

SYSTEMY *BONUS-MALUS* Z WIELOLETNIĄ HISTORIĄ SZKODOWĄ

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 15(21)

Wojciech Bijak

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

Piotr Dziel

Ubezpieczeniowy Fundusz Gwarancyjny

e-mails: wobi@sgh.waw.pl; pdziel@ufg.pl

ISSN 1644-6739
e-ISSN 2449-9765

DOI: 10.15611/sps.2017.15.01

Streszczenie: Powszechną praktyką w taryfikacji ubezpieczeń komunikacyjnych jest wykorzystywanie systemów *bonus-malus* (BM) bazujących na jednorocznej historii szkód ubezpieczonych. Zakłady ubezpieczeń prowadzące w Polsce ubezpieczenia komunikacyjne OC posiadaczy pojazdów mechanicznych – OC p.p.m. lub AC mają możliwość weryfikowania wieloletniej historii szkodowej swoich klientów w bazie danych Ośrodka Informacji UFG (OI UFG). W artykule podjęto próbę modelowania liczby szkód w okresie wielu lat za pomocą wielowymiarowych rozkładów dyskretnych (Poissona, uogólnionego Poissona, ujemnego dwumianowego i ujemnego wielomianowego). Rozpatrywane wielowymiarowe rozkłady zostały wykorzystane do skonstruowania sprawiedliwych ze względu na reguły przejścia systemów BM opartych na wieloletniej historii szkód. Rozważania teoretyczne zostały zilustrowane przykładami numerycznymi wykorzystującymi dane szkodowe zgromadzone w bazie danych OI UFG.

Słowa kluczowe: ubezpieczenia komunikacyjne, wielowymiarowy rozkład liczby szkód, system *bonus-malus* z wieloletnią historią szkodową, system *bonus-malus* sprawiedliwy ze względu na reguły przejścia.

1. Wstęp

W pracy uwaga została skoncentrowana na ubezpieczeniach, w których składka kalkulowana jest w zależności od klasy taryfowej, do której zaliczany jest ubezpieczony (ubezpieczający) na podstawie wieloletniej historii przebiegu ubezpieczenia. Rozpatrywane są umowy okresowe (np. roczne) odnawialne. Do tej kategorii ubezpieczeń należą m.in. ubezpieczenia komunikacyjne OC posiadaczy pojazdów mechanicznych (OC p.p.m.) oraz ubezpieczenia *autocasco* (AC) ze składką ustalaną przy wykorzystaniu systemów *bonus-malus* (systemów BM). W centrum uwagi są ubezpieczenia jednej osoby o dłuższej niż roczna historii ubezpieczenia (jednego lub wielu pojazdów).

O tym, że zagadnienie to może być istotne dla zakładów ubezpieczeń, świadczą dane przedstawione w tab. 1, dotyczące zapytań kierowanych do bazy OI przez zakłady ubezpieczeń.

Tabela 1. Struktura zapytań o historię ubezpieczeń i historię szkód AC i OC p.p.m. ze względu na długość okresu historii (w %)

Liczba lat historii	AC – historia ubezpieczenia	AC – historia szkód	OC – historia ubezpieczenia	OC – historia szkód
1	4	4	5	4
2	4	4	4	4
3	5	2	5	3
4	13	15	12	14
5	4	6	4	7
6	13	10	13	10
7	4	5	4	6
8	2	4	3	4
9	1	1	1	1
10	8	8	7	8
>10	42	41	42	39

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych UFG – stan na wrzesień 2016 r.

W praktyce zakłady ubezpieczeń wykorzystują historię szkód ubezpieczonego do wyznaczenia jego składki podstawowej przy taryfikacji *a priori*. W ramach prezentowanego dalej podejścia można uwzględnić dłuższą niż tylko jednookresową historię szkód w systemach *bonus-malus* (systemach taryfikacji *a posteriori*), tworząc obiekty łączące osoby (ubezpieczone podmioty) z okresami.

Niniejszy artykuł stanowi kontynuację rozważań przedstawionych w pracy [Bijak 2015], w której omówiono łączenie systemów *bonus-malus* określonych dla różnych obiektów (wielu ubezpieczających jeden pojazd, wiele pojazdów ubezpieczonych przez jednego posiadacza, jednego posiadacza pojazdu o wieloletniej historii ubezpieczenia itp.).

W kolejnych punktach pracy sformalizowano opis ubezpieczeń z wielookresowym systemem taryfowym *a posteriori*, omówiono kwestię racjonalnego podejścia do konstrukcji systemów *bonus-malus* z wieloletnią historią szkodową (systemów sprawiedliwych) i ich modelowania za pomocą łańcuchów Markowa. Wprowadzono łączny system *bonus-malus*, opierając się na systemach brzegowych dla poszczególnych lat historii ubezpieczenia. Następnie przedstawiono wykorzystanie dwuwymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa: Poissona, uogólnionego Poissona, ujemnego dwumianowego oraz ujemnego wielomianowego jako rozkładów do modelowania liczby szkód

związanych ze szkodami z poszczególnych lat historii ubezpieczenia. Rozważania teoretyczne zilustrowano przykładami empirycznymi opracowanymi na podstawie danych OI UFG. W pracy uwagę skupiono na dwuletniej historii szkodowej w celach ilustracyjnych. W odniesieniu do ubezpieczeń AC okres ten można uznać za wystarczający ze względu na krótki tzw. okres rozwoju szkód w czasie (2-3 lata). W przypadku ubezpieczeń OC p.p.m. w rzeczywistych systemach taryfowych powinna być brana pod uwagę dłuższa historia szkodowa.

2. Umowy ubezpieczenia z systemem taryfowym zależnym od wieloletniej historii szkód

W dalszych rozważaniach interesować nas będzie klasa umów ubezpieczenia krótkookresowego (np. rocznych) odnawialnych, w których wysokość składki zależy od wieloletniej historii ubezpieczenia.

Przyjmujemy następujące założenia dotyczące ubezpieczenia:

- ubezpieczeniem objęta jest jedna osoba mająca co najmniej $\kappa + 1$ -letnią historię ubezpieczenia ($\kappa = 0, 1, 2, \dots$);
- historia ubezpieczenia opisana jest przez ciąg wielowymiarowych zmiennych losowych $\mathbf{N}_t = (N_{t-\kappa}, N_{t-\kappa+1}, \dots, N_t)$ dla $t \geq \kappa$, gdzie $N_{t-\tau}$ oznacza liczbę szkód zaszłych w okresie $[t - \tau - 1, t - \tau)$, $\tau = 0, 1, 2, \dots, \kappa$, zgłoszonych do momentu analizy t^1 ;
- w momencie t ustalana jest składka P_t na okres $[t, t + 1)$ na podstawie składki podstawowej \hat{P}_0 .

Dalej przyjmować będziemy, że składka P_t wyznaczana jest przy wykorzystaniu systemu *bonus-malus*, w którym bierze się pod uwagę wieloletnią historię ubezpieczenia i odpowiednie mnożniki składki.

Na system BM z $\kappa + 1$ -letnią historią ubezpieczenia stosowany przez zakład ubezpieczeń do indywidualnej oceny ryzyka związanego z ustalonym ubezpieczonym składają się²:

- ustalona skończona liczba klas taryfowych l_i , $i = 1, \dots, s$, przy czym klasa taryfowa o numerze 1 jest klasą o najwyższej zniżce, natomiast klasa o numerze s o najwyższej zwwyżce składki³; wy-

¹ W momencie t zakład ubezpieczeń zna liczbę szkód zaszłych w okresie $[t - 1, t)$ zgłoszonych w tym okresie, zaszłych w okresie $[t - 2, t - 1)$ zgłoszonych w okresie $[t - 2, t)$ itd. Oznacza to, że część szkód zaszłych w okresie $[t - 2, t - 1)$ jest zgłaszana w okresie $[t - 1, t)$.

² Por. np. [Lemaire 1995, s. 3-10; Denuit i in. 2007, s. 165-171].

³ Klasę, jeżeli nie będzie to prowadzić do nieporozumienia, będziemy dalej utożsamiać z jej numerem.

różniona jest również tzw. klasa startowa l_{i_0} . Zbiór klas taryfowych oznaczmy $\mathcal{L} = \{l_1, l_2, \dots, l_s\}$;

- zasada, że składka za dany rok zależy od klasy, do której został zaliczony ubezpieczony;
- zmienna losowa L_t określająca numer klasy taryfowej, do której jest zaliczany ubezpieczony w momencie t o wartościach zależnych wyłącznie od numeru klasy, do jakiej był on zaliczony w poprzednim momencie wyceny ubezpieczenia, oraz od liczby szkód zaszłych i zgłoszonych do momentu t z poszczególnych lat, tzn. realizacji zmiennej N_t ;
- wektor mnożników składki $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_s)$ o elementach spełniających następujące warunki $r_{i+1} \geq r_i$ dla $i = 1, \dots, s-1$ oraz $r_{i_0} = 1$, gdzie mnożnik składki r_i związany jest z klasą taryfową o numerze i ;
- reguły przejścia określające zasady zaliczania ubezpieczonego do klasy taryfowej na podstawie jego klasy taryfowej ustalonej w poprzednim momencie wyceny umowy oraz liczby szkód zgłoszonych do momentu analizy zaszłych w poprzednich latach.

Niech \mathcal{A}_{ij} oznacza zdarzenie związane z historią ubezpieczenia, którego zrealizowanie się powoduje lub nie powoduje zmiany przypisania ubezpieczonego do klasy taryfowej w momencie t na podstawie historii ubezpieczenia z poprzednich $\kappa + 1$ okresów. Oznaczmy dodatkowo przez $\mathcal{A} = [\mathcal{A}_{ij}]_{s \times s}$ macierz tych zdarzeń. Reguły przejścia w systemie BM mogą więc być określone za pomocą macierzy zdarzeń \mathcal{A} .

Przyjmijmy, że

- $\mathcal{A}_{ij} = \emptyset$, gdy nie następuje zmiana przypisania ubezpieczonego z klasy i do klasy taryfowej j lub ubezpieczony nie pozostaje w tej samej klasie i w ciągu jednego okresu,
- $\mathcal{A}_{ij} \neq \emptyset$, gdy następuje zmiana przypisania ubezpieczonego do klasy taryfowej (z klasy o numerze i do klasy o numerze j) lub ubezpieczony pozostaje w tej samej klasie i w ciągu jednego okresu.

Dla każdego $i, i = 1, \dots, s$ mamy $\mathcal{A}_{ij} \cap \mathcal{A}_{ij'} = \emptyset$, gdy $j \neq j'$ oraz $\bigcup_{j=1}^s \mathcal{A}_{ij} = \Omega$, gdzie $\Omega = \underbrace{\Omega \times \Omega \times \dots \times \Omega}_{\kappa+1} = \Omega^{\kappa+1}$ oznacza iloczyn

kartezjański $\kappa + 1$ zbiorów

$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Macierz zdarzeń \mathcal{A} może być określona na podstawie:

- poszczególnych okresów $[t - \tau - 1, t - \tau)$, $\tau = 0, 1, 2, \dots, \kappa$ z $\kappa + 1$ – okresowej historii ubezpieczenia,
- historii ubezpieczenia z całego okresu $[t - \kappa - 1, t)$.

W przypadku zastosowania pierwszego podejścia zdefiniujemy macierze $\mathcal{A}_{t-\tau} = [\mathcal{A}_{ij}^{t-\tau}]_{s \times s}$ zdarzeń $\mathcal{A}_{ij}^{t-\tau}$ związanych z historią szkodową z jednego okresu $t - \tau$, $\tau = 0, 1, 2, \dots, \kappa$, przyjmując, że

- $\mathcal{A}_{ij}^{t-\tau} = \emptyset$, gdy w momencie t nie następuje zmiana przypisania ubezpieczonego z klasy i do klasy taryfowej j lub ubezpieczony nie pozostaje w tej samej klasie i po jednym okresie w związku z historią szkodową z okresu $t - \tau$,
- $\mathcal{A}_{ij}^{t-\tau} \neq \emptyset$, gdy w momencie t następuje zmiana przypisania ubezpieczonego do klasy taryfowej (z klasy o numerze i do klasy o numerze j) lub ubezpieczony pozostaje w tej samej klasie i po jednym okresie w związku z historią szkodową z okresu $t - \tau$.

Dla każdego i oraz $\tau = 0, 1, 2, \dots, \kappa$ mamy $\mathcal{A}_{ij}^{t-\tau} \cap \mathcal{A}_{ij'}^{t-\tau} = \emptyset$, gdy $j \neq j'$ oraz $\bigcup_{j=1}^s \mathcal{A}_{ij}^{t-\tau} = \Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Niech $k \in \Omega$. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

- $k +$ ciąg liczb $k, k + 1, k + 2, \dots$,
- $\{k +\} = \{n \in \Omega : n \geq k\}$,
- $\tilde{k} = k$ pierwszy element ciągu $k +$.

Przykład 1

Rozpatrzmy system BM o sześciu stanach z dwuletnią historią szkód. Przyjmijmy, że identyczne reguły przejścia dla roku $t - 1$ oraz t oznaczone jako $-1/+2$ są opisane w tab. 2⁴.

Tabela 2. Reguły przejścia $-1/+2$

Klasa L_{t-1}	Liczba szkód w okresie N_t			
	0	1	2	≥ 3
	Klasa L_t			
6	5	6	6	6
5	4	6	6	6
4	3	6	6	6
3	2	5	6	6
2	1	4	6	6
1	1	3	5	6

Źródło: [Denuit i in. 2007 s. 169].

⁴ Oznaczenie $-1/+2$ stanowi zakodowaną informację o regułach przejścia między stanami w ciągu jednego okresu. Jeżeli ubezpieczony zaliczany był do klasy o numerze i w momencie $t - 1$, to w momencie t zostanie zaliczony do klasy o numerze $\max\{i - 1, 1\}$, gdy nie zostanie zgłoszona szkoda, lub do klasy o numerze $\max\{i + 2n, s\}$, gdy zostanie zgłoszonych n szkód w okresie $(t - 1, t]$.

Przy przyjętych założeniach macierze $\mathcal{A}_{t-1}, \mathcal{A}_t$ są postaci:

$$\mathcal{A}_{t-1} = \mathcal{A}_t = \begin{bmatrix} \{0\} & \emptyset & \{1\} & \emptyset & \{2\} & \{3+\} \\ \{0\} & \emptyset & \emptyset & \{1\} & \emptyset & \{2+\} \\ \emptyset & \{0\} & \emptyset & \emptyset & \{1\} & \{2+\} \\ \emptyset & \emptyset & \{0\} & \emptyset & \emptyset & \{1+\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{0\} & \emptyset & \{1+\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{0\} & \{1+\} \end{bmatrix}.$$

Zdefiniujmy iloczyn macierzy zdarzeń w następujący sposób:

Definicja 1. Iloczynem macierzy zdarzeń $\mathcal{B}_1 = [\mathcal{B}_{ij}^1]_{s \times s}$ oraz $\mathcal{B}_2 = [\mathcal{B}_{pq}^2]_{s \times s}$ nazywamy macierz

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 = [\mathcal{B}_{ij}]_{s \times s}, \quad (1)$$

gdzie

$$\mathcal{B}_{ij} = \bigcup_{p=1}^s \mathcal{B}_{ip}^1 \times \mathcal{B}_{pj}^2.$$

Łatwo zauważyć, że jeżeli macierze \mathcal{B}_1 oraz \mathcal{B}_2 są macierzami zdarzeń, to również macierz $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 = [\mathcal{B}_{ij}]_{s \times s}$ jest macierzą zdarzeń, tzn. dla każdego $i, i = 1, \dots, s$ zachodzi $\mathcal{B}_{ij} \cap \mathcal{B}_{ij'} = \emptyset$, gdy $j \neq j'$ oraz $\bigcup_{j=1}^s \mathcal{B}_{ij} = \Omega$, gdzie $\Omega = \Omega^2$.

Zgodnie z przyjętymi założeniami zmianę przypisania ubezpieczonego do klas taryfowych w ciągu jednego okresu na podstawie historii $\kappa + 1$ -okresowej określa macierz

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{t-\kappa} \mathcal{A}_{t-\kappa+1} \cdots \mathcal{A}_t.$$

Niech $(l, k) \in \Omega^2$. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

- $(lk +)$ ciąg par liczb $(lk), (lk + 1), (lk + 2) \dots$,
- $(l + k)$ ciąg par liczb $(lk), (l + 1k), (l + 2k) \dots$,
- $(l + k +)$ ciąg par liczb $(lk), (lk + 1), (lk + 2) \dots, (l + 1k)$,
- $(l + 1k + 1), (l + 1k + 2) \dots$,
- $\{(lk +)\} = \{(mn) \in \Omega^2: m = l, n \geq k\}$,
- $\{(l + k)\} = \{(mn) \in \Omega^2: m \geq l, n = k\}$,
- $\{(l + k +)\} = \{(mn) \in \Omega^2: m \geq l, n \geq k\}$,
- $(\overline{lk}) = (lk)$ pierwszy element ciągów $(lk +), (l + k), (l + k +)$.

Powyższe oznaczenia łatwo uogólnić na układy liczb o większej liczbie elementów (trójki, czwórki liczb itd.).

Przykład 2

Dla danych z przykładu 1 macierz $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{t-1}\mathcal{A}_t$ jest postaci⁵:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \{(00)\} \{(10)\} & \{(01)\} & \{(20)\} & \{(02), (11), (3+0)\} & \{(03+), (12+), (2+1+)\} \\ \{(00)\} \emptyset & \{(01)(10)\} & \emptyset & \{(02), (2+0)\} & \{(03+), (1+1+)\} \\ \{(00)\} \emptyset & \emptyset & \{(01), (10)\} & \{(2+0)\} & \{(02+), (1+1+)\} \\ \emptyset \{(00)\} & \emptyset & \emptyset & \{(01), (10)\} & \{(02+), (1+1+)\} \\ \emptyset \emptyset & \{(00)\} & \emptyset & \{(1+0)\} & \{(01+), (1+1+)\} \\ \emptyset \emptyset & \emptyset & \{(00)\} & \{(1+0)\} & \{(01+), (1+1+)\} \end{bmatrix}.$$

Przykład 3

Rozpatrzmy system BM wykorzystujący trzyletnią historię szkodową o macierzach zdarzeń dla poszczególnych lat postaci:

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_3 = \begin{bmatrix} \{0\} & \{1\} & \{2+\} \\ \{0\} & \emptyset & \{1+\} \\ \emptyset & \{0\} & \{1+\} \end{bmatrix}.$$

Macierz \mathcal{A} jest postaci:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3 = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{13} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} & \mathcal{A}_{23} \\ \mathcal{A}_{31} & \mathcal{A}_{32} & \mathcal{A}_{33} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$\mathcal{A}_{11} = \{(000), (010), (100), (2+00)\},$$

$$\mathcal{A}_{12} = \{(001), (02+0), (101), (11+0), (2+1+0)\},$$

$$\mathcal{A}_{13} = \{(002+), (011+), (02+1+), (102+), (11+1+), (2+01), (2+1+1+)\},$$

$$\mathcal{A}_{21} = \{(000), (010), (1+00)\},$$

$$\mathcal{A}_{22} = \{(0,01+), (01+0), (1+1+0)\},$$

$$\mathcal{A}_{23} = \{(002+), (011+), (02+1+), (1+01+), (1+1+1+)\},$$

$$\mathcal{A}_{31} = \{(000), (1+00)\},$$

$$\mathcal{A}_{32} = \{(001), (01+0), (1+1+0)\},$$

$$\mathcal{A}_{33} = \{(002+), (01+1+), (1+01+), (1+1+1+)\}.$$

Jeżeli przyjmiemy, że macierz zdarzeń \mathcal{A} budowana jest na podstawie historii ubezpieczenia z całego okresu $[t - \kappa - 1, t)$, to powinna ona wtedy mieć pewne pożądane własności gwarantujące np. sprawiedliwość systemu BM oraz ergodyczność łańcucha Markowa będącego modelem systemu BM [Podgórska, Kryszew, Niemiec 2008]. Kwestia sprawiedliwości systemu BM omawiana jest bardziej szczegółowo w kolejnym punkcie pracy. Ogólnie należy stwierdzić, że

⁵ W przykładach empirycznych omawianych w dalszej części artykułu macierz ta będzie oznaczana jako **A1**.

sprawiedliwy system BM ma gwarantować, aby mniej ryzykowny ubezpieczony nie był karany większą zwyżką składki niż bardziej ryzykowny, i odwrotnie, aby bardziej ryzykowny nie był nagradzany większą zniżką niż mniej ryzykowny. W przypadku pewnych macierzy zdarzeń \mathcal{A} nie powinno być wątpliwości, czy system o takiej macierzy będzie sprawiedliwy.

Przykład 4

Rozpatrzmy system BM z dwuletnią historią szkodową, w którym za brak szkody w ciągu dwóch lat przyznawana jest minimalna zniżka składki, natomiast za co najmniej jedną szkodę w tym okresie przyznawana jest maksymalna podwyżka składki. Macierz zdarzeń $\mathcal{A}^{MIN/MAX}$ dla systemu sześciostanowego będzie postaci⁶:

$$\mathcal{A}^{MIN/MAX} =$$

$$= \begin{bmatrix} \{(00)\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{(01+), (1+0), (1+1+)\} \\ \{(00)\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{(01+), (1+0), (1+1+)\} \\ \emptyset & \{(00)\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{(01+), (1+0), (1+1+)\} \\ \emptyset & \emptyset & \{(00)\} & \emptyset & \emptyset & \{(01+), (1+0), (1+1+)\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{(00)\} & \emptyset & \{(01+), (1+0), (1+1+)\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{(00)\} & \{(01+), (1+0), (1+1+)\} \end{bmatrix}$$

System BM możemy więc oznaczyć jako $SBM(\mathcal{L}, \mathbf{r}, \mathcal{A}, \mathbf{N})$. Dodatkowo możemy określić brzegowe systemy BM dla okresów $t - \tau$, $\tau = 0, 1, 2, \dots, \kappa$ historii ubezpieczenia, które oznaczać będziemy jako $SBM(\mathcal{L}, \mathbf{r}_{t-\tau}, \mathcal{A}_{t-\tau}, \mathbf{N}_{t-\tau})$. W pracy pominięto kwestię wyznaczania wektorów mnożników składki $\mathbf{r}, \mathbf{r}_{t-\tau}, \tau = 0, 1, 2, \dots, \kappa$ oraz wzajemnych relacji między nimi.

3. Sprawiedliwe systemy *bonus-malus*

W pracy [Podgórska, Kryszeń, Niemiec 2008] podano definicje systemów BM sprawiedliwych według składki oraz według klas. Rozważania były prowadzone przy założeniu, że przejścia między klasami zależą od realizacji jednowymiarowej zmiennej losowej określającej liczbę szkód zgłoszonych w roku przez ubezpieczonego lub poszkodowanego.

⁶ W przykładach empirycznych omawianych w dalszej części artykułu macierz ta będzie oznaczana jako $\mathbf{A3}$.

Można określić systemy BM sprawiedliwe m.in.:

- ze względu na reguły przejścia,
- ze względu na reguły dojścia.

Uogólnienie definicji systemów BM sprawiedliwych na przypadek systemów, w których wykorzystuje się wieloletnią historię szkodową, wymaga przyjęcia pewnego porządku w zbiorze $\Omega = \Omega^{\kappa+1}$, od którego będzie zależała restrykcyjność systemów.

Określmy dla przykładu system BM sprawiedliwy ze względu na reguły przejścia i reguły dojścia, przyjmując, że szkody z lat wcześniejszych można uznać za mniej istotne niż z lat późniejszych.

Definicja 2. Mówimy, że $(l_{t-\kappa}l_{t-\kappa+1} \dots l_t) \in \Omega^{\kappa+1}$ poprzedza $(k_{t-\kappa}k_{t-\kappa+1} \dots k_t) \in \Omega^{\kappa+1}$, $(l_{t-\kappa}l_{t-\kappa+1} \dots l_t) < (k_{t-\kappa}k_{t-\kappa+1} \dots k_t)$ w. i w., gdy $\sum_{\tau=0}^{\kappa} l_{t-\tau} < \sum_{\tau=0}^{\kappa} k_{t-\tau} \vee$ (jeżeli $\sum_{\tau=0}^{\kappa} l_{t-\tau} = \sum_{\tau=0}^{\kappa} k_{t-\tau}$, to $(l_t < k_t) \vee (l_t = k_t \wedge l_{t-1} < k_{t-1}) \vee (l_t = k_t \wedge l_{t-1} = k_{t-1} \wedge l_{t-2} < k_{t-2}) \dots \vee (l_t = k_t \wedge \dots \wedge l_{t-\kappa+1} = k_{t-\kappa+1} \wedge l_{t-\kappa} < k_{t-\kappa})$).

Jeżeli dla każdego $\tau = 0, 1, 2, \dots, \kappa$ mamy $l_{t-\tau} = k_{t-\tau}$, to mówimy, że $(l_{t-\kappa}l_{t-\kappa+1} \dots l_t)$, $(k_{t-\kappa}k_{t-\kappa+1} \dots k_t)$ są sobie równe $(l_{t-\kappa}l_{t-\kappa+1} \dots l_t) = (k_{t-\kappa}k_{t-\kappa+1} \dots k_t)$.

Definicja 3. Mówimy, że ciąg o pierwszym elemencie $(\overleftarrow{l_{t-\kappa}l_{t-\kappa+1} \dots l_t})$ poprzedza ciąg o pierwszym elemencie $(\overleftarrow{k_{t-\kappa}k_{t-\kappa+1} \dots k_t})$ w. i w., gdy $(l_{t-\kappa}l_{t-\kappa+1} \dots l_t) < (k_{t-\kappa}k_{t-\kappa+1} \dots k_t)$.

Niech $\bar{\mathcal{A}}$ oznacza podzbiór niepustego zbioru $\mathcal{A} \subset \Omega^{\kappa+1}$ o elementach niebędących elementami ciągów lub o pierwszych elementach każdego ciągu. Na przykład w przypadku zbioru $\mathcal{A}_{12} = \{(001), (02+0), (101), (1+1+0)\}$ z przykładu 3 mamy $\bar{\mathcal{A}}_{12} = \{(001), (020), (101), (110)\} \subset \mathcal{A}_{12}$.

Definicja 4. Mówimy, że niepusty zbiór $\mathcal{A} \subset \Omega^{\kappa+1}$, „leży bliżej” punktu $(00 \dots 0)$ o $\kappa + 1$ współrzędnych równych 0 niż niepusty zbiór $\mathcal{B} \subset \Omega^{\kappa+1}$ ($\mathcal{A} < \mathcal{B}$) w. i w., gdy dla każdego $(l_{t-\kappa}l_{t-\kappa+1} \dots l_t) \in \bar{\mathcal{A}}$, $(k_{t-\kappa}k_{t-\kappa+1} \dots k_t) \in \bar{\mathcal{B}}$ zachodzi $(l_{t-\kappa}l_{t-\kappa+1} \dots l_t) < (k_{t-\kappa}k_{t-\kappa+1} \dots k_t)$.

Definicja 5. Mówimy, że system BM $SBM(\mathcal{L}, \mathbf{r}, \mathcal{A}, N)$ jest sprawiedliwy ze względu na reguły przejścia w. i w., gdy dla każdego $i, j, k = 1, 2, \dots, s$, jeżeli $\mathcal{A}_{ij}, \mathcal{A}_{ik} \neq \emptyset$ oraz $j < k$, to $\mathcal{A}_{ij} < \mathcal{A}_{ik}$.

Przykład 5

Nr 15(21) Dla danych z przykładu 2 możemy sprawdzić, że system BM $SBM(\mathcal{L}, \mathbf{r}, \mathcal{A}, N)$ jest sprawiedliwy ze względu na reguły przejścia.

Przykładowo dla $i = 2$ mamy

$\mathcal{A}_{21} < \mathcal{A}_{23}$, gdyż $\bar{\mathcal{A}}_{21} = \{(00)\}$, $\bar{\mathcal{A}}_{23} = \{(10), (01)\}$ i $(00) < (10)$, $(00) < (01)$,

$\mathcal{A}_{23} < \mathcal{A}_{25}$, gdyż $\bar{\mathcal{A}}_{23} = \{(10), (01)\}$, $\bar{\mathcal{A}}_{25} = \{(20)\}$ i $(10) < (20)$, $(01) < (20)$,

$\mathcal{A}_{25} < \mathcal{A}_{26}$, gdyż $\bar{\mathcal{A}}_{25} = \{(20)\}$, $\bar{\mathcal{A}}_{26} = \{(11), (21), (03)\}$
i $(20) < (11)$, $(20) < (21)$, $(20) < (03)$.

Definicja 6. Mówimy, że niepusty zbiór $\mathcal{A} \subset \Omega^{\kappa+1}$ „leży nie dalej” od punktu $(00 \dots 0)$ o $\kappa + 1$ współrzędnych równych 0 niż niepusty zbiór $\mathcal{B} \subset \Omega^{\kappa+1}$ ($\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$) w. i w., gdy dla każdego $(l_{t-\kappa} l_{t-\kappa+1} \dots l_t) \in \bar{\mathcal{A}}$, $(k_{t-\kappa} k_{t-\kappa+1} \dots k_t) \in \bar{\mathcal{B}}$ zachodzi $(l_{t-\kappa} l_{t-\kappa+1} \dots l_t) < (k_{t-\kappa} k_{t-\kappa+1} \dots k_t)$ lub $(l_{t-\kappa} l_{t-\kappa+1} \dots l_t) = (k_{t-\kappa} k_{t-\kappa+1} \dots k_t)$.

Niech $j_i^{\min} = \min\{j: \mathcal{A}_{ij} \neq \emptyset\}$ i $j_i^{\max} = \max\{j: \mathcal{A}_{ij} \neq \emptyset\}$ oznaczają odpowiednio najniższy i najwyższy numer klasy, do której może być zakwalifikowany ubezpieczony w momencie t będący w momencie $t - 1$ w klasie $i = 1, 2, \dots, s$.

Definicja 7. Mówimy, że system $SBM(\mathcal{L}, \mathbf{r}, \mathcal{A}, N)$ jest sprawiedliwy ze względu na reguły dojścia w. i w., gdy dla każdego $i, i', j = 1, 2, \dots, s$, jeżeli $i < i'$, to $j_i^{\min} \leq j_{i'}^{\min}$ i $j_i^{\max} \leq j_{i'}^{\max}$ i jeżeli $\mathcal{A}_{ij}, \mathcal{A}_{i'j} \neq \emptyset$, to $\mathcal{A}_{i'j} \preceq \mathcal{A}_{ij}$.

Łatwo sprawdzić, że system BM $SBM(\mathcal{L}, \mathbf{r}, \mathcal{A}, N)$ o macierzy zdarzeń z przykładu 2 jest sprawiedliwy ze względu na reguły dojścia.

Zakłady ubezpieczeń, uwzględniając wieloletnią historię szkodową w taryfikacji, zwykle mniejszą wagę nadają informacjom o szkodach z lat wcześniejszych. Ogólnie mówiąc, chcielibyśmy, aby dla okresów t_1, t_2 , gdzie $t_1 < t_2$, brzegowy system $SBM(\mathcal{L}, \mathbf{r}, \mathcal{A}_{t_1}, N_{t_1})$ był mniej restrykcyjny niż brzegowy system $SBM(\mathcal{L}, \mathbf{r}, \mathcal{A}_{t_2}, N_{t_2})$, tzn. karał mniejszymi lub rzadszymi zwyczajkami lub też nagradzał większymi lub częstszymi redukcjami składki. W tym kontekście warto zwrócić uwagę na tzw. skrajne przypadki systemów BM sprawiedliwych ze względu na reguły przejścia. W pracy [Podgórska 2008] przedstawiono cztery skrajne przypadki systemów BM: maksymalnej zniżki i minimalnej podwyżki składki MAX/MIN, maksymalnej zniżki i maksymalnej podwyżki składki MAX/MAX, minimalnej zniżki

i minimalnej podwyżki składki MIN/MIN, minimalnej zniżki i maksymalnej podwyżki składki MIN/MAX. Poszczególne systemy charakteryzują następujące macierze zdarzeń:

$$\mathcal{A}_{MIN}^{MAX} = \begin{bmatrix} \{0\}\{1+\} & \emptyset & \dots & \emptyset & \emptyset \\ \{0\} & \emptyset & \{1+\}\dots & \emptyset & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{0\} & \emptyset & \emptyset & \dots & \{1+\} & \emptyset \\ \{0\} & \emptyset & \emptyset & \dots & \emptyset & \{1+\} \\ \{0\} & \emptyset & \emptyset & \dots & \emptyset & \{1+\} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A}^{MAX/MAX} = \begin{bmatrix} \{0\} & \emptyset & \dots & \emptyset & \{1+\} \\ \{0\} & \emptyset & \dots & \emptyset & \{1+\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \{1+\} \\ \{0\} & \emptyset & \dots & \emptyset & \{1+\} \\ \{0\} & \emptyset & \dots & \emptyset & \{1+\} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A}_{MIN}^{MIN} = \begin{bmatrix} \{0\}\{1+\} & \emptyset & \dots & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \{0\} & \emptyset & \{1+\}\dots & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \{0\} & \emptyset & \dots & \emptyset & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \dots & \emptyset & \{1+\} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \dots & \{0\} & \emptyset & \{1+\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \dots & \emptyset & \{0\} & \{1+\} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A}^{MIN/MAX} = \begin{bmatrix} \{0\} & \emptyset & \emptyset & \dots & \emptyset & \{1+\} \\ \{0\} & \emptyset & \emptyset & \dots & \emptyset & \{1+\} \\ \emptyset & \{0\} & \emptyset & \dots & \emptyset & \{1+\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \dots & \emptyset & \{1+\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \dots & \{0\} & \{1+\} \end{bmatrix}.$$

Znając macierze zdarzeń dla skrajnych przypadków systemów BM (MAX/MIN i MIN/MAX), można się pokusić o konstruowanie systemów BM z wieloletnią historią szkodową o dowolnym stopniu restrykcyjności dla systemów brzegowych. Przyjmując np.

$\mathcal{A}_{t-1}^{MIN/MAX}$, \mathcal{A}_t^{MIN} dla systemu sześciostanowego otrzymamy⁷

⁷ W przykładach empirycznych omawianych w dalszej części artykułu macierz $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{t-1}^{MIN/MAX} \mathcal{A}_t^{MIN/MAX}$ będzie oznaczana jako **A2**, natomiast macierz $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{t-1}^{MAX/MIN} \mathcal{A}_t^{MAX/MIN}$ jako **A4**.

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{t-1}^{MIN/MAX} \mathcal{A}_t^{MIN/MAX}$$

$$= \begin{bmatrix} \{(00)\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{(1+0)\}\{(01+), (1+1+)\} \\ \{(00)\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{(1+0)\}\{(01+), (1+1+)\} \\ \{(00)\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{(1+0)\}\{(01+), (1+1+)\} \\ \emptyset & \{(00)\} & \emptyset & \emptyset & \{(1+0)\}\{(01+), (1+1+)\} \\ \emptyset & \emptyset & \{(00)\} & \emptyset & \{(1+0)\}\{(01+), (1+1+)\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{(00)\} & \{(1+0)\}\{(01+), (1+1+)\} \end{bmatrix}.$$

Skrajne przypadki systemów BM sprawiedliwych ze względu na reguły przejścia można uogólnić na przypadek systemów wielowymiarowych, w tym systemów o wieloletniej historii szkodowej. W przykładzie 3 powyżej przedstawiono macierz zdarzeń dla dwuwymiarowego systemu BM (z dwuletnią historią szkodową) o minimalnej zniżce i maksymalnej podwyżce składki (MIN/MAX) dla systemu sześciostanowego.

4. Łańcuch Markowa w modelowaniu systemu BM z wieloletnią historią szkód

Niech L_t oznacza zmienną losową określającą numer klasy taryfowej przypisanej ubezpieczonemu w momencie $t \geq \kappa$, gdzie $\kappa \geq 1$. Zakładamy, że rozkład zmiennej L_t zależy jedynie od realizacji zmiennej w poprzednim momencie $t-1$ i nie zależy od realizacji zmiennych $L_{t-2}, L_{t-3}, \dots, L_0$. Zatem proces przypisania do klas taryfowych $\{L_t\}$, $t = \kappa, \kappa+1, \dots$ możemy opisać za pomocą jednorodnego łańcucha Markowa⁸.

Prawdopodobieństwo tego, że nastąpi zmiana klasy taryfowej z klasy o numerze i na klasę o numerze j w kolejnym okresie jest równe⁹:

$$p_{ij} = Pr_N(\mathcal{A}_{ij}) = Pr(\mathbf{N} \in \mathcal{A}_{ij}), i, j = 1, \dots, s.$$

Macierze prawdopodobieństw przejść łańcucha $\{L_t\}$ oznaczymy przez $\mathbf{\Pi} = [p_{ij}]_{s \times s}$. Wprowadźmy dodatkowo operację na macierzy zdarzeń zdefiniowaną następująco:

$$P_N(\mathcal{A}) = [Pr_N(\mathcal{A}_{ij})]_{s \times s}.$$

Możemy wówczas zapisać, że macierz $\mathbf{\Pi}$ wyraża się wzorem:

$$\mathbf{\Pi} = P_N(\mathcal{A}).$$

⁸ Por. np. [Kemeny, Snell 1976; Iosifescu 1988].

⁹ Dalej zakładamy będziemy, że rozkład zmiennej N_t , $t = 1, 2, \dots$ nie zmienia się w czasie.

Macierz $\mathbf{\Pi}$ jest macierzą stochastyczną z zerowymi elementami p_{ij} w przypadku, gdy przejście z klasy i do klasy j lub pozostanie w danej klasie nie jest możliwe. Macierz $\mathbf{\Pi}$ zależy od rozkładu $\kappa + 1$ wymiarowej zmiennej losowej \mathbf{N} .

Niech \mathbf{e}_0 oznacza wierszowy wektor o s współrzędnych z elementem równym 1 na miejscu o numerze i_0 odpowiadającym klasie startowej l_{i_0} i pozostałymi elementami równymi 0. Rozkład zmiennej L_t po $t > \kappa$ okresach ubezpieczenia można wyznaczyć ze wzoru

$$\boldsymbol{\pi}_t = \mathbf{e}_0 \mathbf{\Pi}^t, \quad (2)$$

gdzie $\boldsymbol{\pi}_t(\lambda) = [\pi_{t1}, \dots, \pi_{ts}]$ oraz $\pi_{ti} = Pr(L_t = i)$.

Rozkład stacjonarny (o ile istnieje), opisany wektorem

$$\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \dots, \pi_s] = \lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\pi}_t,$$

można wyznaczyć ze wzoru [Rolski i in. 1999, s. 288]

$$\boldsymbol{\pi}(\lambda) = \mathbf{e}(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi} + \mathbf{E})^{-1}, \quad (3)$$

gdzie \mathbf{e} oznacza s -wymiarowy wektor o wszystkich współrzędnych równych 1, macierze \mathbf{I} oraz \mathbf{E} wymiaru $s \times s$ – odpowiednio macierz jednostkową oraz macierz złożoną z jedynek.

W systemie BM ubezpieczony, który w momencie t zaliczony został do klasy taryfowej l_i , płaci składkę P_t za ubezpieczenie na okres $[t, t + 1)$, równą:

$$P_t = r_i \hat{P}_0,$$

gdzie \hat{P}_0 oznacza składkę podstawową ustaloną na podstawie taryfikacji *a priori*.

Do syntetycznego opisu systemów BM wykorzystuje się wiele charakterystyk. W dalszej części pracy wykorzystywane będą:

- średnia składka bieżąca w momencie t :

$$\bar{r}_t = \boldsymbol{\pi}_t \mathbf{r}^T;$$

- średnia składka stacjonarna:

$$\bar{r} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{r}^T.$$

5. Modelowanie wieloletniej historii szkodowej w systemach *bonus-malus*

5.1. Łączny rozkład liczby szkód

Do modelowania łącznego rozkładu wektora losowego $\mathbf{N}_t = (N_{t-\kappa}, N_{t-\kappa+1}, \dots, N_t)$ wykorzystamy m.in. wielowymiarowy rozkład ujemny wielomianowy oraz rozkłady określone za pomocą następującego układu równań:

$$\begin{cases} N_{t-\kappa} &= K_1 + K_{1\kappa+1} \\ N_{t-\kappa+1} &= K_2 + K_{2\kappa+1} \\ &\dots \\ N_{t-1} &= K_\kappa + K_{\kappa\kappa+1} \\ N_t &= K_{\kappa+1} + K_{1\kappa+1} + K_{2\kappa+1} + \dots + K_{\kappa\kappa+1} \end{cases}, \quad (4)$$

gdzie zmienne losowe $K_1, K_2, \dots, K_{\kappa+1}, K_{1\kappa+1}, \dots, K_{\kappa\kappa+1}$ są niezależne.

W układzie równań (4) zmienna $N_{t-\tau}$ oznacza liczbę szkód zaszyłych w okresie $[t - \tau - 1, t - \tau)$, $\tau = 1, 2, \dots, \kappa$, równą sumie liczby szkód zgłoszonych do momentu $t - 1$, oraz liczby szkód zgłoszonych w okresie $[t - 1, t)$. Natomiast zmienna N_t oznacza liczbę wszystkich szkód zgłoszonych w okresie $[t - 1, t)$ niezależnie od okresu, w którym doszło do szkody.

Na potrzeby dalszej analizy przyjmijmy upraszczające założenie, że $t = 2$, $\kappa = 1$, tzn. że interesuje nas dwuletnia historia szkodowa opisana wektorem losowym $\mathbf{N} = (N_1, N_2)$. Załóżmy dodatkowo, że

$$\begin{cases} N_1 &= K_1 + K_{12} \\ N_2 &= K_2 + K_{12}' \end{cases} \quad (5)$$

gdzie zmienne losowe K_1, K_2, K_{12} są niezależne.

Opisany mechanizm można zinterpretować następująco. W momencie t zakład ubezpieczeń zna liczbę szkód zaszyłych w okresie $[t - 1, t)$ i zgłoszonych w tym okresie – K_2 oraz zaszyłych w okresie poprzednim zgłoszonych w tym okresie K_{12} . W okresie poprzednim zgłoszono K_1 szkód zaszyłych w tym okresie. Przyjmując dwuletni okres rozwoju szkód, co jest realistycznym założeniem w przypadku ubezpieczeń AC, dostajemy, że N_1 oznacza liczbę szkód zaszyłych w okresie $[t - 2, t - 1)$, natomiast zmienna N_2 oznacza liczbę szkód zgłoszonych w ostatnim okresie.

Rozwiążmy układ równań (5) dla ustalonych wartości $N_1 = n_1$, $N_2 = n_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

ze względu na wartości zmiennych K_1, K_2, K_{12} . Jako rozwiązanie dostajemy

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 - i \\ n_2 - i \\ i \end{bmatrix}, i = 0, \dots, \min\{n_1, n_2\}.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że $N_1 = n_1, N_2 = n_2$ jest więc równe

$$\begin{aligned} Pr(N_1 = n_1, N_2 = n_2) \\ = \sum_{i=0}^{\min\{n_1, n_2\}} Pr(K_1 = n_1 - i)Pr(K_2 = n_2 - i)Pr(K_{12} = i). \end{aligned}$$

Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej N_i są odpowiednio równe $E(N_i) = E(K_i) + E(K_{12})$, $Var(N_i) = Var(K_i) + Var(K_{12})$, $i = 1, 2$. Siłę zależności między zmiennymi N_1, N_2 można określić za pomocą współczynnika korelacji równego

$$\rho(N_i, N_j) = \frac{Var(K_{12})}{\sqrt{(Var(K_1) + Var(K_{12}))(Var(K_2) + Var(K_{12}))}}.$$

Modelowanie łącznego rozkładu wektora losowego $\mathbf{N} = (N_1, N_2)$ szkód z dwóch lat poddano analizie empirycznej. Dopasowanie rozpatrywanych rozkładów prawdopodobieństwa odbyło się do danych szkodowych zgromadzonych w bazie OI UFG. Analizie poddane zostały szkody z umów ubezpieczenia OC p.p.m. i AC dla zdarzeń, które wydarzyły się w latach 2010-2015. Analiza została przeprowadzona w odniesieniu do osób fizycznych według poniższych warunków:

- badaniu poddano okresy dwuletnie historii ubezpieczenia (w każdym roku dwuletniego okresu istniała historia ubezpieczenia podmiotu),
- analizowano rok polisowy ubezpieczenia – dwuletni okres liczono od momentu rozpoczęcia pierwszej umowy ubezpieczenia, w pierwszym roku weryfikacji.

Średnio w każdym dwuletnim okresie historię szkód wyznaczono dla około 10 mln rekordów w odniesieniu do ubezpieczenia OC p.p.m.

oraz około 2 mln rekordów w przypadku ubezpieczenia AC. Oceny parametrów rozkładu dla poszczególnych lat analizy oraz w podziale na rodzaj ubezpieczenia wyznaczono numerycznie, maksymalizując wartość funkcji wiarygodności. Empiryczną oraz teoretyczną liczbę obserwacji w poszczególnych grupach wykorzystano do wyznaczenia wartości testu zgodności χ^2 (dobroci dopasowania).

5.2. Dwuwymiarowy rozkład Poissona (DRP)

Jeżeli zmienne losowe K_1, K_2, K_{12} są niezależne i mają rozkłady Poissona $Poiss(\lambda_1), Poiss(\lambda_2), Poiss(\lambda_{12})$, to mówimy, że wektor (N_1, N_2) , gdzie $N_1 = K_1 + K_{12}, N_2 = K_2 + K_{12}$ ma dwuwymiarowy rozkład Poissona¹⁰ (oznaczany dalej jako *DRP*) o funkcji rozkładu prawdopodobieństwa

$$Pr(N_1 = n_1, N_2 = n_2) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12})} \sum_{i=0}^{\min\{n_1, n_2\}} \frac{\lambda_1^{n_1-i} \lambda_2^{n_2-i} \lambda_{12}^i}{(n_1 - i)! (n_2 - i)! i!}$$

dla $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12} > 0$.

Wartości oczekiwane i wariancje są równe $E(N_i) = \lambda_i + \lambda_{12}, Var(N_i) = \lambda_i + \lambda_{12}, i = 1, 2$. Współczynnik korelacji między zmiennymi N_1, N_2 jest równy

$$\rho(N_1, N_2) = \frac{\lambda_{12}}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_{12})(\lambda_2 + \lambda_{12})}}.$$

W tabeli 3 i 4 przedstawiono wyniki uzyskane dla omawianego rozkładu na podstawie danych OI UFG.

Tabela 3. Wartości parametrów w dwuwymiarowym rozkładzie Poissona wraz z wartością testu χ^2 otrzymane dla ubezpieczenia AC

Lata analizy	λ_1	λ_2	λ_{12}	Wartość testu χ^2
2010-2011	0,138672	0,139111	0,009424	96 835
2011-2012	0,140408	0,140845	0,008786	158 990
2012-2013	0,13805	0,137156	0,009125	138 910
2013-2014	0,123031	0,121458	0,008362	57 343
2014-2015	0,108949	0,107802	0,007282	29 884

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych UFG.

¹⁰ Por. np. [Johnson, Kotz, Balakrishnan 1995, s. 133; Kawamura 1984, s. 211].

Tabela 4. Wartości parametrów w dwuwymiarowym rozkładzie Poissona wraz z wartością testu χ^2 otrzymane dla ubezpieczenia OC p.p.m.

Lata analizy	λ_1	λ_2	λ_{12}	Wartość testu χ^2
2010-2011	0,061642	0,059404	0,005746	163 340
2011-2012	0,060551	0,062567	0,005118	267 130
2012-2013	0,062809	0,057988	0,005276	244 820
2013-2014	0,058218	0,05327	0,005305	110 940
2014-2015	0,05373	0,048992	0,004999	61 944

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych UFG.

5.3. Dwuwymiarowy uogólniony rozkład Poissona (*DURP*)

Mówimy, że zmienna losowa N ma rozkład uogólniony Poissona ($GPoiss(\lambda, \vartheta)$), gdy funkcja rozkładu prawdopodobieństwa jest postaci

$$Pr(N = n) = \frac{\lambda(\lambda + n\vartheta)^{n-1}}{n!} e^{-n\vartheta - \lambda},$$

dla $n = 0, 1, 2, \dots$, $\lambda > 0$, $0 \leq \vartheta < 1$.

Jeżeli założymy, że rozkłady zmiennych losowych K_1, K_2, K_{12} są uogólnionymi rozkładami Poissona $GPoiss(\lambda_1, \vartheta_1)$, $GPoiss(\lambda_2, \vartheta_2)$, $GPoiss(\lambda_{12}, \vartheta_{12})$, to wektor (N_1, N_2) ma dwuwymiarowy uogólniony rozkład Poissona¹¹ (oznaczany dalej jako *DURP*) o funkcji rozkładu prawdopodobieństwa¹²

$$Pr(N_1 = n_1, N_2 = n_2) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_{12} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12} + \vartheta_1 n_1 + \vartheta_2 n_2)} \cdot \sum_{i=0}^{\min\{n_1, n_2\}} \frac{(\lambda_1 + (n_1 - i)\vartheta_1)^{n_1 - i - 1}}{(n_1 - i)!} \frac{(\lambda_2 + (n_2 - i)\vartheta_2)^{n_2 - i - 1}}{(n_2 - i)!} \frac{(\lambda_{12} + i\vartheta_{12})^{i-1}}{i!} e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2 - \vartheta_{12})},$$

dla $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12} > 0$, $0 \leq \vartheta_1 < 1$, $0 \leq \vartheta_2 < 1$, $0 \leq \vartheta_{12} < 1$.

Wartości oczekiwane są równe $E(N_i) = \frac{\lambda_i}{(1 - \vartheta_i)} + \frac{\lambda_{12}}{(1 - \vartheta_{12})}$, $i = 1, 2$.

Siłę zależności między zmiennymi N_1, N_2 można określić za pomocą współczynnika korelacji równego

$$\rho(N_1, N_2) = \frac{\lambda_{12}}{(1 - \vartheta_{12})^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\lambda_1}{(1 - \vartheta_1)^3} + \frac{\lambda_{12}}{(1 - \vartheta_{12})^3}\right) \left(\frac{\lambda_2}{(1 - \vartheta_2)^3} + \frac{\lambda_{12}}{(1 - \vartheta_{12})^3}\right)}},$$

gdzie $Cov(N_1, N_2) = \frac{\lambda_{12}}{(1 - \vartheta_{12})^3}$, $Var(N_i) = \frac{\lambda_i}{(1 - \vartheta_i)^3} + \frac{\lambda_{12}}{(1 - \vartheta_{12})^3}$, $i = 1, 2$.

¹¹ Por. np. [Johnson, Kotz, Balakrishnan 1995, s. 133; Famoye, Consul 1995, s. 129].

¹² Dwuwymiarowy uogólniony rozkład Poissona można uogólnić na większą liczbę wymiarów (por. np. [Vernic 2000]).

W tabeli 5 i 6 przedstawiono wyniki uzyskane dla omawianego rozkładu na podstawie danych OI UFG.

Tabela 5. Wartości parametrów w dwuwymiarowym uogólnionym rozkładzie Poissona wraz z wartością testu χ^2 otrzymane dla ubezpieczenia AC

Lata analizy	λ_1	λ_2	λ_{12}	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_{12}	Wartość testu χ^2
2010-2011	0,119187	0,119515	0,008145	0,141597	0,141952	0,119236	3 583
2011-2012	0,114573	0,114638	0,007571	0,181699	0,183784	0,175296	12 159
2012-2013	0,113831	0,113196	0,008053	0,173444	0,172685	0,148569	14 884
2013-2014	0,108575	0,10678	0,007793	0,116407	0,119751	0,084612	3 778
2014-2015	0,099581	0,098469	0,006866	0,085107	0,085686	0,070306	1 951

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych UFG.

Tabela 6. Wartości parametrów w dwuwymiarowym uogólnionym rozkładzie Poissona wraz z wartością testu χ^2 otrzymane dla ubezpieczenia OC p.p.m.

Lata analizy	λ_1	λ_2	λ_{12}	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_{12}	Wartość testu χ^2
2010-2011	0,056013	0,051493	0,004989	0,095557	0,137352	0,085982	9 107
2011-2012	0,052114	0,051419	0,004308	0,142355	0,180962	0,121706	19 432
2012-2013	0,051422	0,051144	0,004357	0,183691	0,120808	0,144246	20 819
2013-2014	0,05126	0,049403	0,00463	0,122254	0,075739	0,096187	6 913
2014-2015	0,049676	0,045855	0,004532	0,07777	0,066591	0,067995	5 593

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych UFG.

5.4. Dwuwymiarowy rozkład ujemny dwumianowy (*DRUD*)

Jeżeli zmienne losowe K_1, K_2, K_{12} są niezależne i mają rozkłady ujemne dwumianowe $UD(q_1, \alpha_1), UD(q_2, \alpha_2), UD(q_{12}, \alpha_{12})$, to mówimy, że wektor (N_1, N_2) , gdzie $N_1 = K_1 + K_{12}, N_2 = K_2 + K_{12}$, ma dwuwymiarowy rozkład ujemny dwumianowy¹³ (oznaczany dalej jako *DRUD*) o funkcji rozkładu prawdopodobieństwa

$$Pr(N_1 = n_1, N_2 = n_2) = \frac{q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} q_{12}^{\alpha_{12}}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_{12})} \cdot \sum_{i=0}^{\min\{n_1, n_2\}} \frac{\Gamma(\alpha_1 + (n_1 - i)) \Gamma(\alpha_2 + (n_2 - i)) \Gamma(\alpha_{12} + i)}{(n_1 - i)! (n_2 - i)! i!} p_1^{n_1 - i} p_2^{n_2 - i} p_{12}^i,$$

dla $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12} > 0, 0 \leq q_i \leq 1, p_i = 1 - q_i, i = 1, 2, 0 \leq q_{12} \leq 1, p_{12} = 1 - q_{12}$.

¹³ Por. np. [Shi, Valdez 2014].

Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej N_i są odpowiednio równe $E(N_i) = n_i \frac{p_i}{q_i} + n_{12} \frac{p_{12}}{q_{12}}$, $Var(N_i) = n_i \frac{p_i}{q_i^2} + n_{12} \frac{p_{12}}{q_{12}^2}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Siłę zależności między zmiennymi N_i, N_j można określić za pomocą współczynnika korelacji równego

$$\rho(N_i, N_j) = \frac{n_{12} \frac{p_{12}}{q_{12}^2}}{\sqrt{\left(n_1 \frac{p_1}{q_1^2} + n_{12} \frac{p_{12}}{q_{12}^2}\right) \left(n_1 \frac{p_1}{q_1^2} + n_{12} \frac{p_{12}}{q_{12}^2}\right)}}$$

W tabeli 7 i 8 przedstawiono wyniki uzyskane dla omawianego rozkładu na podstawie danych OI UFG (wartości p_i należy wyznaczyć ze wzoru $p_i = 1 - q_i$, $i = 1, 2$).

Tabela 7. Wartości parametrów w dwuwymiarowym rozkładzie ujemnym dwumianowym wraz z wartością testu χ^2 otrzymane dla ubezpieczenia AC.

Lata analizy	λ_1	λ_2	λ_{12}	q_1	q_2	q_{12}	Wartość testu χ^2
2010-2011	0,397331	0,397452	0,032624	0,741054	0,740506	0,778961	3 510
2011-2012	0,291737	0,288334	0,02017	0,675695	0,672434	0,687378	10 854
2012-2013	0,304615	0,304322	0,025624	0,688647	0,689836	0,730522	13 792
2013-2014	0,445254	0,424963	0,044623	0,783722	0,777944	0,839689	3 760
2014-2015	0,566901	0,556441	0,047412	0,838929	0,837842	0,865164	2 020

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych UFG.

Tabela 8. Wartości parametrów w dwuwymiarowym rozkładzie ujemnym dwumianowym wraz z wartością testu χ^2 otrzymane dla ubezpieczenia OC p.p.m.

Lata analizy	λ_1	λ_2	λ_{12}	q_1	q_2	q_{12}	Wartość testu χ^2
2010-2011	0,283226	0,178037	0,028037	0,820584	0,748922	0,836935	9 837
2011-2012	0,173532	0,132363	0,016899	0,740663	0,6783	0,774917	19 122
2012-2013	0,13025	0,20248	0,014266	0,674021	0,776821	0,736954	20 310
2013-2014	0,200331	0,317926	0,023172	0,774287	0,856076	0,818903	7 378
2014-2015	0,310996	0,336465	0,03246	0,852372	0,872597	0,869644	5 944

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych UFG.

5.5. Dwuwymiarowy rozkład ujemny wielomianowy (*DRUW*)

Mówimy, że zmienna losowa N ma dwuwymiarowy rozkład ujemny wielomianowy (oznaczany dalej jako *DRUW*) o parametrach n, q, p_1, p_2 , gdzie $q + p_1 + p_2 = 1$, gdy funkcja rozkładu prawdopodobieństwa jest postaci¹⁴:

¹⁴ Por. np. [Johnson, Kotz, Balakrishnan 1995, s. 94].

$$Pr(N = \mathbf{n}) = P(n_1, n_2) = \binom{n + (n_1 + n_2) - 1}{n_1, n_2, n - 1} q^n p_1^{n_1} p_2^{n_2},$$

dla $n_i = 0, 1, 2, \dots, i = 1, 2$.

Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej N_i są odpowiednio równe $E(N_i) = n \frac{p_i}{q}$, $Var(N_i) = n \frac{p_i}{q^2}$, $i = 1, 2$. Siłę zależności między zmiennymi N_1, N_2 można określić za pomocą współczynnika korelacji równego

$$\rho(N_1, N_2) = \sqrt{\frac{p_1 p_2}{(q + p_1)(q + p_2)}}.$$

W tabeli 9 i 10 przedstawiono wyniki uzyskane dla omawianego rozkładu na podstawie danych OI UFG.

Tabela 9. Wartości parametrów w dwuwymiarowym rozkładzie ujemnym wielomianowym wraz z wartością testu χ^2 otrzymane dla ubezpieczenia AC

Lata analizy	n	q	p_1	p_2	Wartość testu χ^2
2010-2011	0,659123	0,689636	0,154952	0,155412	30 808
2011-2012	0,511239	0,631109	0,184176	0,184715	61 737
2012-2013	0,529511	0,643417	0,178834	0,177749	51 522
2013-2014	0,698914	0,727939	0,136849	0,135212	16 159
2014-2015	0,832205	0,7825	0,109289	0,108211	6 720

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych UFG.

Tabela 10. Wartości parametrów w dwuwymiarowym rozkładzie ujemnym wielomianowym wraz z wartością testu χ^2 otrzymane dla ubezpieczenia OC p.p.m.

Lata analizy	n	q	p_1	p_2	Wartość testu χ^2
2010-2011	0,329599	0,713206	0,145819	0,140975	36 070
2011-2012	0,249639	0,651811	0,171463	0,176727	91 171
2012-2013	0,255329	0,660313	0,176077	0,16361	87 269
2013-2014	0,343102	0,737538	0,13655	0,125913	23 511
2014-2015	0,402996	0,781431	0,113878	0,104691	6 186

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych UFG.

W tabeli 11 przedstawiono informację o liczbie szkód zaszłych oraz zgłoszonych dla obserwacji z lat 2014-2015 w ubezpieczeniu AC wraz z wyznaczonymi częstościami ich występowania. Dodatkowo wskazano analogiczne częstości występowania na podstawie najlepiej dopasowanych rozkładów uogólnionego rozkładu Poissona oraz roz-

kładu ujemnego dwumianowego. Różnice w częstości między dopasowanymi rozkładami a częstościami obserwowalnymi wynoszą maksymalnie setne części procenta.

Tabela 11. Częstości występowania szkód zaszłych oraz zgłoszonych dla obserwacji z lat 2014-2015 w ubezpieczeniu AC wraz z częstościami z rozkładu uogólnionego Poissona oraz ujemnego dwumianowego (w %)

Częstości	N_1	N_2					
		0	1	2	3	4	5
rzeczywiste	0	81,51	7,38	0,89	0,09	0,04	0,00
<i>DURP</i>		81,47	7,36	0,91	0,13	0,02	0,00
<i>DRUD</i>		81,48	7,35	0,93	0,13	0,02	0,00
rzeczywiste	1	7,48	1,13	0,16	0,02	0,01	0,00
<i>DURP</i>		7,45	1,20	0,13	0,02	0,00	0,00
<i>DRUD</i>		7,44	1,19	0,13	0,02	0,00	0,00
rzeczywiste	2	0,89	0,16	0,04	0,01	0,00	0,00
<i>DURP</i>		0,92	0,13	0,05	0,01	0,00	0,00
<i>DRUD</i>		0,94	0,13	0,05	0,01	0,00	0,00
rzeczywiste	3	0,10	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00
<i>DURP</i>		0,13	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00
<i>DRUD</i>		0,13	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00
rzeczywiste	4	0,04	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
<i>DURP</i>		0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
<i>DRUD</i>		0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
rzeczywiste	5	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
<i>DURP</i>		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
<i>DRUD</i>		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych UFG.

Przedstawione powyżej wyniki analizy dopasowania łącznego rozkładu wektora losowego (N_1, N_2) do danych empirycznych pozwalają na sformułowanie następujących wniosków:

- zarówno dla ubezpieczenia OC p.p.m., jak i ubezpieczenia AC najlepiej dopasowane rozkłady to dwuwymiarowy uogólniony rozkład Poissona oraz dwuwymiarowy rozkład ujemny dwumianowy,
- częstości empiryczne niewiele się różnią od częstości uzyskanych z oszacowanych rozkładów,
- najlepiej dopasowane do danych empirycznych są rozkłady szacowane na podstawie danych z ostatnich lat obserwacji,
- oceny parametrów uzyskane na podstawie danych z różnych lat różnią się od siebie, co może wskazywać na zmienność rozkładów w czasie.

6. Łączne systemy BM o dwuletniej historii szkodowej

Wykorzystajmy oszacowane łączne rozkłady wektora losowego $\mathbf{N} = (N_1, N_2)$ – liczby szkód z dwóch lat 2014-2015 – do analizy wybranych systemów BM. Dla uproszczenia przyjmijmy, że $SBM(\mathcal{L}, \mathbf{r}, \mathcal{A}, \mathbf{N})$ jest systemem sześciostanowym o wektorze mnożników składek $\mathbf{r} = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$ o macierzy zdarzeń \mathcal{A} odpowiednio równej **A1, A2, A3, A4**.

Składka stacjonarna w zależności od rozkładu zmiennej \mathbf{N} oraz macierzy zdarzeń \mathcal{A} dla ubezpieczeń AC przedstawiona została w tab. 12, natomiast dla ubezpieczeń OC p.p.m. w tab. 13.

Tabela 12. Średnia składka stacjonarna – AC

Rozkład/ macierz przejścia	A1	A2	A3	A4
DRP	1,525	2,389	3,317	1,129
DURP	1,530	2,291	3,181	1,117
DRUD	1,531	2,291	3,181	1,117
DRUW	1,537	2,293	3,175	1,125

Źródło: opracowanie własne.

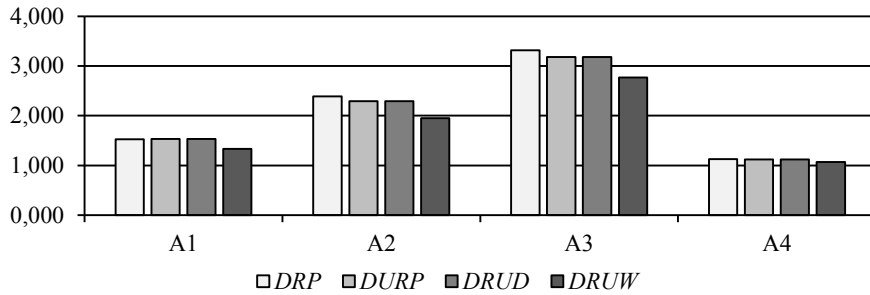
Tabela 13. Średnia składka stacjonarna – OC p.p.m.

Rozkład/ macierz przejścia	A1	A2	A3	A4
DRP	1,218	1,734	2,339	1,060
DURP	1,226	1,687	2,259	1,056
DRUD	1,226	1,687	2,259	1,056
DRUW	1,228	1,684	2,252	1,058

Źródło: opracowanie własne.

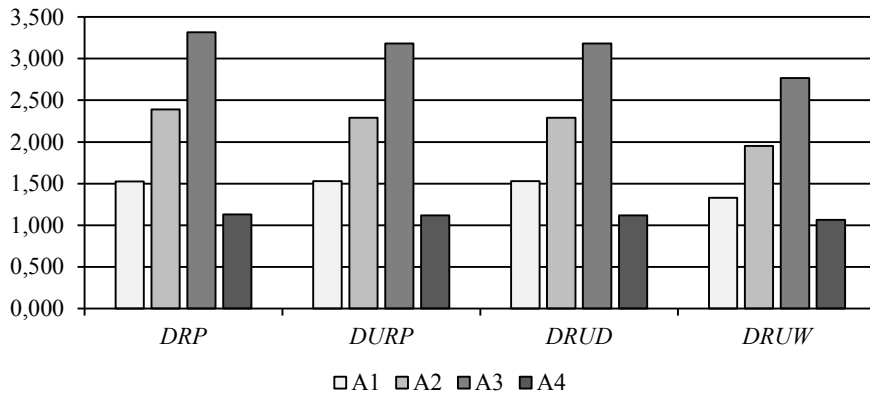
Na podstawie danych przedstawionych w tab. 12 i 13 można stwierdzić, że zróżnicowanie składki stacjonarnej dla ubezpieczeń AC i OC p.p.m. niewiele różni się dla poszczególnych rozkładów zmiennej \mathbf{N} . Fakt ten dla ubezpieczeń AC ilustruje rys. 1.

Średnia składka stacjonarna jest natomiast istotnie zróżnicowana w zależności od macierzy zdarzeń \mathcal{A} wykorzystywanej w poszczególnych systemach, gdyż od niej zależy restrykcyjność systemu. Zależność ta została przedstawiona na rys. 2 i 3. Można zauważyć, że najmniej restrykcyjny jest system z macierzą zdarzeń $\mathbf{A4} = \mathcal{A}_{t-1}^{MAX/MIN} \mathcal{A}_t^{MAX/MIN}$, natomiast najbardziej restrykcyjny jest system z dwuokresową historią szkód z macierzą $\mathbf{A3} = \mathcal{A}^{MIN/MAX}$. System,



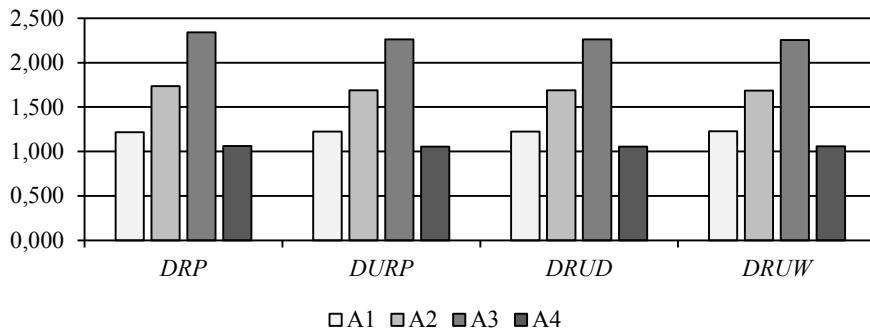
Rys. 1. Średnia składka stacjonarna – AC, w zależności od przyjętych rozkładów prawdopodobieństwa zmiennej N

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Średnia składka stacjonarna – AC, w zależności od przyjętych macierzy zdarzeń \mathcal{A}

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 3. Średnia składka stacjonarna – OC p.p.m., w zależności od przyjętych macierzy zdarzeń \mathcal{A}

Źródło: opracowanie własne.

w którym macierzą zdarzeń jest $\mathbf{A2} = \mathcal{A}_{t-1}^{MIN/MAX} \mathcal{A}_t^{MIN/MAX}$, jest mniej restrykcyjny niż system z macierzą $\mathbf{A3}$, co wiąże się z mniejszą wagą nadawaną szkodom z roku poprzedniego.

Restrykcyjność systemów uwidacznia się również, gdy porównamy rozkłady stacjonarne $\boldsymbol{\pi}$. W tabeli 14 i 15 przedstawione zostały rozkłady stacjonarne $\boldsymbol{\pi}$ dla ubezpieczeń AC i OC p.p.m. w zależności od macierzy zdarzeń przy rozkładzie dwuwymiarowym uogólnionym Poissona (*DRUP*). Na uwagę zasługuje fakt, że z największą koncentracją rozkładu $\boldsymbol{\pi}$ mamy do czynienia w przypadku ubezpieczeń zarówno AC, jak i OC p.p.m. przy macierzy zdarzeń $\mathbf{A4}$, natomiast z najmniejszą w przypadku macierzy $\mathbf{A3}$, co jest zgodne z poprzednimi wnioskami.

Tabela 14. Rozkład stacjonarny $\boldsymbol{\pi}$ – AC według klas taryfowych w zależności od przyjętych macierzy zdarzeń \mathcal{A} przy rozkładzie *DURP*

Macierze zdarzeń	Klasa taryfowa					
	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6
A1	0,756	0,081	0,091	0,031	0,028	0,013
A2	0,597	0,066	0,070	0,081	0,085	0,100
A3	0,359	0,082	0,100	0,123	0,151	0,185
A4	0,900	0,084	0,014	0,001	0,000	0,000

Źródło: opracowanie własne.

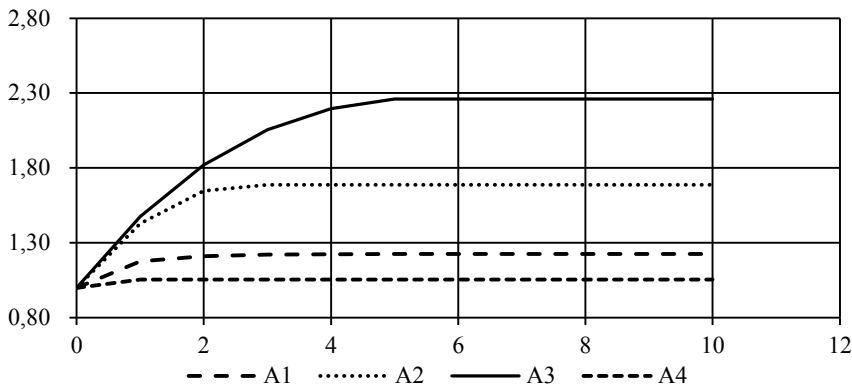
Tabela 15. Rozkład stacjonarny $\boldsymbol{\pi}$ – OC p.p.m. według klas taryfowych w zależności od przyjętych macierzy zdarzeń \mathcal{A} przy rozkładzie *DURP*

Macierze zdarzeń	Klasa taryfowa					
	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6
A1	0,884	0,046	0,047	0,010	0,010	0,003
A2	0,778	0,040	0,042	0,044	0,046	0,049
A3	0,606	0,064	0,071	0,078	0,086	0,095
A4	0,951	0,042	0,006	0,000	0,000	0,000

Źródło: opracowanie własne.

Postać macierzy zdarzeń \mathcal{A} decyduje również o szybkości zbieżności średniej składki bieżącej do średniej składki stacjonarnej. Zależność ta zobrazowana została na rys. 4 dla ubezpieczeń OC p.p.m. przy rozkładzie *DRUP*.

Na zakończenie warto porównać otrzymane wyniki dla macierzy zdarzeń **A1** z wynikami, jakie możemy uzyskać w przypadku dokonania połączenia jednookresowych systemów BM $SBM_1(\mathcal{L}, \mathbf{r}, \mathcal{A}_{t-1}, N_{t-1})$



Rys. 4. Średnia składka bieżąca – OC p.p.m., w zależności od przyjętych macierzy zdarzeń \mathcal{A} dla rozkładu *DRUP*

Źródło: opracowanie własne.

i $SBM_2(\mathcal{L}, \mathbf{r}, \mathcal{A}_t, N_t)$ w system $SBM_{(1,2)}(\mathcal{L} \odot \mathcal{L}, \mathbf{r}\Phi(\varphi)\mathbf{r}, \mathcal{A}_{t-1} \odot \mathcal{A}_t, (N_1 N_2))$ z dwukresową historią szkód za pomocą operacji złączenia opisanej w pracy [Bijak 2015]. Rozpatrzmy następujące funkcje: $\varphi(r_i, r_j): \varphi_1(r_i, r_j) = r_i r_j, \varphi_2(r_i, r_j) = r_i + r_j, \varphi_3(r_i, r_j) = \max\{r_i, r_j\}, \varphi_4(r_i, r_j) = (r_i + r_j)/2, \varphi_5(r_i, r_j) = \min\{r_i, r_j\}, i, j = 1, 2, \dots, s$. Przyjmijmy sześciostanowe systemy o macierzach $\mathcal{A}_{t-1}, \mathcal{A}_t$ z przykładu 1, wektorach mnożników składek $\mathbf{r} = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$. W tabeli 16 przedstawione zostały średnie składki stacjonarne dla ubezpieczeń OC p.p.m. przy założeniu, że zmienna losowa (N_1, N_2) ma rozkład *DRP* lub *DRUP*.

Tabela 16. Średnia składka stacjonarna – OC p.p.m. w złączonym systemie $SBM_{(1,2)}$

Rozkład	Funkcja $\varphi(r_i, r_j)$				
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
<i>DRP</i>	1,488	2,414	1,382	1,207	1,032
<i>DRUP</i>	1,519	2,435	1,402	1,218	1,033

Źródło: opracowanie własne.

Warto w tym miejscu przypomnieć, że przy macierzy zdarzeń **A1** średnia składka stacjonarna dla rozkładów *DRP* i *DRUP* wynosiła odpowiednio 1,218 i 1,226. Oznacza to, że w rozważanym przypadku składki te odpowiadają rzędem wielkości wynikom dla złączonego systemu BM przy funkcji $\varphi_4(r_i, r_j) = (r_i + r_j)/2$.

7. Zakończenie

Systemy *bonus-malus* są popularne w Polsce w ubezpieczeniach komunikacyjnych. Jak pokazują dane UFG (por. tab. 1), zakłady ubezpieczeń zainteresowane są wielookresową historią szkodową ubezpieczonych. Dane na temat historii szkodowej klientów wykorzystywane są przede wszystkim w procesie taryfikacji *a priori*. W niniejszej pracy pokazano, w jaki sposób mogą one wzbogacić taryfikację *a posteriori* dokonywaną za pomocą systemów *bonus-malus*.

W artykule przedstawiono ogólne zasady konstruowania systemów BM z wieloletnią historią szkodową, zwracając szczególną uwagę na ich sprawiedliwość ze względu na reguły przejścia i reguły dojścia. Wskazano przy tym, że istotną kwestią jest określenie porządku w zbiorze $\Omega = \Omega^{k+1}$, porządku, który decyduje m.in. o restrykcyjności budowanych systemów. Dokonano również uogólnienia na przypadek wielowymiarowy macierzy zdarzeń dla systemów skrajnych opisanych w pracy [Podgórska 2008].

Do modelowania łącznego rozkładu wektora losowego \mathbf{N} opisującego liczbę szkód w poszczególnych latach na podstawie danych z OI UFG wykorzystano dwuwymiarowe rozkłady: Poissona, uogólniony Poissona, ujemny dwumianowy oraz ujemny wielomianowy. Najlepsze oszacowania uzyskano dla rozkładów dwuwymiarowego uogólnionego Poissona oraz dwuwymiarowego ujemnego dwumianowego dla danych z okresu 2014-2015. Przeanalizowane przykłady empiryczne wskazały, że najmniej restrykcyjny był system o macierzy zdarzeń $\mathbf{A4} = \mathcal{A}_{t-1}^{MAX/MIN} \mathcal{A}_t^{MAX/MIN}$, a najbardziej restrykcyjny system z macierzą $\mathbf{A3} = \mathcal{A}^{MIN/MAX}$. W pracy przedstawiono również porównanie średniej składki stacjonarnej uzyskanej zgodnie z prezentowanymi w niej modelami ze średnią składką stacjonarną uzyskaną dla systemu złączonego BM uzyskanego zgodnie z metodyką opisaną w pracy [Bijak 2015]. Wyniki okazały się zgodne co do rzędu wielkości przy funkcji agregującej mnożniki składek postaci $\varphi_4(r_i, r_j) = (r_i + r_j)/2$.

Poza zakresem niniejszej pracy pozostało wiele interesujących zagadnień, takich jak np. określenie sposobów wyznaczania wektorów mnożników składek, analiza problemu łaknienia niżek w związku z uwzględnianiem wielookresowej historii szkodowej, określenie sposobów pomiaru efektywności systemów BM z wieloletnią historią szkodową oraz zbadanie własności systemów sprawiedliwych przy różnych porządkach w zbiorze $\Omega = \Omega^{k+1}$.

Literatura

- Bijak W., 2015, *Łączenie i agregacja systemów bonus-malus w ubezpieczeniach komunikacyjnych*, „Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych”, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, nr 37/2015, s. 127-154.
- Denuit M., Maréchal X., Pitrebois S., Walhin J., 2007, *Actuarial Modelling of Claim Counts: Risk Classification, Credibility and Bonus-Malus Systems*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester.
- Famoye F., Consul P.C., 1995, *Bivariate generalized Poisson distribution with some applications*, *Metrika*, vol 42, s. 127-138.
- Iosifescu M., 1988, *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania*, PWN, Warszawa.
- Johnson N.L., Kotz S., Balakrishnan N., 1995, *Discrete Multivariate Distributions*, J. Wiley & Sons Inc., New York.
- Kawamura K., 1984, *Direct calculation of maximum likelihood estimator for the bivariate Poisson distribution*, *Kodai Math. J.*, vol. 7, no. 2, s. 211-221.
- Kemeny J.G., Snell J.L., 1976, *Finite Markov Chains*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo.
- Lemaire J., 1995, *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Podgórska M., 2008, *Extreme types of bonus-malus system fair by transitions rules*, *Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych*, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, nr 18/2008, s. 43-68.
- Podgórska M., Kryszewski B., Niemiec M., 2008, *Fair bonus-malus systems*, *Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych*, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, nr 18, s. 11-24.
- Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J., 1999, *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Shi P., Valdez E., 2014, *Multivariate negative binomial models for insurance claim counts*, *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 55, s. 18-29.
- Vernic R., 2000, *A multivariate generalization of the generalized Poisson distribution*, *ASTIN Bulletin*, vol. 30, no. 1, s. 57-67.

MULTI-YEAR BONUS-MALUS SYSTEMS

Summary: The common practice in designing the tariff structure for motor insurance is using bonus-malus systems which are based on one year of claims history. The insurance companies operating in Poland in scope of automobile insurance have an ability to verify claims history of their clients in database held by Information Centre of Insurance Guarantee Fund (OI UFG). This article is devoted to modelling claim counts for multi-year period using multivariate discrete distributions (Poisson, generalised Poisson and negative multinomial). Multivariate distributions considered in the paper are used to construct fair by transitions rules bonus-malus systems based on multi-year claims history. A numerical illustrations of theoretical considerations based on claims data from database held by OI UFG are presented in the paper.

Keywords: automobile insurance, multivariate claim distribution, multi-year bonus-malus system, bonus-malus system fair by transitions rules.