilansów elementarnych lub metodzie różnic skończonych – rozwiązanie to ma uznanie ze względu na zgodność z fizycznym przebiegiem zjawiska, ponieważ w zagadnieniach przewodzenia ciepła skalarom tym jest energia. Należy tu zwrócić uwagę, że węzły w metodzie bilansów elementarnych i różnic skończonych leżą w środku ciężkości elementów różnicowych, a w metodzie elementów skończonych (pierwszego rzędu) w narożach.

Jednak najczęściej jest stosowane sformułowanie residualne Galerkina. Układa się równania różnicowe dla poszczególnych węzłów i wymaga, by iloczyn niedokładności pola temperatur i wagi przyporządkowanej poszczególnym punktom był równy zeru. Rolę wagi w tym rozwiązaniu spełnia funkcja kształtu. Jest to typowe zagadnienie residualne, najczęściej stosowane w rozwiązywaniu zagadnień brzegowych przewodzenia ciepła.

12.5.4. Ustalone przewodzenie ciepła

Przypadek ten opisuje równanie różniczkowe

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) + q_v = 0, \quad (12.77)$$

które w zapisie skróconym da się przedstawić w postaci

$$\nabla(\lambda \nabla \vartheta) + \dot{q}_v = 0 \quad (12.78)$$

oraz warunki brzegowe pierwszego rodzaju na powierzchni S_1 , drugiego na powierzchni S_2 i trzeciego na S_3 , zaś $S = S_1 + S_2 + S_3$ (patrz p. 11.1).

Dane zagadnienie brzegowe rozwiążemy stosując metodę residualną Galerkina.

Zastępując rozwiązanie dokładne (12.78) funkcją próbną

$$\bar{\vartheta} = \sum_j N_j \vartheta_j, \quad (12.79)$$

która jest rozwiązaniem przybliżonym, otrzymamy

$$\nabla(\lambda \nabla \bar{\vartheta}) + \dot{q}_v = R, \quad (12.80)$$

gdzie R jest niedokładnością rozwiązania.

Najbardziej przybliżone będzie takie rozwiązanie, które minimalizuje R do $R_{\min}$.

Jeżeli przyjmiemy, że w całym obszarze o objętości Ω i powierzchni zewnętrznej S_i rozwiązania $R = 0$, to rozwiązanie przybliżone staje się dokładne (wtedy zamiast $\bar{\vartheta}$ możemy użyć ϑ). Napiszemy

$$\int_V \omega R dV = 0 \quad (12.81)$$

gdzie

ω — waga (residuum) o postaci dowolnej funkcji współrzędnych, która spełnia warunki ciągłości,

V — objętość obszaru.

Czyli

$$\int_V \omega (\nabla(\lambda \nabla \vartheta) + \dot{q}_v) dV = 0. \quad (12.82)$$

Warunki brzegowe też muszą być spełnione, czyli stosując funkcję próbną do tych warunków, możemy postąpić podobnie, więc

$$\sum_i \int_{S_i} \omega_i B_i(\vartheta) dS_i = 0. \quad (12.83)$$

Zgodnie z regułami matematycznymi warunek (12.82) i (12.83) możemy traktować łącznie, czyli

$$\int_V \omega [\nabla(\lambda \nabla \vartheta) + q_v] dV + \sum_i \int_{S_i} \omega_i B_i(\vartheta) dS_i = 0. \quad (12.84)$$

Ponieważ w operatorze różniczkowym w równaniu (12.84) występują pochodne pierwszego i drugiego rodzaju, waga ω powinna mieć także ciągłą pierwszą pochodną. Możemy tego uniknąć stosując przekształcenie całkowe Greena I rodzaju i zamieniając całkę objętościową na powierzchniową. Obniżamy rząd pochodnej. Wtedy wystarczy ciągłość ω .

Ponieważ rozwiązanie dokładne zastąpiliśmy funkcją próbną, najwygodniej zastąpić wagę rozwiązania funkcją kształtu, która spełnia wymagane warunki

$$\omega = N_i, \quad i = 1, 2, \dots, I; \quad (12.85)$$

ostatecznie otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned} \int_i \nabla N_i \lambda \nabla \vartheta - \int_V N_i \dot{q}_v dV + \int_{S_2} N_i \dot{q}_S dS + \int_{S_3} N_i \alpha (\vartheta - t_o) dS - \\ - \int_{S_1} N_i \lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial n} \right)_S dS = 0, \end{aligned} \quad (12.86)$$

który w zapisie macierzowym ma postać

$$A \vartheta = C \quad (12.87)$$

gdzie

$$A_{ij} = \int_V \Delta N_i \lambda \nabla N_j dV + \int_{S_3} N_i \alpha N_j dS - \int_{S_1} N_i \lambda \frac{\partial N_j}{\partial n} dS, \quad (12.88)$$

$$C_i = \int_i N_i q_v dV - \int_{S_2} N_i \dot{q}_S dS + \int_{S_3} N_i \alpha t_o dS. \quad (12.89)$$

Macierz A jest symetryczna. Ponieważ funkcje kształtu mają rozwiązanie niezerowe tylko w obszarze elementu i , lepiej całki po objętości rozbić na szereg m całek w objętości i -tego elementu. Całki powierzchniowe wystąpią tylko w elementach leżących na obrzeżach S obszaru Ω , więc też można sumować po elementach całek powierzchniowych, czyli

$$A_{i,j} = \sum_m \left[\int_{V_m} \nabla N_i \lambda \nabla N_j dV + \int_{S_{3m}} \alpha N_j dS - \int_{S_{1m}} N_i \lambda \frac{\partial N_j}{\partial n} dS \right] \quad (12.90)$$

$$C_i = \sum_m \left[\int_{V_m} N_i q_v dV - \int_{S_{2m}} N_i q_o dS + \int_{S_{3m}} N_i \alpha t_o dS \right] \quad (12.91)$$

gdzie

m — indeks elementu zawierającego i -ty i j -ty węzeł,

V_m — objętość m -tego elementu zawierającego i -ty węzeł,

S_{im} — pole powierzchni zewnętrznej (na brzegu S obszaru Ω) m -tego elementu zawierającego i -ty węzeł.

Sumowanie przebiega przez wszystkie elementy z i -tymi i j -tymi węzłami (łącznie z $i = j$). W całkach powierzchniowych występują tylko te elementy, które leżą na brzegu obszaru.

12.6. Metoda Monte Carlo

Jest to metoda statystyczna (probabilistyczna), w której temperatura jako zmienna losowa w węźle i,j jest określona równaniem

$$\vartheta_{i,j} = \frac{1}{m} \sum_m n_m \vartheta_s, \quad (12.92)$$

gdzie m — łączna ilość ścieżek z węzła i,j , a kończących się na brzegu obszaru o temperaturze ϑ_s , określa wynik działań losowych.

Nazwa metody wywodzi się z nazwy miejscowości, w której znajduje się słynne kasyno gier. Gry te w swej istocie są oparte na zdarzeniach losowych.

Cechą tej metody jest konieczność zliczania dużej liczby faktów, aby wynik był dość dokładny. Poza tym chodzi o to, by fakty te zachodziły w sposób przypadkowy, czyli jest wymagany tzw. generator zdarzeń losowych.

Metoda ta powstała z adaptacji twierdzenia o zmiennej losowej.

Jeżeli zmienna losowa ξ_R ma gęstość rozkładu $f(\eta)$, to rozkład R zmiennej losowej

$$R = \int_{-\infty}^{\xi} f(\eta) d\eta \quad (12.93)$$

jest równomierny w przedziale $(0,1)$. Narzuca to warunek na generator zdarzeń losowych.

Metodę tę daje się stosować do obliczania temperatury w pewnym obszarze. Na przykład przydatne do tej metody jest równanie różnicowe (12.48) dla obszaru ograniczonego przynajmniej dwoma brzegami

$$\vartheta_{i,j} = k_{i-1,j}\vartheta_{i-1,j} + k_{i,j-1}\vartheta_{i,j-1} + k_{i+1,j}\vartheta_{i+1,j} + k_{i,j+1}\vartheta_{i,j+1}, \quad (12.94)$$

w którym suma wyników

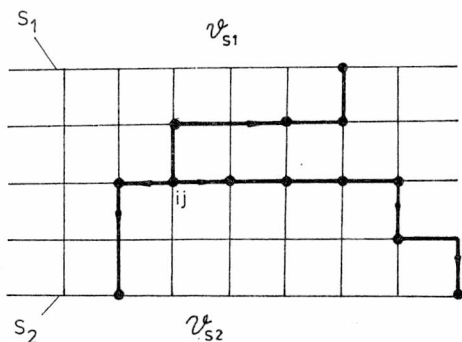
$$\sum k_{i,j} = 1. \quad (12.95)$$

Dla każdego węzła o położeniu i,j ustala się liczby zdarzeń losowych, które decydują, do którego sąsiedniego węzła należy przejść, przy czym liczby te są rozdzielone proporcjonalnie do współczynnika $k_{i,j}$ dla danego węzła.

W ten sposób, startując zawsze od wybranego węzła i,j i przechodząc do węzłów sąsiednich według liczb losowych, realizujemy tzw. błądzenie w siatce różnicowej, które kończy się z chwilą osiągnięcia brzegu S_1 lub S_2 obszaru o znanej temperaturze ϑ_{S_1} lub ϑ_{S_2} (patrz rys. 12.12).

Po zebraniu odpowiednio dużej liczby m błędzeń, temperaturę z węzła i,j określamy ze wzoru

$$\begin{aligned} \vartheta_{i,j} &= \frac{m_{i,j=1}\vartheta_{S_1} + m_{i,j=2}\vartheta_{S_2} + \dots}{m_{i,j-1} + m_{i,j-2} + \dots} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n m_{i,j}\vartheta_S}{\sum_{i=1}^m m_{i,j}}. \end{aligned} \quad (12.96)$$



Rys. 12.12. Przykład błądzenia w metodzie Monte Carlo

Zaletą tej metody jest to, że nie musimy do określenia temperatury $\vartheta_{i,j}$ w wybranym węźle wyznaczać temperatur dla wszystkich węzłów obszaru, co może być

niekiedy korzystniejsze, jeśli chodzi o zakres czynności obliczeniowych. Obecnie jednak, wobec silnie rosnącego zakresu pamięci komputerów i komercyjnych programów obliczeniowych, udogodnienie to nie jest już takie istotne.

Metoda Monte Carlo obecnie jest stosowana do zagadnień przekazywania ciepła przez promieniowanie w układach zamkniętych.

Pewną modyfikacją metody Monte Carlo jest metoda exodus (przeganiania), która nie wymaga generowania liczb losowych. Z rozważanego punktu o parametrach i, j rozpoczyna się ruch błądzący odpowiednio dużej ilości cząstek, które przepływają przez sąsiednie węzły i osiągają brzeg obszaru. W metodzie tej nie wszystkie cząstki muszą osiągnąć brzeg, ale na tyle licznie, by można z dużą dokładnością określić prawdopodobieństwo osiągnięcia w rozważanym punkcie temperatury $\vartheta_{i,j}$. Metody te przedstawiono w publikacjach [3], [7], [30].

12.7. Metoda wykreślna Schmidta–Bindera dla nieustalonego jednoosiowego przewodzenia ciepła

Do wielu przypadków jednoosiowego przewodzenia ciepła można zastosować wykreślną metodę rozwiązania, podaną dla płyty płaskiej przez Schmidta, a udoskonaloną przez Bindera. Dla takiego przewodzenia różniczkowe równanie Fouriera ma postać

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}. \quad (12.97)$$

Równanie to zastępujemy przybliżonym równaniem różnicowym

$$\frac{\Delta \vartheta}{\Delta \tau} = a \frac{\Delta^2 \vartheta}{\Delta x^2}, \quad (12.98)$$

w którym zgodnie z rys. 11.14,

$$\frac{\Delta \vartheta}{\Delta \tau} = \frac{\vartheta_{21} - \vartheta_{20}}{\Delta \tau}, \quad (12.99)$$

$$\frac{\Delta^2 \vartheta}{\Delta x^2} = \frac{\Delta \left(\frac{\Delta \vartheta}{\Delta x} \right)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\vartheta_{30} - \vartheta_{20}}{\Delta x} - \frac{\vartheta_{20} - \vartheta_{10}}{\Delta x} \right) = \frac{\vartheta_{30} + \vartheta_{10} - 2\vartheta_{20}}{\Delta x^2}. \quad (12.100)$$

Przyjmujemy związek między krokiem czasowym $\Delta \tau$ i przestrzennym Δx :

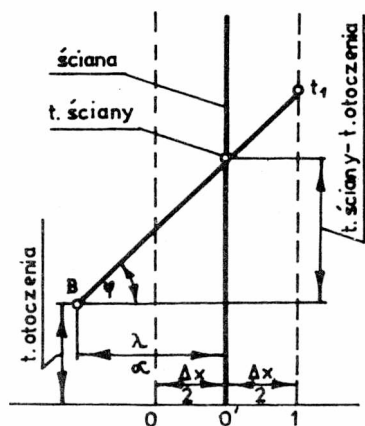
$$2a \frac{\Delta \tau}{\Delta x^2} = 1, \quad \text{tj.} \quad \Delta \tau = \frac{\Delta x^2}{2a}. \quad (12.101)$$

Jeśli (12.99) i (12.100) wstawimy do (12.98), to otrzymamy

$$\frac{\vartheta_{21} - \vartheta_{20}}{\Delta \tau} = a \frac{\vartheta_{30} + \vartheta_{10} - 2\vartheta_{20}}{\Delta x^2}. \quad (12.102)$$

Gdy za $\Delta\tau$ podstawimy (12.101) i uprościmy, wówczas otrzymamy

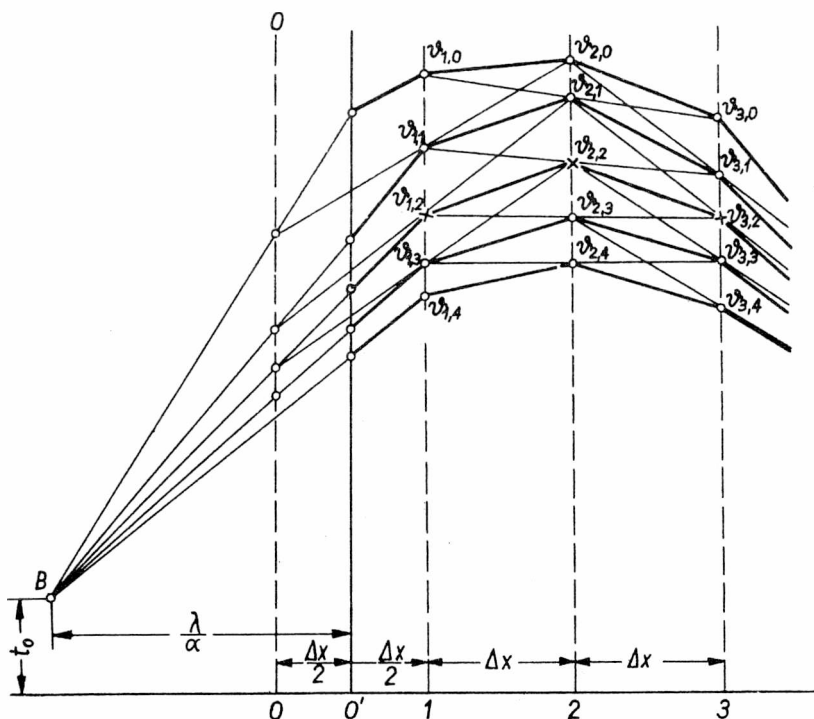
$$\vartheta_{21} = \frac{\vartheta_{30} - \vartheta_{10}}{2}. \quad (12.103)$$



Rys. 12.13. Wyznaczenie położenia bieguna B

Temperatura ϑ_{21} w przegrodzie 2, po upływie czasu $\Delta\tau$, jest średnią arytmetyczną temperatur ϑ_{30} i ϑ_{10} , tj. temperatur w przegrodach przyległych przed upływem tego czasu. Warunek ten umożliwia wykonanie konstrukcji graficznej, służącej do wyznaczania temperatury w danej warstwie, gdy znamy temperatury w warstwach sąsiednich, nie wystarczy jednak do wyznaczenia temperatury na powierzchni skrajnej płyty. W tym celu wykorzystamy warunek brzegowy. Na ścianie zewnętrznej przewodzony strumień ciepła jest przyjęty do otoczenia (rys. 12.13)

$$\dot{Q} = -F\lambda \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_s = F\alpha(\vartheta_s - t_o), \quad (12.104)$$



Rys. 12.14. Wyznaczenie nieustalonego pola temperatury w płycie

stąd

$$\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_s = -\frac{\alpha}{\lambda}(\vartheta_s - t_o), \quad (12.105)$$

gdzie

ϑ_s — temperatura na powierzchni zewnętrznej (skrajnej),

t_o — temperatura otoczenia,

$(d\vartheta/dx)_s$ — gradient temperatury na powierzchni skrajnej.

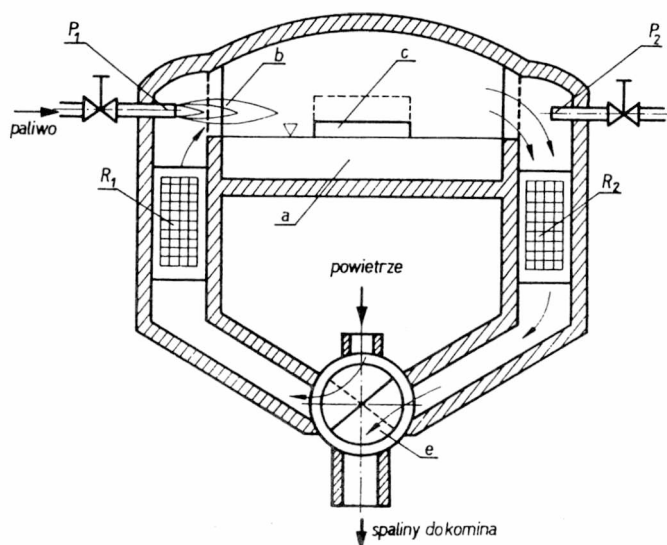
Warunek (12.105) zapisany w postaci różnicowej

$$\left(\frac{\Delta\vartheta}{\Delta x}\right)_s = -\frac{\alpha}{\lambda}(\vartheta_s - t_o) \quad (12.106)$$

umożliwia wyznaczenie temperatury na powierzchni skrajnej ściany. Z (12.106) wynika, że styczne do profilu temperatury na skraju muszą przechodzić przez tzw. biegun B , przedstawiony na rys. 12.13. Na rysunku 12.14 przedstawiono wykreślenie co okres $\Delta\tau$ rozkład temperatury w stygnącej płycie.

13. Wymienniki ciepła (część II) regeneratory

W wielu urządzeniach przemysłowych, w celu wykorzystania tak zwanego ciepła odpadowego lub w razie konieczności podgrzania do wysokiej temperatury powietrza użytego do procesu, stosuje się wymienniki ciepła, zwane regeneratorami (por. p. 6.1). Wymienniki tego typu stosuje się między innymi w wannach szklarskich, nagrzewnicach wielkopiecowych, martenach i in. Regeneracyjne podgrzewacze powietrza, zwane podgrzewaczami Ljungströma, są stosowane w kotłach parowych. Ostatnio regeneratory stosuje się w kriotechnice jako „akumulatory zimna”.



Rys. 13.1. Wanna szklarska schematycznie: a – płynne szkło, b – płomień, c – otwór wyciągowy szkła, e – obrotnica, R_1 , R_2 – regeneratory ciepła, P_1 i P_2 – palniki

Na rysunku 13.1 schematycznie przedstawiono wannę szklarską z dwoma regeneratorami ciepła R_1 i R_2 . Po odpowiednim ustawieniu obrotnicy powietrze zostaje skierowane poprzez regenerator R_1 do palnika P_1 . Płomień i powstałe spaliny opływają „płynne szkło” w wannie. Spaliny zostają następnie usunięte z wanny przez generator R_2 do komina. Po pewnym czasie w wannach szklarskich

(zwykle 0,5 godziny) następuje rewersja. Po odpowiednim przestawieniu obrotnicy do położenia oznaczonego na rysunku linią kreskowaną zostaje zmieniony kierunek przepływu gazów przez wannę. Regenerator R_2 , grzany uprzednio przez gorące spaliny, jest obecnie chłodzony powietrzem. Powietrze wskutek tego ogrzewa się i podgrzane służy do palenia paliwa podawanego tym razem z palnika P_2 . Palnik P_1 jest w tym czasie wyłączony. Z działania regeneratora wynika, że jego wypełnienie jest okresowo grzane i chłodzone. Zachodzi więc nieustalone przekazywanie ciepła.

W regeneratorach wanny szklarskiej wypełnienie stanowią zwykle cegły ceramiczne. W innych regeneratorach może ono być wykonane z innego materiału, np. z metalu (kotły, akumulatory zimna).

13.1. Obliczenie podstawowe

Na podstawie rozważań analitycznych dla tak zwanego regeneratora idealnego Hausen wyprowadził zależności różniczkowe

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_\tau = \frac{\alpha F_j}{\dot{G} c_p} (\vartheta - t), \quad (13.1)$$

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}\right)_x = \frac{\alpha F_j}{C} (t - \vartheta), \quad (13.2)$$

w których

ϑ, t — temperatury odpowiednio wypełnienia regeneratora i gazów,

F_j — zewnętrzna (opływana przez gazy) powierzchnia wypełnienia 1 mb długości regeneratora,

$\dot{G}$ — strumień substancji gazów,

c_p — ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu,

C — pojemność cieplna 1 mb wypełnienia.

Regenerator idealny tym się różni od regeneratora rzeczywistego, że ma anizotropię współczynnika λ . Współczynnik ten w kierunku przepływu gazów (wzdłuż osi x) ma wartość λ , a w kierunku do niego prostopadłym wartość $\lambda = \infty$. Przy takim założeniu temperatura wypełnienia w przekroju poprzecznym do przepływu ma wartość stałą.

Jeżeli regenerator jest dostatecznie długi, a współczynniki przejmowania ciepła obydwu gazów i ich pojemności cieplne są zbliżone; okresy rewersji są równe i trwają krótko, wtedy zgodnie z wnioskami Hausena w połowie długości regeneratora

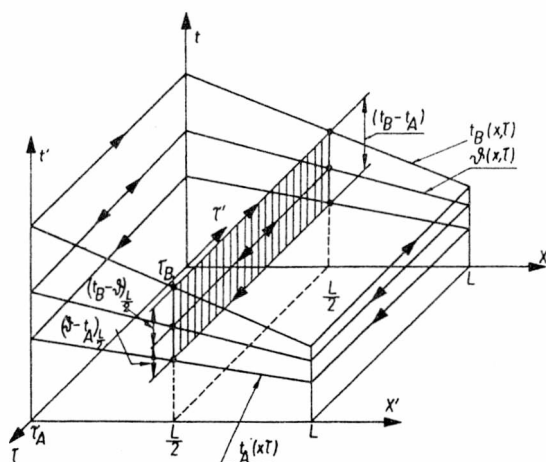
$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_\tau = \text{const}; \quad \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}\right)_x = \text{const}, \quad (13.3)$$

czyli $(\vartheta - t)_{x=L/2} = \text{const}$ i $(t - \vartheta)_{x=L/2} = \text{const}$.

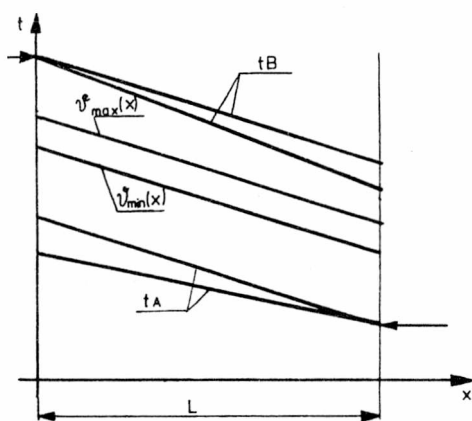
Jeżeli wahania temperatur wypełnienia nie są duże, to w przybliżeniu zależność (13.3) można rozciągnąć na całą długość regeneratora. Temperatura gazów wzdłuż długości regeneratora i temperatura wypełnienia w czasie zmienia się wówczas liniowo. Przebieg temperatur w regeneratorze idealnym w przybliżeniu przedstawiono na rys. 13.2 i 13.3. Kierując się liniowymi w przybliżeniu przebiegami temperatur można napisać

$$(t_B - \vartheta)_{L/2} = (t_B - \vartheta)_{sr}, \quad (13.4)$$

$$(\vartheta - t_A)_{L/2} = (\vartheta - t_A)_{sr}. \quad (13.5)$$



Rys. 13.2. Przebiegi temperatur w regeneratorze idealnym, gdy $\tau = \tau_B$, $t_A(x, \tau)$ – temperatura czynnika A (grzanego), $t_B(x, \tau)$ – temperatura czynnika B (grzejącego), $\vartheta(x, \tau)$ – temperatura wypełnienia, układ $t - \tau - x$ – dla cyklu grzania czynnika A, $t' - \tau' - x'$ – dla cyklu chłodzenia czynnika B



Rys. 13.3. Przebiegi temperatur gazów i wypełnienia wzdłuż regeneratora idealnego

Ciepło przekazane do wypełnienia przez czynnik grzejący B jest następnie od tegoż wypełnienia przejęte przez czynnik grzany A. Można więc napisać

$$Q = F \alpha_A (\vartheta - t_A)_{sr} \tau_A, \quad \text{kJ/okres } \tau_A, \quad (13.6)$$

$$Q = F \alpha_B (t_B - \vartheta)_{sr} \tau_B, \quad \text{kJ/okres } \tau_B, \quad (13.7)$$

gdzie τ_A i τ_B – okresy odpowiednio chłodzenia wypełnienia i jego grzania.

Jeżeli równania (13.6) i (13.7) przekształcimy tak, by po prawej stronie

zostały tylko różnice temperatur, dodamy stronami i przekształcimy, to otrzymamy

$$Q = F \frac{1}{\frac{1}{\alpha_A \tau_A} + \frac{1}{\alpha_B \tau_B}} (t_B - t_A)_{sr}, \quad \text{kJ/cykl.} \quad (13.8)$$

Przez analogię do równań określających przenikanie ciepła wprowadzimy współczynnik k „przenikania ciepła” dla regeneratora idealnego

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_A \tau_A} + \frac{1}{\alpha_B \tau_B}, \quad (\text{m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{cykl})/\text{kJ}. \quad (13.9)$$

Równanie (13.8) przyjmie postać

$$Q = Fk(t_B - t_A)_{sr} = Fk\Delta t_{sr}, \quad \text{kJ/cykl}, \quad (13.10)$$

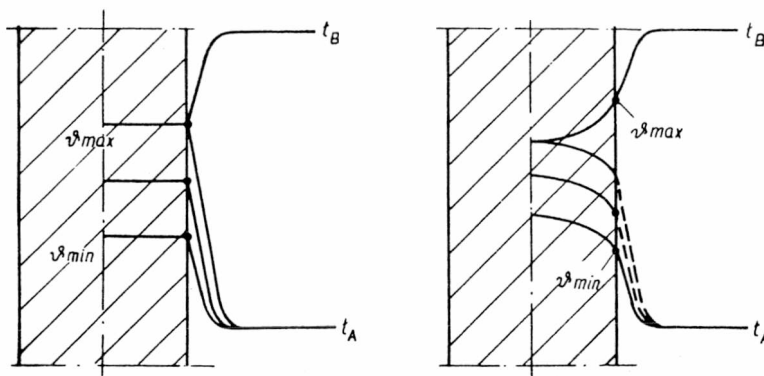
gdzie $\Delta t_{sr} = (\Delta t_1 + \Delta t_2)/2$ jest średnią wartością różnic temperatur Δt_1 i Δt_2 czynników na wlocie i wylocie z regeneratora.

Niektórzy badacze proponują, by średnią różnicę temperatur przyjmować jako średnią logarytmiczną

$$\Delta t_{sr} = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{\ln \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}}. \quad (13.11)$$

Jest to uzasadnione wówczas, gdy różnica temperatur czynników na wlocie różni się znacznie od różnicy temperatur na wylocie. Z równania (13.10) wynika, że wymiennik powierzchniowy o tej samej powierzchni, gdy $\tau_A = \tau_B$ (opór przegrody stałej jest pominięty), wymienia na cykl dwa razy więcej ciepła niż regenerator idealny.

Wypełnienie regeneratora idealnego odznacza się tym, że przewodzenie ciepła przekazanego od powierzchni wypełnienia do jego wnętrza odbywa się natychmiastowo, bez oporu przewodzenia ciepła w kierunku normalnym do kierunku przepływu gazów. W regeneratorze rzeczywistym ciepło nie wnika natychmiastowo, gdyż opór przewodzenia nie jest równy zero (patrz rys. 13.4).



Rys. 13.4. Przebiegi temperatur w wypełnieniu regeneratora idealnego i rzeczywistego

W regeneratorsie idealnym (patrz rys. 13.4) ciepło zakumulowane w wypełnieniu

$$Q_{id} = C(\vartheta_{\max} - \vartheta_{\min}), \quad (13.12)$$

gdzie C — czynna pojemność cieplna wypełnienia.

Ponieważ w regeneratorsie rzeczywistym niecała zdolność akumulacyjna wypełnienia jest wykorzystana, gdy temperatury powierzchni zewnętrznej (czynnej) wynoszą $\vartheta_{\max}$ i $\vartheta_{\min}$, można więc wprowadzić stopień η wykorzystania pojemności cieplnej regeneratorsa rzeczywistego

$$\eta = \frac{Q}{Q_{id}}, \quad (13.13)$$

przy czym Q , Q_{id} — ciepło zakumulowane przez wypełnienie regeneratorsa rzeczywistego i idealnego, gdy na powierzchniach obu regeneratorsów występuje ta sama zmiana temperatury $\vartheta_{\max} - \vartheta_{\min}$.

Jeżeli będziemy operowali średnimi temperaturami powierzchni wypełnienia w czasie nagrzewania ϑ'' i chłodzenia ϑ' , to różnicę temperatur możemy wyrazić jako

$$\vartheta_{\max} - \vartheta_{\min} = \xi(\vartheta'' - \vartheta'), \quad (13.14)$$

gdzie ξ jest współczynnikiem korygującym.

Po wstawieniu równań (13.12) i (13.14) do (13.13) i przekształceniu otrzymamy

$$Q = \eta Q_{id} = \eta \xi C(\vartheta'' - \vartheta'). \quad (13.15)$$

Pojemność cieplna

$$C = V\rho c, \quad (13.16)$$

gdzie

V — objętość wypełnienia,

ρ — gęstość wypełnienia,

c — ciepło właściwe.

Objętość wypełnienia możemy obliczyć za pomocą zewnętrznej czynnej powierzchni F wypełnienia i zastępczego wymiaru liniowego δ_z

$$V = F\delta_z. \quad (13.17)$$

Dla ściany płaskiej $\delta_z = V/F = (F/2)(2\delta/F) = \delta/2$ równa się połowie grubości ściany. Dla wypełnienia złożonego z cegieł, płaskich $\delta_z \cong \delta/2$ połowie grubości cegły. Jeżeli (13.16) i (13.17) wstawimy do (13.15), to otrzymamy

$$Q = F\delta_z \eta \xi \rho C(\vartheta'' - \vartheta'). \quad (13.18)$$

Jeśli przez ε oznaczymy wyrażenie

$$\delta_z \eta \xi \rho C = \varepsilon, \quad (13.19)$$

to równanie (13.18), określające ciepło zakumulowane na cykl przez wypełnienie rzeczywistego regeneratorsa, możemy zapisać w postaci

$$Q = F\varepsilon(\vartheta'' - \vartheta'). \quad (13.20)$$

Ciepło zakumulowane zostało przejęte od czynnika grzejącego B , czyli

$$Q = F\alpha_B(t_B - \vartheta'')_{sr}\tau_B, \quad (13.21)$$

a następnie przekazane do czynnika grzanego A , zatem

$$Q = F\alpha_A(\vartheta' - t_A)_{sr}\tau_A. \quad (13.22)$$

Po przekształceniu układu równań (13.20), (13.21) i (13.22) tak, aby po prawej stronie były tylko różnice temperatur, dodaniu stronami i wzięciu Q/F przed nawias, otrzymamy

$$\frac{Q}{F} \left(\frac{1}{\alpha_A\tau_A} + \frac{1}{\alpha_B\tau_B} + \frac{1}{\varepsilon} \right) = (t_B - t_A)_{sr}. \quad (13.23)$$

Wprowadźmy pojęcie współczynnika k przenikania ciepła dla regeneratora rzeczywistego. Jego odwrotność, czyli opór przenikania ciepła

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_A\tau_A} + \frac{1}{\alpha_B\tau_B} + \frac{1}{\varepsilon}. \quad (13.24)$$

W wyrażeniu $1/\varepsilon$ uwzględnia się wpływ oporu cieplnego wypełnienia na wielkość ciepła zakumulowanego.

Wzór określający ciepło przekazane na cykl przez regenerator rzeczywisty przyjmie postać

$$Q = Fk(t_B - t_A)_{sr}, \quad \text{kJ/cykl.} \quad (13.25)$$

Średnią różnicę temperatur gazu grzejącego i grzanego w przybliżeniu oblicza się jak dla regeneratora idealnego.

Jest wiele badań i teorii dotyczących obliczania współczynników ξ , ε , η .

Dla wypełnienia z cegieł szamotowych Rummel poleca $\xi = 2-3,5$ (inni autorzy proponują 2,2-2,5), na określenie ε zaś wzór

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{2,5c\delta_z\rho} + \frac{\delta_z}{\lambda\tau}, \quad (13.26)$$

w którym τ – czas trwania całego cyklu $\tau = \tau_A + \tau_B$.

Stopień η wykorzystania wypełnienia można wyrazić jako funkcję liczby Fouriera, która w zapisie szczegółowym ma postać

$$\text{Fo} = \frac{a\tau_o}{\delta_z}, \quad (13.27)$$

gdzie

a – współczynnik wyrównywania temperatury,

τ_o – czas jednego okresu, gdy $\tau_A = \tau_B$; jeśli $\tau_A \neq \tau_B$, to $\tau_o = (\tau_A + \tau_B)/2$.

W tabeli 13.1 przedstawiono zależność $\eta = f(\text{Fo})$.

Tabela 13.1. Stopień η wykorzystania wypełnienia regeneratora rzeczywistego (Gröber)

Fo	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,5	2	3	4	5
η	0,18	0,25	0,31	0,37	0,42	0,54	0,64	0,78	0,84	0,90

Dla wypełnienia regeneratora z cegieł do obliczenia α gazów i powietrza można stosować dawny wzór empiryczny:

$$\alpha = C \frac{w_o^{0,8}}{d_e^{0,33}}, \quad \text{W/m}^2 \cdot \text{K}, \quad (13.28)$$

w którym

w_o — prędkość gazów zredukowana do warunków normalnych $w_o = w 273,2/T$,

T — temperatura gazów,

d_e — zastępcza średnica kanału utworzonego przez cegły wypełnienia,

$C = 8,7$ — dla kanałowego ułożenia cegieł,

$C = 10,1$ — dla naprzemianległego ułożenia cegieł.

13.2. Wpływ czasu rewersji na strumień ciepła

Dla wielu regeneratorów rzeczywistych czas trwania rewersji jest znaczący w porównaniu z czasem trwania faz grzania i chłodzenia. W pracy rozważa się wpływ czasu trwania rewersji na strumień ciepła, przekazywanego w regeneratorze o stałym wypełnieniu. Wykazano, że istnieje maksimum średniego strumienia ciepła i wyliczono je dla regeneratora krótkiego z wypełnieniem w postaci płyty płaskiej [10].

13.2.1. Sformułowanie zagadnienia

Czas trwania rewersji ma wpływ na wielkość średniego strumienia $\dot{Q}_{sr}$ ciepła, przekazywanego w regeneratorze. Strumień ten można zdefiniować następująco:

$$\dot{Q}_{sr} = \frac{Q_{ak}}{\tau^{ok}} = \bar{\kappa} c \rho V (t_g - t_c) \quad (13.29)$$

gdzie

Q_{ak} — ciepło akumulowane w wypełnieniu regeneratora,

τ^{ok} — okresy pracy regeneratora,

$$\bar{\kappa} = \frac{\vartheta_{sr}^g(\tau^g), \vartheta_{sr}^g(0)}{t_g - t_c} \frac{1}{\tau^{ok}}, \quad (13.30)$$

t_g, t_c — temperatury płynów w fazie grzania i chłodzenia,

ϑ_{sr}^g — średnie temperatury wypełnienia na końcu i początku fazy grzania,

c, ρ, V — ciepło właściwe, gęstość i objętość wypełnienia,

$\bar{\kappa}$ — zredukowany strumień ciepła w regeneratorze.

Można wykazać, że przy skończonym czasie trwania rewersji średni strumień ciepła wykazuje maksimum.

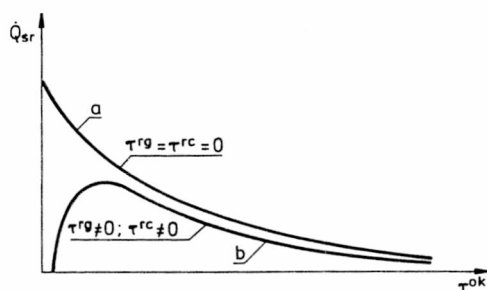
Jeśli $\tau^{ok} \rightarrow \infty$, to $\dot{Q}_{sr} \rightarrow 0$, ponieważ Q_{ak} jest ograniczone tym, że temperatura wypełnienia, podczas fazy grzania nie może przekraczać temperatury gazu grzejącego, a temperatura wypełnienia podczas fazy chłodzenia nie może być niższa niż temperatura gazu chłodzącego.

Gdy czas grzania $\tau^g = 0$, a czas rewersji jest różny od zera, to $Q_{ak} = 0$ i wobec tego $\dot{Q}_{sr} = 0$.

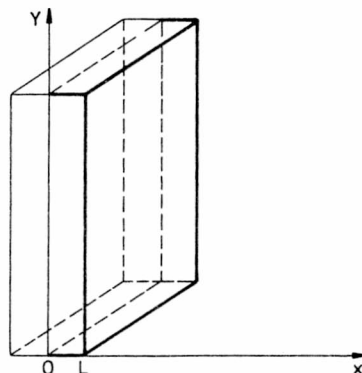
Z podanych faktów i własności $\dot{Q}_{sr} \geq 0$ wynika istnienie maksimum dla skończonego $0 < \tau^{ok} < \infty$ (rys. 13.5).

Maksimum funkcji jednoznacznie określa maksymalny (optymalny) strumień ciepła przekazywany w regeneratorze.

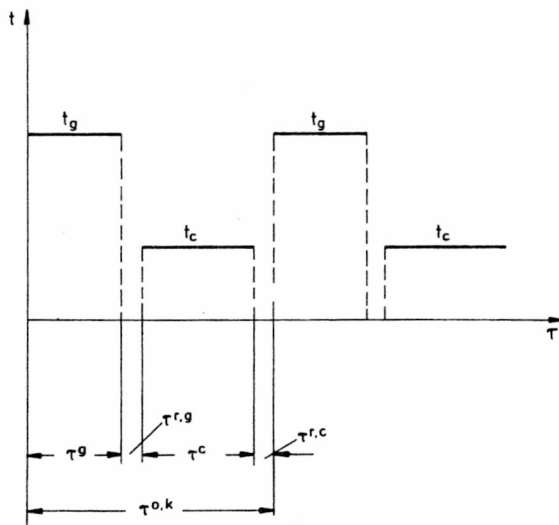
Zagadnienie rozwiązano analitycznie dla regeneratora krótkiego o wypełnieniu w kształcie płyty (rys. 13.6) przy skokowych zmianach temperatury płynów (rys. 13.7).



Rys. 13.5. Średni strumień ciepła przekazany w regeneratorze: *a* – dla zerowych czasów rewersji, *b* – dla skończonych, różnych od zera, czasów rewersji



Rys. 13.6. Wypełnienie regeneratora ciepła



Rys. 13.7. Temperaturowe przebiegi płynów na dolocie do regeneratora w zależności od czasu: t_g – temperatura płynu grzejącego, t_c – temperatura płynu chłodzącego, τ^{ok} – czas cyklu pracy, τ^g – czas fazy grzania (wypełnienia), $\tau^{r,g}$ – czas rewersji po fazie grzania, τ^c – czas fazy chłodzenia, $\tau^{r,c}$ – czas rewersji po fazie chłodzenia

W fazach grzania i chłodzenia ciepło przejmowane jest zgodnie z prawem Newtona. W fazach rewersji przyjęto natomiast, że wypełnienie jest adiabatyczne. Uzasadnione jest to niewielką pojemnością cieplną gazów w porównaniu z pojemnością wypełnienia.

13.2.2. Opis przekazywania ciepła

Zagadnienie zostanie rozwiązane w następujących zmiennych bezwymiarowych:

- bezwymiarowa współrzędna

$$x = \frac{X}{L}, \quad \text{gdzie } L \text{ — grubość płyty}$$

- liczby Biota i Fouriera (bezwymiarowy czas)

$$\text{Bi} = \frac{\alpha L}{\lambda}, \quad \text{Fo} = \frac{a\tau}{L^2}$$

- bezwymiarowe temperatury wypełnienia

$$\Theta^{g,rg} = \frac{g_g^{rg} - t_g}{t_g - t_c} \quad \text{dla fazy grzania i rewersji po grzaniu,}$$

$$\Theta^{c,rc} = \frac{g_c^{rc} - t_c}{t_g - t_c} \quad \text{dla fazy chłodzenia i rewersji po chłodzeniu.}$$

Pole temperatury w wypełnieniu regeneratora opisano następującym układem równań:

- równanie przewodnictwa ciepła dla każdej z faz

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \text{Fo}} = \nabla^2 \Theta \quad (13.31)$$

- warunki brzegowe dla faz grzania i chłodzenia

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (13.32a)$$

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \text{Bi} \Theta \right) \Big|_{x=1} = 0 \quad (13.32b)$$

oraz dla faz rewersji

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (13.32c)$$

– warunki początkowe

$$\Theta^g(x, \text{Fo}^g) = \Theta^{rg}(x, 0) \quad (13.33a)$$

$$\Theta^{rg}(x, \text{Fo}^{rg}) + 1 = \Theta^c(x, 0) \quad (13.33b)$$

$$\Theta^c(x, \text{Fo}^c) = \Theta^{rc}(x, 0) \quad (13.33c)$$

$$\Theta^{rc}(x, \text{Fo}^{rc}) = \Theta^g(x, 0) + 1 \quad (13.33d)$$

Funkcja $\bar{\kappa}$ ma natomiast postać

$$\bar{\kappa} = \frac{a}{L^2} \frac{\Theta_{sr}(\text{Fo}^g) - \Theta_{sr}(0)}{\text{Fo}^g + \text{Fo}^{rg} + \text{Fo}^c + \text{Fo}^{rc}} = \frac{a}{L^2} \kappa \quad (13.34)$$

Wyrażenie κ jest bezwymiarowe i nazwać go można bezwymiarowym zredukowanym strumieniem ciepła.

13.2.3. Rozwiązanie zagadnienia wpływu czasu rewersji na strumień ciepła

Do rozwiązania tego zagadnienia stosujemy metodę rozdzielania zmiennych, tzn. funkcje $\Theta(x, \text{Fo})$ zostaną przedstawione w postaci rozwinięcia w szeregi Fouriera:

– dla fazy grzania

$$\Theta^g(x, \text{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \lambda_k x \exp(-\lambda_k^2 \text{Fo}) \quad (13.35a)$$

– dla fazy rewersji po fazie grzania

$$\begin{aligned} \Theta^{rc}(x, \text{Fo}) = & \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{\sin \lambda_k}{\lambda_k} \exp(-\lambda_k^2 \text{Fo}^g) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos n\pi x \exp[-(n\pi)^2 \text{Fo}] \end{aligned} \quad (13.35b)$$

– dla fazy chłodzenia

$$\Theta^c(x, \text{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos \beta_k x \exp(-\beta_k^2 \text{Fo}) \quad (13.35c)$$

– dla fazy rewersji po fazie chłodzenia

$$\begin{aligned} \Theta^{rc}(x, \text{Fo}) = & \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{\sin \beta_k}{\beta_k} \exp(-\beta_k^2 \text{Fo}^c) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cos n\pi x \exp[-(n\pi)^2 \text{Fo}] \end{aligned} \quad (13.35d)$$

gdzie

λ_k kolejne dodatnie rozwiązania równania $\lambda \operatorname{tg} \lambda = \text{Bi}^g$,

β_k kolejne dodatnie rozwiązania równania $\beta \operatorname{tg} \beta = \text{Bi}^c$.

Dla znalezienia nie znanych wartości współczynników A_k , B_k , C_k , D_k wykorzystamy warunki początkowe (cykliczności). Po podstawieniu rozwiązań zagadnienia brzegowego do tych warunków i wykorzystując własności ortogonalności ciągów otrzymamy następujące równania, które w postaci macierzowej możemy zapisać

$$\begin{aligned} B &= aA \\ C &= eA + bB + k \\ D &= eC \\ A &= fC + dD - I \end{aligned} \quad (13.36)$$

gdzie A , B , C , D – wektory poszukiwanych współczynników

a – macierz o elementach

$$a_{ik} = 2(-1)^i \exp(-\lambda_k^2 \text{Fo}^g) \frac{\lambda_k \sin \lambda_k}{\lambda_k^2 - (i\pi)^2}, \quad (13.37)$$

e – macierz o elementach

$$e_{ik} = 4 \exp(-\lambda_k^2 \text{Fo}^g) \frac{\sin \lambda_k \sin \beta_i}{2\beta_i + \sin 2\beta_i}, \quad (13.37a)$$

b – macierz o elementach

$$b_{ik} = 4(-1)^k \exp[-k\pi^2 \text{Fo}^{rg}] \frac{\beta_i^2 \sin \beta_i}{(2\beta_i + \sin 2\beta_i)[\beta_i^2 - (k\pi)^2]}, \quad (13.37b)$$

c – macierz o elementach

$$c_{ik} = 2(-1)^i \exp(-\beta_k^2 \text{Fo}^c) \frac{\beta_k \sin \beta_k}{\beta_k^2 - (i\pi)^2}, \quad (13.37c)$$

f – macierz o elementach

$$f_{ik} = 4 \exp(-\beta_k^2 \text{Fo}^c) \frac{\sin \beta_k \sin \lambda_i}{2\lambda_i + \sin 2\lambda_i}, \quad (13.37d)$$

d – macierz o elementach

$$d_{ik} = 4(-1)^k \exp[-(k\pi)^2 \text{Fo}^{rc}] \frac{\lambda_i^2 \sin \lambda_i}{(2\lambda_i + \sin 2\lambda_i)[\lambda_i^2 - (k\pi)^2]}, \quad (13.37e)$$

k – wektor o elementach

$$k_i = \frac{4 \sin \beta_i}{2\beta_i + \sin 2\beta_i}, \quad (13.37f)$$

l – wektor o elementach

$$l_i = \frac{4 \sin \lambda_i}{2\lambda_i + \sin 2\lambda_i}. \quad (13.37g)$$

Aby znaleźć zredukowany strumień ciepła, wystarczy znać tylko współczynniki A_k . Po rozwiązaniu układu równań macierzowych otrzymamy poszukiwany wektor A :

$$A = [(f + de)(e + ba) - 1]^{-1} [l - (f + de)k]. \quad (13.38)$$

Bezwymiarowy zredukowany strumień ciepła

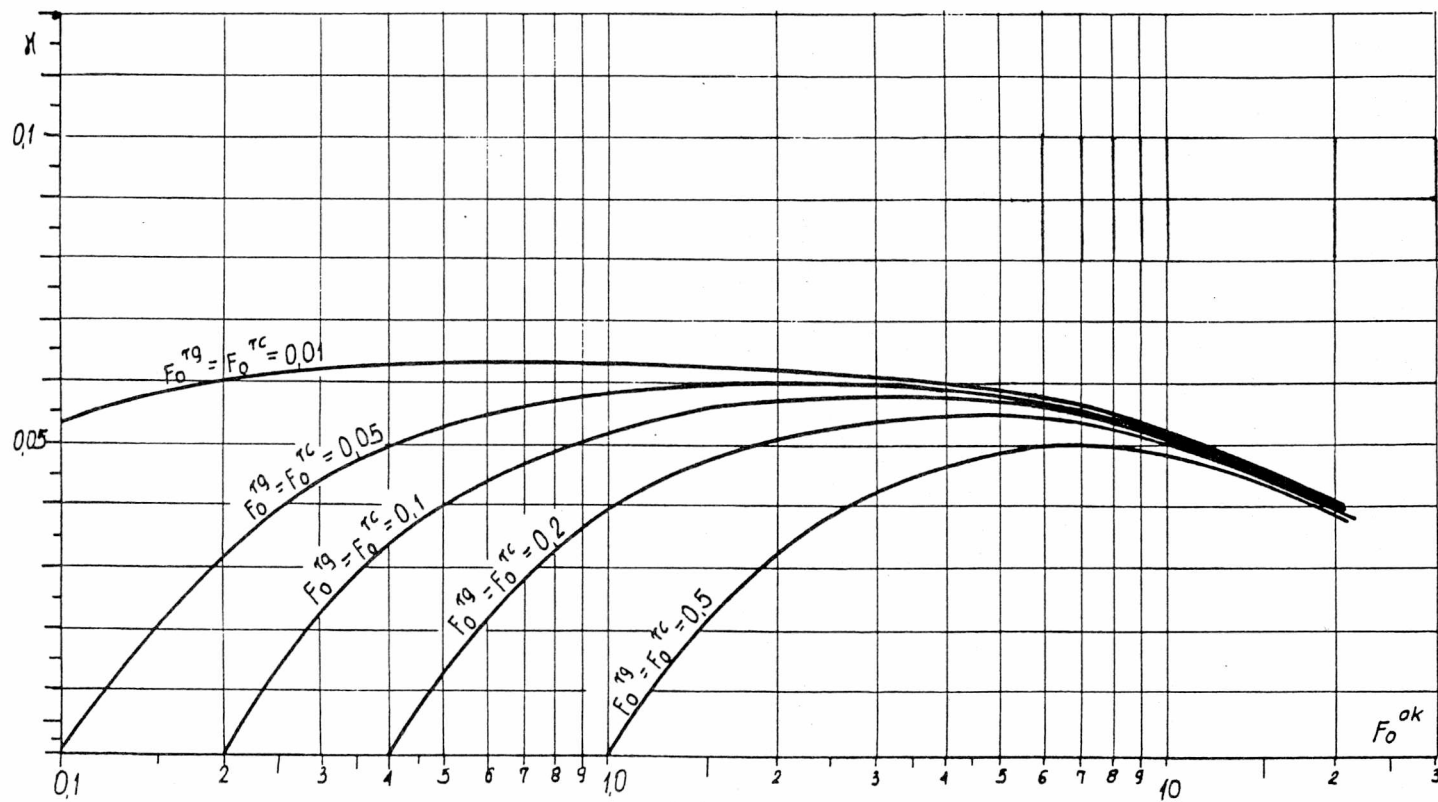
$$\kappa = \frac{1}{Fo^g + Fo^{rg} + Fo^c + Fo^{rc}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{\sin \lambda_k}{\lambda_k} [\exp(-\lambda_k^2 Fo^g) - 1] \quad (13.39)$$

13.2.4. Wynik obliczeń

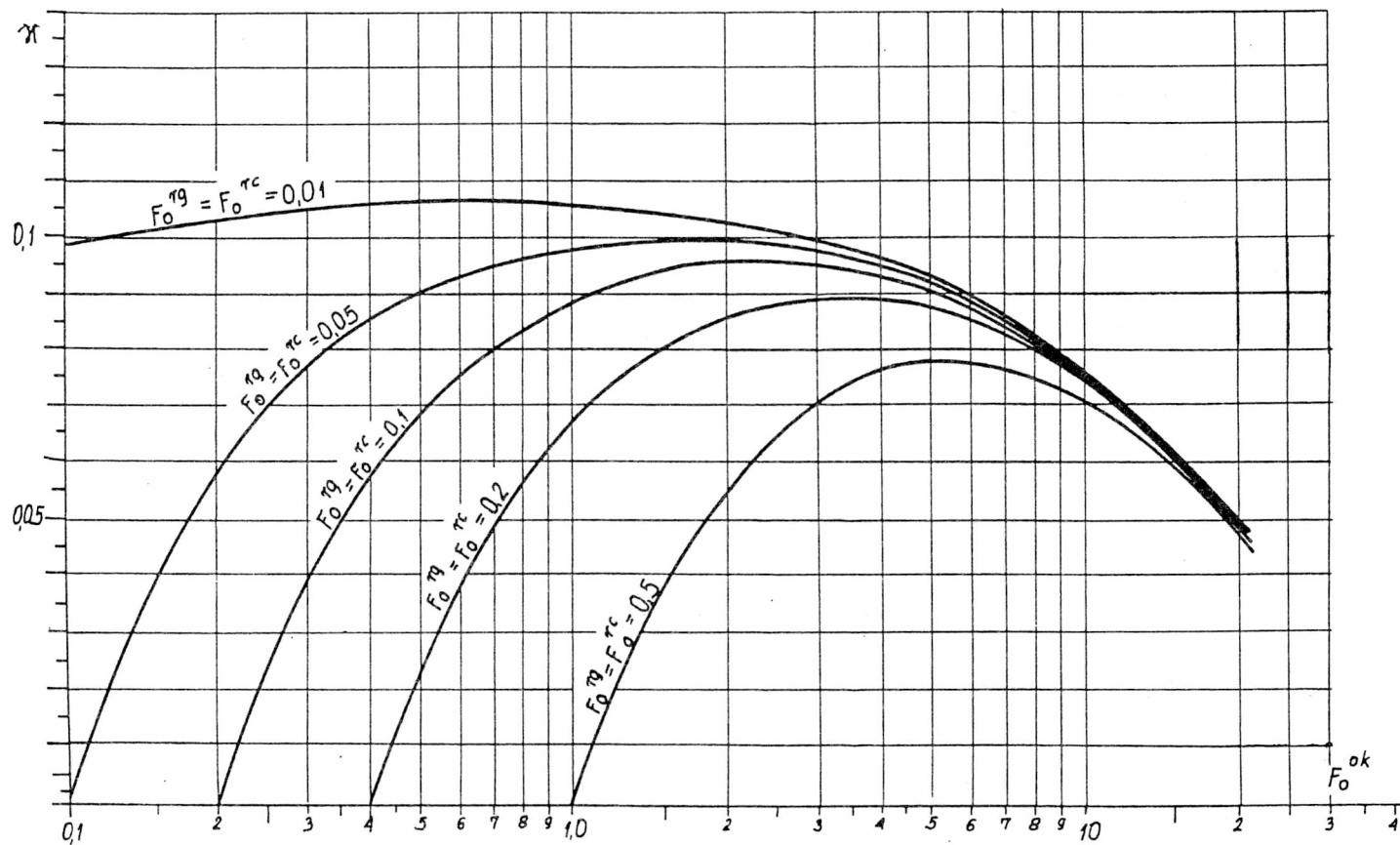
Obliczenia wykonano metodą numeryczną dla różnych czasów trwania poszczególnych faz pracy regeneratora.

Wyniki obliczeń przedstawiono na wykresach (rys. 13.8–13.12). Wykresy te podają zależności $\kappa = f(Fo^{ok})$ dla ustalonego Bi^g , Bi^c , oraz $Fo^{rg} = Fo^{rc}$ (czasy trwania faz rewersji są traktowane jako parametry).

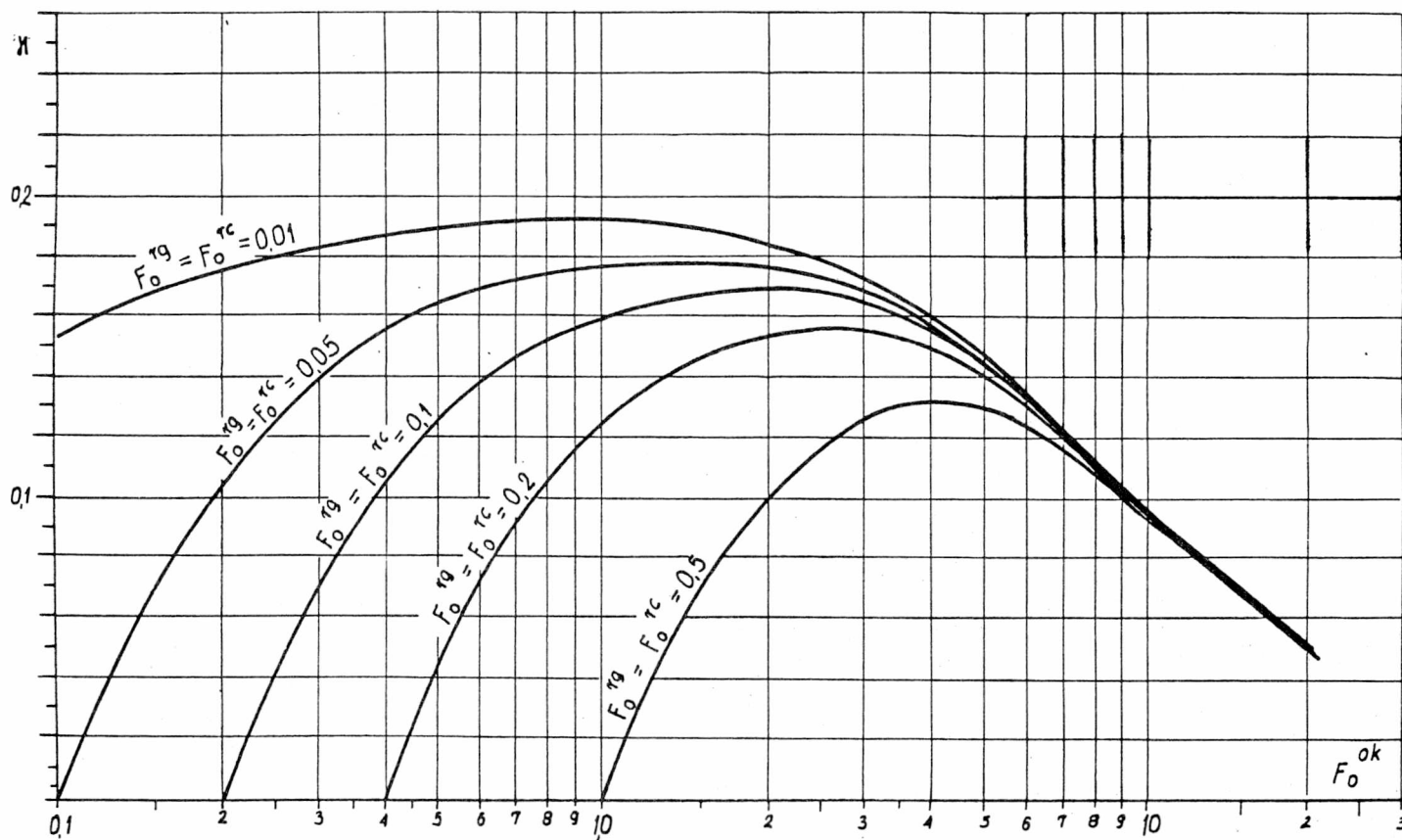
Przy skończonym czasie rewersji istnieje dla regeneratora maksimum bezwymiarowego zredukowanego strumienia ciepła, a tym samym średniego strumienia ciepła. Maksimum to dla ustalonych wartości Bi^c i Bi^g leży przy tych mniejszych wartościach Fo^g i Fo^c , im mniejsze jest Fo^{rg} i Fo^{rc} . Gdy są duże wartości liczb Fo^g i Fo^c wpływ skończonego czasu rewersji zanika.



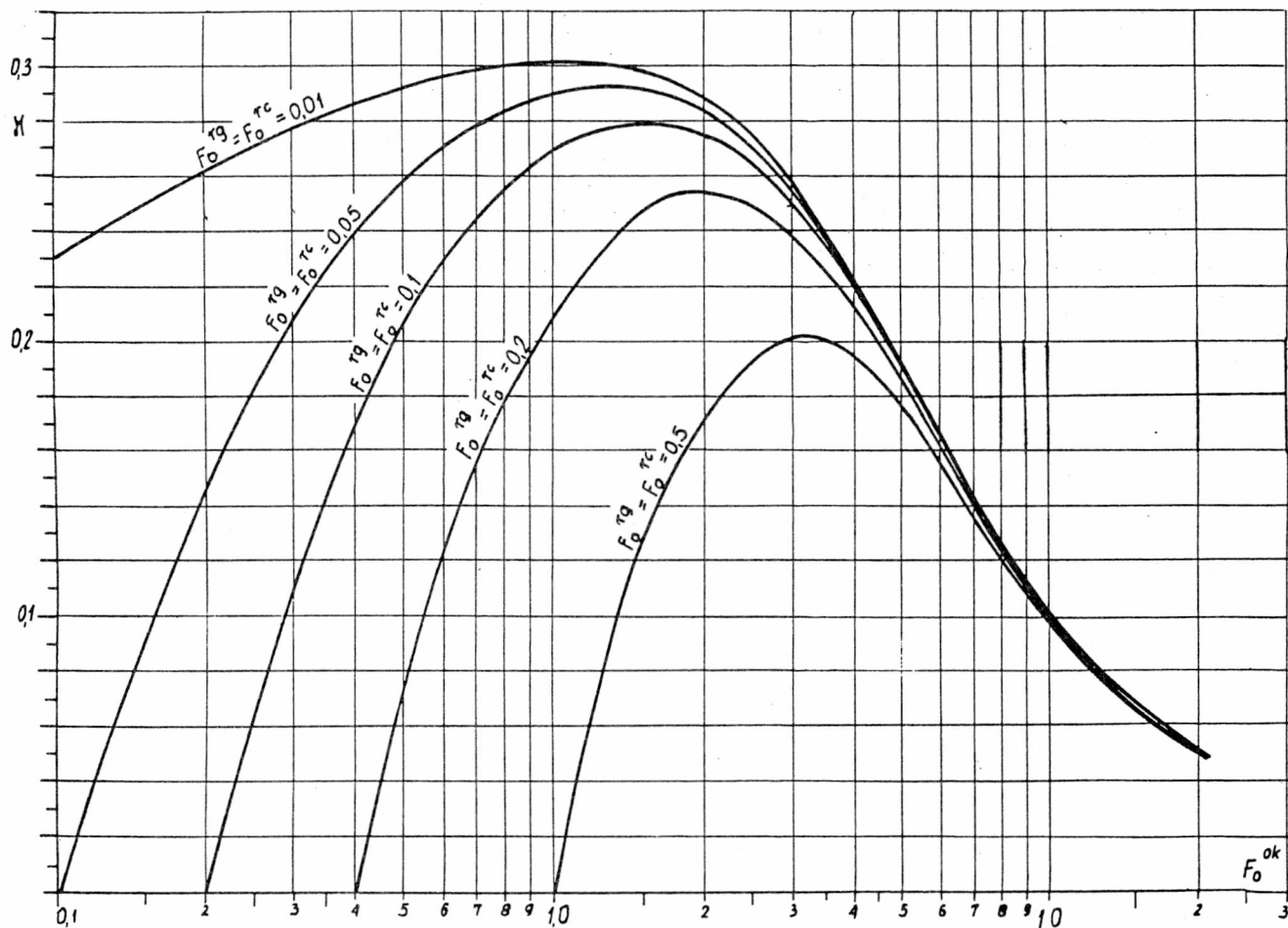
Rys. 13.8. Bezwymiarowy zredukowany strumień ciepła κ , przekazany w regeneratorsie dla $Bi^g = 0,2$ oraz $Bi^c = 0,2$



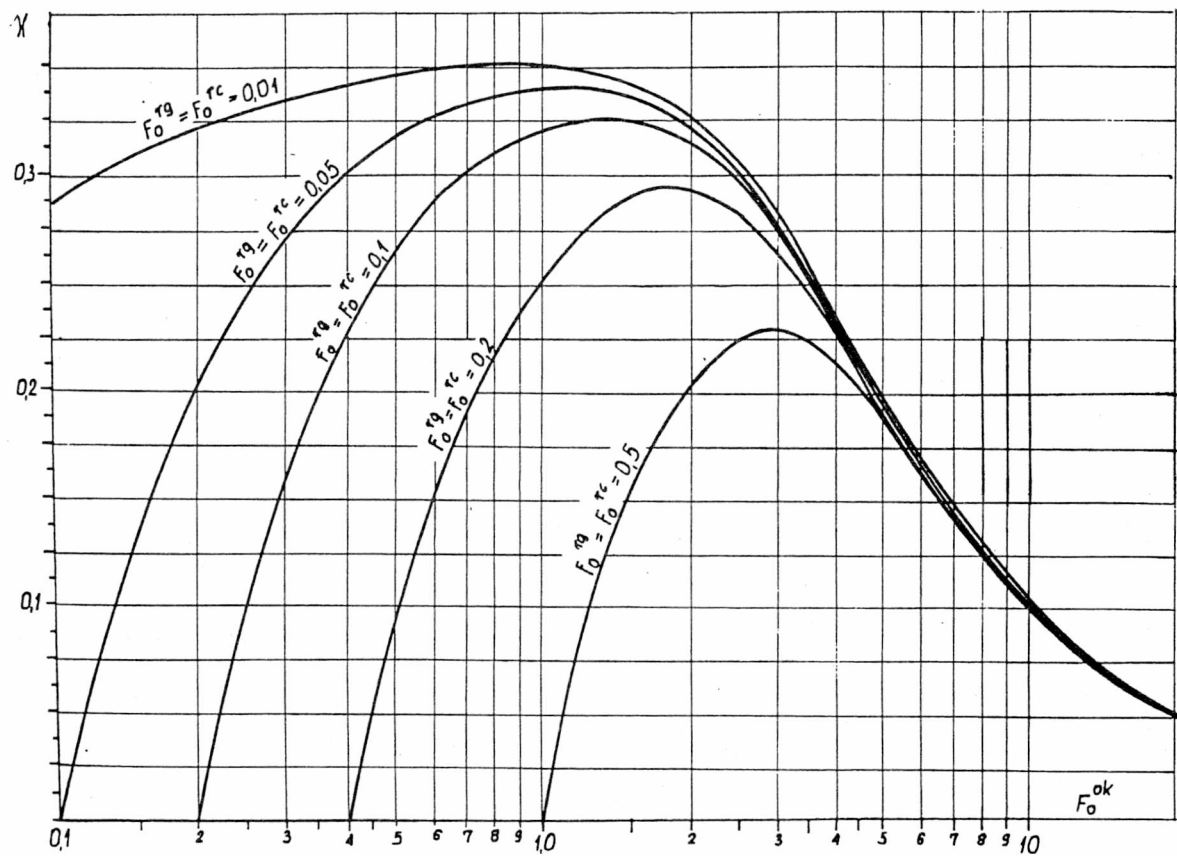
Rys. 13.9. Bezwymiarowy zredukowany strumień ciepła κ , przekazany w regeneratorze dla $Bi^g = Bi^c = 0,4$



Rys. 13.10. Bezwymiarowy zredukowany strumień ciepła κ , przekazany w regeneratorze dla $Bi^g = Bi^c = 1,0$



Rys. 13.11. Bezwymiarowy zredukowany strumień ciepła κ , przekazany w regeneratorze dla $Bi^g = Bi^c = 3$



Rys. 13.12. Bezwymiarowy zredukowany strumień ciepła κ , przekazany w regeneratorze dla $Bi^g = Bi^c = 5$

14. Przekazywanie ciepła do gruntu

Jest wiele metod obliczania strumienia ciepła przekazywanego do gruntu. Grunt jest rozpatrywany zawsze jako ośrodek półnieskończony. Przypadki przekazywania ciepła od ciał o skończonych wymiarach umieszczonych w gruncie rozpatrywał Rudenberg, London, a także nieco odmiennie Andrews. W podręczniku *Manuel de Ventilation**) podano sposób obliczania strat ciepła od ścian zagłębionych w gruncie. Krischer [14] rozpatrywał straty ciepła do podłóg pomieszczeń niepodpiwniczonych, nie uwzględniając pionowego ruchu wód gruntowych. Ruch ten w innych sposobach obliczeń jest uwzględniony.

14.1. Straty ciepła do podłóg pomieszczeń niepodpiwniczonych

Stosując zasadę superpozycji pól temperatur przedstawionych na rys. 14.1 Krischer obliczył straty ciepła do gruntu jako złożone z dwu strumieni: jeden — $\dot{Q}_b$ — jest przekazywany z niepodpiwniczonego pomieszczenia do zewnętrznego otoczenia przez płaską warstwę gruntu, traktowaną jako warstwa izotropowa, drugi — $\dot{Q}_z$ — jest przekazywany przez tę warstwę do zalegającej na głębokości Z wody gruntowej. Strumień całkowity (w W) wynosi:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_b + \dot{Q}_z = Fm(t_w - \vartheta_z) + F \frac{\lambda_z}{Z}(t_w - t_z), \quad (14.1)$$

gdzie

t_w — temperatura w pomieszczeniu,

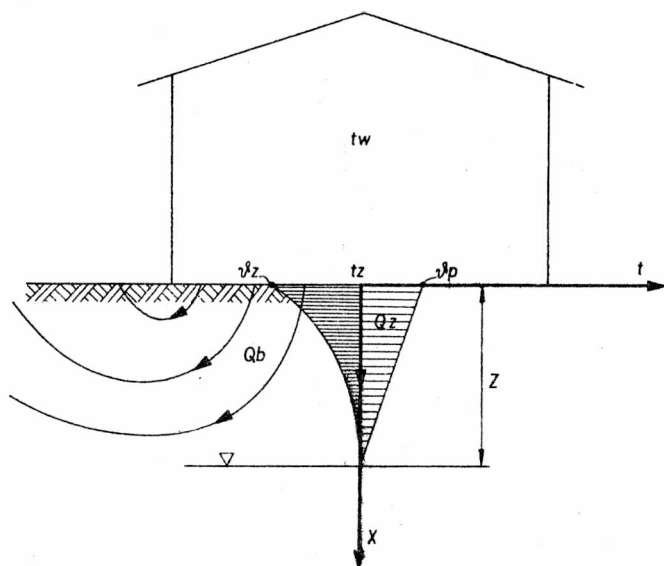
t_z — temperatura zalegającej na głębokości Z wody gruntowej,

ϑ_z — temperatura powierzchni gruntu na zewnątrz pomieszczenia,

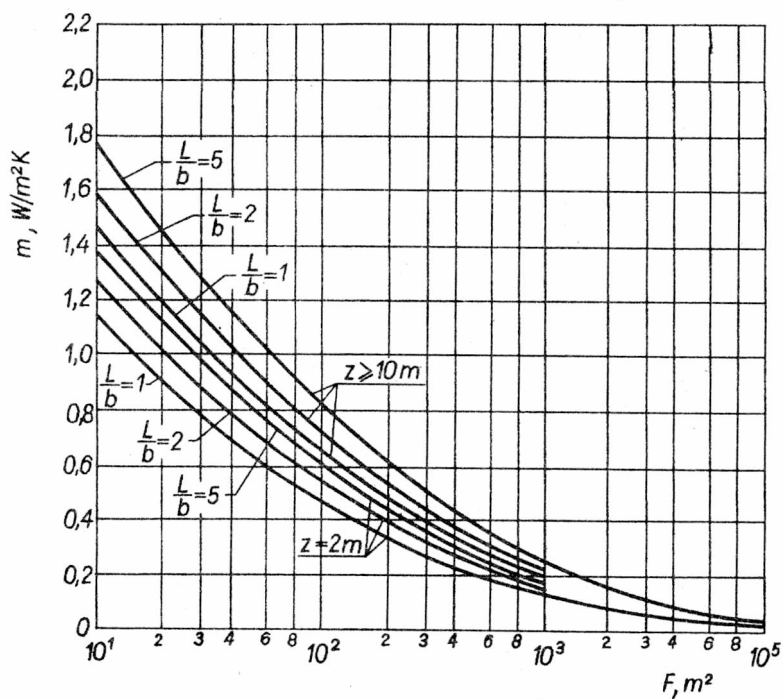
F — lb — powierzchnia; l — dłuższy bok prostokątnej podłogi, b — bok krótszy,

m — współczynnik przedstawiony wykreślnie na rys. 14.2.

*) *Manuel de Ventilation*, Paryż, wyd. Gautier-Villars, 1951.



Rys. 14.1. Rozkład temperatury w gruncie pod niepodpiwniczonym pomieszczeniem: ϑ_p – temperatura podłogi, ϑ_z – temperatura powierzchni gruntu na zewnątrz, t_w – temperatura w pomieszczeniu, t_z – temperatura zalegającej wody gruntowej, Z – głębokość zalegania poziomu wód gruntowych



Rys. 14.2. Wykres do wyznaczenia m do wzoru (14.1)

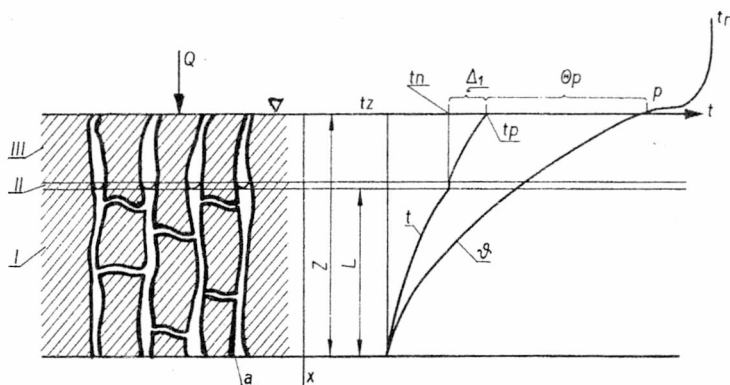
Jeżeli podłoga w pomieszczeniu znajduje się na głębokości h w odniesieniu do poziomu ziemi, to dla niezbyt dużych zagłębień powierzchnię należy liczyć jako $F = lb + hu$, gdzie $u = 2(l + b)$ jest obwodem zewnętrznym powierzchni podłogi.

Wobec znacznego oporu cieplnego warstwy gruntu pominięto w obliczeniach opór cieplny przejmowania ciepła od powietrza w pomieszczeniu do podłogi. Zaleca się przyjmowanie temperatury ϑ_z w granicach od 0 do 5°C zależnie od strefy klimatycznej. Temperatura ta jest wyższa od temperatury otoczenia zewnętrznego i wykazuje znaczne opóźnienie zmian w czasie w stosunku do zmian temperatury powietrza.

Dla zawilżonego gruntu można przyjąć współczynnik przewodzenia ciepła $\lambda_z \approx 1,16 \text{ W/m} \cdot \text{K}$.

14.2. Przekazywanie ciepła do gruntu z uwzględnieniem podsiąkania wody gruntowej

Jeżeli na porowatym podłożu, jakim jest grunt, znajduje się ośrodek gazowy o wysokiej temperaturze, np. komora paleniskowa, kanał spalinowy prowadzony w ziemi itp., to samoczynnie powstaje ruch wody gruntowej zasysanej kapilarnie do góry [11]. Woda ta początkowo się podgrzewa (strefa I), odparowuje (strefa II) i powstała para przegrzewa się w strefie III (patrz rys. 14.3).



Rys. 14.3. Przekrój przez grunt porowaty: a – model przestworów kapilarnych, ϑ – temperatura gruntu (substancji stałej), t – temperatura podsiąkającej wody gruntowej, I – strefa podgrzania wody, II – strefa odparowania, III – strefa przegrzania powstałej pary, t_r – temperatura gazu wpływającego powierzchnię gruntu, t_n – temperatura nasycenia (praktycznie dla ciśnienia otoczenia), t_z – temperatura zalegającej wody gruntowej

Przy stałej temperaturze t_r w ośrodku gazowym i stałej temperaturze t_z wody gruntowej na poziomie jej zalegania, przekazywanie ciepła do gruntu ma charakter stacjonarny. Warstwę gruntu nad poziomem wody traktuje się jako nieograniczoną porowatą płytę. Strumień ciepła jest przekazywany do gruntu przez przewodzenie w substancji stałej gruntu. W kapilarnych przestworach ruch podsiąkającej wody ma zwrot przeciwny. Różnicę temperatur między substancją stałą gruntu i podsiąkającym płynem [11] określa równanie

$$\Theta = \vartheta - t = Me^{m_1 x} + Ne^{m_2 x}, \quad (14.2)$$

w którym M i N — stałe całkowania

$$\begin{aligned} m_1 &= n + \sqrt{n^2 + a}, \\ m_2 &= n - \sqrt{n^2 + a}, \\ n &= \frac{o\alpha}{2\dot{g}_j c}, \quad a = \frac{o\alpha}{F_s \lambda}, \end{aligned}$$

przy czym

α — współczynnik przejmowania ciepła w kapilarze*),

o — sumaryczny obwód poprzecznych przekrojów kapilar w 1 m² przekroju gruntu,

F_s — przekrój substancji stałej w 1 m² przekroju gruntu,

$\dot{g}_j$ — gęstość strumienia podsiąkającego płynu, kg/m² · s,

c — ciepło właściwe płynu,

λ — współczynnik przewodzenia substancji stałej gruntu (w obszarze zawilżonym — gruntu zawilżonego).

Po uwzględnieniu odpowiednich warunków brzegowych uzyskuje się następujące wzory obliczeniowe określające:

— różnicę temperatur gruntu i pary na powierzchni (patrz rys. 13.3)

$$\Theta_p = \frac{\dot{G}[r + c_c(t_n - t_z)]}{F\lambda} \frac{e^{-m_2 L} - e^{-m_1 L}}{m_1 - m_2}, \quad (14.3)$$

gdzie

c_c — ciepło właściwe cieczy,

t_n — temperatura nasycenia dla ciśnienia w kapilarze (praktycznie dla ciśnienia otoczenia),

t_z — temperatura zalegającej wody gruntowej,

F — powierzchnia gruntu,

$\dot{G}$ — strumień podsiąkającego płynu, kg/s,

L — grubość strefy podgrzania podsiąkającej wody do temperatury wrzenia;

*) W odniesieniu do płynów jednofazowych α można liczyć ze wzoru (9.52) — dla ruchu laminarnego.

– wielkość przegrzania pary w gruncie (ozn. na rys. 14.3),

$$\Delta_1 = \frac{\alpha}{\dot{g}c} \left[\frac{\Theta_p^{e^{m_2 L}}}{m_1 (e^{m_1 L} - e^{m_2 L})} (1 - e^{m_1 L}) - \frac{1}{m_2} \frac{\Theta_p^{e^{m_1 L}}}{e^{m_1 L} - e^{m_2 L}} (1 - e^{m_2 L}) \right] \quad (14.4)$$

oraz wzór określający strumień ciepła przekazany do gruntu

$$\dot{Q} = \dot{G} \left[c(t_r - t_n) + r + \frac{c_c(t_n - t_z)}{1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1} e^{m_2(Z-L)}} \right] \quad (14.5)$$

lub

$$\dot{Q} \cong F \lambda m_1 \Theta_p. \quad (14.6)$$

Przy większych głębokościach Z zalegania wód gruntowych, $Z > 1$ m, i natężeniach $\dot{G} > 1$ kg/m²·h nie popełnimy błędu większego niż 5%, jeśli strumień ciepła przekazany do gruntu wyliczymy ze wzoru:

$$\dot{Q} = \dot{G}(i_p - c_c t_z), \quad (14.7)$$

w którym

i_p – entalpia pary o temperaturze t_r i ciśnieniu otoczenia,

c_c, t_z – jak we wzorze (14.3).

Związek między głębokością zalegania wód gruntowych, temperaturą powierzchni gruntu i natężeniem przepływu podsiąkającej wody podaje Markiewicz [18].

LITERATURA

- [1] Mc ADAMS, *Heat transmission* (wyd. III. New York, Mc-Graw-Hill, 1954.
- [2] CARLSLAW H.C., JAEGER L.C., *Conduction of heat in solids*, Oxford Univ. Press 1959.
- [3] EMERY A.F., CARSON W.W., *A modification to the Monte Carlo method – the exodus method*. Heat Transfer. Trans. ASME No. 3, 1968.
- [4] GDULA S.J. (praca zbiorowa), *Przewodzenie ciepła*. Warszawa, PWN, 1984.
- [5] GRÖBER H., ERK S., GRIGULL U., *Die Grundsätze der Wärme-übertragung*. Berlin, Springer Verlag, 1961.
- [6] HOBLE T., *Ruch ciepła i wymienniki*. Warszawa, WNT, 1971 (wyd. IV).
- [7] HOTTEL H.C., SAROFIM A.F., *Radiative transfer*. New York, Mc-Graw-Hill Book Company, 1967.
- [8] HSU S.T., *Engineering heat transfer*. New Jersey, D. Van Nostrand Company, Inc. 1963.
- [9] KALINOWSKI E., *Przekazywanie ciepła* (wyd. II). Wyd. PWr., Wrocław 1984.
- [10] KALINOWSKI E., ŁUCZAK M., *Wpływ czasu rewersji w regeneratorsze ze stałym wypełnieniem na strumień ciepła*. Materiały II sympozjum Zagadnienia energetyczne w mechanice, Szczyrk 1989.
- [11] KALINOWSKI E., *Przekazywanie ciepła do gruntu przy równoczesnym podciąganiu wody gruntowej*. Zesz. Nauk. PWr., Energetyka V, 1967.
- [12] KAYS V.M., LONDON P.L., *Kompaktyne teploobmenniki*. Moskwa, Energija (tłum. z jęz. ang.).
- [13] KRAKOWIAK H., *Poradnik techniczny*. Mechanik t. II, cz. II, Warszawa, PWT, 1961.
- [14] KRISCHER O., *Die Wärmeaufnahme der Grundfläche nicht unterkellerten Räume*. Gesundheit-Ingenieur Nr. 39, Berlin 1934.
- [15] KUTATELADZE S.S., *Osnovy teorii teploobmena*. Moskwa, Mašgiz, 1957.
- [16] LYKOV A.V., *Teorija teploprovodnosti*. Moskwa, Wyssaja Škola, 1967.
- [17] MADEJSKI J., *Teoria wymiany ciepła*. Warszawa–Poznań, PWN, 1963.
- [18] MARKIEWICZ M., *Określenie zależności od geometrii układu i temperatur warunków brzegowych, natężenia przepływu kapilarnego przez płytę porowatą płynu zmieniającego stan skupienia*. Praca nie publ., Bibl. Inst. Techn. Ciepl. PWr., Wrocław 1974.
- [19] MICHEEV M.A., *Osnovy teploperedaci* (wyd. II). Moskwa–Leningrad, Gosenergoizdat, 1956.
- [20] NOWAK J.W., SOBAŃSKI R., *Wybrane działy z teorii maszyn cieplnych i wymienniki ciepła*. Skrypty Pol. Szczec., Szczecin 1968.
- [21] NOWAK J.W., *Teoria rekuperatorów*. Szczecin, Wyd. Pol. Szczec., 1993.
- [22] OCHĘDUSZKO S., *Termodynamika stosowana*. Warszawa, WNT, 1964.
- [23] PETELA R., *Przepływ ciepła*. Gliwice, Wyd. Pol. Śl., 1973.
- [24] PRÓCHNIK A., *Analiza procesu przewodności cieplnej w ośrodkach ziarnistych z uwzględnieniem obecności cieczy w strefie kontaktu*. Praca nie publ., Bibl. Wydziału Mechanicznego Energetyki i Lotnictwa, Pol. Warsz., Warszawa 1984.
- [25] SAMARSKIJ A., *Vvedenie v teoriju raznostych schem*. Moskwa, Izd. Nauka, 1977.
- [26] SCHENK H., *Heat transfer engineering*. Englewood – Chliffs, NI (Prentice-Hall, Inc.) 1959.

- [27] SCHNEIDER P.I., *Conduction heat transfer* Addison. Cambridge, Wesley Publ. Comp., 1955.
- [28] STANISZEWSKI B., *Wymiana ciepła, podstawy teoretyczne*. Warszawa, PWN, 1963.
- [29] SZARGUT J., *Metody numeryczne w obliczeniach cieplnych pieców przemysłowych*. Katowice, Wyd. Śląsk, 1977.
- [30] SZARGUT J. (praca zbiorowa), *Modelowanie numeryczne pól temperatury*. Warszawa, WNT, 1992.
- [31] WIŚNIEWSKI S., *Wymiana ciepła*. Warszawa, PWN, 1979.
- [32] ZIENKIEWICZ O.C., *Metoda elementów skończonych*. Warszawa, Wyd. Arkady, 1972.
- [33] ZIENKIEWICZ O.C., *The finite element method*. London, Mc-Graw-Hill, 1977.

15. Dodatek – tabele i wykresy

Tabela 15.1. Termodynamiczne właściwości różnych ciał

oznaczenia:

t – temperatura, °C,

ρ – gęstość, kg/m³,

c_p, c – ciepło właściwe, kJ/(kg·K),

λ – współczynnik przewodzenia ciepła, W/(m·K),

a – współczynnik przewodzenia temperatury, m²/s,

ν – kinematyczny współczynnik lepkości, m²/s,

Pr – liczba Prandtla,

$\beta = 1/\nu(\partial\nu/\partial T)_p$ – objętościowy współczynnik rozszerzalności termicznej, 1/K.

1. Ciała stałe					
Ciało	t	p	c	λ	$a \cdot 10^6$
a) metale					
Srebro	20	10500	0,2340	411	167,2
Miedź czysta	20	8930	0,3831	395	115,6
handlowa	20	8300	0,419	373	103
Złoto czyste	20	19290	0,1294	311	124,4
Aluminium 99, 75 Al	20	2700	0,896	229	94,7
Duraluminium	20	2700	0,913	165	66,9
94–96 Al, 3–5 Cu	100	—	—	181	—
0,5 domieszki	200	—	—	194	—
Magnez czysty	20	1740	1,017	143	80,8
Elektron 93,5 Mg,					
4 Zn, 0,5 Cu	20	1800	—	116	—
Nikiel	20	—	0,452	—	—
Mosiądz	20	8600	0,381	80–120	25–36
Cynk	20	7130	0,385	113	41,1
Cyna	20	7280	0,2265	66	40,3
Żelazo					
Żelazo kujne	0	7850	0,465	59	16,25
	200	—	—	52	—
	400	—	0,63	44	—
	600	—	—	37	—
	800	—	—	29	—
Żelazo lane	20	7000–7700	0,540	58	14,7
Stal chromowa					
0,8 Cr, 0,2 C	20	—	—	40	—
Stal chromoniklowa	20	7900	0,477	14,5	3,86
nierdzewna	200	—	—	17,2	—
Cr, 8 Ni, 0,1–0,2 C	500	—	0,607	21	—
V2A – stal	20	8000	0,477	15	3,97
Ołów czysty	0	11340	0,1281	35,1	24,17
	100	—	0,1340	33,4	—

Ciało	t	p	c	λ	$a \cdot 10^6$
b) nieorganiczne ciała stałe					
Grafit	20	—	0,84	12–170	—
Kamienie krzemieniowe	100	1700–2000	—	0,8–1,34	—
	500	—	—	0,8–1,34	—
	1000	—	—	1,4–1,9	—
	1000	—	—	1,4–1,9	—
Szamot	100	1700–2000	0,84	0,5–1,2	0,33–0,69
	500	—	1,13	—	—
	1000	—	—	0,7–1,4	—
Kamień kotłowy	100	300–2700	—	0,08–2,3	—
Beton	20	1900–2300	0,88	0,8–1,4	0,50–0,69
Cegła sucha	20	1300–1800	0,84	0,38–0,52	0,28–0,33
Mur ceglany	20	—	—	0,70–0,87	—
Tynk	20	1960	—	0,79	—
Szkło	20	2700	0,8	0,76	0,33
Żwir	20	1850	—	0,37	—
Ziemia gruboziarnista	20	2040	1,84	0,52	0,139
piaszczysta	20	1600	—	1,07	—
gliniasta	20	1450	0,88	1,28	1,00
Piaskowiec	20	2150–2300	0,71	1,6–2,1	1,6–1,28
Marmur	20	2500–2700	0,808	2,8	1,39
Śnieg (szron)	0	200	—	0,15	—
Lód H ₂ O	0	917	1,93	2,2	1,25
c) organiczne ciała					
Bakelit	20	1270	1,59	0,223	1,14
Guma	20	1100	—	0,13–0,23	—
Gąbka gumowa	20	1224	—	0,055	—
Skóra	20	1000	—	0,14–0,16	—
Papier	20	—	—	0,14	—
Szkło plexi	20	—	—	0,184	—
Celuloid	20	1400	—	0,215	—
Buk, osiowo	20	700	—	0,35	—
Dąb, promieniowo	20	600–800	2,39	0,17–2,1	0,111–0,1270
osiowo	20	—	—	0,37	—
stycznie	—	—	—	0,12	—
Jodła (świerk) 20% wilgoci	—	—	—	—	—
promieniowo	20	410–420	2,37	0,14	0,125
osiowo	—	—	—	0,26	—
stycznie	—	—	—	0,108	—
Węgiel kamienny	20	1200–1500	1,26	0,26	0,14–0,17
Pył węglowy	30	730	1,30	0,12	0,122

2. Ciecze przy $p = 1013 \text{ hPa}$ lub przy ciśnieniu nasycenia dla t

Ciało	t	p	c_p	$v \cdot 10^6$	λ	$a \cdot 10^6$	Pr	β
Hg	20	13546	0,1394	0,115	9,3	5,0	0,023	0,000181
Woda	20	998,2	4,1784	1,007	0,599	0,1433	7,03	0,00018
	40	992,2	4,1772	0,658	0,627	0,1511	4,35	0,00038
	60	983,2	4,1776	0,478	0,651	0,1586	3,01	0,00054
	80	971,8	4,195	0,364	0,669	0,1639	2,22	0,00065
	100	958,3	4,212	0,294	0,682	0,1689	1,74	0,00078
	150	916,9	4,271	0,201	0,683	0,1744	1,15	0,00113
	200	864,7	4,501	0,160	0,665	0,1711	0,935	0,00155
	250	799,2	4,86	0,140	0,625	0,1611	0,869	0,00229
CO ₂	20	771	3,64	0,0623	0,087	0,0311	2,01	0,0066
	30	597	—	0,9536	0,071	—	—	0,0147
NH ₃	0	639	4,65	0,376	0,540	0,1817	2,07	0,00211
	20	610	4,77	0,361	0,494	0,1700	2,12	0,00244
SO ₂	—20	1485	1,273	0,313	0,223	0,1197	2,61	0,00178
	0	1435	1,357	0,256	0,212	0,1100	2,33	0,00172
	20	1383	1,390	0,220	0,199	0,1042	2,11	0,00194
Benzol C ₆ H ₆	20	879,1	1,738	0,740	0,154	0,1006	7,36	0,00106
Glikol etylenowy	20	1113	2,382	19,15	0,250	0,0942	203	0,00064
C ₂ H ₄ CH ₂	40	1099	2,474	8,78	0,256	0,0942	93,2	0,00065
	60	1085	2,562	4,89	0,259	0,0933	52,4	0,00065
	80	1070	2,650	3,08	0,262	0,0922	33,4	0,00066
	100	1056	2,742	2,27	0,263	0,0911	24,9	0,00067
Olej wrzecionowy	20	871	1,851	15,0	0,144	0,0894	168	0,00074
	40	858	1,934	7,92	0,143	0,0861	92,0	0,00075
	60	845	2,018	4,95	0,142	0,0833	59,4	0,00075
	80	832	2,102	3,39	0,141	0,0806	42,1	0,00076
	100	820	2,186	2,44	0,140	0,0778	31,4	0,00077
	120	807	2,269	1,91	0,138	0,0756	25,3	0,00068
Olej transformatorowy	20	866	1,892	36,5	0,124	0,0758	481	0,00069
	40	852	1,993	16,7	0,123	0,0725	230,0	0,00069
	60	842	2,093	8,7	0,122	0,0692	126	0,00070
	80	830	2,198	5,2	0,120	0,0656	79,4	0,00071
	100	818	2,294	3,8	0,119	0,0631	60,3	0,00072
Olej lotniczy	20	893	1,838	892	0,145	0,0823	10100	0,00068
	40	881	1,922	231	0,143	0,0844	2740	0,00069
	60	868	2,005	82,0	0,141	0,0811	1011	0,00070
	80	856	2,089	36,7	0,140	0,0781	469	0,00071
	100	844	2,177	19,7	0,137	0,0750	262	0,00072
	120	832	2,269	11,9	0,136	0,0719	165	0,00073
	140	819	2,361	7,95	0,134	0,0694	114	0,00074
Solanka	20	1184	3,081	2,41	—	—	—	—
20% MgCl ₂	0	1184	3,035	4,64	0,452	0,1258	36,8	—
	—20	1184	2,989	10,95	0,392	0,1105	98,8	—
10% MgCl ₂	0	—	3,56	—	—	—	—	—

3. Gazy przy $p = 1000 \text{ hPa}$							
Ciało	t	p	c_p	$v \cdot 10^6$	λ	$a \cdot 10^6$	Pr
Powietrze	- 50	1,55	1,005	9,3	0,0205	13,16	0,71
	0	1,276	1,005	13,3	0,0242	18,88	0,71
	20	1,184	1,005	15,1	0,0256	21,44	0,71
	50	1,078	1,005	18,1	0,0178	25,66	0,708
	100	0,934	1,009	23,3	0,311	33,0	0,708
	200	0,736	1,026	35,2	0,0368	48,8	0,712
	300	0,608	1,047	48,7	0,0429	67,3	0,718
	400	0,518	1,068	63,5	0,0485	87,7	0,724
	600	0,399	1,114	97,3	0,0582	131,0	0,742
	800	0,324	1,156	136	0,0669	178,7	0,763
	1000	0,273	1,185	180	0,0762	235,4	0,766
	1200	0,237	1,210	233	0,0846	295,3	0,755
	1400	0,208	1,231	173	0,0930	365	0,747
	1600	0,186	1,239	326	0,0954	439	0,742
Wodór H_2	- 50	0,1085	—	72	0,147	—	—
	0	0,0886	14,24	95	0,176	139,2	0,684
	50	0,0748	14,36	126	0,202	188,2	0,667
	100	0,0649	14,44	159	0,229	244,6	0,650
	200	0,0512	14,53	236	0,276	370	0,638
	300	—	14,57	—	0,297	—	—
Para wodna H_2O	100	0,589	2,135	21,7	0,0242	19,23	1,12
	200	0,461	1,93	36,1	0,0328	36,91	0,978
	300	0,379	2,01	53,1	0,0421	55,98	0,948
	400	0,322	2,05	73,0	0,0551	83,4	0,876
	500	0,280	2,18	95,6	0,0752	123,1	0,777
Dwutlenek węgla CO_2	- 50	2,420	—	4,67	0,0109	—	—
	0	1,950	0,829	7,08	0,0143	8,85	0,811
	50	1,954	0,875	10,2	0,0178	12,34	0,795
	100	1,428	0,925	12,9	0,0213	16,13	0,803
	200	1,125	0,996	20,4	0,0283	25,22	0,809
Dwutlenek siarki SO_2	0	2,89	0,624	4,02	0,0084	4,66	0,863
	50	—	0,649	—	—	—	—
	100	—	0,674	—	—	—	—
	200	—	0,720	—	—	—	—
Amoniak NH_3	0	0,761	2,169	12,3	0,0220	13,32	0,920
	100	0,551	2,232	23,6	0,0300	24,43	0,967
	200	0,433	2,395	38,3	—	—	—

Tabela 15.2. Parametry powietrza suchego o ciśnieniu 980 hPa (1 at)

Tempe- ratura	Gęstość	Ciepło właściwe	Współczynnik przewodzenia ciepła	Współczynnik przewodzenia temperatury	Lepkość dynamiczna	Lepkość kinematyczna	Liczba Prandtla
t	p	c_p	λ	$a \cdot 10^6$	$\eta \cdot 10^6$	$\nu \cdot 10^6$	Pr
°C	kg/m ³	kJ/kg · K	W/(m · K)	m ² /s	kg(m · s)	m ² /s	
–180	3,72	1,047	0,0076	1,94	6,472	1,75	—
–150	2,78	1,038	0,0116	4,03	8,591	3,14	—
–100	1,948	1,022	0,0163	8,0	11,866	5,96	—
–50	1,534	1,013	0,0198	13,1	14,808	9,65	0,71
–20	1,365	1,005	0,0226	16,8	16,279	12,0	0,71
0	1,252	1,011	0,0237	19	17,456	13,9	0,71
10	1,206	1,010	0,0244	20,7	17,848	14,66	0,71
20	1,164	1,012	0,0251	22,0	18,240	15,7	0,71
30	1,127	1,013	0,0258	23,4	18,682	16,58	0,71
40	1,092	1,014	0,0265	24,8	19,123	17,6	0,71
50	1,057	1,016	0,0272	26,2	19,515	18,58	0,71
60	1,025	1,017	0,0279	27,6	19,907	19,4	0,71
70	0,996	1,018	0,0286	29,2	20,398	20,65	0,71
80	0,968	1,019	0,0293	30,6	20,790	21,5	0,71
90	0,942	1,021	0,0300	32,2	21,231	22,82	0,71
100	0,916	1,022	0,0307	33,6	21,673	23,6	0,71
120	0,870	1,025	0,0320	37,0	22,555	25,9	0,71
140	0,827	1,027	0,0333	40,0	23,340	28,2	0,71
150	0,810	1,028	0,0336	41,2	23,732	29,4	0,71
160	0,789	1,030	0,0344	43,3	24,124	30,6	0,71
180	0,755	1,032	0,0357	47,0	24,909	33,0	0,71
200	0,723	1,035	0,0370	49,7	25,693	35,5	0,71
250	0,653	1,043	0,0400	60,0	27,557	42,2	0,71
300	0,596	1,057	0,0429	68,9	29,322	49,2	0,71
350	0,549	1,055	0,0457	80,0	30,989	56,5	0,72
400	0,508	1,059	0,0485	89,4	32,754	64,6	0,72
500	0,442	1,076	0,0540	113,2	35,794	81,0	0,72
600	0,391	1,089	0,0581	133,6	38,638	98,8	0,73
700	0,351	1,101	0,0599	162,0	41,580	118,95	0,73
800	0,318	1,114	0,669	182	43,640	137	0,73
900	0,291	1,126	0,0673	216	46,876	160	0,74
1000	0,268	1,139	0,0762	240	48,445	181	0,74
1100	0,248	1,156	0,0826	277	51,191	206	0,74
1200	0,232	1,164	0,0845	301	52,662	227	0,74
1400	0,204	1,189	0,0930	370	56,781	278	0,76
1600	0,182	1,218	0,1012	447	60,409	332	0,76
1800	0,165	1,243	0,1093	—	63,841	387	0,76

Tabela 15.3. Parametry wody cieczej na linii nasywienia $x = 0$

Temperatura	Gęstość	Współczynnik rozszerzalności objętościowej	Ciepło właściwe	Współczynnik przewodzenia ciepła	Współczynnik przewodzenia temperatury	Lepkość dynamiczna	Lepkość kinematyczna	Liczba Prandtla
t	ρ	$\beta \cdot 10^4$	c_p	λ	$\alpha \cdot 10^6$	$\eta \cdot 10^6$	$\nu \cdot 10^6$	Pr
$^{\circ}C$	kg/m^3	$1/K$	$kJ/(kg \cdot K)$	$W/(m \cdot K)$	m^2/s	$kg/m \cdot s$	m^2/s	
0	999,9	-0,7	4,226	0,558	0,131	1793,636	1,789	13,7
10	999,7	0,95	4,195	0,577	0,137	1296,439	1,300	9,5
20	998,2	2,1	4,182	0,597	0,143	993,414	1,006	7,0
30	995,7	3,1	4,176	0,615	0,149	792,377	0,805	5,4
40	992,2	3,9	4,175	0,633	0,151	658,026	0,658	4,3
50	988,1	4,6	4,178	0,647	0,157	555,056	0,556	3,55
60	983,2	5,3	4,181	0,658	0,159	471,670	0,478	3,00
70	977,8	5,8	4,187	0,668	0,163	404,034	0,415	2,55
80	971,8	6,3	4,194	0,673	0,165	352,059	0,364	2,25
90	965,3	7,0	4,202	0,678	0,167	308,909	0,326	1,95
100	958,45	7,5	4,211	0,682	0,169	277,528	0,294	1,75
110	951,0	8,0	4,224	0,684	0,170	254,973	0,268	1,57
120	943,5	8,5	4,232	0,685	0,171	235,360	0,244	1,43
130	926,3	9,7	4,257	0,684	0,172	201,036	0,212	1,23
150	916,9	10,3	4,270	0,684	0,173	185,346	0,201	1,17
160	907,6	10,8	4,285	0,680	0,173	171,616	0,191	1,10
170	897,3	11,5	4,396	0,679	0,172	162,290	0,181	1,05
180	886,6	12,1	4,396	0,673	0,172	152,003	0,173	1,01
190	876,0	12,8	4,480	0,670	0,171	145,138	0,166	0,97
200	862,8	13,5	4,501	0,665	0,170	139,254	0,160	0,95
210	852,8	14,3	4,560	0,655	0,168	131,409	0,154	0,92
220	837,0	15,2	4,605	0,652	0,167	124,544	0,149	0,90
230	827,3	16,2	4,690	0,637	0,164	119,641	0,145	0,88
240	809,0	17,2	4,731	0,634	0,162	113,757	0,141	0,86
250	799,2	18,6	4,857	0,618	0,160	109,834	0,137	0,87
260	799,0	20,0	4,982	0,613	0,156	104,931	0,135	0,86
270	767,9	21,7	5,030	0,590	0,152	101,989	0,133	0,87
280	750,0	23,8	5,234	0,588	0,147	98,067	0,131	0,89
290	732,3	26,5	5,445	0,558	0,140	94,144	0,129	0,92
300	712,5	29,5	5,694	0,564	0,132	92,182	0,128	0,98
310	690,6	33,5	6,155	0,519	0,122	89,260	0,128	1,05
320	667,1	38,0	6,610	0,494	0,101	81,395	0,127	1,13
330	640,2	42,5	7,245	0,468	0,101	81,395	0,127	1,25
340	609,4	47,5	8,160	0,437	0,088	77,473	0,127	1,45
350	572,0	—	9,295	0,400	0,076	72,569	0,127	1,67
360	524,0	—	9,850	0,356	0,067	66,685	0,127	1,91
370	448,0	—	11,690	0,293	0,058	56,879	0,127	2,18

Tabela 15.4. Parametry pary wodnej na linii nasycenia $x = 1$ [19]

Temperatura	Cisnienie	Gęstość	Entalpia właściwa	Ciepło parowania	Współczynnik przewodzenia ciepła	Ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu	Współczynnik przewodzenia temperatury	Lepkość dynamiczna	Lepkość kinematyczna	Liczba Prandtla
t	p	ρ	i	r	$\lambda \cdot 10^2$	c_p	$e \cdot 10^{-3}$	$\eta \cdot 10^6$	$\nu \cdot 10^6$	Pr
$^{\circ}C$	MPa	kg/m^3	kJ/kg	kJ/kg	$W/(m \cdot K)$	$kJ/(kg \cdot K)$	m^2/h	$kg(m \cdot s)$	m^2/s	
100	0,101	0,598	2675,8	2256,7	2,37	2,135	66,9	11,96	22,02	1,08
110	0,143	0,826	2691,3	2229,9	2,49	2,177	49,8	12,45	15,07	1,09
120	0,198	1,121	2706,3	2202,7	2,59	2,296	37,8	12,85	11,46	1,09
130	0,269	1,496	2720,6	2174,2	2,69	2,256	28,7	13,24	8,85	1,11
140	0,361	1,966	2734,0	2144,9	2,79	2,315	22,07	13,53	6,89	1,12
150	0,475	2,547	2246,5	2114,3	2,88	2,394	17,02	13,92	5,47	1,16
160	0,618	3,258	2757,8	2082,5	3,01	2,478	13,40	14,32	4,32	1,18
170	0,792	4,122	2768,7	2049,4	3,13	2,583	10,58	14,71	3,57	1,21
180	1,003	5,157	2778,4	2015,1	3,27	2,709	8,42	15,10	2,93	1,25
190	1,255	6,994	2786,3	1978,7	3,42	2,855	6,74	15,59	2,44	1,30
200	1,555	7,862	2793,0	1940,8	3,55	3,023	5,37	15,98	2,03	1,36
210	1,908	9,588	2798,0	1900,4	3,72	3,199	4,37	16,37	1,71	1,41
220	2,320	11,62	2801,4	1857,7	3,90	3,408	3,54	16,87	1,45	1,47
230	2,798	13,99	2803,1	1812,9	4,09	3,634	2,90	17,36	1,24	1,54
240	3,348	16,98	2803,1	1765,6	4,29	3,881	2,37	17,75	1,06	1,61
250	3,977	19,98	2801,0	1715,7	4,51	4,157	1,97	18,24	0,913	1,68
260	4,694	23,72	2796,4	1661,3	4,80	4,467	1,63	18,83	0,794	1,75
270	6,505	28,09	2789,7	1604,1	5,10	4,81	1,36	19,32	0,688	1,82
280	6,546	33,19	2779,6	1542,8	5,49	5,23	1,14	19,91	0,600	1,90
290	7,445	39,15	2766,2	1476,3	5,83	5,69	0,941	20,59	0,526	2,01
300	8,592	46,21	2749,0	1404,2	6,27	6,28	0,778	21,28	0,461	2,13
310	9,869	54,58	2727,3	1325,1	6,84	7,12	0,634	21,27	0,403	2,29
320	10,289	64,72	2700,1	1238,0	7,51	8,21	0,509	22,85	0,509	2,50
330	14,607	92,76	2621,7	1027,0	8,26	9,88	0,390	23,93	0,310	2,86
340	14,607	92,76	2622,7	1027,0	9,30	12,35	0,292	25,20	0,272	3,35
350	16,569	113,6	2564,7	893,0	10,70	16,24	0,209	26,57	0,234	4,03
360	18,674	144,0	2481,1	719,7	12,79	23,03	0,139	29,12	0,202	5,23
370	21,053	203,0	2330,0	438,3	17,10	56,52	0,054	33,73	0,166	11,10

Tabela 15.5. Parametr $\vartheta_z = (\eta^2/g\rho^2)^{1/3}$ dla wody [6]

t °C	γ kg/m ³	η kg/(m·h)	$\vartheta_z \cdot 10^6$ m	t °C	γ kg/m ³	η kg/(m·h)	$\vartheta_z \cdot 10^6$ m
0	999,8	6,440	68,83	130	934,8	0,762	17,36
10	999,6	4,695	55,77	140	926,1	0,706	16,60
20	998,2	3,600	46,76	150	916,9	0,667	16,08
30	995,6	2,885	40,41	160	907,4	0,623	15,48
40	992,2	2,351	35,34	170	897,3	0,586	15,00
50	988,0	1,978	31,59	180	886,9	0,551	14,48
60	983,2	1,695	28,59	190	876,0	0,522	14,08
70	977,7	1,461	25,99	200	864,7	0,498	13,76
80	971,8	1,281	23,90	210	852,8	0,473	13,42
90	965,3	1,133	22,12	220	840,3	0,452	13,15
100	958,3	1,016	20,63	230	827,3	0,431	12,88
110	951,0	0,918	19,42	240	813,6	0,413	12,65
120	943,1	0,830	18,26	250	799,2	0,395	12,43

Tabela 15.6. Parametr $\vartheta_z = (\eta^2/g\rho^2)^{1/3}$ dla czynników chłodniczych [6]

Rodzaj cieczy	t °C	$\vartheta_z \cdot 10^6$ m	Rodzaj cieczy	t °C	$\vartheta_z \cdot 10^6$ m	Rodzaj cieczy	t °C	$\vartheta_z \cdot 10^6$ m
NH ₃	-30	23,377	SO ₂	-20	22,622	Freon 12 CCl ₂ F ₂	-30	18,637
	-20	21,120		-10	21,672		-10	17,229
	-10	19,176		0	20,325		0	16,595
	0	17,789		10	19,611		10	16,135
	10	16,452		20	18,784		20	15,869
	20	15,057		30	17,990		30	15,655
CO ₂	-20	12,952	CH ₃ Cl	-10	19,562	Freon 11 CCl ₃ F	-30	29,662
	-10	11,865		0	18,736		-20	27,269
	0	11,238		10	18,040		-10	24,893
	10	10,983		20	17,434		0	23,508
	20	9,9295		30	16,972		10	21,718
	30	9,3815					20	20,041

Tabela 15.7. Parametr $\vartheta_z = (\eta^2/g\rho^2)^{1/3}$ dla powietrza [6]

t °C	η kg/(m·h)	γ kg/m ³	$\vartheta_z \cdot 10^6$ m	t °C	η kg/(m·h)	γ kg/m ³	$\vartheta_z \cdot 10^6$ m
-10	0,060	1,31	254	80	0,075	0,968	360
0	0,062	1,252	268	90	0,0777	0,942	375
10	0,064	1,21	279	100	0,0783	0,916	385
20	0,066	1,164	293	110	0,080	0,893	396
30	0,067	1,13	302	120	0,082	0,87	410
40	0,069	1,092	315	130	0,0835	0,848	422
50	0,071	1,06	327	140	0,085	0,827	434
60	0,072	1,025	337	150	0,086	0,808	442
70	0,073	1,073	347				

Tabela 15.8. Zdolność emisyjna ε_n dla normalnego promieniowania różnych ciał [19]

Nazwa materiału	$t, ^\circ\text{C}$	ε_n
Metale		
Chrom	100–1000	0,08–0,26
Chromonikiel	125–1034	0,64–0,76
Cyna, blacha żelazna błyszcząca ocynowana	25	0,043–0,064
Cynk handlowy (99,1%) polerowany	225–325	0,045–0,053
Cynk utleniony przy 400°C	400	0,11
Ocynkowana blacha żelazna błyszcząca	28	0,228
Ocynkowana blacha żelazna szara utleniona	24	0,276
Glin polerowany	225–575	0,039–0,057
Glin surowy	26	0,055
Glin utleniony przy 600°C	200–600	0,11–0,19
Miedź starannie polerowana, elektrolityczna	80–115	0,018–0,023
Miedź handlowa obrobiona do połysku	22	0,072
Miedź utleniona przy 600°C	200–600	0,57–0,87
Miedzi tlenek	800–1100	0,66–0,54
Miedź stopiona	1075–1275	0,16–0,13
Molibdenowe włókno	725–2600	0,096–0,292
Mosiężna płyta walcowana o nieobrobionej powierzchni	22	0,06
Mosiężna płyta walcowana, obrobiona grubym szmergłem	22	0,20
Mosiężna płyta matowa	50–350	0,22
Mosiądz utleniony przy 600°C	200–600	0,61–0,59
Nikiel technicznie czysty, polerowany	225–375	0,07–0,087
Niklowane żelazo wytrawione, niepolerowane	20	0,11
Niklowany drut	185–1000	0,096–0,186
Nikiel utleniony przy 600°C	200–600	0,37–0,48
Niklu tlenek	650–1255	0,50–0,86
Ołów szary, utleniony	25	0,281
Ołów utleniony przy 200°C	200	0,63
Platyna czysta, płyta polerowana	225–625	0,054–0,104
Platynowa taśma	925–1115	0,12–0,17
Platynowe włókno	25–1230	0,036–0,192
Platynowy drut	225–1375	0,073–0,182
Rtęć bardzo czysta	0–100	0,09–0,12
Srebro polerowane, czyste	225–625	0,0198–0,0324
Staliwo polerowane	770–1040	0,52–0,56
Stalowa blacha szlifowana	940–1100	0,55–0,61
Stal utleniona przy 600°C	200–600	0,80
Stalowa blacha o utlenionej błyszczącej powierzchni	25	0,82
Złoto starannie polerowane	225–635	0,018–0,035
Żelazo polerowane	425–1020	0,144–0,377
Żelazo świeżo obrobione szmergłem	20	0,242
Żelazo utlenione	100	0,736
Żelazo utlenione gładkie	125–525	0,78–0,82
Żelaza tlenek	500–1200	0,85–0,95
Żeliwo surowe nie obrobione	925–1115	0,87–0,95
Żelazo toczzone	830–990	0,60–0,70
Żeliwo utlenione przy 600°C	200–600	0,64–0,78

Tabela 15.8. Zdolność emisyjna ε_n dla normalnego promieniowania różnych ciał [19]

Nazwa materiału	$t, ^\circ\text{C}$	ε_n
Farby, lakiery itp.		
Aluminiowe farby, zależnie od czasu wykonania i zawartości Al	100	0,27–0,67
Aluminiowa farba po nagraniu do 325°C	150–315	0,35
Aluminiowy lakren na płycie chropowatej	20	0,39
Emalia biała na żelazie	19	0,897
Lakier biały	40–95	0,80–0,95
Lakier biały emaliowany na płycie żelaznej chropowatej	23	0,906
Lakier czarny błyszczący rozpylony na płycie żelaznej	25	0,875
Lakier żelazny matowy	40–95	0,96–0,98
Olejne farby o różnych kolorach	100	0,92–0,96
Szelak czarny błyszczący na żelazie cynowanym	21	0,821
Szelak czarny matowy	75–145	0,91
Różne		
Azbestowa tektura	24	0,96
Azbestowy papier	40–370	0,93–0,945
Cegła czerwona chropowata, lecz bez dużych nierówności	20	0,93
Cegła dynasowa glazurowana, chropowata	1100	0,85
Cegła dynasowa nie glazurowana, chropowata	100	0,80
Cegła ogniotrwała	—	0,8–0,9
Cegła szamotowa glazurowana	1100	0,75
Dębina gładzona	20	0,895
Gips	20	0,903
Guma miękka szara, chropowata (rafinowana)	24	0,859
Gumowa płyta twarda, polerowana	23	0,945
Kwarc topiony chropowaty	20	0,932
Marmur szarawy polerowany	22	0,931
Papa dachowa	21	0,910
Papier cienki naklejony na płytę metalową	19	0,924
Porcelana glazurowana	22	0,924
Sadza i kopeć	95–270	0,952
Sadza lampowa 0,075 mm i więcej	40–370	0,945
Sadza ze szkłem wodnym	100–185	0,959–0,947
Szkło gładkie	22	0,937
Wapienna wyprawa chropowata	10–88	0,91
Węgiel oczyszczony (0,9% popiołu)	125–625	0,81–0,79
Węglowe włókno	1040–1405	0,526
Woda	0–100	0,95–0,963

Tabela 15.9. Wartości funkcji wykładniczych i hiperbolicznych

x	e^{+x}	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$
0,0	1,00	1,00	0,000	1,000	0,000
0,1	1,11	0,90	0,100	1,005	0,100
0,2	1,22	0,82	0,201	1,020	0,197
0,3	1,34	0,74	0,305	1,045	0,291
0,4	1,49	0,67	0,411	1,081	0,380
0,5	1,64	0,61	0,521	1,128	0,462
0,6	1,82	0,55	0,637	1,186	0,537
0,7	2,00	0,50	0,759	1,255	0,604
0,8	2,22	0,45	0,888	1,337	0,664
0,9	2,46	0,41	1,027	1,433	0,716
1,0	2,72	0,37	1,175	1,543	0,762
1,1	3,00	0,33	1,336	1,668	0,804
1,2	3,32	0,30	1,510	1,811	0,834
1,3	3,70	0,27	1,698	1,971	0,862
1,4	4,06	0,25	1,904	2,151	0,885
1,5	4,50	0,22	2,129	2,352	0,905
1,6	4,49	0,20	2,376	2,577	0,922
1,7	5,47	0,18	2,646	2,828	0,935
1,8	6,05	0,17	2,942	3,108	0,947
1,9	6,63	0,15	3,268	3,418	0,956
2,0	7,39	0,14	3,627	3,762	0,964
2,1	8,12	0,12	4,022	4,144	0,971
2,2	9,03	0,11	4,457	4,568	0,976
2,3	9,98	0,10	4,937	5,037	0,980
2,4	11,0	0,091	5,466	5,557	0,984
2,5	12,3	0,083	6,050	6,132	0,987
2,6	13,5	0,074	6,695	6,769	0,989
2,7	14,8	0,067	7,406	7,474	0,991
2,8	16,4	0,061	8,192	8,253	0,993
2,9	18,2	0,055	9,060	9,115	0,994
3,0	20,1	0,050	10,018	10,068	0,995

Tabela 15.10. Tablica przeliczeniowa różnych jednostek lepkości

Jednostka	Symbol	$(N \cdot s)/m^2$, $kg/(m \cdot s)$	daP	P	cP, $mg/(m \cdot h)$	$(kp \cdot s)/m^2$	$(kp \cdot h)/m^2$
Niuton · sekunda na m^2	1 $(N \cdot s)/m^2 =$	1	1	10	10^3 3,6 · 10^3	0,101972	$2,833 \cdot 10^{-5}$
Dekapuaz	1 DaP =	1	1	10	10^3 3,6 · 10^3	0,101972	$2,833 \cdot 10^{-5}$
Puaz	1 P =	10^{-1}	10^{-1}	1	10^2 3,6 · 10^2	$0,10197 \cdot 10^{-1}$	$2,833 \cdot 10^{-6}$
Centypuaz	1 cP =	10^{-3}	10^{-3}	10^{-2}	1 3,6	$0,10197 \cdot 10^{-3}$	$2,833 \cdot 10^{-8}$
Kilogram na metr i godzinę	1 $kg/(m \cdot h) =$	$2,778 \cdot 10^{-4}$	$2,778 \cdot 10^{-4}$	$2,778 \cdot 10^{-1}$	1	$2,833 \cdot 10^{-5}$	$78,68 \cdot 10^{-10}$
Kilopond · sekunda na m^2	1 $(kp \cdot s)/m^2 =$	9,80665	9,80665			1	$2,778 \cdot 10^{-4}$
Kilopond · godzina na m^2	1 $(kp \cdot h)/m^2 =$	$3,5304 \cdot 10^4$	$3,5304 \cdot 10^5$			$3,6 \cdot 10^3$	1
Porównanie jednostek lepkości kinematycznej							
Jednostka	Symbol	m^2/s	maSt	St	cm^2/s	cSt	m^2/h
Metr kwadratowy na sekundę	1 $m^2/s =$	1	1	10^4	10^4	10^6	$3,6 \cdot 10^3$
Miriastokes	1 maSt =	1	1	10^4	10^4	10^6	$3,6 \cdot 10^3$
Stokes (= cm^2/s)	1 St =	10^{-4}	10^{-4}	1	1	10^2	$3,6 \cdot 10^{-1}$
Centymetr kwadratowy na sekundę (= St))	1 $cm^2/s =$	10^{-4}	10^{-4}	1	1	10^2	$3,6 \cdot 10^{-1}$
Centystokes	1 cSt =	10^{-6}	10^{-6}	10^{-2}	10^{-3}	1	$3,6 \cdot 10^{-3}$
Metr kwadratowy na godzinę	1 $m^2/h =$	$2,778 \cdot 10^{-4}$	$2,778 \cdot 10^{-4}$	2,778	2,778	$2,778 \cdot 10^2$	1

Podstawowe jednostki w układzie SI, lepkość dynamiczna w $(N \cdot s)/m^2$ (tj. $kg/(m \cdot s)$), lepkość kinematyczna w m^2/s .

Tabela 15.11. Sprawność wymiennika współprądowego $\eta_w = f(N, R)$

$\begin{matrix} R \\ N \end{matrix}$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,1	0,095	0,095	0,094	0,094	0,093	0,093	0,092	0,092	0,092	0,091	0,091
0,2	0,181	0,180	0,178	0,176	0,174	0,173	0,171	0,170	0,168	0,166	0,165
0,3	0,259	0,256	0,252	0,248	0,245	0,242	0,238	0,235	0,232	0,229	0,226
0,4	0,330	0,324	0,318	0,312	0,306	0,301	0,295	0,290	0,285	0,280	0,275
0,5	0,393	0,385	0,376	0,368	0,360	0,352	0,344	0,337	0,330	0,323	0,316
0,6	0,451	0,439	0,428	0,417	0,406	0,396	0,386	0,376	0,367	0,358	0,349
0,7	0,503	0,488	0,474	0,460	0,446	0,433	0,421	0,409	0,398	0,387	0,377
0,8	0,551	0,532	0,514	0,497	0,481	0,466	0,451	0,437	0,424	0,411	0,399
0,9	0,593	0,571	0,550	0,530	0,512	0,494	0,477	0,461	0,446	0,431	0,417
1,0	0,632	0,606	0,582	0,560	0,538	0,518	0,499	0,481	0,464	0,448	0,432
1,1	0,667	0,638	0,611	0,585	0,561	0,539	0,517	0,498	0,479	0,461	0,445
1,2	0,699	0,666	0,636	0,608	0,581	0,556	0,533	0,512	0,491	0,472	0,455
1,3	0,727	0,692	0,658	0,627	0,599	0,572	0,547	0,524	0,502	0,482	0,463
1,4	0,753	0,714	0,678	0,645	0,614	0,585	0,558	0,534	0,511	0,490	0,470
1,5	0,777	0,735	0,696	0,660	0,627	0,596	0,568	0,542	0,518	0,496	0,475
1,6	0,798	0,753	0,711	0,673	0,638	0,606	0,577	0,549	0,524	0,501	0,480
1,7	0,817	0,769	0,725	0,685	0,648	0,615	0,584	0,556	0,530	0,505	0,483
1,8	0,835	0,784	0,737	0,695	0,657	0,622	0,590	0,561	0,534	0,509	0,486
1,9	0,850	0,797	0,748	0,704	0,664	0,628	0,595	0,565	0,537	0,512	0,489
2,0	0,865	0,808	0,758	0,712	0,671	0,633	0,600	0,569	0,540	0,515	0,491
2,1	0,878	0,819	0,766	0,719	0,677	0,638	0,603	0,572	0,543	0,517	0,493
2,2	0,889	0,828	0,774	0,725	0,681	0,642	0,607	0,574	0,545	0,518	0,494
2,3	0,900	0,837	0,781	0,731	0,686	0,646	0,609	0,576	0,547	0,520	0,495
2,4	0,909	0,844	0,787	0,735	0,689	0,648	0,612	0,578	0,548	0,521	0,496
2,5	0,918	0,851	0,792	0,739	0,693	0,651	0,614	0,580	0,549	0,522	0,497
2,6	0,926	0,857	0,797	0,743	0,696	0,653	0,615	0,581	0,550	0,523	0,497
2,7	0,933	0,862	0,801	0,746	0,698	0,655	0,617	0,582	0,551	0,523	0,498
2,8	0,939	0,867	0,804	0,749	0,700	0,657	0,618	0,583	0,552	0,524	0,498
2,9	0,945	0,872	0,808	0,751	0,702	0,658	0,619	0,584	0,553	0,524	0,498
3,0	0,950	0,876	0,811	0,754	0,704	0,659	0,620	0,585	0,553	0,525	0,499
3,1	0,955	0,879	0,813	0,756	0,705	0,660	0,621	0,585	0,553	0,525	0,499
3,2	0,959	0,882	0,815	0,757	0,706	0,661	0,621	0,586	0,554	0,525	0,499
3,3	0,963	0,885	0,817	0,759	0,707	0,662	0,622	0,586	0,554	0,525	0,499
3,4	0,967	0,887	0,819	0,760	0,708	0,663	0,622	0,586	0,554	0,525	0,499
3,5	0,970	0,890	0,821	0,761	0,709	0,663	0,623	0,587	0,555	0,526	0,500
3,6	0,973	0,892	0,822	0,762	0,710	0,664	0,623	0,587	0,555	0,526	0,500
3,7	0,975	0,894	0,824	0,763	0,710	0,664	0,623	0,587	0,555	0,526	0,500
3,8	0,978	0,895	0,825	0,764	0,711	0,664	0,624	0,587	0,555	0,526	0,500
3,9	0,980	0,897	0,826	0,764	0,711	0,665	0,624	0,587	0,555	0,526	0,500
4,0	0,982	0,898	0,826	0,765	0,712	0,665	0,624	0,588	0,555	0,526	0,500
4,1	0,983	0,899	0,827	0,766	0,712	0,665	0,624	0,588	0,555	0,526	0,500
4,2	0,985	0,900	0,828	0,766	0,712	0,665	0,624	0,588	0,555	0,526	0,500
4,3	0,986	0,901	0,829	0,766	0,713	0,666	0,624	0,588	0,555	0,526	0,500
4,4	0,988	0,902	0,829	0,767	0,713	0,666	0,624	0,588	0,555	0,526	0,500
4,5	0,989	0,903	0,830	0,767	0,713	0,666	0,625	0,588	0,555	0,526	0,500
4,6	0,990	0,903	0,830	0,767	0,713	0,666	0,625	0,588	0,555	0,526	0,500
4,7	0,991	0,904	0,830	0,768	0,713	0,666	0,625	0,588	0,555	0,526	0,500
4,8	0,992	0,904	0,831	0,768	0,713	0,666	0,625	0,588	0,555	0,526	0,500
4,9	0,993	0,905	0,831	0,768	0,714	0,666	0,625	0,588	0,555	0,526	0,500
5,0	0,993	0,905	0,831	0,768	0,714	0,666	0,625	0,588	0,555	0,526	0,500
5,1	0,994	0,906	0,832	0,768	0,714	0,666	0,625	0,588	0,555	0,526	0,500
5,2	0,994	0,906	0,832	0,768	0,714	0,666	0,625	0,588	0,556	0,526	0,500
5,3	0,995	0,906	0,832	0,768	0,714	0,666	0,625	0,588	0,556	0,526	0,500
5,4	0,995	0,907	0,832	0,769	0,714	0,666	0,625	0,588	0,556	0,526	0,500
5,5	0,996	0,907	0,832	0,769	0,714	0,666	0,625	0,588	0,556	0,526	0,500
5,6	0,996	0,907	0,832	0,769	0,714	0,667	0,625	0,588	0,556	0,526	0,500
5,7	0,997	0,907	0,832	0,769	0,714	0,667	0,625	0,588	0,556	0,526	0,500
5,8	0,997	0,908	0,833	0,769	0,714	0,667	0,625	0,588	0,556	0,526	0,500
5,9	0,997	0,908	0,833	0,769	0,714	0,667	0,625	0,588	0,556	0,526	0,500
6,0	0,998	0,908	0,833	0,769	0,714	0,667	0,625	0,588	0,556	0,526	0,500

Tabela 15.12. Sprawność wymiennika przeciwprądowego $\eta_p = f(N, R)$

$N \backslash R$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,1	0,095	0,095	0,094	0,094	0,093	0,093	0,093	0,092	0,092	0,091	0,091
0,2	0,181	0,180	0,178	0,177	0,175	0,174	0,172	0,171	0,169	0,168	0,167
0,3	0,259	0,256	0,253	0,250	0,247	0,245	0,242	0,239	0,236	0,233	0,231
0,4	0,330	0,325	0,320	0,316	0,311	0,307	0,303	0,298	0,294	0,290	0,286
0,5	0,393	0,387	0,381	0,374	0,368	0,362	0,356	0,350	0,345	0,339	0,333
0,6	0,451	0,443	0,435	0,427	0,419	0,412	0,404	0,397	0,389	0,382	0,375
0,7	0,503	0,474	0,484	0,475	0,465	0,456	0,447	0,438	0,429	0,420	0,412
0,8	0,551	0,540	0,528	0,517	0,507	0,496	0,485	0,475	0,465	0,454	0,444
0,9	0,593	0,581	0,569	0,556	0,544	0,532	0,520	0,508	0,496	0,485	0,474
1,0	0,632	0,619	0,605	0,592	0,578	0,565	0,551	0,538	0,525	0,513	0,500
1,1	0,667	0,653	0,638	0,624	0,609	0,595	0,580	0,566	0,552	0,538	0,524
1,2	0,699	0,684	0,668	0,653	0,637	0,622	0,606	0,591	0,576	0,560	0,545
1,3	0,727	0,712	0,696	0,680	0,663	0,647	0,630	0,614	0,598	0,581	0,565
1,4	0,753	0,737	0,721	0,704	0,687	0,670	0,652	0,635	0,618	0,600	0,583
1,5	0,777	0,760	0,744	0,725	0,709	0,691	0,673	0,655	0,636	0,618	0,600
1,6	0,798	0,782	0,764	0,747	0,729	0,710	0,691	0,673	0,653	0,634	0,615
1,7	0,817	0,801	0,784	0,766	0,747	0,728	0,709	0,689	0,669	0,649	0,630
1,8	0,835	0,818	0,801	0,783	0,764	0,745	0,725	0,705	0,684	0,664	0,643
1,9	0,850	0,834	0,817	0,799	0,780	0,760	0,740	0,719	0,698	0,677	0,655
2,0	0,865	0,849	0,832	0,814	0,795	0,775	0,754	0,733	0,711	0,689	0,667
2,1	0,878	0,862	0,845	0,827	0,808	0,788	0,767	0,745	0,723	0,700	0,677
2,2	0,889	0,874	0,857	0,840	0,821	0,800	0,779	0,757	0,734	0,711	0,688
2,3	0,900	0,885	0,869	0,851	0,832	0,812	0,790	0,768	0,745	0,721	0,697
2,4	0,909	0,895	0,879	0,862	0,843	0,823	0,801	0,779	0,755	0,731	0,706
2,5	0,918	0,904	0,889	0,872	0,853	0,833	0,811	0,788	0,764	0,740	0,714
2,6	0,926	0,912	0,897	0,881	0,862	0,842	0,821	0,797	0,773	0,748	0,722
2,7	0,933	0,920	0,906	0,889	0,871	0,851	0,829	0,806	0,782	0,756	0,730
2,8	0,939	0,927	0,913	0,897	0,879	0,859	0,838	0,814	0,790	0,764	0,737
2,9	0,945	0,935	0,920	0,904	0,887	0,867	0,846	0,822	0,797	0,771	0,744
3,0	0,950	0,939	0,926	0,911	0,894	0,874	0,853	0,830	0,804	0,778	0,750
3,1	0,955	0,944	0,932	0,917	0,900	0,881	0,860	0,836	0,811	0,784	0,756
3,2	0,959	0,949	0,937	0,923	0,907	0,888	0,867	0,843	0,818	0,790	0,762
3,3	0,963	0,954	0,942	0,928	0,912	0,894	0,873	0,849	0,824	0,796	0,767
3,4	0,967	0,958	0,947	0,933	0,918	0,899	0,879	0,855	0,830	0,802	0,773
3,5	0,970	0,961	0,951	0,938	0,923	0,905	0,884	0,861	0,835	0,807	0,778
3,6	0,973	0,965	0,955	0,942	0,927	0,910	0,890	0,866	0,841	0,812	0,783
3,7	0,975	0,968	0,958	0,946	0,932	0,915	0,895	0,871	0,846	0,817	0,787
3,8	0,978	0,970	0,961	0,950	0,936	0,919	0,899	0,876	0,851	0,822	0,792
3,9	0,980	0,973	0,964	0,953	0,940	0,923	0,904	0,881	0,855	0,827	0,796
4,0	0,982	0,975	0,967	0,957	0,944	0,927	0,908	0,886	0,860	0,831	0,800
4,1	0,983	0,977	0,970	0,960	0,947	0,931	0,912	0,890	0,864	0,835	0,804
4,2	0,985	0,979	0,972	0,962	0,950	0,935	0,916	0,894	0,868	0,839	0,808
4,3	0,986	0,981	0,974	0,965	0,953	0,938	0,920	0,898	0,872	0,843	0,811
4,4	0,988	0,983	0,976	0,967	0,956	0,941	0,923	0,901	0,876	0,847	0,815
4,5	0,989	0,984	0,978	0,970	0,959	0,944	0,927	0,905	0,879	0,850	0,818
4,6	0,990	0,986	0,980	0,972	0,961	0,947	0,930	0,908	0,883	0,854	0,821
4,7	0,991	0,987	0,981	0,974	0,963	0,950	0,933	0,912	0,886	0,857	0,825
4,8	0,992	0,988	0,983	0,975	0,966	0,952	0,936	0,915	0,890	0,860	0,828
4,9	0,993	0,989	0,984	0,977	0,968	0,955	0,938	0,918	0,893	0,863	0,831
5,0	0,993	0,990	0,985	0,979	0,970	0,957	0,941	0,921	0,896	0,866	0,833
5,1	0,994	0,991	0,986	0,980	0,971	0,959	0,944	0,923	0,899	0,869	0,836
5,2	0,994	0,992	0,987	0,981	0,973	0,961	0,946	0,926	0,901	0,872	0,839
5,3	0,995	0,992	0,988	0,983	0,975	0,963	0,948	0,929	0,904	0,875	0,841
5,4	0,995	0,993	0,989	0,984	0,976	0,965	0,950	0,931	0,907	0,877	0,844
5,5	0,996	0,994	0,990	0,985	0,978	0,967	0,953	0,933	0,909	0,880	0,846
5,6	0,996	0,994	0,991	0,986	0,979	0,969	0,955	0,936	0,912	0,882	0,848
5,7	0,997	0,995	0,992	0,987	0,980	0,970	0,956	0,938	0,914	0,885	0,851
5,8	0,997	0,995	0,992	0,988	0,981	0,972	0,958	0,940	0,916	0,887	0,853
5,9	0,997	0,996	0,993	0,989	0,982	0,973	0,960	0,942	0,919	0,889	0,855
6,0	0,998	0,996	0,993	0,989	0,983	0,974	0,962	0,944	0,921	0,892	0,857

Tabela 15.13. Liczba przenikania ciepła dla wymiennika przeciwprądowego $N = f(R, \eta)$

$\eta_p \backslash R$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,02	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020
0,04	0,041	0,041	0,041	0,041	0,041	0,041	0,041	0,041	0,041	0,042	0,042
0,06	0,062	0,062	0,062	0,062	0,063	0,063	0,063	0,063	0,063	0,064	0,064
0,08	0,083	0,084	0,084	0,084	0,085	0,085	0,085	0,086	0,086	0,087	0,087
0,10	0,105	0,106	0,106	0,107	0,108	0,108	0,109	0,109	0,110	0,110	0,111
0,12	0,128	0,129	0,129	0,130	0,131	0,132	0,133	0,134	0,135	0,135	0,136
0,14	0,151	0,152	0,153	0,154	0,155	0,157	0,158	0,159	0,160	0,161	0,163
0,16	0,174	0,176	0,177	0,179	0,180	0,182	0,184	0,185	0,187	0,189	0,190
0,18	0,198	0,200	0,202	0,204	0,206	0,208	0,210	0,213	0,215	0,217	0,220
0,20	0,223	0,225	0,228	0,230	0,233	0,236	0,238	0,241	0,244	0,247	0,250
0,22	0,248	0,251	0,254	0,257	0,261	0,264	0,267	0,271	0,274	0,278	0,282
0,24	0,274	0,278	0,282	0,285	0,289	0,293	0,297	0,302	0,306	0,311	0,316
0,26	0,301	0,305	0,310	0,314	0,319	0,324	0,329	0,334	0,340	0,345	0,351
0,28	0,329	0,333	0,339	0,344	0,350	0,355	0,361	0,368	0,375	0,382	0,389
0,30	0,357	0,362	0,368	0,375	0,381	0,388	0,396	0,403	0,411	0,420	0,429
0,32	0,386	0,392	0,399	0,407	0,414	0,423	0,431	0,440	0,450	0,460	0,471
0,34	0,416	0,423	0,431	0,440	0,449	0,458	0,468	0,479	0,490	0,502	0,515
0,36	0,446	0,455	0,464	0,474	0,485	0,496	0,507	0,520	0,533	0,547	0,563
0,38	0,478	0,488	0,499	0,510	0,522	0,535	0,548	0,563	0,578	0,595	0,613
0,40	0,511	0,522	0,534	0,547	0,561	0,575	0,591	0,608	0,626	0,645	0,667
0,42	0,545	0,558	0,571	0,586	0,601	0,618	0,636	0,655	0,676	0,699	0,724
0,44	0,580	0,594	0,610	0,626	0,644	0,663	0,683	0,705	0,730	0,756	0,786
0,46	0,616	0,632	0,650	0,668	0,688	0,710	0,733	0,759	0,787	0,818	0,852
0,48	0,654	0,672	0,691	0,712	0,735	0,759	0,786	0,815	0,847	0,883	0,923
0,50	0,693	0,713	0,735	0,758	0,783	0,811	0,841	0,875	0,912	0,953	1,000
0,52	0,734	0,756	0,780	0,806	0,835	0,866	0,900	0,938	0,981	1,029	1,083
0,54	0,777	0,801	0,828	0,857	0,889	0,924	0,962	1,006	1,054	1,110	1,174
0,56	0,821	0,848	0,878	0,910	0,946	0,985	1,029	1,078	1,134	1,198	1,273
0,58	0,868	0,898	0,930	0,966	1,006	1,050	1,099	1,155	1,219	1,294	1,381
0,60	0,916	0,949	0,986	1,025	1,070	1,119	1,175	1,239	1,312	1,398	1,500
0,62	0,968	1,004	1,044	1,088	1,138	1,193	1,256	1,328	1,412	1,511	1,632
0,64	1,022	1,062	1,106	1,155	1,210	1,272	1,343	1,425	1,521	1,636	1,778
0,66	1,079	1,123	1,172	1,226	1,287	1,357	1,437	1,530	1,640	1,774	1,941
0,68	1,139	1,188	1,242	1,302	1,370	1,448	1,538	1,644	1,771	1,927	2,125
0,70	1,204	1,257	1,316	1,383	1,459	1,546	1,648	1,769	1,915	2,097	2,333
0,72	1,273	1,331	1,397	1,471	1,555	1,653	1,768	1,906	2,075	2,288	2,571
0,74	1,347	1,411	1,484	1,566	1,660	1,770	1,800	2,058	2,253	2,505	2,846
0,76	1,427	1,498	1,578	1,669	1,775	1,898	2,046	2,226	2,453	2,751	3,167
0,78	1,514	1,592	1,681	1,782	1,900	2,040	2,208	2,415	2,680	3,035	3,545
0,80	1,609	1,696	1,794	1,907	2,040	2,197	2,389	2,628	2,939	3,365	4,000
0,82	1,715	1,810	1,920	2,046	2,196	2,374	2,594	2,872	3,238	3,754	4,556
0,84	1,833	1,939	2,061	2,203	2,372	2,576	2,829	3,153	3,589	4,220	5,250
0,86	1,966	2,085	2,222	2,382	2,574	2,808	3,101	3,483	4,007	4,789	6,143
0,88	2,120	2,253	2,408	2,591	2,811	3,081	3,424	3,877	4,514	5,500	7,333
0,90	2,303	2,454	2,630	2,840	3,094	3,409	3,815	4,361	5,148	6,419	9,000
0,92	2,526	2,699	2,903	3,147	3,445	3,819	4,307	4,976	5,970	7,655	11,500
0,94	2,813	3,016	3,256	3,546	3,903	4,357	4,858	5,802	7,095	9,426	15,667
0,96	3,219	3,464	3,757	4,113	4,557	5,130	5,502	7,014	8,789	12,238	24,000
0,98	3,912	4,232	4,617	5,091	5,691	6,477	7,563	9,179	11,898	17,750	49,000

SPIS RZECZY

Od autora	3
Wstęp	4
1. Podstawowe wielkości i oznaczenia	5
2. Pojęcia wstępne	9
2.1. Ogólny podział przekazywania ciepła	12
2.2. Równowaga i ogólne zależności w polu temperaturowym	13
3. Przewodzenie ciepła (część I) — rozwiązania podstawowe	17
3.1. Prawo Fouriera	17
3.2. Współczynnik λ przewodzenia ciepła	18
3.2.1. Ciała stałe metaliczne	18
3.2.2. Ciała stałe niemetaliczne	21
3.2.2.1. Ciecze	22
3.2.2.2. Gazy	24
3.3. Przewodzenie ciepła ustalone, bez wewnętrznych źródeł ciepła — przypadki elementarne	25
3.3.1. Ściana płaska	25
3.3.1.1. Wielowarstwowa ściana płaska	27
3.3.2. Ściana rurowa	28
3.3.2.1. Jednowarstwowa ściana rurowa	29
3.3.2.2. Wielowarstwowa ściana rurowa	30
3.3.3. Ściana kulista	31
3.3.4. Powierzchnia zastępcza ścian zakrzywionych	33
3.3.4.1. Powierzchnia zastępcza ściany rurowej	34
3.3.4.2. Zastępczy współczynnik λ_z przewodzenia ciepła wielowarstwowej ściany rurowej	36
3.3.4.3. Narożnik dwuścienny	36
3.3.5. Grubość izolacji	37
3.3.6. Przykłady obliczeniowe	39
4. Przejmowanie (wnikanie) ciepła	41
4.1. Prawo Newtona	42
4.2. Współczynnik α przejmowania (wnikania) ciepła	42
4.3. Przykłady obliczeniowe	43
5. Przenikanie ciepła — rozwiązania podstawowe	44
5.1. Przenikanie ciepła przez przegrodę płaską	44
5.2. Przenikanie ciepła przez przegrodę rurową	46
5.3. Przenikanie ciepła przez przegrodę kulistą	48
5.4. Przenikanie ciepła przez powierzchnię zastępczą	50

5.5. Obliczanie temperatury w wybranym miejscu przegrody	52
5.6. Przenikanie ciepła przez pręty proste	53
5.6.1. Obliczanie temperatury pręta	54
5.6.2. Obliczanie strumienia ciepła	56
5.6.3. Pręt o nieskończonej długości	57
5.6.4. Pręt o skończonej długości na końcu zaizolowany	58
5.6.5. Obliczanie poprawki określającej błąd termometryczny spowodowany tulejką	59
5.7. Przenikanie ciepła przez przegrody żebrowane	61
5.7.1. Jednostronne żebra proste	61
5.7.1.1. Jednostronne żebra proste o stałym przekroju	63
5.7.1.2. Jednostronne żebra proste o zmiennej grubości	66
5.7.2. Jednostronne żebra igłowe	66
5.7.3. Jednostronne żebra okrągłe	67
5.7.4. Żebra dwustronne	71
5.7.5. Uwagi dotyczące stosowania powierzchni żebrowanych	74
5.8. Przykłady obliczeniowe	76
6. Wymienniki ciepła (część I)	79
6.1. Ogólny podział wymienników ciepła	79
6.2. Wymienniki powierzchniowe — rekuperatory	80
6.2.1. Obliczanie różnicy temperatur płynów jako funkcji powierzchni wymiennika	81
6.2.2. Obliczanie wielkości wymiennika za pomocą średniej różnicy temperatur płynów	85
6.2.2.1. Obliczenia dla współprądu, przeciwprądu, skraplacza i parownika	85
6.2.2.2. Obliczenia dla prądów skrzyżowanych i mieszanych	87
6.2.3. Obliczanie wielkości wymiennika za pomocą pojęcia jego sprawności	92
6.2.3.1. Wzór określający sprawność wymiennika współprądowego	94
6.2.3.2. Wzór określający sprawność wymiennika przeciwprądowego η_p	95
6.2.3.3. Sprawność η_d wymienników o dowolnym kierunku przepływu (skraplacz i parownik)	97
6.2.3.4. Sprawność wymienników η_m o prądach skrzyżowanych i mieszanych	97
6.2.3.5. Obliczanie wielkości wymiennika krzyżowego i mieszanego	97
6.2.4. Przykłady obliczeniowe	98
7. Wybrane równania różniczkowe stosowane w przekazywaniu ciepła	102
7.1. Różniczkowe równania przejmowania ciepła	102
7.2. Różniczkowe równanie przewodnictwa cieplnego	103
7.3. Różniczkowe równanie ruchu płynu	108
7.4. Różniczkowe równanie ciągłości	112
8. Teoria podobieństwa	115
8.1. Warunki jednoznaczności	116
8.2. Niezmienniki zjawiska	116
8.3. Warunki podobieństwa zjawisk i wnioski	126
9. Unoszenie ciepła — konwekcja	128
9.1. Warstwka przyścienna, temperatury obliczeniowe	129
9.2. Uogólnione równania i podział konwekcji	132
9.3. Konwekcja o wymuszonym ruchu burzliwym	134
9.3.1. Opływ powierzchni żebrowanych	141
9.3.2. Opływ różnych profili	142
9.3.3. Wzory uproszczone	149
9.3.4. Przykłady obliczeniowe	152
9.4. Konwekcja o wymuszonym ruchu uwarstwionym	153
9.5. Konwekcja o wymuszonym ruchu przejściowym	157

9.6. Konwekcja naturalna (swobodna)	158
9.6.1. Konwekcja naturalna w szczelinach	162
9.6.2. Wzory uproszczone	163
9.6.3. Przykłady obliczeniowe	165
9.7. Spływ grawitacyjny	166
9.7.1. Spływ grawitacyjny cienkich warstw	168
9.7.2. Grawitacyjny spływ laminarny	170
9.7.3. Grawitacyjny spływ burzliwy	172
9.8. Skraplanie	172
9.8.1. Wpływ przegrzania pary	180
9.8.2. Wpływ usytuowania powierzchni	180
9.8.3. Wpływ prędkości przepływu pary	182
9.8.4. Wpływ gazów obojętnych w parze	183
9.8.5. Obliczenie uproszczone	183
9.8.6. Przykłady obliczeniowe	184
9.9. Wrzenie	185
9.9.1. Rodzaje wrzenia	187
9.9.2. Wzory obliczeniowe	188
9.9.3. Przykłady obliczeniowe	192
9.10. Konwekcja o ruchu mieszanym	193
9.11. Systematyka budowy wybranych równań uogólnionych	194
10. Promieniowanie (radiacja)	195
10.1. Promieniowanie ciał stałych i ciekłych	198
10.1.1. Podstawowe prawa promieniowania	198
10.1.1.1. Prawo Kirchhoffa	198
10.1.1.2. Prawo Plancka	199
10.1.1.3. Prawo Wiena	200
10.1.1.4. Prawo Stefana-Boltzmann	200
10.1.1.5. Prawo Lamberta	202
10.1.2. Wzory obliczeniowe ciepła przekazywanego przez promieniowanie	206
10.1.2.1. Równoległe powierzchnie blisko położone (teoretycznie nieskończenie duże)	206
10.1.2.2. Powierzchnie zamykające się	209
10.1.2.3. Powierzchnie dowolnie usytuowane	209
10.1.2.4. Ekrany	215
10.1.3. Promieniowanie słoneczne	215
10.1.4. Przykłady obliczeniowe	215
10.2. Promieniowanie gazów	218
10.2.1. Wzory obliczeniowe dla promieniujących gazów	219
10.3. Promieniowanie płomienia świecącego	223
11. Przewodzenie ciepła (część II) — wybrane rozwiązania analityczne	226
11.1. Niestalone przewodzenie ciepła w ciałach z wewnętrznymi źródłami ciepła	226
11.1.1. Warunek początkowy i warunki brzegowe	227
11.1.2. Ustalone przewodzenie w płycie płaskiej	228
11.1.3. Ustalone przewodzenie ciepła w pręcie walcowym	230
11.1.4. Źródła ciepła w ośrodku półnieskończonym	232
11.2. Niestalone przewodzenie ciepła bez wewnętrznych źródeł ciepła	235
11.2.1. Niestalone przewodzenie ciepła w nieskończonej płycie płaskiej, znajdującej się w otoczeniu o stałej temperaturze	236
11.2.2. Stan uporządkowany w obliczeniach niestalonego przewodzenia ciepła	247

12. Przewodzenie ciepła (część III) — rozwiązania numeryczne	249
12.1. Dyskretyzacja zmiennej ciągłej	250
12.2. Wymagania dotyczące metod różnicowych	250
12.3. Metoda różnic skończonych	251
12.3.1. Aproksymacja funkcji ciągłych różnicami skończonymi	251
12.3.2. Aproksymacja warunków brzegowych	253
12.3.3. Ustalone jednokierunkowe przewodzenie ciepła	254
12.3.4. Nieustalone jednoosiowe przewodzenie ciepła	257
12.4. Metoda bilansów elementarnych	259
12.4.1. Ustalone dwukierunkowe przewodzenie ciepła	260
12.4.2. Nieustalone dwukierunkowe przewodzenie ciepła	262
12.4.3. Nieustalone trójosiowe przewodzenie ciepła o zmiennych z temperaturą parametrach ciała	263
12.5. Metoda elementów skończonych	266
12.5.1. Ogólne sformułowanie metody	266
12.5.2. Funkcje kształtu	267
12.5.3. Rozwiązanie zagadnienia	269
12.5.4. Ustalone przewodzenie ciepła	269
12.6. Metoda Monte Carlo	272
12.7. Metoda wykreślna Schmidta–Bindera dla nieustalonego jednoosiowego przewodzenia ciepła	273
13. Wymienniki ciepła (część II) — regeneratory	276
13.1. Obliczenie podstawowe	277
13.2. Wpływ czasu rewersji na strumień ciepła	282
13.2.1. Sformułowanie zagadnienia	282
13.2.2. Opis przekazywania ciepła	284
13.2.3. Rozwiązanie zagadnienia wpływu czasu rewersji na strumień ciepła	285
13.2.4. Wynik obliczeń	287
14. Przekazywanie ciepła do gruntu	293
14.1. Straty ciepła do podłóg pomieszczeń niepodpiwniczonych	293
14.2. Przekazywanie ciepła do gruntu z uwzględnieniem podsiąkania wody gruntowej	295
Literatura	298
15. Dodatek — tabele i wykresy	300



E. Kalinowski, *Przekazywanie ciepła i wymienniki*
ERRATA

Strona	Wiersz	Jest	Powinno być
6	tab. 11, poz. Substancja	$9 = m \cdot n$	$9 = M \cdot n$
20	2 od dołu	tab. 14.1	tab. 15.1
35	rys. 3.13, oznaczenie osi pionowej	φ	ψ
44	4 od góry	płytami	płynami
52	5 od góry	wzór (3.70)	wzór (3.71)
58	rys. 5.9	l_o	t_o
64	wzór (5.96)	$\dots = Ls\lambda\Theta_p th(Ah)$	$\dots = Ls\lambda\Theta_p tgh(Ah)$
65	wzór (5.97a)	$\dots = \frac{s\lambda th(Ah)}{2h\alpha_2}$	$\dots = \frac{s\lambda tgh(Ah)}{2h\alpha_2}$
71	6 od góry	potać	postać
86	10 od góry	lewa strona	lewe strony
105	2 od dołu	powstania	powstanie
118	8 od dołu	równaniem różniczkowym	równaniami różniczkowymi
189	2 od dołu	$\sigma = \sqrt{\sigma/\gamma'}$	$\delta = \sqrt{\sigma/\gamma'}$
202	16 od góry	„czerni”	„czarności”
203	wzór (10.24)	$\dots \dot{e}_n \cos \psi d\Omega dF$	$\dots \dot{e}_n \cos \varphi d\Omega dF$
222	podpis pod rys. 10.29	zależność	zdolność
226	wzór (a) nieczytelny	$\frac{d\vartheta}{d\tau} = a \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{\dot{q}_r}{c_p \rho};$	
226	wzór (b) nieczytelny	$\frac{d\vartheta}{d\tau} = a \operatorname{div} \operatorname{grad} T + \frac{\dot{q}_r}{c_p \rho}.$	
227	17 od góry	Łykowa [15] ... Schneidera [26]	Łykowa [16] ... Schneidera [27]
300-305	nagłówki tab. 15.1-15.3	p	ρ



BIBLIOTEKA GŁÓWNA

286666 W/23

Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej
są do nabycia w następujących księgarniach:
Politechnika

Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
(budynek A-1 PWr.)

oraz Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej
plac Grunwaldzki 13, 50-377 Wrocław
(budynek D-1 PWr.)

Prowadzimy sprzedaż wysyłkową

ISBN 83-7085-107-X