

**Tomasz Brzęczek**

Politechnika Poznańska

e-mail: tomasz.brzeczek@put.poznan.pl

---

## **OCENA EFEKTÓW DYWERSYFIKACJI PORTFELA PRODUKTOWEGO W ZAKRESIE RYZYKA SPRZEDAŻY CAŁKOWITEJ I TRAFNOŚCI JEJ PROGNOZ**

---

### **ASSESSMENT OF DIVERSIFICATION OF PRODUCT PORTFOLIO IN TERMS OF TOTAL SALES RISK AND ITS FORECAST ACCURACY**

---

DOI: 10.15611/ekt.2017.1.09

JEL Classification: C51, C52, L25, M21

**Streszczenie:** Celem prac badawczych opisanych w artykule była ocena dywersyfikacji portfela produktowego w świetle pojęć i metod teorii prognozowania, przede wszystkim ocena dywersyfikacji na podstawie trafności prognozy sprzedaży całkowitej. Dlatego porównano trafność prognoz sprzedaży pojedynczych grup produktów i sprzedaży całkowitej w wybranym przedsiębiorstwie handlowym z branży rolniczo-technicznej. Wyniki są zgodne ze znaną z teorii prawidłowością, iż dywersyfikacja produktowa służy zmniejszaniu ryzyka w prowadzonej działalności gospodarczej. Podwyższona trafność prognoz potwierdziła hipotezę o właściwej dywersyfikacji produktowej w badanym przedsiębiorstwie. Dobór metod i estymację modeli poprzedzono badaniami własności szeregów czasowych sprzedaży. Testy dały ogólne wskazówki co do typu modelu i zmiennych objaśniających. Do analizy każdego szeregu zastosowano alternatywne typy modeli: regresji, ARIMA i wykładania wykładniczego Wintersa, z których wybrano jeden o najbardziej trafnych prognozach.

**Słowa kluczowe:** trafność prognozy, szereg czasowy, sprzedaż produktów, regresja, ARIMA, model Wintersa.

**Summary:** The objective of this paper is to assess the diversification of product portfolio using forecast theory. The stress was put especially on sales forecast accuracy. Therefore a comparison of forecast errors is made for total sales and product categories' sales in a chosen wholesale company from agricultural technology industry. Known from theory assumption that product diversification lowers risk and raises accuracy is approved in this survey. A selection of methods and models was preceded with tests of time series. Stationarity tests gave general recommendations, which models and estimation methods should be chosen. Final forecast performance was compared for alternative empirical models: regression, ARIMA and Winter's smoothing model.

**Keywords:** forecast accuracy, time series, products sales, regression, ARIMA and Winter's smoothing model.

## 1. Wstęp

Dywersyfikację definiuje się jako zróżnicowanie oferty produktowej lub usługowej w celu obniżenia ryzyka działalności gospodarczej [Słownik języka polskiego 2016]. W piśmiennictwie naukowym dywersyfikacja „wiąże się z wyjściem organizacji poza jej obecne produkty i/lub rynki, co pozwala zmniejszyć ryzyko działalności gospodarczej, uzyskać efekt synergii, zrationalizować portfel działalności, stworzyć lepszy wizerunek firmy” [Zakrzewska-Bielawska 2015, s. 755-756].

Decyzja, również ta o szerokości produktowej, jest ryzykowna (inaczej podejmowana w warunkach ryzyka), jeśli jej wynik jest zmienną losową o znanym rozkładzie prawdopodobieństwa [Jajuga 2008; Sikora (red.) 2008]. W momencie podejmowania decyzji wynik jest więc nieznaną wartością liczbową z całego spektrum wartości o znanym prawdopodobieństwie realizacji każdej z nich. Przyjmuje się, że w pewnej próbie obserwacji wyników takiej decyzji obowiązuje ten sam rozkład prawdopodobieństwa. Można oszacować wartość oczekiwaną albo warunkową wartość oczekiwaną względem czasu i wariancję wyników. Miarą ryzyka zwykle jest wariancja lub odchylenie standardowe wyników decyzji, ponieważ „wzrost wariancji wywołuje wzrost ryzyka podjęcia nietrafnej decyzji” [Piasecki i in. 2013, s. 444].

Stawiając prognozę punktową wyniku, ekstrapoluje się wartość oczekiwaną na okres spoza próby obserwacji służącej szacowaniu parametrów (próba estymacyjna albo inaczej próba modelowa). Miarą ryzyka ziszczenia się tej prognozy jest jej szacunkowy błąd średni, czyli szacunek losowego odchylenia standardowego od prognozy punktowej czyniony na podstawie próby modelowej. Zakładając, że rozkład prawdopodobieństwa wyników obowiązuje także w próbie testowej prognoz, analogicznie można szacować ryzyko decyzji jako wariancję i odchylenie standardowe obserwacji jej wyników wokół prognozy punktowej, czyli warunkowej wartości oczekiwanej. Dlatego postanowiono w artykule analizować ryzyko, szacując je jako wariancję faktycznych błędów prognozy, a także jako średni absolutny błąd procentowy. Warunkiem poprawności podejścia jest, aby zgodnie z regułą podstawową model prognozowanej zmiennej był aktualny w okresach następujących po upływie próby modelowej [Guzik 2008, s. 122]. Dlatego szacunki wariancji zmiennej prognozowanej w próbie modelowej i testowej nie powinny być statystycznie różne.

Badanie posłużyło ocenie stopnia redukcji ryzyka sprzedaży całkowitej przedsiębiorstwa dzięki szerokiej ofercie produktów. Dywersyfikacja powinna się przekładać na podwyższenie trafności prognoz i realizacji ich funkcji preparacyjnej dla decydenta (por. [Cieślak (red.) 2002, s. 22, 24]). Powinna, ponieważ dobór produktów jest celowy i ma służyć obniżeniu ryzyka. Gdyby dobór produktów był przypadkowy lub losowy, to i tak zachodzi zależność statystyczna agregacji danych, według której dane o wyższym stopniu agregacji (tutaj zagregowane dla różnych grup produktów) powinny cechować się mniejszą zmiennością. Dlatego efekt agregacji można utożsamiać z losowym doбором kolejnego produktu do oferty i niezależnością błędów prognozy sprzedaży produktów. Natomiast skuteczna dywersyfikacja powinna zwiększyć traf-

ność prognoz sprzedaży całkowitej także dzięki negatywnej korelacji błędów prognoz i korelacji wysokości sprzedaży konkurujących produktów.

Niniejszy artykuł ma charakter badawczy. Poświęcono go analizie szeregów czasowych sprzedaży dziesięciu grup produktowych, na jakie wybrane do badania przedsiębiorstwo podzieliło swój szeroki portfel produktowy. Przedmiotem działalności przedsiębiorstwa był handel hurtowy i detaliczny towarami technicznego zaopatrzenia rolnictwa. Dlatego wśród oferowanych grup produktowych znalazły się produkty bardzo różne – od odzieży roboczej i polowej, przez części maszyn rolniczych, artykuły do hodowli inwentarza po zabawki – miniatury i makiety sprzętu rolniczego. Dobierając produkty w ofercie, przedsiębiorstwo miało na celu kompleksowe zaopatrywanie podmiotów prowadzących działalność rolniczą. Jest ono przykładem dywersyfikacji koncentrycznej w branży handlu towarami przemysłowo-rolniczymi.

W sekcji drugiej przedstawiono zastosowaną metodykę badawczą. W sekcji trzeciej opisano zakres zgromadzonych danych badawczych. W sekcji czwartej zaprezentowano wyniki modelowania szeregów czasowych sprzedaży. W sekcji piątej przedstawiono wnioski z przeprowadzonego badania. W zakończeniu zrekapitulowano wyniki zaproponowanej metodyki badawczej w kontekście teorii ekonomii.

## 2. Metodyka badania

Na pierwszym etapie badania zgromadzone obserwacje szeregu czasowego przeliczono na ceny stałe, a następnie rozdzielono do próby modelowej albo testowej.

Drugim etapem była procedura estymacji modeli empirycznych szeregów czasowych. Wpierw przeprowadzono testy ADF, ADF-GLS, KPSS i LR stacjonarności, trendostacjonarności oraz przyrostostacjonarności szeregów czasowych [Maddala 2008, s. 299-303, 612-619]. Wyniki testów podano w tab.1.

Na wypadek rozbieżnych wyników testów danego szeregu czasowego, a w razie wyników jednoznacznych dla porównania, oszacowano dla każdego szeregu czasowego sprzedaży modele trzech rodzajów o zmiennych objaśniających odpowiednich do wyników testów:

- model z wyrazem wolnym, trendem liniowym, sezonowością (binarne zmienne sezonowe) i autokorelacją zmiennej zależnej, szacowany klasyczną metodą najmniejszych kwadratów, za [Kufel 2007, s. 82-88; Kufel 2010]),
- model ARIMA dla szeregu przyrostostacjonarnego lub ARMA dla szeregu stacjonarnego (metoda największej wiarygodności); obydwie modele zawierały sezonowość, jeśli jej istotność i wpływ na błędy prognoz wskazywały wyniki testów szeregu lub procedura X-12, lub korelogram sprzedaży i porównanie z modelem bez składnika sezonowego [Maddala 2008, s. 590],
- model wygładzania wykładniczego Wintersa z sezonowością addytywną (optymalizacja parametrów w celu minimalizacji sumy kwadratów reszt błędów modelu w próbie modelowej) [Cieślak (red.) 2002, s. 72-73].

Wszystkie modele empiryczne przeszły testy statystyczne na poziomie istotności 0,05: parametrów, korelogramu reszt modeli dla opóźnienia rzędu od pierwszego do szóstego, ADF niestacjonarności reszt. Dla modeli oszacowanych KMNK wyznaczono szacunkowy błąd średni ze wzoru, a dla pozostałych modeli przyjęto jego poziom równy odchyleniu standardowemu reszt modelu (za [Guzik 2008, s. 131-132]).

Spośród modeli empirycznych, zestawionych w tab. 2, 3 i 4, dla danego szeregu czasowego wybierano tylko jeden model o najniższej wartości średnio-kwadratowego błędu prognozy i jego pierwiastka (RMSE), które posłużyły do oceny trafności predykcji (por. [Cieślak (red.) 2002, s. 49; Witkowska 2006, s. 200]).

Zdefiniowano błąd prognozy w okresie  $t$ -tym jako różnicę poczynionej obserwacji zmiennej  $y_t$  w próbie testowej (następującej po  $n$  okresach próby modelowej) oraz prognozy na ten okres  $y_t^*$  (za [Cieślak (red.) 2002, s. 48; por. Witkowska 2006, s. 199-200]):

$$q_t = y_t - y_t^*, \quad t > n.$$

Błąd faktyczny prognozy jest realizacją zmiennej losowej będącej różnicą zmiennej losowej sprzedaży i szacunku jej wartości oczekiwanej, czyli prognozy punktowej. Dlatego stosowany dalej średni faktyczny absolutny błąd prognozy (MAPE), a także błąd średniokwadratowy i jego pierwiastek są szacunkami zmienności sprzedaży wokół wartości oczekiwanej. Są więc miarami zmienności losowej sprzedaży całkowitej, która jest wynikiem decyzji o dywersyfikacji. Jeśli szacunkowy błąd *ex ante* prognozy i jej średni błąd *ex post* (średni błąd faktyczny) nie są istotnie różne w sensie statystycznym, to mogą być stosowane do oceny ryzyka ziszczenia się prognozy wyniku decyzji w okresie następującym po próbie testowej. Zakładając, że błąd prognozy wyniku decyzji ma rozkład normalny, należałoby porównać iloraz szacunków wariancji błędu w próbie modelowej i testowej z wartością krytyczną statystyki  $F$ . Szczególnie, jeśli to w próbie testowej szacunek wariancji błędu jest wyższy.

W ostatnim, trzecim etapie badania spróbowano ocenić, czy dywersyfikacja portfela produktowego badanego przedsiębiorstwa przyczyniła się do obniżenia ryzyka mierzonego wysokością błędu prognozy sprzedaży produktów. Przedsiębiorstwo spodziewa się osiągnąć ujemny efekt synergii ryzyka (dysynergię ryzyka). Można to tłumaczyć kompensowaniem błędów prognoz i działań w tych co najmniej dwóch specjalizacjach produktowych. To przeciwnie niż w przypadku korzyści, dla których efekt synergii organizacyjnej współdziałających elementów powinien być dodatni.

Za efekt synergii ryzyka, włączając weń efekt mnogości grup produktów, przyjęto wskaźnik przyrostu średniego absolutnego błędu procentowego:

$$\Delta\text{MAPE} = \text{MAPE}_p - \frac{\sum_{i=1}^I \text{MAPE}_i}{I},$$

gdzie:  $i = 1, \dots, I$  – numery grup produktowych w portfelu przedsiębiorstwa,  $\text{MAPE}_i$  – średni absolutny błąd procentowy prognozy sprzedaży  $i$ -tej grupy

produktowej,  $MAPE_p$  – średni absolutny błąd procentowy prognozy sprzedaży całkowitej.

Zaproponowany wzór jest analogiczny do znanego w literaturze wzoru na efekt synergii [Krzakiewicz (red.) 1994, s. 41]. Podaje różnicę efektów współdziałających elementów (tutaj odpowiednio miara ryzyka portfela produktów  $MAPE_p$ ) i sumy efektów poszczególnych elementów (tutaj odpowiednio suma miar ryzyka podzielona przez liczbę grup produktowych). Uśrednienie podyktowane jest przyjęciem względnej miary błędu prognozy grup. Ujemny przyrost MAPE oznacza spadek błędów prognozy spowodowany dywersyfikacją, a w tym również agregacją danych sprzedażowych różnych grup produktowych. Wynik wzoru na przyrost MAPE zależy od trafności modeli prognozy i liczby grup produktowych.

Do dokładniejszej oceny potrzebny jest wzór, którego wynik zależy od kowariancji błędów prognoz, a więc nie tyle od wysokości tych błędów, ile od ich korelacji. Za miarę celowego efektu dywersyfikacji portfela produktowego zaproponowano przyjąć wskaźnik efektów dywersyfikacji – efekt<sub>dyw.</sub>:

$$\text{efekt}_{\text{dyw.}} = \sum_{i=1}^I E(Y_i - Y_i^*)^2 - E(Y_p - Y_p^*)^2,$$

gdzie:  $E(Y_i - Y_i^*)^2$  – wariancja sprzedaży  $i$ -tej grupy produktowej; jej oszacowaniem w próbie jest błąd średniokwadratowy prognozy sprzedaży  $i$ -tej grupy,  $E(Y_p - Y_p^*)^2$  – wariancja sprzedaży całkowitej produktów; jej oszacowaniem w próbie jest błąd średniokwadratowy prognozy sprzedaży całkowitej, będącej sumą prognoz sprzedaży wszystkich grup produktowych.

Przedstawiony wzór na efekty dywersyfikacji można wyprowadzić ze wzoru na wariancję błędu prognozy sprzedaży całkowitej (zob. [Cieślak (red.), s. 53]):

$$V_p^2 = E(Y_p - Y_p^*)^2,$$

podstawiając za sprzedaż całkowitą sumę sprzedaży grup i podobnie za prognozę sprzedaży całkowitej sumę prognoz:

$$E(Y_p - Y_p^*)^2 = E\left[\sum_{i=1}^I Y_i - \sum_{i=1}^I Y_i^*\right]^2 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I E[(Y_i - Y_i^*)(Y_j - Y_j^*)],$$

a następnie przekształcając przy założeniu, że efekt dywersyfikacji jest równy:

$$\text{efekt}_{\text{dyw.}} = -2 \left( \sum_{i=1}^I \sum_{j=i+1}^I E[(Y_i - Y_i^*)(Y_j - Y_j^*)] \right),$$

gdzie  $E[(Y_i - Y_i^*)(Y_j - Y_j^*)]$  to kowariancja błędów prognozy sprzedaży dwóch różnych grup produktowych. Z analizy tego ostatniego wzoru płynie wniosek, że efekt

dywersyfikacji jest negatywny, gdy następuje synergia ryzyka, a błędy się kumulują. Wtedy błąd prognozy sprzedaży całkowitej jest wyższy o dodatnią sumę kowariancji błędów prognoz grup produktowych w portfelu. Efekt pozytywny dywersyfikacji występuje, gdy następuje dyssynergia ryzyka, czyli jego kompensacja. Wtedy suma kowariancji błędów prognoz grup produktowych portfela jest ujemna i obniża oczekiwany błąd prognozy sprzedaży całkowitej. Wyliczając efekt dywersyfikacji w portfelu badanego przedsiębiorstwa, zastosowano pierwszy z podanych wzorów, podstawiając do niego błędy średniokwadratowe prognozy sprzedaży całkowitej i prognoz sprzedaży grup produktowych w próbie testowej.

### 3. Przygotowanie danych

Do przeprowadzenia wyliczeń posłużyły dane o sprzedaży każdej grupy produktów wyróżnionej według klasyfikacji produktowej w przedsiębiorstwie (grupy 1-10):

1. Części układów transmisji mocy.
2. Odzież robocza, środki ochronne i zabawki o tematyce rolniczej.
3. Części maszyn do zbioru, transportu i przetwarzania płodów rolnych.
4. Części zamienne i eksploatacyjne ciągników różnych marek.
5. Artykuły przemysłowe uniwersalne (narzędzia i artykuły: elektryczne, budowlane, do prac polowych i ogrodowych).
6. Części zamienne do maszyn uprawowych.
7. Artykuły zootechniczne i weterynaryjne do hodowli.
8. Artykuły jeździeckie i artykuły dla zwierząt domowych.
9. Hydraulika siłowa.
10. Ogumienie, koła i akumulatory.

Wysokość sprzedaży grup produktowych i ich sumę ustalono na podstawie danych z systemu komputerowego rachunkowości wybranego przedsiębiorstwa w cenach bieżących. Przyjęto, iż okresem obserwacji i prognozy sprzedaży, a także okresem sezonowym jest kwartał, ponieważ sezonowość kwartalna jest najważniejsza dla rolnictwa. Jest powiązana z porami roku i warunkami pogodowymi, a więc z najważniejszymi czynnikami cyklicznymi w działalności rolniczej. Próba zawiera zgromadzone obserwacje kwartalne sprzedaży od kwartału 1. w roku 2005 do kwartału 4. w roku 2011. Do zakresu próby uczącej, nazywanej też modelową, należą obserwacje od kwartału 1. w roku 2005 do kwartału 4. w roku 2010, czyli 24 obserwacje kwartalne z sześciu lat. Do zakresu próby testowej, inaczej weryfikacyjnej, należą obserwacje kwartałów od 1. do 4. w roku 2011.

Wybór zakresu czasowego próby obserwacji podyktowany był wydarzeniami z historii badanej spółki. W latach 1996-2004 portfel produktowy został rozszerzony tak, że liczba oferowanych grup produktowych wzrosła z 1 do 10. Dlatego analizę obserwacji rozpoczęto od roku 2005. Od roku 2012 ze spółki Grene Spółka z o.o. została wyodrębniona spółka handlu hurtowego Grene Dystrybucja Spółka z o.o., co spowodowało zakłócenie porównywalności danych sprzedażowych.

Dla większej porównywalności danych przeliczono wysokość sprzedaży z cen bieżących na ceny kwartału bazowego, za który przyjęto ostatni kwartał próby badawczej, czyli kwartał 4. w roku 2011. Użyty deflator był wskaźnik CPI – inflacji produktów i usług konsumpcyjnych podawany przez GUS kwartał do kwartału [GUS 2016], ale po przeliczeniu go względem stałej podstawy – poziomu cen kwartału bazowego w badaniu. Poziom wskaźnika zmienności szeregu sprzedaży w cenach stałych był niższy dla większości grup produktowych i sprzedaży całkowitej.

#### 4. Wyniki empirycznych modeli szeregów czasowych sprzedaży

Wyniki testów stacjonarności badanych szeregów czasowych przedstawiono w tab. 1. Podsumowując rozkład wyników, stwierdzono:

- tylko dla grupy 10 wynik czterech testów jest jednakowy – stacjonarność,
- dla dwóch grup (3 i 6) trzy z czterech wyników potwierdzają niestacjonarność,
- dla dziewięciu grup test ADF pierwszych różnic sprzedaży wykazał przyrostostacjonarność sprzedaży, a grupy nr 10 test ten nie dotyczył.

**Tabela 1.** Wyniki testów stacjonarności, trendostacjonarności i przyrostostacjonarności szeregów czasowych sprzedaży grup produktowych na poziomie istotności 0,05

Poziom sprzedaży	Test ADF			Test ADF-GLS			Test LR			Test KPSS			Stacjonarność pierwszych przyrostów (ADF)
	S*	T*	N*	S	T	N	S	T	N	S	T	N	
Grupa 1			X		X				X		X		X
Grupa 2			X		X				X		X		X
Grupa 3		X				X			X			X	X
Grupa 4	X					X			X	X			X
Grupa 5			X			X		X			X		X
Grupa 6			X			X	X					X	X
Grupa 7			X	X					X	X			X
Grupa 8			X			X	X				X		X
Grupa 9			X	X			X				X		X
Grupa 10	X			X			X			X			nd.

\* Możliwe wyniki testu: S – stacjonarność, T – trendostacjonarność, N – niestacjonarność, nd. – nie dotyczy.

Źródło: opracowanie własne.

Następnie oszacowano i zweryfikowano analitycznie model trendu z sezonowością i autoregresją zmiennej objaśnianej. Wyniki przedstawia tab. 2. Istotność statystyczną szacunków parametrów przyjęto na poziomie 0,1, ale większość parametrów jest istotna na poziomie 0,05, a nawet 0,01. Nieistotne parametry zerowano.

**Tabela 2.** Empiryczne modele analityczne trendu, sezonowości i autoregresji sprzedaży grup produktowych przedsiębiorstwa (KMNK)

Parametr*	Grupa 1	Grupa 2	Grupa 3	Grupa 4	Grupa 5	Grupa 6	Grupa 7	Grupa 8	Grupa 9	Grupa 10
$b_0$	-508 620	33 612	1 352 914	1 392 960	1 614 957	Istotna na poziomie 0,05 autokorelacja reszt dla modeli trendu i autoregresji poziomu zmiennej. Składniki resztowe wykazują niestacjonarność w teście ADF	842 612	261 222	-253 342	1 026 657
$b_1$	202 241	79 986	57 873	0	145 204		0	102543-3256t	120 626	0
$c_1$	-14 674	-156 671	-468 005	0	-173 597		546 788	-69 974	-141 955	52 392
$c_2$	600 394	-403 608	1 296 345	0	2 119 323		177 128	61 690	184 764	95 602
$c_3$	89 239	-261 540	758 945	0	135 213		-370 870	112 073	332 971	32 332
$c_4$	-674 869	821 821	-1 587 286	0	-2 080 939		-353 046	-103790	-375 779	-180 327
$\rho_k$	$\rho_4 = -0,55$	0	0	$\rho_4 = 0,65$	$\rho_1 = 0,34$		$\rho_1 = 0,67$	0	$\rho_3 = 0,53$ ; $\rho_5 = 0,89$	$\rho_3 = -0,39$
$s$	543 128	376 652	351 696	911 492	740 605		354 055	86 421	172 199	110 206
$R^2$	0,78	0,84	0,93	0,53	0,88		0,66	0,90	0,92	0,72
$\underline{R}^2$	0,70	0,81	0,91	0,50	0,85		0,58	0,87	0,89	0,65
$s'$	543 128	436 277	407 371	911 492	740 605		354 055	109 470	172 199	110 206
ME**	-57 467	-249 260	-384 650	-239 270	149 180		-52 002	148 760	-76 109	323 280
RMSE	527 470	538 100	567 920	285 240	1 728 200		242 700	201 340	150 610	332 230
MPE	-4,66	-28,31	-20,65	-8,05	-6,65		-3,20	17,4	-3,49	30,14
MAPE	14,66	35,60	26,09	8,05	25,56	7,93	17,4	6,09	30,14	

\* Są to parametry modelu warunkowej wartości oczekiwanej sprzedaży  $\hat{y}_{it}$  w  $t$ -tym kwartale próby i  $l$ -tym kwartale roku o postaci:

$$\hat{y}_{it} = b_0 + b_1 t + \sum_{l=1}^4 c_l Q_{il} + \sum_{k=1}^K \rho_k y_{t-k}, \quad \sum_{l=1}^4 c_l = 0,$$

gdzie:  $b_0$  – wyraz wolny na podstawie uśrednienia efektów sezonowych brutto [zł];  $b_1$  – współczynnik kierunkowy [zł] (dla grupy 8 oszacowano trend kwadratowy, a przyrost jednookresowy jest dany jego pierwszą pochodną względem numeru kwartału  $t$ );  $c_1, c_2, c_3, c_4$  – efekty sezonowe netto kwartałów 1-4 [zł];  $Q_{il}$  – zmienne binarne sezonowe,  $\rho_k$  – współczynnik autoregresji rzędu  $k$ -tego dla zmiennej objaśnianej;  $s$  – odchylenie standardowe reszt modelu [zł];  $R^2$  – współczynnik determinacji;  $\underline{R}^2$  – skorygowany współczynnik determinacji;  $s'$  – szacunkowy błąd średni prognozy [zł].

\*\* Dla każdego modelu obliczono w próbie testowej błędy prognozy: ME – średni błąd predykcji [zł]; RMSE – pierwiastek błędu średnio-kwadratowego [zł]; MPE – średni błąd procentowy [%]; MAPE – średni absolutny błąd procentowy [%].

Źródło: opracowanie własne.



**Tabela 3.** Empiryczne modele ARMA lub ARIMA szeregów sprzedaży [zł] grup produktowych przedsiębiorstwa (MNW)

Grupa	$(p \ d \ q)(p_s \ d_s \ q_s)^*$	Postać modelu poziomu sprzedaży w kwartale $t$ -tym $\hat{y}_t$	$s$	RMSE	MPE	MAPE
Grupa 1	(2 1 0) (0 0 0)	$\hat{y}_t = y_{t-1} + 89\ 476 - 0,25(\Delta y_{t-1} - 89\ 476) - 0,46(\Delta y_{t-2} - 89\ 476)$	615 145	733 700	13,01	13,79
Grupa 2	(1 1 1) (0 0 1)	$\hat{y}_t = y_{t-1} + 90\ 160 - 0,06(\Delta y_{t-1} - 90\ 160) - 0,99e_{t-1} + 0,87e_{t-4} - 0,86e_{t-5}$	438 540	521 080	-36,11	36,11
Grupa 3	(0 0 0) (0 1 0)	$\hat{y}_t = y_{t-4} + 239\ 265$	394 006	296 460	-11,21	11,21
Grupa 4	( $\underline{3}$ 0 0) (1 0 0)	$\hat{y}_t = 4\ 048\ 020 - 0,47(y_{t-3} - 4\ 048\ 020) + 0,71(y_{t-4} - 4\ 048\ 020) + 0,33(y_{t-7} - 4\ 048\ 020)$	832 146	293 620	-8,30	8,30
Grupa 5	(0 0 1) (0 1 0)	$\hat{y}_t = y_{t-4} + 0,91e_{t-1}$	862 000	1 377 400	-0,87	20,34
Grupa 6	(0 0 2) (1 0 0)	$\hat{y}_t = 2\ 252\ 100 + 0,92(y_{t-4} - 2\ 252\ 100) - 0,11e_{t-1} + 0,59e_{t-2}$	643 833	621 960	14,32	14,32
Grupa 7	( $\underline{6}$ 0 2) (0 0 0)	$\hat{y}_t = 2\ 497\ 700 - 0,58(y_{t-6} - 2\ 497\ 700) - 0,53e_{t-1} - 0,04e_{t-2}$	348 808	333 990	-1,49	9,97
Grupa 8	(0 1 1) (1 0 0)	$\hat{y}_t = y_{t-1} + 29\ 462 + 0,61([y_{t-4} - y_{t-5}] - 29\ 462) - 0,48e_{t-1}$	122 741	135 880	-15,66	15,66
Grupa 9	(0 1 1) (0 1 1)	$\hat{y}_t = y_{t-4} + (y_{t-1} - y_{t-5}) + 0,48e_{t-1} + 0,99e_{t-4} + 0,48e_{t-5}$	174 287	459 390	12,14	14,08
Grupa 10	(0 0 1) (0 1 1)	$\hat{y}_t = y_{t-4} + 0,61e_{t-1} - 0,92e_{t-4} - 0,56e_{t-5}$	161 725	323 310	29,75	29,75

\* Parametry struktury modelu ARIMA szeregu czasowego [Kufel 2007, s. 89-97; Maddala 2008, s. 582-594]:

$$(1 - \varphi_1 L_1 - \dots - \varphi_p L_p)(1 - \Phi_1 L_1 - \dots - \Phi_p L_p)(X_t - \mu) = (1 + \theta_1 L_1 + \dots + \theta_q L_q)(1 + \theta_1 L_1 + \dots + \theta_{q_s} L_{q_s})\varepsilon_t,$$

$$X_t = Y_t, \quad d = 0, \quad d_s = 0$$

$$X_t = Y_t - Y_{t-1}, \quad d = 1, \quad d_s = 0$$

$$X_t = Y_t - Y_{t-L}, \quad d = 0, \quad d_s = 1$$

$$X_t = Y_t - Y_{t-1-L}, \quad d = 1, \quad d_s = 1,$$

gdzie:  $\varphi, \Phi$  – parametry fi autoregresji i autoregresji sezonowej procesu  $X_t$ , liczba parametrów autoregresji i jej rząd są dane parametrem  $p$ , a dla regresji sezonowej parametrem  $p_s$ ,  $\theta, \Theta$  – parametry teta średniej ruchomej i średniej ruchomej sezonowej reszt modelu, liczba parametrów i elementów średniej są dane parametrem  $q$ , a dla sezonowości –  $q_s$ ,  $d, d_s$  – odpowiednio stopień różnicowania i sezonowego różnicowania procesu sprzedaży  $Y_t$  o realizacji  $y_t$ ,  $L$  – operator autoregresyjny opóźnień, ale  $L$  użyte w indeksie dolnym procesu (np.  $y_{t-L}$ ) oznacza liczbę sezonów w cyklu,  $\mu$  – wartość oczekiwana procesu  $X_t$ .

Źródło: opracowanie własne.

W tabeli 3 zamieszczono wyznaczone modele empiryczne ARIMA procesów sprzedaży. Przy wyborze parametrów rzędu opóźnienia kierowano się istotnymi wynikami z analizy autokorelacji szeregu czasowego oraz z analizy ARIMA  $X$ -12, a także minimalizacją pierwiastka błędu średniokwadratowego prognozy (RMSE). To ostatnie kryterium błędu prognozy było najważniejsze.

Ostatnią zastosowaną kategorią modeli były modele Wintersa z addytywną sezonowością. Szacunki parametrów otrzymano, minimalizując sumę kwadratów reszt modelu. Wyniki estymacji parametrów przedstawiono w tab. 4.

**Tabela 4.** Empiryczne modele Wintersa wykładniczego sprzedaży grup produktowych przedsiębiorstwa [zł]

Grupa	$\alpha^*$	$\beta^*$	$\gamma^*$	$s$	RMSE	MPE	MAPE
Grupa 1	0,71	0	0,21	640 832	876 202	10,72	24,43
Grupa 2	0,53	0,11	0	346 374	636 527	-21,97	36,97
Grupa 3	0,85	0,01	1,00	460 012	454 084	-7,97	22,47
Grupa 4	1,00	0	1,00	716 841	776 621	4,41	18,88
Grupa 5	0,59	0,05	0,61	784 899	2 216 477	-10,05	31,56
Grupa 6	0,62	0,02	0,37	660 379	409 411	3,58	9,89
Grupa 7	1,00	0	0,50	365 299	416 306	-0,05	13,87
Grupa 8	0,69	0,01	0,21	120 760	111 164	-4,24	12,69
Grupa 9	0,50	0,21	0,48	212 940	390 555	8,61	13,73
Grupa10	1,00	0	0,20	163 543	155 346	4,96	10,44

\*  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – stałe wykładania w modelu Wintersa z wielkością wykładzoną  $F$ , przyrostem okresowym  $S$  i wielkością sezonową addytywną  $C$  o następującej postaci (zob. [Cieślak (red.) 2002, s. 72-73]):

$$\begin{aligned}\hat{y}_t &= F_{t-1} + S_{t-1} + C_{t-L}, \\ F_{t-1} &= \alpha(y_{t-1} - C_{t-1-L}) + (1 - \alpha)(F_{t-2} + S_{t-2}), \\ S_{t-1} &= \beta(F_{t-1} - F_{t-2}) + (1 - \beta)S_{t-2}, \\ C_{t-1} &= \gamma(y_{t-1} - F_{t-1}) + (1 - \gamma)C_{t-1-r}.\end{aligned}$$

Źródło: opracowanie własne.

Oceniając wyniki modeli empirycznych, sformułowano następujące wnioski:

- Porównując wielkość średnich absolutnych błędów procentowych (MAPE), można zauważyć ich duże zróżnicowanie dla modeli sprzedaży różnych grup produktów: dla modeli analitycznych trendu w zakresie 6,09-35,60%; następnie dla modeli ARIMA w zakresie 8,30-36,11% i dla modeli Wintersa w zakresie: 9,89-36,97%.
- Kierując się minimalnym poziomem pierwiastka błędu średniokwadratowego (RMSE), wybrano najlepszy model dla danej grupy, czyli model KMNK dla grup nr 1, 4, 7 i 9; ARIMA dla grup nr 2, 3 i 5; Wintersa dla grup nr 6, 8 i 10. Dla

- grup 3-10 wybrany typ modelu miał zarówno najniższy poziom błędu RMSE, jak i średniego absolutnego błędu procentowego (MAPE).
- Dla wskazanych wyżej modeli o najniższym błędzie średniokwadratowym osiągnięto poziom średniego absolutnego błędu procentowego od 6,09 do 35,60%, a w tym 8 modeli empirycznych cechował poziom błędu poniżej 15%, a wśród nich 4 modele cechował poziom błędu poniżej 10%.
  - Dla grup produktowych, dla których wybrano modele KMNK, kwadrat szacunkowego błędu prognozy przewyższał średniokwadratowy błąd prognozy. Tak samo było dla grup produktowych, dla których wybrano modele Wintersa. Natomiast wśród grup produktowych najlepiej opisywanych modelami ARIMA dla grupy 2 i 5 wariancja resztowa w próbie modelowej była niższa niż błąd średniokwadratowy prognozy w próbie testowej. Iloraz tych szacunków wariancji wyniósł odpowiednio 1,41 oraz 2,55 dla wymienionych grup. Wartość krytyczna statystyki  $F$  odpowiednio dla 22 i 20 stopni swobody w próbie modelowej grup oraz dla 4 stopni swobody w próbie testowej wynosi dla poziomu istotności 0,05: 2,82 i 2,87. Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o równości wariancji błędu szacunkowego i faktycznego prognoz.

## 5. Ocena zdywersyfikowania portfela produktowego

Na takiej samej zasadzie jak dla grup produktowych modelowano alternatywnymi metodami szereg sprzedaży całkowitej produktów otrzymany jako suma sprzedaży wszystkich grup produktowych w cenach stałych ostatniego kwartału 2011 roku.

Testy ADF, ADF-GLS i LR wskazały na niestacjonarność, a test KPSS na trendostacjonarność poziomu sprzedaży całkowitej. W teście ADF pierwszych przyrostów sprzedaży wykazano przyrostostacjonarność szeregu. Wyniki otrzymano na poziomie istotności 0,05. Spośród trzech alternatywnych modeli empirycznych wybrano model ARIMA, dla którego pierwiastek błędu średniokwadratowego był najniższy i wyniósł 1 284 900 zł. Odpowiednio błąd procentowy MAPE wyniósł 4,79%.

Następnie wyliczono efekt dywersyfikacji brutto (obejmujący efekt agregacji grup produktowych) ze wzoru:

$$\begin{aligned} \Delta \text{MAPE} &= 4,79 - \frac{13,79+35,60+11,21+8,05+20,34+9,89+7,93+12,69+6,09+10,44}{10} = \\ &= 4,79 - 13,61 = -8,81. \end{aligned}$$

Średni absolutny błąd procentowy prognozy sprzedaży całkowitej jest niższy od średniego błędu MAPE dla wszystkich grup produktowych o 8,81 punktu procentowego. Redukcja ryzyka względnego sprzedaży jest znacząca. Policzono też efekt dywersyfikacji (mln zł<sup>2</sup>):

$$\begin{aligned} \text{efekt}_{\text{dyw.}} &= \sum_{i=1}^I E(Y_i - Y_i^*)^2 - E(Y_p - Y_p^*)^2 = 2\,901\,924 - 1\,808\,295 = \\ &= 1\,093\,629. \end{aligned}$$

Czysty efekt dywersyfikacji jest dodatni, a więc suma kowariancji błędów prognoz sprzedaży wszystkich par grup produktowych jest ujemna. Gdyby błędy prognoz sprzedaży były zupełnie nieskorelowane, to efekt netto dywersyfikacji wynosiłby 0. Portfel produktowy należy ocenić jako zdywersyfikowany, ponieważ ryzyko sprzedaży całkowitej, mierzone wariancją błędu jej prognozy, jest obniżone zarówno dzięki mnogości grup produktowych, jak i dzięki kompensacji błędów prognoz sprzedaży grup produktowych.

## 6. Zakończenie

Na podstawie przeprowadzonych testów własności szeregów czasowych sprzedaży oraz na podstawie porównania wyników modeli empirycznych różnego typu sformułowano następujące wnioski ogólne:

- Wyniki testów stacjonarności szeregu sprzedaży pozwalają dobrać odpowiednie modele i zmienne objaśniające. Nawet w razie jednakowych wyników wszystkich testów stacjonarności należy porównać co najmniej trzy alternatywne typy modeli pod względem poziomu błędu prognozy, jak uczyniono w tym artykule.
- Nie ma prostej zależności między wynikami testów stacjonarności a typem modelu, dla którego błąd prognozy jest najniższy. Dla szeregów czasowych o co najmniej dwóch testach wskazujących stacjonarność model Wintersa generalnie miał dużo gorsze wyniki dopasowania i trafność prognoz od pozostałych typów model. Wyjątkiem była grupa 10, dla której procedura ARIMA X-12 wykazała ruchomą sezonowość. Dlatego stwierdzono, że nawet wyniki jednoznacznie potwierdzające stacjonarność szeregu nie dyskryminują rozważania nad grupą alternatywnych metod.
- Model empiryczny o najniższym błędzie średniokwadratowym wśród alternatywnych modeli danego szeregu miał poziom błędu znacznie niższy niż alternatywne modele. Wyjątkiem jest grupa 4. Potwierdza to potrzebę rozważania kilku alternatywnych typów metod modelowania szeregu czasowego.

Co do zaproponowanych wskaźników oceny efektów dywersyfikacji portfela, to wyznaczono je dla wybranego przedsiębiorstwa i ich poziom wskazuje na znaczne obniżenie odchylenia standardowego błędu prognozy sprzedaży całkowitej, a więc i ryzyka decyzji podejmowanych na tej podstawie. Dzięki mnogości grup produktowych w portfelu i ich zależności sprzedażowej procentowy błąd prognozy sprzedaży całkowitej zmalał średnio o 8,8 punktu procentowego. Wyliczona suma kowariancji błędów prognozy sprzedaży grup produktowych jest ujemna, więc dywersyfikacja grup produktowych potwierdza występowanie kompensacji błędów prognoz sprzedaży grup produktowych.

## Literatura

- Cieślak M. (red.), 2002, *Prognozowanie gospodarcze. Metody i zastosowania*, WN PWN, Warszawa.
- GUS, 2016, portal Głównego Urzędu Statystycznego, <http://stat.gov.pl/wskazniki-makroekonomiczne/> (8.07.2016).
- Guzik B., 2008, *Podstawy ekonometrii*, Wyd. Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.
- Jajuga K., 2008, *Zarządzanie ryzykiem*, WN PWN, Warszawa.
- Krzakiewicz K. (red.), 1994, *Podstawy organizacji i zarządzania*, Wyd. Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.
- Kufel T., 2007, *Ekonometria. Rozwiązywanie problemów z programem GRET*, WN PWN, Warszawa.
- Kufel T., 2010, *Ekonometryczna analiza cykliczności procesów gospodarczych o wysokiej częstotliwości obserwowania*, Wyd. Nauk. Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.
- Maddala G.S., 2008, *Ekonometria*, WN PWN, Warszawa.
- Piasecki K., Anholcer M., Echaust K., 2013, *e-Matematyka wspomagająca ekonomię*, C.H. Beck, Warszawa.
- Sikora W. (red.), 2008, *Badania operacyjne*, PWE, Warszawa.
- Słownik języka polskiego*, 2016, WN PWN, Warszawa, <http://sjp.pwn.pl> (25.09.2016).
- Witkowska D., 2006, *Podstawy ekonometrii i teorii prognozowania. Podręcznik z przykładami i zadaniami*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków.
- Zakrzewska-Bielawska A., 2015, *Wybory produktowo-rynkowe przedsiębiorstw sektora wysokich technologii*, Marketing i Rynek 9/2015, s. 753-764.