

MODELOWANIE STRUKTURY ZALEŻNOŚCI W MODELACH AKTUARIALNYCH¹

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 15(21)

Stanisław Heilpern

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

e-mail: stanislaw.heilpern@ue.wroc.pl

ISSN 1644-6739
e-ISSN 2449-9765

DOI: 10.15611/sps.2017.15.06

JEL Classification: C30, G22, J10

Streszczenie: Praca poświęcona jest modelowaniu struktury zależności. Przedstawione zostały podstawowe informacje dotyczące funkcji łączących (*copula*), podstawowego narzędzia wykorzystywanego do modelowania struktury zależności. Omówiono główne rodziny tych funkcji: archimedesowe i eliptyczne. W drugiej części pracy zaprezentowano przykłady modelowania zależności w wybranych zagadnieniach aktuarialnych: ubezpieczeniach małżeńskich, procesach ryzyka oraz reasekuracji. W ubezpieczeniach małżeńskich skupiono się na wyznaczaniu wartości aktuarialnej renty. Oprócz funkcji łączących, wykorzystane zostały łańcuchy Markowa. Natomiast w procesach ryzyka poruszono zagadnienia dotyczące teorii ruiny. Podczas omawiania reasekuracji wprowadzony został i wykorzystany zależny rozkład dwumianowy. W modelach tych rozszerzono klasyczne podejście zakładające niezależność występujących zmiennych i procesów losowych. Ponadto przedstawiono zagadnienie dotyczące symulacji wykorzystującej funkcje łączące. Praca ma charakter przeglądowy.

Słowa kluczowe: funkcja łącząca, renta małżeńska, ruina, reasekuracja, symulacje.

1. Wstęp

W klasycznych zagadnieniach aktuarialnych w zasadzie wszystkie zmienne czy procesy losowe były niezależne. Założenie to jest bardzo wygodne od strony obliczeniowej, matematycznej, przydatne przy udowodnianiu własności czy twierdzeń, jest jednak często nierealistyczne. W praktyce rozpatrywane zmienne są zwykle mniej lub bardziej zależne.

Praca ma charakter przeglądowy. Przedstawia wybrane metody modelowania struktury zależności. Metody oparto głównie na funkcjach łączących (*copula*), podstawowym narzędziu umożliwiającym badanie i modelowanie występującej w rozpatrywanych zagadnie-

¹ Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2013-2016 jako projekt badawczy nr DEC-2013/09/B/HS4/00490.

niach struktury zależności. Umożliwiają one ujawnienie podstawowych własności i charakteryzację struktury zależności poprzez eliminację wpływu rozkładów brzegowych. Ponadto istnieje ścisły związek między funkcjami łączącymi a współczynnikami korelacji Kendalla i Spearmana. Ważnym zagadnieniem jest wybór właściwej funkcji łączącej, najlepiej dopasowanej do danych.

Zależności między badanymi zmiennymi często występują w modelach aktuarialnych. Na poszczególnych uczestników umowy ubezpieczeniowej działają wspólne czynniki zewnętrzne: naturalne, polityczne czy społeczne, powodując wzajemne zależności. W ubezpieczeniach małżeńskich na wielkości świadczeń istotnie wpływa wzajemna zależność długości życia poszczególnych małżonków, mimo że nie jest ona zbyt duża. Znaczną rolę odgrywają tu wspólne czynniki oddziałujące na małżonków, jak również psychologiczne czynniki, np. tak zwany syndrom złamanego serca.

W procesach ryzyka w zagadnieniach związanych z teorią ruiny również spotyka się zależność zmiennych czy procesów. Wspólne czynniki oddziałujące na ubezpieczonych powodują zależność wielkości wypłat. Zjawisko to ma istotny wpływ zarówno na wielkość prawdopodobieństwa ruiny, jak i na wartość szkód pokrytych przez reasekuratora. Można też zaobserwować zależność okresów między wypłatami a wielkością sąsiedniej wypłaty. Zjawisko takie może wystąpić np. w przypadku trzęsień ziemi. Zwykle po dłuższej przerwie między wstrząsami występują silniejsze wstrząsy.

2. Funkcje łączące

Podstawowym narzędziem wykorzystywanym w naszej pracy do modelowania struktury zależności będą funkcje łączące (*copula*) [Sklar 1959; Nelsen 1999]. Przedstawimy teraz podstawowe informacje dotyczące funkcji łączących. Funkcja łącząca n zmiennych jest łącznikiem między dystrybuantą łączną F a dystrybuantami brzegowymi F_i :

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)).$$

W przypadku ciągłych dystrybuant brzegowych jest ona jednoznacznie określona. Mówi o tym tzw. twierdzenie Sklara. Gdy dystrybuanty brzegowe są dyskretne, jednoznaczność występuje jedynie dla punktów skoku tych dystrybuant. Ponadto funkcja łącząca jest dystrybuantą łączną określoną na $[0, 1]^n$ o jednostajnych rozkładach brzegowych.

Prosty iloczyn argumentów funkcji łączącej, tzn. funkcja

$$\Pi^n(u_1, \dots, u_n) = u_1 \cdot \dots \cdot u_n,$$

odpowiada niezależności zmiennych losowych. Natomiast ścisła, dodatnia zależność, czyli współmonotoniczność, modelowana jest za pomocą funkcji minimum, tzn.

$$M^n(u_1, \dots, u_n) = \min(u_1, \dots, u_n).$$

Każda funkcja łącząca C jest ograniczona z dołu i z góry przez funkcje W^n i M^n :

$$W^n(u_1, \dots, u_n) \leq C(u_1, \dots, u_n) \leq M^n(u_1, \dots, u_n),$$

gdzie $W^n(u_1, \dots, u_n) = \max(u_1 + \dots + u_n - n + 1, 0)$. Są to tzw. dolne i górne ograniczenia Frecheta-Hoeffdinga. Dla $n \geq 3$ W^n nie jest funkcją łączącą. Natomiast dla dwóch wymiarów W^2 odpowiada ścisłej, ujemnej zależności, przeciwmonotoniczności zmiennych losowych. Jest to istotna różnica między przypadkiem dwu- a wielowymiarowym. Nie istnieją bowiem trzy zmienne losowe parami przeciwmonotoniczne.

W przypadku ciągłych zmiennych losowych dwuwymiarowa funkcja łącząca jednoznacznie wyznacza współczynniki korelacji Kendalla τ oraz Spearmana ρ . Określone są one wzorami:

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1,$$

$$\rho = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dudv - 3.$$

Niestety wartość klasycznego współczynnika korelacji Pearsona, jak i kowariancji zależy również od rozkładów brzegowych, czyli sama funkcja łącząca nie wyznacza tego współczynnika. Zachodzi bowiem wzór [Pfeifer, Neslehova 2004]:

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (C(F_1(x), F_2(y)) - F_1(x)F_2(y)) dx dy.$$

W zagadnieniach ubezpieczeniowych, zwłaszcza w ubezpieczeniach życiowych, częściej wykorzystuje się nie dystrybuanty, a funkcje przeżycia:

$$S(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n).$$

W tym celu określa się funkcję łączącą przeżycia wzorem

$$S(x_1, \dots, x_n) = C^*(S_1(x_1), \dots, S_n(x_n)),$$

gdzie $S_i(x_i) = P(X_i > x_i)$. Funkcja C^* spełnia wszystkie własności funkcji łączącej, czyli jest dystrybuantą określoną na $[0, 1]^n$ o jednostaj-

nych rozkładach brzegowych. W przypadku dwuwymiarowym obydwie funkcje łączące związane są wzorem

$$C^*(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v).$$

Analizując kontrakty ubezpieczeniowe dotyczące zdarzeń ekstremalnych, katastroficznych, możemy wykorzystać tzw. współczynniki zależności ekstremalnych. Dolny współczynnik określony jest formułą

$$\lambda_L(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 0^+} P(X \leq F_X^{-1}(u) | Y \leq F_Y^{-1}(u)) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u},$$

a górny wzorem

$$\lambda_U(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 1^-} P(X > F_X^{-1}(u) | Y > F_Y^{-1}(u)) = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{C^*(1 - u, 1 - u)}{1 - u}.$$

Przedstawiają one zależności między zmiennymi w tzw. ogonach rozkładów. W przypadku gdy otrzymujemy $\lambda_L = 0$ ($\lambda_U = 0$), to mówimy, że zachodzi niezależność dolna (górna).

3. Rodziny funkcji łączących

W zagadnieniach teoretycznych, jak również w zastosowaniach zwykle rozpatruje się rodziny funkcji łączących indeksowane parametrami. Przedstawimy teraz w dużym skrócie dwie podstawowe rodziny funkcji łączących, często wykorzystywane w praktycznych zastosowaniach: archimedesowe i eliptyczne.

3.1. Archimedesowe funkcje łączące

3.1.1. Dwuwymiarowe archimedesowe funkcje łączące

Zacniemy na początku od przypadku dwuwymiarowego, który następnie uogólnimy na większą liczbę wymiarów. Archimedesowe funkcje łączące (AC) mają prostą, *quasi*-addytywną postać indukowaną przez funkcję φ nazywaną generatorem [Nelsen 1999; Heilpern 2007a]. Zachodzi wtedy zależność

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)),$$

gdzie $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$, $\varphi(1) = 0$ oraz jest ściśle malejącą i wypukłą funkcją, a $\varphi^{[-1]}$ jest funkcją pseudoodwrotną do φ :

$$\varphi^{[-1]}(u) = \begin{cases} \varphi^{-1}(u) & \text{gdy } 0 \leq u \leq \varphi(0) \\ 0 & \text{gdy } \varphi(0) \leq u \leq \infty \end{cases}.$$

W przypadku gdy $\varphi(0) < \infty$, to otrzymujemy słabą AC. Natomiast w przeciwnym razie mamy silną AC. Funkcja pseudoodwrotna jest wtedy zwykłą funkcją odwrotną oraz zachodzi zależność

$$\varphi(C(u, v)) = \varphi(u) + \varphi(v).$$

Funkcja łącząca Π opisująca niezależność jest archimedesowa z generatorem $\varphi(u) = -\ln(u)$. Dolne ograniczenie Frecheta-Hoeffdinga W jest również funkcją archimedesową z generatorem $\varphi(u) = 1 - u$. Jak łatwo zauważyć, funkcja Π jest silna AC, a funkcja W słaba. Natomiast górne ograniczenie nie jest AC. W przypadku archimedesowych funkcji łączących generator φ wyznacza nam współczynnik korelacji Kendalla za pomocą wzoru:

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt.$$

Niestety nie można podać podobnego wzoru dla współczynnika korelacji Spearmana.

Przedstawimy teraz cztery główne rodziny archimedesowych funkcji łączących, często wykorzystywane w zastosowaniach. Zaczniemy od rodziny Franka. Funkcja łącząca należąca do tej rodziny opisana jest wzorem

$$C_\alpha(u, v) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\alpha u} - 1)(e^{-\alpha v} - 1)}{e^{-\alpha} - 1} \right),$$

gdzie parametr $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dla granicznych wartości tego parametru otrzymujemy trzy podstawowe funkcje łączące:

$$C_{-\infty} = W, \quad C_0 = \Pi, \quad C_\infty = M.$$

Natomiast współczynniki zależności ekstremalnych wynoszą $\lambda_L = \lambda_U = 0$, czyli mamy niezależność w ogonach rozkładów.

Drugą rodziną AC będzie rodzina Claytona z elementami opisanymi wzorami

$$C_\alpha(u, v) = \max \left(\left(u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1 \right)^{-1/\alpha}, 0 \right),$$

gdzie $\alpha \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$. W granicznych przypadkach otrzymujemy podobne jak dla rodziny Franka wyniki:

$$C_{-1} = W, \quad C_0 = \Pi, \quad C_\infty = M.$$

Dla $\alpha > 0$ współczynniki zależności ekstremalnych wynoszą odpowiednio $\lambda_L = 2^{-1/\alpha}$ oraz $\lambda_U = 0$, tzn. mamy tutaj dolną zależność w

ogonie. Natomiast dla $\alpha \in [-1, 0)$ zachodzi niezależność, ponieważ $\lambda_L = \lambda_U = 0$. W odróżnieniu od rodziny Franka możemy w tym przypadku w prosty sposób obliczyć wartość współczynnika Kendalla:

$$\tau = \frac{\alpha}{\alpha + 2}.$$

Widzimy, że dla $\alpha \in [-1, 0)$ otrzymujemy ujemne zależności.

Elementy rodziny Gumbela przedstawione są wzorami

$$C_\alpha(u, v) = \exp\left(-\left((-\ln u)^\alpha + (-\ln v)^\alpha\right)^{1/\alpha}\right),$$

gdzie $\alpha \in [1, \infty)$. W tym przypadku funkcje łączące modelują jedynie zależności nieujemne, ponieważ w granicznych przypadkach mamy

$$C_1 = \Pi, \quad C_\infty = M.$$

Funkcje łączące Gumbela są zależne w górnych ogonach rozkładów, zachodzą bowiem zależności $\lambda_L = 0$ oraz $\lambda_U = 2 - 2^{1/\alpha}$. Współczynnik Kendalla również przedstawia się prostym wzorem:

$$\tau = 1 - \frac{1}{\alpha}.$$

Rodzina Ali-Mikhail-Haqa (AMH) określona jest wzorem

$$C_\alpha(u, v) = \frac{uv}{1 - \alpha(1-u)(1-v)},$$

gdzie $\alpha \in [-1, 1)$. Dla $\alpha = 0$ otrzymujemy niezależność. Elementy rodziny AMH są niezależne w ogonie, ponieważ $\lambda_L = \lambda_U = 0$. Współczynnik korelacji Kendalla przedstawiony jest już bardziej skomplikowanym niż dla rodzin Claytona i Gumbela wzorem

$$\tau = 1 - \frac{2}{3\alpha} - \frac{2(1-\alpha)^2}{3\alpha^2} \ln(1-\alpha).$$

W odróżnieniu od wcześniej omawianych rodzin AC rodzina AMH modeluje jedynie słabe zależności, zarówno ujemne, jak i dodatnie. Zachodzi bowiem zależność $(5 - 8\ln 2)/3 \leq \tau \leq 1/3$. Dolne ograniczenie jest w przybliżeniu równe $-0,182$.

3.1.2. Wielowymiarowe archimedesowe funkcje łączące

Dwuwymiarowe AC możemy w prosty, naturalny sposób uogólnić na większą liczbę wymiarów, wykorzystując zależność [Nelsen 1999]:

$$\varphi(C(u_1, \dots, u_n)) = \varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n),$$

gdzie $\varphi(0) = \infty$, $\varphi(1) = 0$ oraz

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \varphi^{-1}(t) \geq 0,$$

dla każdego $k = 0, 1, 2, \dots, n$ oraz $0 \leq t \leq 1$.

Jednak przypadek liczby wymiarów większej niż 2 jest istotnie różny. Na generator nałożone zostały silniejsze warunki. Inaczej nie otrzymamy funkcji łączącej. Ponadto aby łączny rozkład wektora (X_1, \dots, X_n) można było opisać zależnością

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)),$$

gdzie C jest archimedesową funkcją łączącą, wszystkie pary zmien-nych muszą być jednakowo, nieujemnie skorelowane, czyli dla każ-
dych i, j, k, l musi zachodzić

$$\tau(X_i, X_j) = \tau(X_k, X_l) \geq 0.$$

Jest to bardzo silny warunek, istotnie zawężający wykorzystywa-
nie AC w przypadku większej niż 2 liczby wymiarów.

Dla AC zachodzi jednak dość wygodna w rozważaniach teoretycz-
nych własność. Istnieje bowiem ukryta, nieujemna zmienna losowa Θ
(*fraitly*), taka że jej transformata Laplace'a $L_\Theta(s)$ jest indukowana
przez funkcję odwrotną do generatora [Joe 1997; Nelsen 1999], tzn.

$$L_\Theta(s) = \int_0^\infty e^{-\theta s} dF_\Theta(\theta) = \varphi^{-1}(s).$$

Wtedy zachodzi

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) &= \varphi^{-1}(\varphi(F_1(x_1)) + \dots + \varphi(F_n(x_n))) \\ &= \int_0^\infty \exp(-\theta(\varphi(F_1(x_1)) + \dots + \varphi(F_n(x_n)))) dF_\Theta(\theta) \\ &= \int_0^\infty \prod_{i=1}^n \exp(-\theta \varphi(F_i(x_i))) dF_\Theta(\theta). \end{aligned}$$

Podstawiając $F_{i|\theta}(x_i) = \exp(-\theta \varphi(F_i(x_i)))$, otrzymujemy

$$\int_0^\infty F_{i|\theta}(x_i) dF_\Theta(\theta) = L_\Theta(L_\Theta^{-1}(F_i(x_i))) = F_i(x_i)$$

oraz

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_0^\infty \prod_{i=1}^n F_{i|\theta}(x_i) dF_\Theta(\theta) = \int_0^\infty F_\theta(x_1, \dots, x_n) dF_\Theta(\theta).$$

Zmienne losowe X_i są wtedy warunkowo niezależne dla ustalonej realizacji θ ukrytej zmiennej losowej Θ . Zachodzą wtedy wygodne zależności:

$$F_{\theta}(x_1, \dots, x_n) = F_{1\theta}(x_1) \dots F_{n\theta}(x_n).$$

Ukrytą zmienną losową Θ możemy interpretować jako wpływ czynnika zewnętrznego, oddziałującego w jednakowym stopniu na wszystkie zmienne losowe X_i .

3.1.3. Hierarchiczne archimedesowe funkcje łączące

Jak można było zauważyć w poprzednim punkcie, proste wielowymiarowe AC mają niestety duże ograniczenia uniemożliwiające w dużym stopniu sensowne ich zastosowanie. Częściowym rozwiązaniem tego problemu są hierarchiczne archimedesowe funkcje łączące (HAC). Są to archimedesowe funkcje łączące o argumentach będących wartościami innych HAC [Hofert 2011]. Wyznacza się je za pomocą $n - 1$ dwuwymiarowych AC. Po ustaleniu rodzin tych dwuwymiarowych AC należy jeszcze wyznaczyć $n - 1$ parametrów.

Szczególnym przykładem HAC są **całkowicie zagnieżdżone AC** (FNAC). Określa się je rekurencyjnym wzorem:

$$C_1(u_1, u_2) = \varphi_1^{-1}(\varphi_1(u_1) + \varphi_1(u_2))$$

$$C_{n-1}(\mathbf{u}) = \varphi_{n-1}^{-1}(\varphi_{n-1}(u_n) + C_{n-2}(u_1 + \dots + u_{n-1})), \quad (1)$$

gdzie $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$. Niestety i w tym przypadku definicja FAC wymaga pewnych ograniczeń, spełnienia określonych warunków. W przeciwnym razie określona wzorem (1) funkcja nie będzie funkcją łączącą. Warunki te powodują, że na ogół wszystkie archimedesowe funkcje łączące C_i tworzące FNCA muszą należeć do tej samej rodziny. Rzadko kiedy można łączyć różne rodziny. Na przykład generatory φ_{i+1} , φ_i należące do rodzin Claytona i Gumbela nigdy nie będą spełniać wspomnianego warunku. Natomiast rodziny Claytona i AMH, gdy parametr θ rodziny Claytona spełnia nierówność $\theta \geq 1$, spełniają ten warunek. Więcej informacji na ten temat można znaleźć w pracach [Hofert 2008; McNeil 2008].

Ponadto odpowiadające składowym funkcjom łączącym C_i współczynniki korelacji Kendalla τ_i spełniają nierówności [McNeil 2008]:

$$\tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq \tau_{n-1}.$$

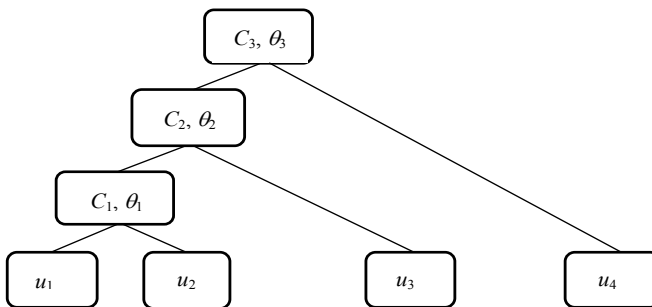
Warunek ten sprowadza się zwykle do nierówności parametrów tych rodzin:

$$\theta_1 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_{n-1}.$$

Nie są to jednak aż tak restrykcyjne jak w przypadku zwykłych wielowymiarowych AC założenia.

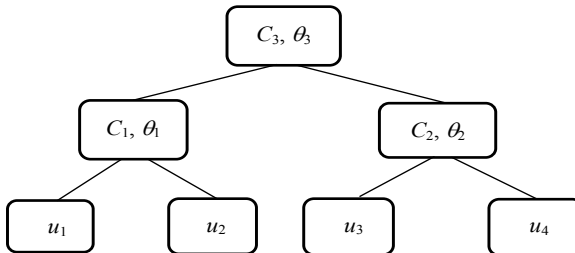
Innym przykładem HAC są **częściowo zagnieżdżone AC (PNAC)**. Przykładowo dla $n = 4$ PNAC przyjmuje postać

$$C(\mathbf{u}) = C_3(C_1(u_1, u_2), C_2(u_3, u_4)).$$



całkowicie zagregowane AC

$$C(\mathbf{u}) = C_3(C_2(C_1(u_1, u_2), u_3), u_4)$$



częściowo zagregowane AC

$$C(\mathbf{u}) = C_3(C_1(u_1, u_2), C_2(u_3, u_4))$$

Rys. 1. Hierarchiczne archimedesowe funkcje łączące

Źródło: [Hofert 2011].

Aby tego typu funkcja była funkcją łączącą, składowe AC muszą spełniać te same warunki jak w przypadku FNAC. Rysunek 1 przedstawia zależności składowych AC dla czterowymiarowych PNAC i FNAC.

Współczynniki korelacji Kendalla odpowiadające składowym AC dla HAC przedstawionych na rys. 1 muszą spełniać następujące zależności: $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \tau_3$ w przypadku FNAC oraz $\tau_1 \geq \tau_3, \tau_2 \geq \tau_3$ dla PNAC.

3.2. Eliptyczne funkcje łączące

Innym rodzajem funkcji łączących są funkcje eliptyczne. Przyjmują one postać:

$$C(\mathbf{u}) = \Phi(\Phi_1^{-1}(u_1), \dots, \Phi_n^{-1}(u_n)),$$

gdzie Φ jest dystrybuantą n -wymiarowego rozkładu eliptycznego, np. normalnego, t -Studenta, logistycznego czy wykładniczo-potęgowego, a Φ_i dystrybuantą jednowymiarowego rozkładu eliptycznego tego samego typu.

Parametrami tych funkcji łączących są elementy macierzy korelacji \mathbf{R} rozkładu Φ . Mamy wtedy $n(n-1)/2$ lub $n(n-1)/2 + 1$ parametrów. W tym drugim przypadku dochodzi jeszcze liczba stopni swobody k (funkcja łącząca t -Studenta). Dwuwymiarowa, normalna (Gaussowska) funkcja łącząca jest niezależna w ogonach, czyli zachodzi $\lambda_L = \lambda_U = 0$ dla $|r| < 1$. Natomiast dla funkcji łączącej studenta otrzymujemy zależność

$$\lambda_L = \lambda_U = 2\bar{t}_k \left(\sqrt{k+1} \sqrt{\frac{1-r}{1+r}} \right),$$

gdzie \bar{t}_k funkcją przeżycia rozkładu t -Studenta z k stopniami swobody. Jest ona więc zależna w ogonach.

3.3. Inne funkcje łączące

Funkcja łącząca **Farlie-Gumbela-Morgensterna** (FGM) określona jest prostym wzorem:

$$C_\alpha(u, v) = uv + \alpha uv(1-u)(1-v),$$

gdzie parametr $\alpha \in [-1, 1]$. Niezależność otrzymujemy, gdy $\alpha = 0$. Współczynnik korelacji Kendalla wyznaczony jest wzorem $\tau = 2\alpha/9$, co pociąga za sobą, że funkcja łącząca FGM modeluje jedynie małe zależności, zarówno dodatnie, jak i ujemne, ponieważ zachodzi $-2/9 \leq \tau \leq 2/9$. Ponadto jest ona niezależna w ogonach.

Funkcję łączącą FGM możemy uogólnić na większą liczbę wymiarów. Jednak w miarę wzrostu liczby wymiarów wzór opisujący funkcję jest coraz bardziej skomplikowany. Dla dowolnego n przyjmuje on następującą postać [Mari, Kotz 2001]:

$$C(\mathbf{u}) = \left(1 + \sum_{s=2}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n} a_{i_1, \dots, i_s} \prod_{j=1}^s (1-u_{i_j}) \right) \prod_{j=1}^n u_j,$$

gdzie parametry a_{i_1, \dots, i_k} spełniają warunek

$$1 + \sum_{s=2}^m \sum_{k_1 \leq r_1 < \dots < r_s \leq k_m} a_{r_1, \dots, r_s} \prod_{j=1}^n \zeta_{r_j} \geq 0,$$

gdzie $|\zeta_{r_j}| \leq 1$, dla $1 \leq k_1 < k_m \leq n$ i kolejno dla $m = 2, 3, \dots, n$.

Innym rodzajem funkcji łączących są kombinacje wypukłe podstawowych funkcji łączących. Jedną z nich, funkcją łączącą **Spearmana**, jest kombinacją funkcji łączących niezależności Π oraz współmonotoniczności M [Heilpern 2014a]:

$$C(u, v) = (1 - \rho)\Pi(u, v) + \rho M(u, v).$$

Współczynnik kombinacji $\rho \in [0, 1]$ jest równy współczynnikowi korelacji Spearmana dla tej funkcji łączącej. Funkcja ta umożliwia w prosty sposób modelowanie dodatkowej zależności między dwiema zmiennymi losowymi. Ponadto współczynnik korelacji Kendalla jest wtedy równy

$$\tau = \frac{1}{3} \rho (2 + \rho \cdot \text{sign}(\rho)).$$

Funkcję łączącą Spearmana można rozszerzyć, dołączając funkcję przeciwmonotoniczności W :

$$C(u, v) = \pi_1 W(u, v) + \pi_2 \Pi(u, v) + \pi_3 M(u, v).$$

Jest to funkcja łącząca **Mardii**. Jej parametry są odpowiednio równe:

$$\pi_1 = 0,5\beta^2(1 - \beta), \pi_2 = (1 - \beta^2), \pi_3 = 0,5\beta^2(1 + \beta),$$

gdzie: $-1 \leq \beta \leq 1$. Można wtedy modelować dodatkowo ujemne zależności. Współczynnik korelacji Spearmana jest wtedy równy $\rho = \beta^3$ [Denuit i in. 2001].

3.4. Wybór funkcji łączącej

W praktyce niezmiernie ważnym zagadnieniem jest „dopasowanie” odpowiedniej funkcji łączącej do danych, tak aby jak najlepiej oddać rzeczywistą strukturę zależności między zmiennymi. W pracy [Genest, Rivest 1993] autorzy zaproponowali następującą metodę wyboru odpowiedniej dwuwymiarowej funkcji łączącej:

- i) ustalamy rodziny funkcji łączących,
- ii) na podstawie danych empirycznych wyznaczamy współczynnik korelacji Kendalla τ ,

iii) z każdej rodziny wybieramy funkcję łączącą odpowiadającą τ ,
iv) stosując odpowiednie kryterium, wybieramy spośród reprezentantów wyłonionych w punkcie iii) „najlepszą” funkcję łączącą.

Kryterium stosowane w punkcie iv) może być oparte na funkcji Kendalla:

$$K_C(t) = P(C(U, V) \leq t),$$

gdzie zmienne losowe U i V mają rozkład jednostajny na $[0, 1]$. Wybieramy wtedy funkcję łączącą, dla której funkcja Kendalla jest „najbliższa” empirycznej funkcji Kendalla $K_n(t)$, czyli spełnia następujące zadanie optymalizacyjne:

$$S = \int_0^1 \left| \sqrt{n} (K_n(t) - K_C(t)) \right|^2 dK_C(t) \rightarrow \min.$$

Dla archimedesowych funkcji łączących funkcja Kendalla określona jest w prosty sposób za pomocą generatora: $K(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}$.

Inne kryterium oparte jest na empirycznej funkcji łączącej \hat{C}_n [Aas, Berg 2009]:

$$S = \sum_{i=1}^n \left(\hat{C}_n(\mathbf{u}_i) - C_n(\mathbf{u}_i) \right)^2 \rightarrow \min.$$

Wybieramy wtedy funkcję łączącą najlepiej dopasowaną do dystrybuanty empirycznej.

Bardziej uniwersalna metoda oparta jest na funkcji wiarygodności [Joe 1997]. Można ją stosować nie tylko w przypadku dwuwymiarowym, ale i dla większej liczby wymiarów. Wybieramy wtedy funkcję łączącą maksymalizującą następujące kryterium:

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \log c_\theta \left(\hat{F}_X(X_i), \hat{F}_Y(X_i) \right) \rightarrow \max,$$

gdzie c_θ jest gęstością funkcji łączącej C_θ , a $\hat{F}_X(X_i)$, $\hat{F}_Y(X_i)$ empirycznymi dystrybuantami brzegowymi.

4. Ubezpieczenia małżeńskie

Oznaczmy symbolem T_x^M dalsze trwanie życia x -letniego mężczyzny, a symbolem T_y^K y -letniej kobiety [Gerber 1995]. Prawdopodobieństwo, że x -letni mężczyzna przeżyje jeszcze t lat, wynosi:

$${}_t p_x^M = P(T_x^M > t) = P(T_0^M > x+t | T_0^M > x) = \frac{P(T_0^M > x+t)}{P(T_0^M > x)}.$$

Podobnie określamy prawdopodobieństwo ${}_t p_y^K = P(T_y^K > t)$ dla y -letnich kobiet. Obydwa prawdopodobieństwa możemy określić za pomocą zmiennych losowych opisujących ich dalsze trwanie życia od wieku x oraz y , czyli zmiennych T_x^M i T_y^K jak i od ich urodzenia, czyli zmiennych T_0^M i T_0^K . Ponadto można je opisać, korzystając z intensywności zgonu:

$${}_t p_x^M = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}^M ds\right), \quad {}_t p_y^K = \exp\left(-\int_0^t \mu_{y+s}^K ds\right).$$

Klasycznie do opisu dalszego życia małżonków wykorzystuje się dwie zmienne losowe

$$T(xy) = \min(T_x^M, T_y^K) \text{ i } T(\bar{xy}) = \max(T_x^M, T_y^K),$$

których funkcje przeżycia ${}_t p_{xy}$ i ${}_t p_{\bar{xy}}$ zostaną przedstawione poniżej.

Prawdopodobieństwo, że oboje małżonkowie przeżyją jeszcze t lat, można obliczyć za pomocą funkcji przeżycia opisujących trwanie życia od urodzenia:

$$\begin{aligned} {}_t p_{xy} &= P(T(xy) > t) = P(T_0^M > x+t, T_0^K > y+t | T_0^M > x, T_0^K > y) \\ &= \frac{C_0^*(x+t p_0^M, y+t p_0^K)}{C_0^*(x p_0^M, y p_0^K)}, \end{aligned}$$

gdzie C_0^* jest funkcją łączącą przeżycia opisującą strukturę zależności zmiennych losowych T_0^M i T_0^K . Prawdopodobieństwo wspólnego przeżycia można również obliczyć, korzystając z funkcji łączącej przeżycia C_{xy}^* generowanej przez łączny rozkład zmiennych T_x^M i T_y^K :

$${}_t p_{xy} = C_{xy}^*({}_t p_{x|y}^M, {}_t p_{y|x}^K),$$

gdzie ${}_t p_{x|y}^M = P(T_0^M > x+t | T_0^M > x, T_0^K > y) = \frac{C_0^*(x+t p_0^M, y p_0^K)}{C_0^*(x p_0^M, y p_0^K)}$ jest

warunkowym rozkładem brzegowym łącznego rozkładu (T_x^M, T_y^K) .

W podobny sposób określamy prawdopodobieństwo brzegowe ${}_t p_{y|x}^K$ [Spreeuw 2006].

Korzystając z funkcji łączących przeżycia C_{xy}^* oraz C_0^* , można również wyznaczyć prawdopodobieństwo, że przynajmniej jedno z małżonków przeżyje jeszcze t lat:

$$\begin{aligned} {}_t p_{xy}^- &= P(T(\overline{xy}) > t) = 1 - P(T_x^M \leq t, T_y^K \leq t) \\ &= 1 - C_{xy}(1 - {}_t p_{x|y}^M, 1 - {}_t p_{y|x}^K) \\ &= \frac{C_0^*({}_{x+t}p_0^M, {}_y p_0^k) + C_0^*({}_x p_0^M, {}_{y+t}p_0^k) - C_0^*({}_{x+t}p_0^M, {}_{y+t}p_0^k)}{C_0^*({}_x p_0^M, {}_y p_0^k)}. \end{aligned}$$

W przypadku renty wdowiej potrzebne będzie następujące prawdopodobieństwo [Youn, Shemyakin, Herman 2002]:

$$\begin{aligned} {}_t p_{x|y} &= P(T_x^M \leq t, T_y^K > t) = P(T_0^M \leq x+t, T_0^K > y+t | T_0^M > x, T_0^K > y) \\ &= \frac{C_0^*({}_x p_0^M, {}_{y+t}p_0^K) - C_0^*({}_{x+t}p_0^M, {}_{y+t}p_0^K)}{C_0^*({}_x p_0^M, {}_y p_0^K)}. \end{aligned}$$

4.1. Renty małżeńskie

Przedstawione na początku punktu 4 prawdopodobieństwa łączne umożliwiają wyznaczenie wartości aktuarialnych podstawowych rent małżeńskich. Pierwsza z nich polega na stałym wypłacaniu przez n lat jednej umownej jednostki pieniężnej, gdy oboje małżonkowie żyją. Jej wartość aktuarialna jest wtedy równa:

$$a_{xy;\overline{n}|} = \sum_{k=1}^n v^k {}_k p_{xy},$$

gdzie $v = (1 + \zeta)^{-1}$, a ζ jest techniczną stopą zwrotu. Natomiast wartość renty płaconej przez n lat, gdy przynajmniej jeden współmałżonek żyje, wynosi

$$a_{xy;\overline{n}|}^- = \sum_{k=1}^n v^k {}_k p_{xy}^-.$$

Innym przykładem renty małżeńskiej jest renta wdowia, której wartość aktuarialna jest równa

$$a_{x|y} = \sum_{k=1}^n v^k {}_k p_{x|y}.$$

Rentę wdowią można uogólnić, uwzględniając dzieci. W pracy [Rakkolainen 2011] autor rozpatrzył następujący kontrakt. Niech x

oznacza wiek męża, y wiek żony, a z wiek syna. Zakładamy, że po śmierci męża wdowa dostaje jedną umowną jednostkę, a syn dostaje 0,2 jednostki. Gdy wdowa umrze, to syn dostaje 0,6 jednostki. Syn dostaje rentę do wieku $z + n$, gdzie n przykładowo może być czasem nauki. Oprócz standardowych, wcześniej przedstawionych oznaczeń, oznaczmy symbolem T_0^S czas trwania życia syna od jego urodzin. Łączną funkcję przeżycia zmiennych losowych T_0^M , T_0^K , T_0^S można przedstawić za pomocą funkcji łączącej przeżycia:

$$S(x, y, z) = C^*({}_x p_0^M, {}_y p_0^K, {}_z p_0^M).$$

Wtedy wartość aktuarialna uogólnionej renty wdowiej jest równa [Heilpern 2016]

$$a_{x|yz} = \sum_{k=1}^n v^k (1,2{}_k p_{011} + {}_k p_{010} + 0,6{}_k p_{001}) + \sum_{k=n+1}^{\infty} v^k {}_k p_{01},$$

gdzie

$$\begin{aligned} {}_k p_{011} &= P(T_0^M \leq x+k, T_0^K > y+k, T_0^S > z+k | T_0^M > x, T_0^K > y, T_0^S > z) \\ &= \frac{S(x, y+k, z+k) - S(x+k, y+k, z+k)}{S(x, y, z)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_k p_{010} &= P(T_0^M \leq x+k, T_0^K > y+k, T_0^S \leq z+k | T_0^M > x, T_0^K > y, T_0^S > z) \\ &= \frac{S(x, y+k, z) - S(x+k, y+k, z) - S(x, y+k, z+k) + S(x+k, y+k, z+k)}{S(x, y, z)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_k p_{001} &= P(T_0^M \leq x+k, T_0^K \leq y+k, T_0^S > z+k | T_0^M > x, T_0^K > y, T_0^S > z) \\ &= \frac{S(x, y, z+k) - S(x+k, y, z+k) - S(x, y+k, z+k) + S(x+k, y+k, z+k)}{S(x, y, z)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_k p_{01} &= P(T_0^M \leq x+k, T_0^K > y+k | T_0^M > x, T_0^K > y, T_0^S > z) \\ &= \frac{S(x, y+k, z) - S(x+k, y+k, z)}{S(x, y, z)}. \end{aligned}$$

4.2. Model Markowa

W przypadku gdy mamy do dyspozycji dane szczegółowe dotyczące długości życia małżonków, to do wyboru odpowiedniej funkcji łączącej możemy skorzystać z metod przedstawionych w punkcie 3.4.

W pracy [Denuit i in. 2001] autorzy estymowali funkcję łączącą opisującą strukturę zależności życia małżonków na podstawie danych pochodzących z cmentarzy brukselskich. Zastosowali kryterium oparte na funkcji Kendalla i otrzymali funkcję łączącą Gumbela z parametrem $\alpha = 1,1015$. Natomiast Heilpern [2011b], wykorzystując dane z cmentarzy wrocławskich, otrzymał funkcję łączącą AMH z parametrem $\alpha = 0,5879$.

Jednak w wielu przypadkach w praktyce nie mamy dostępu do danych szczegółowych, dysponujemy zwykle danymi zagregowanymi, np. danymi pochodzącymi z GUS-u. Wtedy w celu modelowania struktury zależności życia małżonków możemy wykorzystać model Markowa [Denuit i in. 2001]. Jest to czterostanowy model przedstawiony na rys. 2.

Symbolem $p_{ij}(t, s)$ będziemy oznaczać prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i , gdy proces jest w tym stanie w momencie t , do stanu j w momencie s . Prawdopodobieństwa te możemy przestawić za pomocą intensywności przejścia μ_{ij} . Zachodzą wtedy wzory:

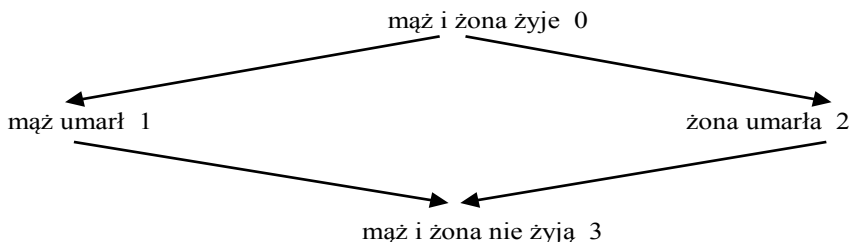
$$p_{00}(t, s) = \exp\left(-\int_t^s (\mu_{01}(u) + \mu_{02}(u)) du\right),$$

$$p_{ii}(t, s) = \exp\left(-\int_t^s \mu_{i3}(u) du\right),$$

$$p_{0i}(t, s) = \int_t^s p_{00}(t, u) \mu_{0i}(u) p_{ii}(u, s) du,$$

gdzie $i = 1, 2$. Natomiast funkcja przeżycia wektora losowego (T_x^M, T_y^K) wynosi:

$$P(T_x^M > t, T_y^K > s) = \begin{cases} p_{00}(0, s) + p_{00}(0, t) p_{01}(t, s) & 0 \leq t \leq s \\ p_{00}(0, t) + p_{00}(0, s) p_{02}(s, t) & 0 \leq s < t \end{cases}$$



Rys. 2. Przestrzeń stanów modelu Markowa

Źródło: [Denuit i in. 2001].

W pracy [Denuit i in. 2001] autorzy założyli, że markowskie intensywności przejścia są proporcjonalne do intensywności śmierci poszczególnych małżonków. Wyrażają się one wzorami:

$$\begin{aligned}\mu_{01}(t) &= (1 + \alpha_{01}) \mu_{x+t}^M, & \mu_{23}(t) &= (1 + \alpha_{23}) \mu_{x+t}^M, \\ \mu_{02}(t) &= (1 + \alpha_{02}) \mu_{y+t}^K, & \mu_{13}(t) &= (1 + \alpha_{13}) \mu_{y+t}^K.\end{aligned}$$

Jeśli zmienne losowe opisujące długości życia małżonków są niezależne, to współczynniki $\alpha_{ij} = 0$. Ponadto prawdopodobieństwo wspólnego przeżycia jest równe [Heilpern 2011b]:

$${}_t p_{xy} = p_{00}(0, t) = \left({}_t p_x^M\right)^{1+\alpha_{01}} \left({}_t p_y^K\right)^{1+\alpha_{02}}.$$

Estymację parametrów α_{ij} można przeprowadzić, stosując estymator Nelson-Aalena. Więcej informacji na temat estymacji tych parametrów czytelnik znajdzie w pracach [Denuit i in. 2001; Heilpern 2011b]. W Belgii na podstawie danych ze spisu powszechnego ludności w 1991 otrzymano w pracy [Denuit i in. 2001] następujące wartości intensywności przejścia:

$$\begin{aligned}\mu_{01}(t) &= 0,9071 \mu_{x+t}^M, & \mu_{23}(t) &= 1,2410 \mu_{x+t}^M, \\ \mu_{02}(t) &= 0,8783 \mu_{y+t}^K, & \mu_{13}(t) &= 1,0413 \mu_{y+t}^K.\end{aligned}$$

Widzimy, że belgijska populacja charakteryzuje się wzrostem intensywności śmiertelności po śmierci jednego z małżonków. Większy wzrost występuje u mężczyzn niż u kobiet – odpowiednio 24,10% i 4,13%.

Natomiast z danych GUS-u ze spisu powszechnego z roku 2002 dotyczącego całej Polski otrzymano wartości [Heilpern 2011b]:

$$\begin{aligned}\mu_{01}(t) &= 0,9294 \mu_{x+t}^M, & \mu_{23}(t) &= 1,2817 \mu_{x+t}^M, \\ \mu_{02}(t) &= 0,8845 \mu_{y+t}^K, & \mu_{13}(t) &= 0,9788 \mu_{y+t}^K.\end{aligned}$$

W tym przypadku obserwujemy odmienną sytuację. Co prawda intensywność śmiertelności u mężczyzn również wzrasta po śmierci żony – o 28,17%, ale u kobiet następuje spadek intensywności – o 2,12%. Na podstawie danych ze spisu w 2011 uzyskano następujące wyniki:

$$\begin{aligned}\mu_{01}(t) &= 0,8743 \mu_{x+t}^M, & \mu_{23}(t) &= 1,0972 \mu_{x+t}^M, \\ \mu_{02}(t) &= 0,7991 \mu_{y+t}^K, & \mu_{13}(t) &= 0,9789 \mu_{y+t}^K.\end{aligned}$$

Intensywności μ_{01} oraz μ_{02} zostały wyznaczone w [Heilpern 2014b]. Obserwujemy tutaj, oprócz μ_{13} , spadek intensywności śmiertelności w porównaniu z 2002 rokiem. Ponadto dla województwa dolnośląskiego, wykorzystując również dane ze spisu w 2011, określono wartości parametrów [Heilpern 2015], otrzymując:

$$\begin{aligned}\mu_{01}(t) &= 0,9388 \mu_{x+t}^M, & \mu_{23}(t) &= 1,3037 \mu_{x+t}^M, \\ \mu_{02}(t) &= 0,9008 \mu_{y+t}^K, & \mu_{13}(t) &= 0,9746 \mu_{y+t}^K.\end{aligned}$$

5. Procesy ryzyka

Będziemy rozważać następujący, ciągły proces ryzyka [Kaas i in. 2001]:

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

gdzie u jest kapitałem początkowym, c intensywnością napływu składki, X_i wielkościami wypłat, a $N(t)$ procesem liczącym wypłaty. Zakładamy, że wielkości wypłat X_i są zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i wartości oczekiwanej $E(X) = 1/\beta$; również okresy między wypłatami W_i mają ten sam rozkład oraz $E(W_i) = 1/\lambda$. Wtedy

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{T_k \leq t},$$

gdzie $T_n = \sum_{i=1}^n W_i$ jest momentem zrealizowania n -tej wypłaty.

Ruiną będziemy nazywać sytuację, gdy proces ryzyka przyjmuje wartości ujemne, a moment gdy proces osiągnie ruinę po raz pierwszy, czyli

$$T = \inf\{t: U(t) < 0\},$$

momentem ruiny. Interesować nas będzie prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym horyzoncie czasowym:

$$\psi(u) = P(T < \infty | U(0) = u)$$

dla ustalonego kapitału początkowego u . Prawdopodobieństwo ruiny nie jest zdarzeniem pewnym, tzn. $\psi(u) < 1$, gdy zachodzi nierówność $c\beta > \lambda$.

W klasycznym modelu ryzyka przyjmuje się, że zmienne losowe X_i oraz W_j są niezależne. Ponadto zakłada się, że $N(t)$ jest procesem Poissona, czyli zmienne W_i mają rozkład wykładniczy z dystrybuantą

$F_W(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ [Rolski i in. 1999; Ostasiewicz (red.) 2000]. Wtedy prawdopodobieństwa ruiny dla zerowego kapitału początkowego oraz nieskończenie dużego są odpowiednio równe:

$$\psi(0) = \frac{\lambda}{c\beta}, \quad \psi(\infty) = \lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0.$$

5.1. Zależne wypłaty [Heilpern 2010]

Dopuszczmy teraz zależność wielkości poszczególnych wypłat, czyli zależność zmiennych losowych X_i . Dodatkowo założymy, że struktura zależności opisana jest archimedesową funkcją łączącą, a proces liczący wypłaty $N(t)$ jest procesem Poissona. Istnieje wtedy zmienna losowa Θ taka, że X_i są warunkowo niezależne dla jej wartości θ , a dla ustalonej wartości θ otrzymujemy proces ryzyka z niezależnymi wypłatami $X_{i|\theta}$:

$$U_{\theta}(t) = u + ct - S_{\theta}(t),$$

gdzie $S_{\theta}(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_{i|\theta}$. Ukryta zmienna losowa Θ może w tym przypadku oddawać wpływ czynnika zewnętrznego na proces ryzyka $U(t)$. Mogą to być ekstremalne zjawiska pogodowe, pożary, trzęsienia ziemi, karambole na autostradach czy kryzysy gospodarcze wpływające jednocześnie na wysokość wszystkich wypłat.

Oznaczmy symbolem $\psi_{\theta}(u)$ warunkowe prawdopodobieństwo ruiny dla ustalonej wartości θ . Niech $m(\theta)$ będzie warunkową, oczekiwaną wartością wypłaty, czyli $m(\theta) = E(X_{i|\theta})$. Można pokazać, że funkcja $m(\theta)$ jest nierosnąca [Heilpern 2010]. Wtedy $\psi_{\theta}(u) = 1$, gdy $\theta \leq \theta_0$, gdzie θ_0 jest rozwiązaniem równania $m(\theta) = \frac{c}{\lambda}$. Natomiast bezwarunkowe prawdopodobieństwo ruiny możemy wyznaczyć, korzystając ze wzoru:

$$\psi(u) = \int_{\theta_0}^{\infty} \psi_{\theta}(u) dF_{\Theta}(\theta) + F_{\Theta}(\theta_0).$$

Wynika z niego, że dla nieskończenie dużego kapitału początkowego prawdopodobieństwo ruiny nie musi być równe zero, ponieważ

$$\psi(\infty) = F_{\Theta}(\theta_0).$$

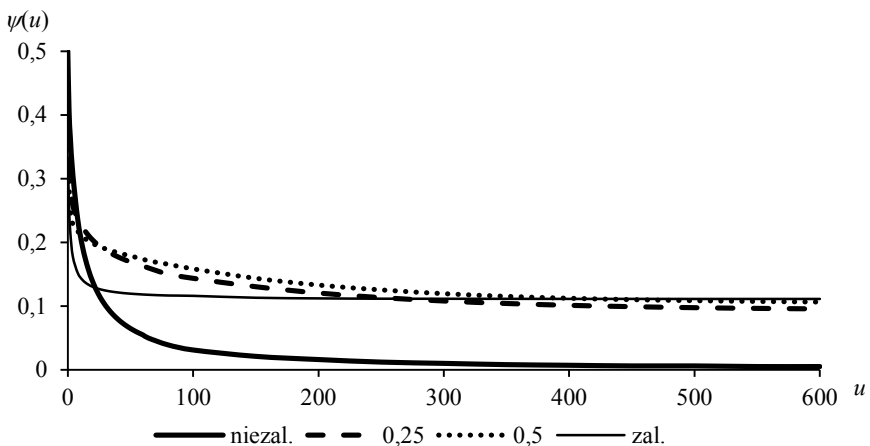
Twierdzenie [Heilpern 2010]

Nr 15(21) Niech $\psi_I(u)$ będzie prawdopodobieństwem ruiny dla klasycznego procesu ryzyka, gdy wielkości wypłat są niezależne, wtedy dla skrajnych wartości kapitału początkowego zachodzą następujące nierówności:

$$\psi(0) \leq \psi_I(0), \quad \psi(\infty) \geq \psi_I(\infty).$$

Gdy $F_{\Theta}(\theta_0) > 0$, to otrzymamy ostre nierówności.

Przykład 1. Niech zmienne losowe opisujące wielkości wypłat X_i mają rozkład Pareto z funkcją przeżycia $\bar{F}(x) = \left(\frac{3}{x+3}\right)^2$, $c = 24$, $\lambda = 4$, a struktura zależności opisana jest funkcją łączącą Clayтона. Wykresy prawdopodobieństw ruiny dla różnych wartości parametrów funkcji łączącej odpowiadających wartościom współczynnika korelacji Kendalla równych 0; 0,25; 0,5 i 1 przedstawione są na rys. 3.



Rys. 3. Wykresy prawdopodobieństwa ruiny

Źródło: [Heilpern 2010].

Widzimy, że nie ma większych regularności na tych wykresach. Dla małych wartości kapitału początkowego u prawdopodobieństwo ruiny maleje wraz ze wzrostem stopnia zależności, a dla dużych wartości kapitału relacja jest odwrotna. Natomiast dla średnich wartości kapitału początkowego nie ma monotoniczności, największe wartości prawdopodobieństwa ruiny obserwujemy dla pośrednich stopni zależności, niekoniecznie dla niezależności czy ścisłej zależności.

5.2. Zależne okresy między wypłatami i wielkości wypłat

Dopuszczmy teraz zależność okresów między wypłatami i wielkościami następnej wypłaty, czyli zależność zmiennych losowych W_i i X_i . Natomiast wektory losowe (W_i, X_i) będą niezależne.

5.2.1. Rodzina dwuwymiarowych rozkładów wykładniczych

W pracy [Ambagaspitiya 2009] autor założył, że łącznym rozkładem zmiennych W_i i X_i jest dwuwymiarowy rozkład wykładniczy z funkcją tworzącą momenty, wynoszącą

$$M_{W,X}(s_1, s_2) = \frac{1}{\left(1 - \frac{s_1}{\beta}\right) \left(1 - \frac{s_2}{\lambda}\right) - r \frac{s_1 s_2}{\beta \lambda}},$$

gdzie r jest współczynnikiem korelacji Pearsona, a parametry $\beta, \lambda > 0$.

Funkcja prawdopodobieństwa ruiny przyjmuje wtedy postać

$$\psi_r(u) = B e^{-zu},$$

gdzie

$$z = \frac{\lambda \beta}{(1-r)c} \left(\frac{c}{\lambda} - \frac{1}{\beta} \right),$$

$$B = 1 - \frac{2 \left(\frac{c}{\lambda} - \frac{1}{\beta} \right)}{\frac{c}{\lambda} - \frac{1}{\beta} + \sqrt{\left(\frac{c}{\lambda} - \frac{1}{\beta} \right)^2 + 4(1-r) \frac{c}{\beta \lambda}}}.$$

Parametr r , jako współczynnik korelacji, oddaje stopień zależności zmiennych losowych W_i i X_i . Można pokazać, że gdy stopień zależności r rośnie, to prawdopodobieństwo ruiny maleje. Dla $r = 0$ mamy niezależność zmiennych, a prawdopodobieństwo ruiny wyrażone jest znanym wzorem:

$$\psi_0(u) = \frac{\lambda}{c\beta} e^{-(\beta - \lambda/c)u}.$$

Natomiast dla ścisłej zależności, gdy $r = 1$, prawdopodobieństwo ruiny jest równe zero, tzn. $\psi_1(u) = 0$.

5.2.2. Funkcje łączące

Nr 15(21)

Założmy teraz, że zmienne losowe X_i mają rozkład wykładniczy z parametrem β , a struktura zależności zmiennych W_i i X_i opisana jest funkcją łączącą C . W przypadku funkcji łączącej Farlie-Gumbel-Morgensterna z parametrem α możemy wyznaczyć transformatę Laplace'a funkcji prawdopodobieństwa ruiny [Cossete, Marceau, Marri 2010]. Jest ona postaci

$$\psi_{\alpha}^{*}(s) = \frac{\gamma_1(s) + \gamma_2(s)}{h_1(s) - h_2(s)}, \quad (2)$$

gdzie

$$h_1(s) = \left(\frac{\lambda}{c} - s\right) \left(\frac{2\lambda}{c} - s\right),$$

$$h_2(s) = \frac{\lambda}{c} \left(\frac{\beta}{s + \beta} \left(\frac{2\lambda}{c} - s\right) - \alpha s \left(\frac{2\beta}{s + 2\beta} - \frac{\beta}{s + \beta}\right)\right),$$

$$\gamma_1(s) = \frac{\lambda}{c} \left(\frac{1}{s + \beta} \left(\frac{2\lambda}{c} - s\right) - \alpha s \left(\frac{1}{s + 2\beta} - \frac{1}{s + \beta}\right)\right),$$

$$\gamma_2(s) = \frac{1}{g} (\gamma_1(0)(s - g) - \gamma_1(g)s),$$

a g jest pierwiastkiem równania $h_1(s) - h_2(s) = 0$, dla którego $\text{Re}(g) > 0$.

Przemnożmy licznik i mianownik (2) przez $(s + \beta)(s + 2\beta)$. Transformata Laplace'a $\psi(u)$ przyjmuje wtedy postać

$$\psi_{\alpha}^{*}(s) = \frac{L(s)}{M(s)},$$

gdzie mianownik $M(s)$ jest wielomianem stopnia 4, z miejscami zerowymi $R_1, R_2, 0, g$, gdzie $\text{Re}(R_i) < 0$, a licznik $L(s)$ jest wielomianem stopnia 3, z miejscami zerowymi $R, 0, g$ [Cossete, Marceau, Marri 2010]. Wtedy można ją zapisać w prostszej postaci

$$\psi_{\alpha}^{*}(s) = \frac{a(s - R)}{(s - R_1)(s - R_2)},$$

gdzie

$$a = \lambda \frac{2c\beta^2 - \alpha\beta^2c + \beta gc + 2\lambda(2\beta + g)}{\beta c^2(\beta + g)(2\beta + g)}.$$

Odwracając transformatę Laplace'a, otrzymujemy jawną postać funkcji prawdopodobieństwa ruiny

$$\psi_\alpha(u) = \frac{a}{R_2 - R_1} \left((R - R_1)e^{R_1 u} + (R_2 - R)e^{R_2 u} \right).$$

I w tym przypadku, gdy stopień zależności α rośnie, to prawdopodobieństwo ruiny maleje.

Funkcja łącząca FGM oddaje słabe zależności między zmiennymi. Chcąc rozszerzyć modelowanie struktury zależności, należy wykorzystać inne funkcje łączące. Najprostszym przykładem jest funkcja łącząca Spearmana z parametrem ρ [Heilpern 2014a]. I w tym przypadku można dla wykładniczego rozkładu wypłat X_i wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa ruiny

$$\psi_\rho(u) = \psi_\rho(0)e^{s(\rho)u},$$

gdzie

$$s(\rho) = \frac{-g(\rho) - \sqrt{g^2(\rho) + 4c\beta\lambda a_1^2}}{2ca_1}, \quad a_1 = (c\beta - \lambda),$$

$$g(\rho) = c^2\beta^2 - 3c\beta\lambda + c\beta\lambda\rho + \lambda^2, \quad a_2 = c^2\beta^2 - \lambda^2,$$

$$\psi_\rho(0) = \frac{2h(\rho)}{a_2 + h(\rho) + \sqrt{4c\beta\lambda a_1^2 + (h(\rho) - a_1^2)^2}}, \quad h(\rho) = c\beta\lambda(1 - \rho).$$

W przypadku niezależności zmiennych, gdy $\rho = 0$, otrzymujemy znany wzór $\psi_0(u) = \frac{\lambda}{c\beta} e^{-(\beta - \lambda/c)u}$. Natomiast dla ścisłej zależności,

$\rho = 1$ prawdopodobieństwo ruiny jest zerowe.

Tak jak dla przypadku funkcji łączącej FGM, gdy struktura zależności opisana jest funkcją Spearmana, to gdy stopień zależności ρ rośnie, to prawdopodobieństwo ruiny maleje.

5.2.3. Modele dwuwymiarowe [Yuen, Guo, Wu 2002; 2006]

Dwuwymiarowy proces ryzyka rozpatrywany w pracach [Yuen, Guo, Wu 2002; 2006] przyjmuje następującą postać:

$$\begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \end{pmatrix},$$

gdzie $S_i(t) = \sum_{j=1}^{N_i(t)} X_{ij}$, $N_i(t) = M_i(t) + M_0(t)$ oraz $i = 1, 2$.

Autorzy założyli, że zmienne X_{ij} losowe są niezależne, a dla ustalonej klasy $i = 1, 2$ wielkości wypłat mają ten sam rozkład. Procesy liczące $M_i(t)$, dla $i = 0, 1, 2$, są procesami Poissona z intensywnościami λ_i . Są one niezależne i niezależne od wielkości wypłat X_{ij} . Wynika stąd, że procesy $N_i(t)$, $i = 1, 2$, również są procesami Poissona z intensywnościami $\lambda_i + \lambda_0$. Jednak mogą być one zależne. Zależność powodowana jest przez wspólny składnik $M_0(t)$. Składnik ten może być interpretowany jako wpływ wspólnego, zewnętrznego czynnika. Natomiast wpływ czynników indywidualnych, wewnętrznych oddają procesy $M_i(t)$, $i = 1, 2$.

Oznaczmy symbolem $T_i = \inf\{t: U_i(t) < 0\}$ moment ruiny dla procesu ryzyka $U_i(t)$, a $\psi_i(u_i)$ prawdopodobieństwo ruiny dla $U_i(t)$. Będziemy rozpatrywać trzy rodzaje prawdopodobieństw ruiny. Prawdopodobieństwo wystąpienia pierwszej ruiny przybiera postać:

$$\psi_{\text{or}}(u_1, u_2) = P(T_{\text{or}} < \infty | U_1(0) = u_1, U_2(0) = u_2),$$

gdzie $T_{\text{or}} = \min\{T_1, T_2\}$. Prawdopodobieństwo wystąpienia obydwu ruin:

$$\psi_{\text{and}}(u_1, u_2) = P(T_{\text{and}} < \infty | U_1(0) = u_1, U_2(0) = u_2),$$

gdzie $T_{\text{and}} = \max\{T_1, T_2\}$, oraz prawdopodobieństwo ruiny dla sumy procesów ryzyka:

$$\psi_s(u) = P(T_s < \infty | U(0) = u),$$

gdzie $U(t) = U_1(t) + U_2(t)$, a $T_s = \inf\{t: U(t) < 0\}$.

Zbadajmy teraz wpływ zależności na prawdopodobieństwo ruiny. Wprowadzimy w tym celu pomocniczy model ryzyka:

$$\begin{pmatrix} \bar{U}_1(t) \\ \bar{U}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} \bar{S}_1(t) \\ \bar{S}_2(t) \end{pmatrix},$$

gdzie $\bar{M}_i(t)$, $i = 0, 1, 2$, są procesami Poissona z intensywnościami $\bar{\lambda}_i$ spełniającymi warunek $\lambda_i + \lambda_0 = \bar{\lambda}_i + \bar{\lambda}_0$, a wypłaty \bar{X}_{ij} mają ten sam rozkład co X_{ij} . Wartości λ_0 i $\bar{\lambda}_0$ oddają stopień zależności procesów $N_i(t)$, $i = 1, 2$, oraz odpowiednio $\bar{N}_i(t)$. Nierówność $\lambda_0 > \bar{\lambda}_0$ wskazuje nam większy stopień zależności dwuwymiarowego procesu ryzyka $(U_1(t), U_2(t))^T$ niż dla procesu $(\bar{U}_1(t), \bar{U}_2(t))^T$. Prawdziwe są wtedy następujące twierdzenia:

Twierdzenie 2 [Yuen, Guo, Wu 2006]

Jeśli zachodzi nierówność $\lambda_0 \leq \bar{\lambda}_0$, to

$$\psi_{\text{or}}(u) \geq \bar{\psi}_{\text{or}}(u) \text{ oraz } \psi_{\text{and}}(u) \leq \bar{\psi}_{\text{and}}(u).$$

Twierdzenie 3 [Heilpern 2009]

Jeśli zachodzi nierówność $\lambda_0 \leq \bar{\lambda}_0$, to

$$\psi_s(u) \leq \bar{\psi}_s(u).$$

6. Reasekuracja

Rozpatrzmy portfel składający się z n szkód X_1, \dots, X_n oraz próg retencji d . Niech

$$I_j = \begin{cases} 0 & X_j \leq d \\ 1 & X_j > d \end{cases},$$

a $p_j = P(I_j = 1)$ będzie prawdopodobieństwem pokrycia szkody przez reasekuratora oraz $q_j = 1 - p_j$ [Kolev, Paiva 2005; Heilpern 2007b].

Oznaczmy symbolem

$$K = \sum_{j=1}^n I_j$$

liczbę pokrytych szkód przez reasekuratora oraz symbolem

$$L = \sum_{j=1}^n I_j Z_j$$

wartości szkód pokrytych przez reasekuratora, gdzie $Z_j = X_j - d$. Dystrybuanta indykatora I_j przyjmuje w punktach skoku następujące wartości:

$$F_j(i_j) = u_j = \begin{cases} 1 & i_j = 1 \\ q_j & i_j = 0 \end{cases}.$$

Natomiast dystrybuantę łącznego rozkładu indykatorów (I_1, \dots, I_n) można przedstawić za pomocą funkcji łączącej C w następujący sposób:

$$F_1(i_1, \dots, i_n) = C(u_1, \dots, u_n).$$

Indykatory I_j są zmiennymi losowymi dyskretnymi, więc funkcja łącząca C wyznacza jednoznacznie wartości dystrybuanty F jedynie w punktach skoku. Wtedy rozkład liczby K szkód pokrytych przez reasekuratora możemy określić wzorem:

$$P(K = k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n-k+j}{j} \sum_{|A|=k-j} F_{\mathbf{1}_A},$$

gdzie $A \subset \{1, \dots, n\}$, $|A|$ jest liczebnością zbioru A .

Należy zwrócić uwagę, że jeśli struktura zależności zmiennych losowych X_i , oddających wielkości szkód w portfelu, opisana jest funkcją łączącą C , to zależność indykatorów I_i również możemy przedstawić za pomocą tej samej funkcji łączącej.

Przyjmijmy teraz upraszczające założenia, że indykatory I_1, \dots, I_n mają ten sam rozkład, a funkcja łącząca C jest wymienialna (*exchangeable*), tzn. dla każdej permutacji π zbioru $\{1, \dots, n\}$ zachodzi

$$C(u_1, \dots, u_n) = C(u_{\pi(1)}, \dots, u_{\pi(n)}).$$

W tej sytuacji łączna dystrybuanta $F_{\mathbf{1}}$ przyjmuje te same wartości dla ciągu o tej samej liczbie jedynek, tzn. $F_{\mathbf{1}_A} = F_{\mathbf{1}_B}$, gdy $|A| = |B|$. Oznaczmy symbolem

$$F_{k,n} = F_{\mathbf{1}_A} = P(I_{k+1} = 0, \dots, I_n = 0) = C(\underbrace{1, \dots, 1}_k, \underbrace{q, \dots, q}_{n-k}),$$

gdy $|A| = k$. Wtedy rozkład liczby K pokrytych szkód przyjmuje już prostszą postać

$$P(K = k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{n!}{(n-k)! j! (k-j)!} F_{k-j,n}. \quad (2)$$

Wartość oczekiwana zmiennej losowej K jest równa $E(K) = np$, wariancja $V(K) = npq + (n^2 - n)(C(q, q) - q^2)$, współczynnik korelacji Pearsona wynosi

$$\rho(I_i, I_j) = \frac{C(q, q) - q^2}{pq}.$$

Jeżeli wielkości szkód X_i , a co za tym idzie – zmiennych I_i , są niezależne to liczba szkód K pokrytych przez reasekuratora ma rozkład dwumianowy:

$$P(K = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Możemy więc nazwać rozkład liczby szkód pokrytych przez reasekuratora, opisany wzorem (2), w przypadku dopuszczającym zależności zależnym rozkładem dwumianowym. Dla ścisłej zależności rozkład zmiennej losowej skupiony jest w dwóch skrajnych punktach:

$$P(K = k) = \begin{cases} q & k = 0 \\ 0 & 0 < k < n \\ p & k = n \end{cases}$$

Natomiast gdy funkcja łącząca jest archimedesowa, to $F_{k,n} = \varphi^{-1}((n-k)\varphi(q))$.

Przykład 2. Niech portfel składa się z $n = 20$ szkód, prawdopodobieństwo pokrycia szkody przez reasekuratora będzie równe $p = 0,4$, a struktura zależności opisana przez funkcję łączącą Clayтона. Na rysunku 4 przedstawione są wykresy rozkładów liczby pokrytych szkód K dla wartości parametru funkcji łączącej α równej 0; 0,86; 4 oraz ∞ . Odpowiada to wartościom współczynnika korelacji Kendalla τ : 0; 0,3; 0,67 i 1.

Niestety, rozkład wartości pokrytych przez reasekuratora szkód L ma już bardziej skomplikowaną postać. Dystrybuanta tej zmiennej losowej jest kombinacją wypukłą splotów dystrybuanty zmiennej losowej Z

$$F_L(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_{k,n} F_Z^{*k}(x),$$

gdzie $f_{k,n} = P(I_1 = 1, \dots, I_k = 1, I_{k+1} = 0, \dots, I_n = 0) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{k} F_{k-j,n}$.

Zmienną losową K możemy uogólnić, przyjmując, że liczba szkód N jest losowa, czyli

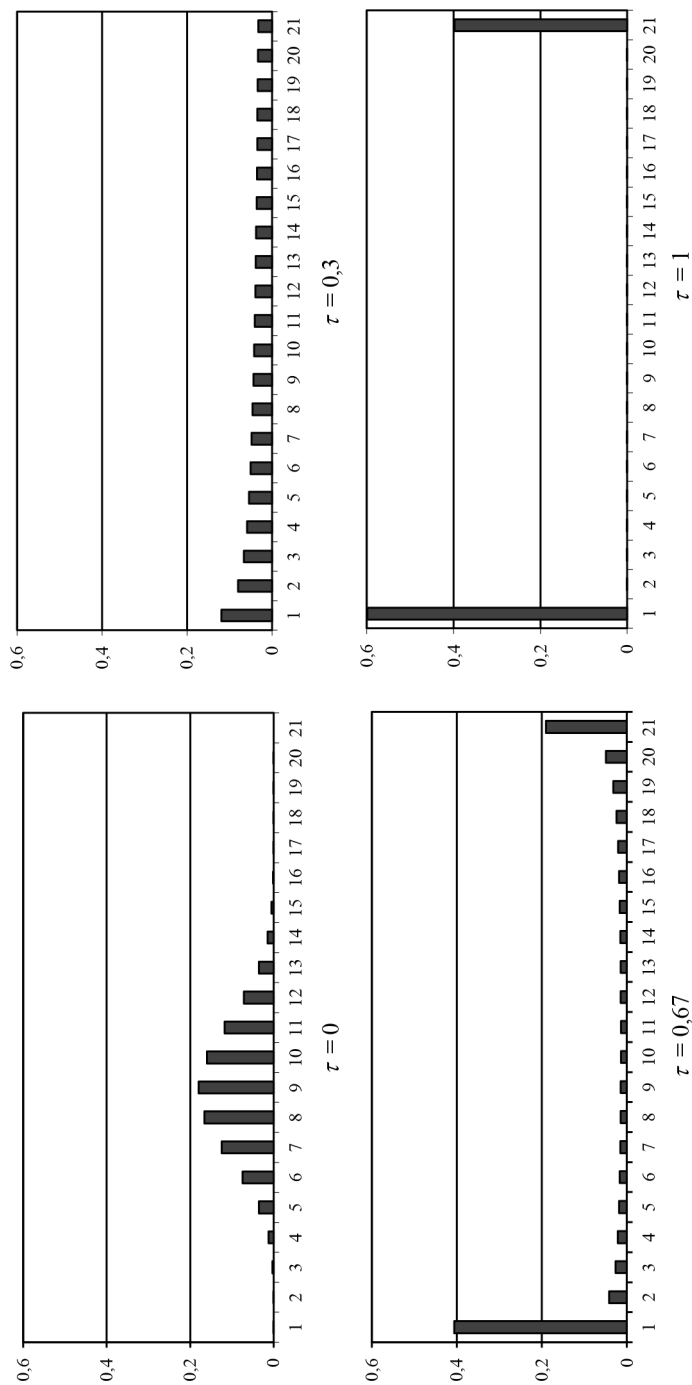
$$K = \sum_{j=0}^N I_j.$$

Wtedy w przypadku archimedesowej funkcji łączącej z generatorem φ funkcja tworząca prawdopodobieństwa tej zmiennej losowej jest postaci

$$\mathbf{P}_K(t) = \int_0^{\infty} \mathbf{P}_N(r^\theta + (1-r^\theta)t) dF_\Theta(\theta),$$

gdzie $r = e^{-\varphi(q)}$, a Θ jest ukrytą zmienną losową indukowaną przez archimedesową funkcję łączącą. Natomiast w przypadku funkcji łączącej Spearmana otrzymujemy

$$\mathbf{P}_K(t) = (1-\rho)\mathbf{P}_N(q+pt) + \rho(q+p\mathbf{P}_N(t)).$$



Rys. 4. Wykresy rozkładów liczby pokrytych szkód K dla różnych stopni zależności

Źródło: opracowanie własne.

7. Symulacje

Znajomość funkcji łączącej znacznie ułatwia symulację losowych wartości brzegowych wielowymiarowych rozkładów. Zaczniemy od dwuwymiarowej zmiennej losowej (X_1, X_2) , gdzie strukturę zależności opisuje funkcja łącząca C . Ogólna metoda generowania wartości losowych oparta będzie na warunkowej dystrybucie

$$G(t; u) = P(U_2 \leq t | U_1 = u) = \frac{\partial}{\partial u} C(u, t),$$

gdzie U_1 i U_2 są zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$, a ich łączny rozkład ma dystrybucję C . Procedura ta jest następująca:

- i. Generujemy niezależnie parę (v_1, v_2) z rozkładu jednostajnego na $[0, 1]$.
- ii. Kładziemy $u_1 = v_1$ oraz $u_2 = G^{-1}(v_2; u_1)$.
- iii. Kładziemy $x_1 = F_1^{-1}(u_1)$, $x_2 = F_2^{-1}(u_2)$.

Punkty x_1, x_2 traktujemy jako losowe wartości zmiennych losowych X_1 oraz X_2 , o dystrybucjach odpowiednio F_1 i F_2 .

W przypadku archimedesowych funkcji łączących wartość u_2 jest rozwiązaniem równania

$$v_2 = \frac{(\varphi^{-1})'(\varphi(u_1) + \varphi(u_2))}{(\varphi^{-1})'(\varphi(u_1))}.$$

W niektórych przypadkach można podać konkretne rozwiązania tego równania, np. dla rodziny Claytona wartość ta wynosi

$$u_2 = \left(v_2^{-\alpha/(1+\alpha)} u_1^{-\alpha} - u_1^{-\alpha} + 1 \right)^{-1/\alpha}.$$

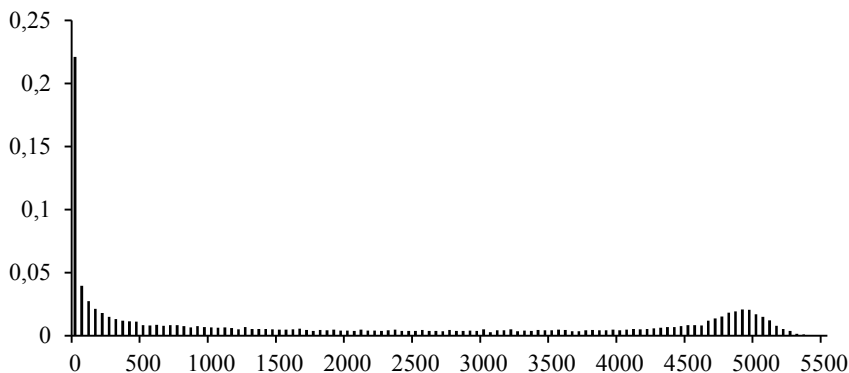
Powyższe procedury można uogólnić na większą liczbę wymiarów. Więcej informacji na ten temat czytelnik może znaleźć w pracach [Nelsen 1999; Romano 2002; Heilpern 2007a].

Generowanie losowych wartości, gdy struktura zależności zmiennych losowych X_1, \dots, X_n modelowana jest za pomocą eliptycznych funkcji łączących, opiera się głównie na dekompozycji Cholesky'ego $\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ macierzy korelacji. Przykładowo dla gaussowskiej funkcji łączącej można stosować następującą procedurę:

- i. Losujemy niezależnie n wartości t_1, \dots, t_n ze standardowego n -wymiarowego rozkładu normalnego.
- ii. Kładziemy $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{t}$, gdzie $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ oraz $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$.
- iii. Kładziemy $x_i = F_i^{-1}(\Phi(y_i))$, $i = 1, \dots, n$.

Określenie dokładnego rozkładu rozpatrywanej w punkcie 6 zmiennej losowej L czy uogólnionej zmiennej K z losową liczbą szkód jest na ogół niemożliwe. Również ogromne kłopoty natury numerycznej napotkamy, wyznaczając rozkład podstawowej zmiennej K ze wzoru (2) dla dużej liczby szkód n . Błędy obliczeń mogą być dość duże. Dlatego też lepiej wtedy korzystać z metod symulacyjnych.

Przykład 3. Przyjmijmy, że mamy $n = 1000$ szkód, prawdopodobieństwo pokrycia szkody jest równe $p = 0,6$, struktura zależności opisana jest funkcją łączącą Clayтона z parametrem $\alpha = 4$ ($\tau = 0,67$), a szkody X_i mają rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną $\mu = 5$. Na rysunku 5 przedstawiony jest rozkład łącznej wartości pokrytych szkód L uzyskany za pomocą symulacji.



Rys. 5. Wykres łącznej wartości pokrytych szkód L

Źródło: [Heilpern 2011a].

8. Zakończenie

W pracy przedstawiono metody modelowania struktury zależności w wybranych modelach aktuarialnych. Metody te oparte były głównie na funkcjach łączących. Omówione zostały zagadnienia dotyczące ubezpieczeń małżeńskich, procesów ryzyka, głównie związane z teorią ruiny oraz reasekuracji, gdzie wprowadzony został i wykorzystany zależny rozkład dwumianowy. W zagadnieniach tych rozszerzono klasyczne podejście, uwzględniając możliwość wystąpienia zależnych zmiennych czy procesów losowych. Praca ma charakter przeglądowy, a poruszane w niej zagadnienia są w zasadzie jedynie zasygnalizowane. Nie są to oczywiście wszystkie możliwe modele, w których występują zależności. Przykładowo rozpatrzono jedynie ciągłe procesy

ryzyka, nie poruszono zagadnień dotyczących zarządzania ryzykiem oraz ubezpieczeń katastroficznych. Skupiono się też wyłącznie na dwuwymiarowym procesie ryzyka oraz symulacjach wykorzystujących dwuwymiarowe funkcje łączące, nie rozpatrując większej liczby wymiarów.

Literatura

- Aas K., Berg D., 2009, *Models for construction of multivariate dependence – A comparison study*, The European J. of Finance, vol. 15, no. 7, s. 639-659.
- Ambagasipitiya R.S., 2009, *Ultimate ruin probability in the Sparre Andersen model with dependent claim sizes and claim occurrence times*, Insurance: Mathematics and Economics, vol. 44, s. 464-472.
- Cossette H., Marceau E., Marri F., 2010, *Analysis of ruin measures for the classical compound Poisson risk model with dependence*, Scandinavian Actuarial Journal, no. 3, s. 221-245.
- Denuit M., Dhaene J., Le Bailly de Tillegem C., Teughelem S., 2001, *Measuring the impact of a dependence among insured lifelengths*, Belgian Actuarial Bulletin, no. 1, s. 18-39.
- Genest C., Rivest L.-P., 1993, *Statistical interference procedures for bivariate Archimedean copulas*, JASA, vol. 88, s. 1034-1043.
- Gerber H. U., 1995, *Life Insurance Mathematics*, Springer, Berlin.
- Heilpern S., 2007a, *Funkcje łączące*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław.
- Heilpern S., 2007b, *Zależny rozkład dwumianowy i jego zastosowanie w reasekuracji i kredytach*, Badania Operacyjne i Decyzje, nr 1, s. 45-61.
- Heilpern S., 2009, *Probability of ruin for the dependent, twodimensional Poisson process*, Badania Operacyjne i Decyzje, nr 1, s. 77-90.
- Heilpern S., 2010, *Wyznaczanie prawdopodobieństwa ruiny gdy struktura zależności wypłat opisana jest Archimedesową funkcją łączącą*, [w:] *Zagadnienia aktuarialne. Teoria i praktyka*, red. W. Otto, Wyd. Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa, s. 11-20.
- Heilpern S., 2011a, *Modele zależnego ryzyka kredytowego*, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, vol. 165, s. 50-62.
- Heilpern S., 2011b, *Wyznaczanie wielkości renty w zależnych grupowych ubezpieczeniach na życie*, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Wrocław, vol. 230, s. 30-48.
- Heilpern S., 2014a, *Ruin measures for a compound Poisson risk model with dependence based on the Spearman copula and the exponential claim sizes*, Insurance: Mathematics and Economics, vol. 59, s. 251-257.
- Heilpern S., 2014b, *Multiple life insurance – pension calculation*, AMSE 2014, Jerzmanowice, s. 114-121.
- Heilpern S., 2015, *Dependent structure induced by Markov chain in the multiple life insurance*, AMSE 2015, Jindřichov Hradec.
- Heilpern S., 2016, *Analiza wielowymiarowej struktury zależności – zastosowanie w rodzinnych ubezpieczeniach na życie*, Studia Ekonomiczne (w druku).
- Hofert M., 2008, *Sampling Archimedean copulas*, Computational Statistics & Data Analysis, vol. 52, s. 5163-5174.

- Hofert M., 2011, *Efficiently sampling nested Archimedean copulas*, Computational Statistics and Data Analysis, vol. 55, s. 57-70.
- Joe H., 1997, *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman & Hall, London.
- Kaas R., Goovaerts M., Dhaeme J., Denuit M., 2001, *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer, Boston.
- Kolev N., Paiva D., 2005, *Multinomial model for random sums*, Insurance: Mathematics and Economics, vol. 37, s. 494-504.
- Mari D.D., Kotz S., 2001, *Correlation and Dependence*, Imperial College Press, London.
- McNeil A.J., 2008, *Sampling nested Archimedean copulas*, J. Statistical Computation and Simulation, vol. 78, s. 567-581.
- Nelsen R.B., 1999, *An Introduction to Copulas*, Springer, New York.
- Ostasiewicz W. (red.), 2000, *Modele aktuarialne*, Wyd. AE we Wrocławiu, Wrocław.
- Pfeifer D., Neslehova J., 2004, *Modeling and generating dependent risk processes for IRM and DFA*, ASTIN Bulletin, vol. 34, s. 333-360.
- Rakkolainen T.A., 2011, *Insurance Mathematics*, <http://web.abo.fi/fak/mmf/mate/kurs-er/forsakring/-insurancemath.pdf> (dostęp: 11.10.2016).
- Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J., 1999, *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, J. Wiley, Chichester.
- Romano C., 2002, *Applying copula to risk management*, Univ. of Rome, Working Paper.
- Sklar A., 1959, *Fonctions de repartition a n dimensions et leurs marges*, Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, vol. 8, s. 229-231.
- Spreeuw J., 2006, *Types of dependence and time-dependent association between two lifetimes in single parameter copula models*, Scand. Actuar. J., vol. 5, s. 286-309.
- Youn H., Shemyakin A., Herman E., 2002, *A re-examination of the joint life of mortality functions*, North Am. Act. J., vol. 6, s. 166-170.
- Yuen K. C., Guo J., Wu W., 2002, *On a correlated aggregate claims model with Poisson and Erlang risk processes*, Insurance: Mathematics and Economics, vol. 31, s. 205-214.
- Yuen K.C., Guo J., Wu W., 2006, *On the first time in the bivariate compound Poisson model*, Insurance: Mathematics and Economics, vol. 38, s. 298-308.

MODELLING OF THE DEPENDENT STRUCTURE IN THE ACTUARIAL MODELS

Summary: The paper is devoted to the modelling of the dependent structure. The basic information about copulas, the primary tools used for modeling the dependence, are presented. The main families of copulas: Archimedean and elliptical are discussed. The examples of the modelling of the dependence in the selected actuarial issues: insurance of spouses, risk processes and reinsurances are shown in the second part of our paper. We focus on determining the value of pension in the insurance of spouses. In addition to the copulas, the Markov chains are used in them. The issues concerning the theory of ruin are studied in the risk processes. The dependent binomial distribution is introduced and used during the discussion of reinsurance. The classical approach assuming the independence of occurring variables and random processes is generalized in these actuarial models. The issue of simulations using the copulas are discussed, too. The paper is a review.

Keywords: copula, spouse annuity, ruin, reinsurance, simulations.