

Antoni Smoluk

e-mail: math@ue.wroc.pl

**PROSTY DOWÓD TWIERDZENIA
O CZTERECH BARWACH**

A SIMPLE PROOF OF THE FOUR-COLORS THEOREM

DOI: 10.15611/ekt.2017.1.02

Streszczenie: W pracy indukcyjnie dowodzi się twierdzenie o czterech barwach. Korzysta się z pojęcia produktu map i minimalnych kolorowań lokalnych.

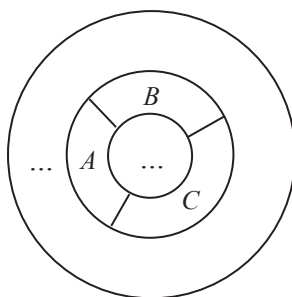
Słowa kluczowe: mapa, minimalne kolorowanie lokalne, rozszerzenie kolorowania lokalnego, pierścień rozcinający, mapa prosta, produkt map, redukcja granicy.

Summary: The paper includes an inductive proof of the four-colors theorem. The notions of product of maps and minimum local colorings are applied.

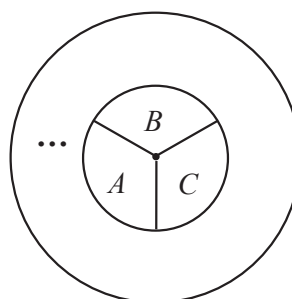
Keywords: map, minimum local coloring, extension of local coloring, ring slotting, simple map, product of maps, reduction of border.

W artykule rozpatruje się klasyczne mapy płaskie lub równoważne z nimi mapy sferyczne. Mapa to wierzchołki, granice, kraje; wierzchołek jest punktem, w którym spotykają się granice, granica jest linią rozdzielającą kraje, kraj jest wielobokiem o brzegach być może zakrzywionych. Kraje mające wspólny wierzchołek V nazywamy mapą lokalną. Z twierdzenia o czterech barwach wynika, że w każdym wierzchołku istnieje zgodne kolorowanie lokalne z co najwyżej trzema barwami; nazywamy je kolorowaniem lokalnym w wierzchołku V . Jest to oczywiście kolorowanie zgodne – kraje sąsiednie, czyli mające wspólną granicę, oznaczone są różnymi barwami. Naturalnie kraje mające tylko wspólny wierzchołek nie są uważane za sąsiednie. Mapa M jest iloczynem map M_1 i M_2 , jeżeli zawiera pas rozcinający ją złożony z trzech lub mniejszej liczby państw (rys. 1).

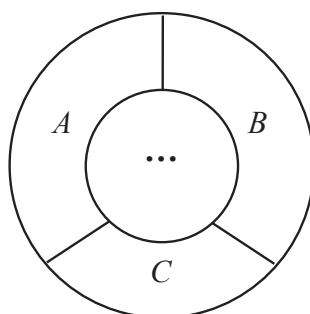
Pierścień oddzielający mapę M_1 oraz M_2 wchodzi do mapy zarówno M_1 , jak i M_2 – on je łączy. Mapę M_1 reprezentują trzy kropki leżące na zewnątrz pasa rozcinającego, natomiast mapę M_2 trzy kropki leżące wewnątrz tego pasa (rys. 2 i 3).



Rys. 1. Pierścień rozcinający mapę



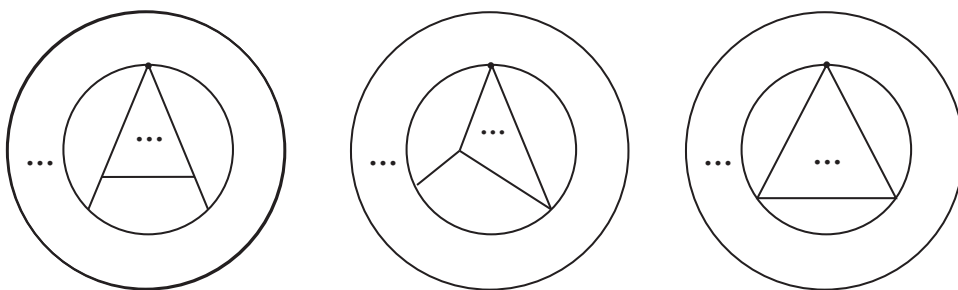
Rys. 2. Mapa M_1



Rys. 3. Mapa M_2

Koło zewnętrzne na rysunkach zawsze ściąga się do jednego punktu – biegun północnego, który jest punktem dodanym przy jednopunktowej kompaktyfikacji płaszczyzny – jest nią oczywiście sfera; jest to albo punkt zwykły, albo wierzchołek mapy, jeżeli do koła zewnętrznego dochodzą granice.

Uwaga. Granice pasa rozdzielającego kraje należące do niego mogą w szczególności redukować się do jednego punktu. Tak więc mogą być jeszcze trzy inne typy pasów rozcinających – spotkamy je w dowodzie; przedstawiono je na rys. 4. Pasy rozdzielające, w których kraje sąsiednie mają jeden punkt wspólny, będziemy uważać za rozcięcia specjalne.



Rys. 4. Pasy specjalne

Naturalnie mapa może zawierać pasy rozcinające, utworzone tylko z dwóch państw, a nawet jednego. Pasy rozcinające redukują kolorowanie map złożonych do kolorowania map mniejszych i następnie ich sklejanie – produkowania.

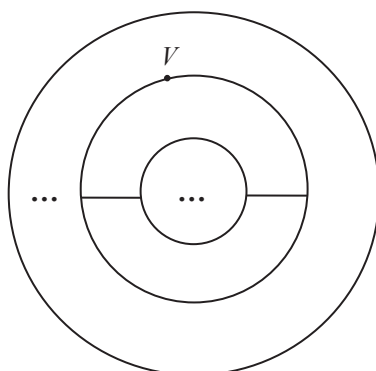
Lemat. Jeżeli mapa jest prosta, czyli nie jest produktem map mniejszych, to w każdym wierzchołku tej mapy istnieje kolorowanie lokalne dwiema barwami, gdy wierzchołek jest parzysty – jednoczy parzystą liczbę państw, lub trzema barwami – gdy wierzchołek jest nieparzysty.

Kolorowanie lokalne nazywa się kolorowaniem minimalnym, jeżeli użyto tylko dwóch barw lub trzech, ale jedną z nich tylko raz. Jeżeli do kolorowania minimalnego użyto tylko dwóch barw, wtedy dowolną granicę kończącą się wierzchołkiem V ściągamy do tego wierzchołka; jeżeli użyto trzech barw, wtedy ściągamy do punktu V granicę przyległą do państwa oznaczonego trzecim kolorem – tym występującym tylko jeden raz. Po tej operacji w wierzchołku V znajdzie się kilka państw niepokolorowanych. Ponieważ mapa M jest nierozkładalna, więc wyjściowe kolorowanie minimalne można rozszerzyć do kolorowania minimalnego mapy M' powstałej z M przez redukcję jednej granicy. Naturalnie w każdym wierzchołku mapy prostej istnieje kolorowanie minimalne.

Twierdzenie. Jeżeli mapa jest prosta, to każde kolorowanie minimalne rozszerza się do zgodnego kolorowania całej mapy co najwyżej czterema barwami.

Dowód jest indukcyjny. Jeżeli mapa zawiera n lub mniej granic, to twierdzenie jest prawdziwe. Niech M ma $n + 1$ granic. W wierzchołku V bierzemy dowolne kolorowanie minimalne. Na podstawie założenia indukcyjnego, gdy zredukowana mapa jest prosta, istnieje rozszerzenie powiększonego kolorowania minimalnego do

zgodnego kolorowania co najwyżej czterema barwami całej mapy. Jeżeli zredukowana mapa M' nie jest mapą prostą, wtedy jest iloczynem map mniejszych. Do tych map mniejszych stosuje się indukcję lub rozkłada się na jeszcze mniejsze czynniki. Pas rozcinający M' przechodzi zawsze przez wierzchołek V i ma jeden z kształtów przedstawionych na rys. 4. Jest to oczywiście pas specjalny. Jeżeli kraje A i B należące do minimalnego kolorowania V i jednocześnie do pasa rozcinającego mają różne kolory, wtedy mapy M_1 i M_2 są takie, jak przestawione na rys. 2 i 3. Jeżeli te kraje mają kolor zgodny, wtedy łączymy je w jeden kraj i otrzymujemy pas złożony tylko z dwóch państw, przedstawiony na rys. 5. Zawsze więc można skleić mapę M_1 i M_2 bez psucia minimalnego kolorowania mapy M' powstałej z M przez redukcję jednej granicy kończącej się punktem V . Stąd regenerując zredukowaną granicę, można powrócić do mapy M i w ten sposób mamy rozszerzenie kolorowania minimalnego do zgodnego kolorowania całej mapy M co najwyżej czterema barwami. Dowód jest więc zakończony.



Rys. 5. Jeden kolor na ścieżce rozcinającej

Literatura przedmiotu jest bogata, różnorodna i łatwo dostępna. Brak powołań oznacza, że autor z niej nie korzystał. Możliwe podobieństwa nie tyle świadczą o zależności wyników, ile wynikają z logiki przedmiotu.

Joanna Krupowicz

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
e-mail: joanna.krupowicz@ue.wroc.pl

**PROGNOZY WSKAŹNIKA ZATRUDNIENIA
I ICH WERYFIKACJA
W KRAJACH UNII EUROPEJSKIEJ
W ŚWIETLE STRATEGII „EUROPA 2020”**

**EMPLOYMENT RATE FORECASTS
AND THEIR VERIFICATION
IN THE EUROPEAN UNION MEMBER STATES
IN THE LIGHT OF THE EUROPE 2020 STRATEGY**

DOI: 10.15611/ekt.2017.1.03

JEL Classification: C53, O52

Streszczenie: Jednym z celów strategii „Europa 2020” jest osiągnięcie wskaźnika zatrudnienia osób w wieku 20-64 lata na poziomie co najmniej 75%. Celem badania było ustalenie, jakiego tempa zmian w czasie należy spodziewać się, aby kraje wspólnoty osiągnęły założone wartości wskaźnika w 2020 roku. Zbudowano subiektywne modele formalne o różnych postaciach funkcji trendu dla krajów członkowskich Unii. Wyznaczono prognozy wskaźnika do 2020 roku. Zweryfikowano prognozy wyznaczone na lata 2010-2015. Posłużono się średnimi błędami *ex post* (ME, MAE, MAPE), współczynnikami: Theila i rozbieżności dla różnic. Prognozy były generalnie obarczone małymi błędami, ale systematycznie zawyżane, a przyczynami złej jakości prognoz było nieodgadnięcie średniej wartości zmiennej. Stosując kryterium minimalizacji błędu średniego *ex post*, ustalono, że w 18 krajach oraz całej wspólnocie charakterystyczny był przyspieszony wzrost, w 4 krajach – stały wzrost, w 3 – spowolniony wzrost, a w 2 – spowolniony spadek wskaźnika zatrudnienia.

Słowa kluczowe: strategia „Europa 2020”, prognozy wskaźnika zatrudnienia, weryfikacja prognoz, subiektywne modele formalne.

Summary: One of the objectives of the Europe 2020 strategy is to achieve the employment rate of people in the 20-64 age bracket of at least 75%. The purpose of the study was to determine the speed of change over time needed for the EU member states to achieve the projected rate values in 2020. Subjective growth models with various forms of the trend functions for the EU members states were built. Rate forecasts up to 2020 were determined. The forecasts for the years 2010-2015 were verified. The mean *ex post* errors (ME, MAE, MAPE), the Theil's statistic and the coefficient of divergence for the differences were applied. Overall, the forecasts were vitiated by small errors, but biased, and the reason for the bad quality forecasts was a failure to guess the mean variable. By applying the criterion for minimizing the mean

error *ex post*, it was determined that in 18 countries and in the entire EU there occurred an exponential growth, in four – a steady growth, in three – a slowed down growth, and in two – a slowed down drop in employment rate.

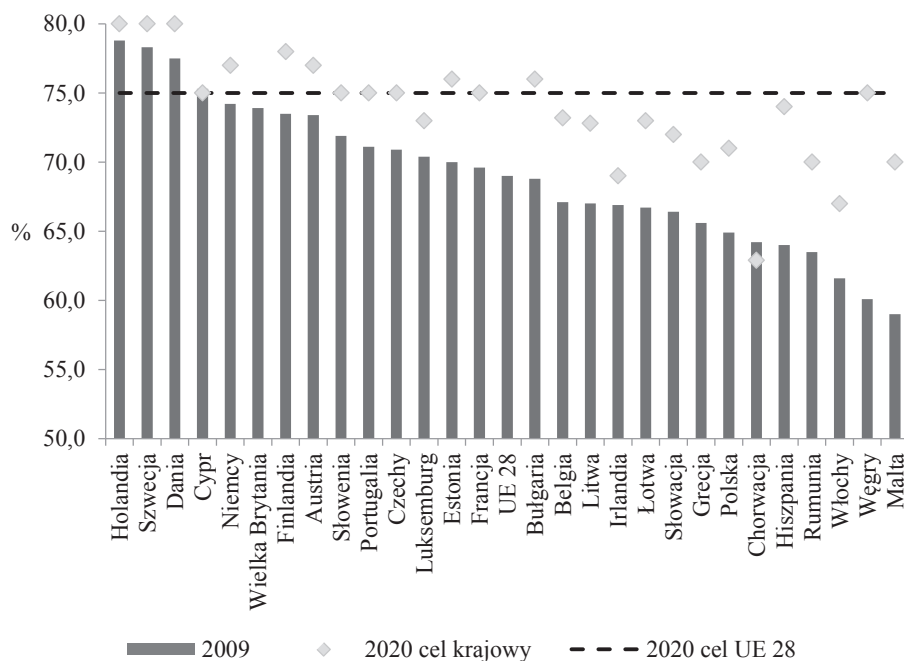
Keywords: Europe 2020 strategy, employment rate forecasts, forecasts verification, subjective growth models.

1. Wstęp

Przygotowany przez Komisję Europejską dokument „Europa 2020 – strategia na rzecz inteligentnego i zrównoważonego rozwoju sprzyjającego włączeniu społecznemu” przyjęty przez kraje członkowskie Unii Europejskiej w czerwcu 2010 roku określa długofalowy program polityki rozwoju społeczno-gospodarczego wspólnoty. Strategia „Europa 2020” zastępująca Strategię lizbońską z 2000 roku miała m.in. na celu pomoc w wyjściu z kryzysu i gospodarcze wzmocnienie Europy.

W strategii określono trzy wzajemnie powiązane i wspierające się obszary priorytetowe: (1) **inteligentny wzrost**, oznaczający rozwój gospodarki opartej na wiedzy i innowacjach, (2) **trwały i zrównoważony wzrost**, czyli wzrost promujący niskoemisyjną, efektywnie wykorzystującą zasoby naturalne „zieloną” gospodarkę, konkurencyjną właśnie dzięki takiej orientacji oraz (3) **wzrost sprzyjający społecznemu włączeniu**, tj. wzrost oparty na wysokim poziomie zatrudnienia, zapewniający spójność gospodarczą, społeczną i terytorialną. W każdym z obszarów priorytetowych strategii określono cele oraz podano wskaźniki monitorujące realizację celów strategii. W trzecim z obszarów priorytetowych celem jest dążenie do aktywizacji zawodowej jak największej liczby osób. Wskaźnikiem monitorującym jest tu wskaźnik zatrudnienia osób w wieku 20-64 lata, określający, ile osób zatrudnionych w wieku 20-64 lata przypada na 100 osób w tej grupie wiekowej.

W Strategii „Europa 2020” oczekuje się podniesienia wskaźnika zatrudnienia osób w wieku 20-64 lata w całej wspólnotie z 69% w 2009 roku do co najmniej 75% w 2020 roku [Komisja Europejska 2010]. Każdy z krajów członkowskich zadeklarował osiągnięcie określonych wartości wskaźnika. Na rysunku 1 zaprezentowano wartości wskaźnika zatrudnienia w 2009 roku oraz deklarowane wartości w 2020 roku. W sześciu krajach (Cypr, Czechy, Francja, Portugalia, Słowenia, Węgry) wartość wskaźnika zatrudnienia była taka sama jak wartość dla całej wspólnoty. W ośmiu krajach (Austria, Bułgaria, Dania, Estonia, Finlandia, Holandia, Niemcy, Szwecja) wartość docelową ustalono powyżej 75%, przy czym najwyższe wartości (80%) określiły Dania, Holandia i Szwecja. W 13 krajach wskaźnik zatrudnienia był mniejszy niż dla całej Unii, a najmniejszą wartość (62,9%) określiła Chorwacja. Wartości docelowej w 2020 roku nie podała Wielka Brytania. Zadeklarowane przez kraje Unii różne wartości wskaźnika zatrudnienia wynikały z dotychczasowego, różnego co do wartości, poziomu tego wskaźnika na terenie wspólnoty.



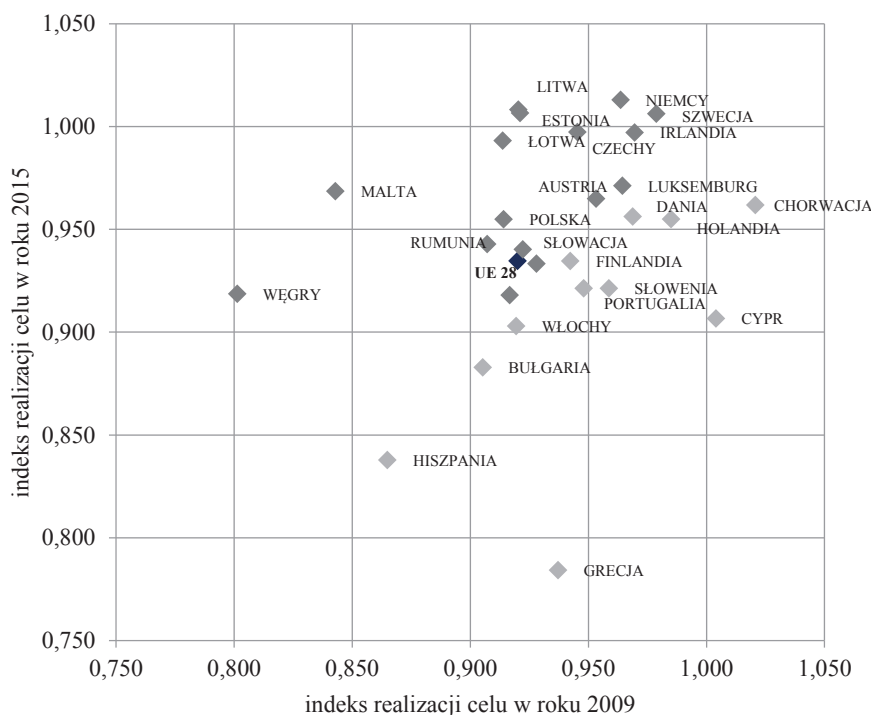
Rys. 1. Wskaźnik zatrudnienia osób w wieku 20-64 lata w krajach Unii Europejskiej w latach 2009 i 2020

Źródło: dane Eurostatu.

Postępy w realizacji strategii „Europa 2020” są monitorowane przez Komisję Europejską. Do pomiaru stopnia realizacji założonego celu służy indeks realizacji celu, będący relacją wartości z danego roku do wartości określonej jako pożądana w 2020 roku. Wartości indeksu dla lat 2009 i 2015 przedstawiono na rys. 2.

W krajach wspólnoty uzyskiwano różne wartości indeksu. Co więcej, zmiany w czasie nie były jednokierunkowe. W 2015 roku w 4 krajach (Niemcy, Litwa, Estonia i Szwecja) cel został osiągnięty – indeks przekroczył wartość 1. W większości krajów Unii w 2015 roku w porównaniu z rokiem 2009 indeks wzrósł. Spadek dotyczył 10 krajów, przy czym największy był w Chorwacji, Grecji i na Cyprze. Powyższe obserwacje dotyczące różnokierunkowości sugerują, że ścieżka prowadząca do osiągnięcia celu może być odmienna w krajach Unii Europejskiej. W 2014 roku Komisja Europejska, dostrzegając, że w krajach członkowskich realizacja celu strategii jest różnorodna, oceniła na podstawie dotychczasowej tendencji, iż możliwe jest obniżenie stopy zatrudnienia do 72% w 2020 roku [Komisja Europejska 2014].

Na poziomie państw członkowskich narzędziem realizacji celów strategii są Krajowe Programy Reform. W dokonanym przeglądzie Krajowych Programów Reform dla roku 2011 jedynie dla dwóch państw (Estonii i Polski) odnaleziono wyzna-



Rys. 2. Indeks realizacji celu dla wskaźnika zatrudnienia w krajach Unii Europejskiej w latach 2009 i 2015

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych z Eurostatu.

czone ścieżki dojścia do realizacji wskaźnika zatrudnienia w 2020 roku, tj. podane zostały prognozowane wartości wskaźnika zatrudnienia na lata 2010-2020 [Krajowy Program Reform... 2011; National Reform Programme... 2011]. Natomiast w przypadku trzech innych krajów (Hiszpanii, Litwy i Łotwy) podana była prognozowana na 2015 rok wartość wskaźnika. Osiąganie docelowych wartości wskaźnika zatrudnienia może odbywać się różnymi ścieżkami, tj. tendencjami o różnym tempie (stałym, przyspieszonym lub spowolnionym) zmian w czasie. Celem badania było ustalenie, jakiego tempa zmian w czasie należy spodziewać się, aby kraje członkowskie Unii Europejskiej osiągnęły założone wartości wskaźnika zatrudnienia w 2020 roku.

2. Dotychczasowe badania

W modelowaniu i prognozowaniu rynku pracy stosuje się podejście podażowe i popytowe [Skills Supply... 2010; Kryńska i in. 1998]. Najczęściej prognozowane są wielkości absolutne charakteryzujące rozmiary podaży (liczba zatrudnionych, liczba

pracujących, niejednokrotnie z uwzględnieniem zawodów, kwalifikacji, sektorów, regionów), rzadziej wielkości względne (wskaźnik zatrudnienia).

Rozwiązania w zakresie stosowanych metod oraz prognozowanych zmiennych są różne w krajach Unii Europejskiej. W Polsce na potrzeby Narodowego Planu Rozwoju na lata 2007-2013 opracowano projekcję rynku pracy na lata 2004-2020. Wykorzystano wówczas przepływowy model rynku pracy, który na podstawie prognozy demograficznej oraz wynikającego z prognozy makroekonomicznej wzrostu liczby osób pracujących zwracał liczbę osób pracujących, bezrobotnych oraz biernych zawodowo według płci i wykształcenia. Wyznaczono wtedy także prognozy wskaźnika zatrudnienia w grupie wiekowej 15-64 lata [*Projekcja rynku pracy...* 2003]. W kraju do wyznaczania prognoz zatrudnienia stosuje się modele panelowe, wielorównaniowe modele proste o równaniach pozornie niezależnych (SUR), modele wielorównaniowe o złożonej strukturze powiązań, a także modele ekonometryczne uwzględniające interakcje przestrzenne [Suchecki (red.) 2005; Kwiatkowski, Suchecki (red.) 2014; Suchecki (red.) 2010]. Wymienione modele znalazły zastosowanie w prognozowaniu zatrudnienia w kraju z uwzględnieniem grup zawodowych i regionów do 2020 roku [Kwiatkowski, Suchecki (red.) 2014]. Przegląd systemów monitorowania i prognozowania regionalnych rynków pracy w Polsce w latach 2007-2013 zawiera praca [Batóg i in. 2016].

W Holandii w prognozowaniu popytu na pracę stosuje się modele ekonometryczne oraz model makroekonomiczny, a w Niemczech wykorzystywany jest makroekonomiczny model typu *input-output* skonstruowany według podejścia *bottom-up*; model generuje prognozę zatrudnienia według branż gospodarki [Arendt 2012]. W Wielkiej Brytanii przyjęte w prognozowaniu podejście bazuje na regionalnym, wielosektorowym modelu makroekonomicznym (UKMOD), a wyznaczone prognozy zatrudnienia obejmują lata 2015-2025 [Gudgin i in. 2015]. Fiński system prognozowania strony podażowej i popytowej rynku pracy opiera się na długoterminowym modelu siły roboczej (model LTM) oraz modelu Mitenna, natomiast w Czechach stosowany jest model ekonometryczny (model E3ME) do tworzenia prognoz zmian liczby pracujących według sektorów w krótkim i średniookresowym przedziale czasowym [Arendt, Ulrichs (red.) 2012].

Dla sformułowanych w Strategii „Europa 2020” celów materiałem porównawczym mogą być prognozy wskaźnika zatrudnienia osób w wieku 20-64 lata na rok 2020 skonstruowane w trzech scenariuszach: (1) unijny rynek pracy powróci do swojego najlepszego okresu o niskiej stopie bezrobocia z początku XXI wieku, (2) pojawienia się wysokiego bezrobocia (histereza bezrobocia) oraz (3) obniżenia się stopy bezrobocia do minimalnego poziomu, poniżej historycznych wartości [Medeiros, Minty 2012]. W zależności od przyjętego scenariusza w 2020 roku w Unii Europejskiej wskaźnik zatrudnienia osób w wieku 20-64 lata będzie wahał się od 71,3% (scenariusz 2) do 74,3% (scenariusz 3). W umiarkowanie optymistycznym (scenariusz 1) wskaźnik osiągnie wartość 72,3%. Dla zdecydowanej większości krajów członkowskich prognozy wskaźnika zatrudnienia na 2020 rok (według scena-

riusza 1 oraz 2) były niższe od krajowych celów ustalonych w Krajowych programach reform, natomiast według scenariusza 3 prognozy wskaźnika dla większości krajów były większe od ustalonych krajowych wartości docelowych. Opublikowane prognozy wskaźnika skonstruowano zgodnie z metodologią opracowaną przez Ageing Working Group. Metodologia ta bazuje na analizie kohortowej w ustaleniu współczynników udziału osób według płci i wieku na rynku pracy oraz założeniu, iż wskaźnik zatrudnienia nie zależy od liczby ludności, a zależy od współczynnika udziału i zakładanej stopy bezrobocia [*The 2009 Ageing...* 2008; Medeiros, Minty 2012, s. 25].

Wytyczone krajowe cele wskaźnika zatrudnienia poddawane są sceptycznym osądom. K. Fiedorowicz uważa, że brak jest społecznej akceptacji do zwiększania wskaźnika zatrudnienia, co jest rezultatem niskiego poziomu wykształcenia, a wraz ze wzrostem poziomu wykształcenia stopa zatrudnienia w Polsce może wzrosnąć do około 60% w 2020 roku [Fiedorowicz 2011, s. 24].

W badaniach rynku pracy najczęściej roczne prognozy zatrudnionych lub pracujących były wyznaczane z horyzontem w roku 2020, a prognozy wskaźnika zatrudnienia – zwykle na rok 2020 [Kwiatkowski, Suhecki (red.) 2014; *Skills Supply...* 2010; *The 2009 Ageing...* 2008; Medeiros, Minty 2012].

Od roku 2010 konstruowane prognozy wskaźnika zatrudnienia nie są porównywalne pod względem rzeczowym z tymi, które były wyznaczane we wcześniejszych latach. W okresie funkcjonowania Strategii lizbońskiej wskaźnik zatrudnienia dotyczył osób w wieku 15-64 lata, a po roku 2010 – grupy wiekowej 20-64 lata [*Projekcja rynku pracy...* 2003; Medeiros, Minty 2012].

3. Stosowana metoda

Dla ustalenia tempa zmian w czasie wskaźnika zatrudnienia zdecydowano się na wybór subiektywnych modeli formalnych (tzw. modeli formalnych drugiego rodzaju, subiektywnych modeli tendencji rozwojowych). Modele formalne drugiego rodzaju są klasą modeli integrujących ilościowe i jakościowe metody prognozowania [Dittmann i in. 2011, s. 21-22]. Ilościowe metody prognozowania opierają się na formalnych modelach (tzw. modelach formalnych pierwszego rodzaju, do których należą np. modele ekonometryczne). Modele te budowane są na postawie obiektywnych danych dotyczących zmiennej objaśnianej i zmiennych objaśniających, a parametry modeli szacowane są metodami statystycznymi. Jakościowe metody prognozowania opierają się na nieformalnych modelach myślowych, zwykle sądach ekspertów. Prognozy wyznaczane na podstawie opinii ekspertów na ogół wykazują cechę obciążoności [Makridakis i in. 1998]. W celu uniknięcia wad modeli nieformalnych i eksponowania zalet modeli formalnych pierwszego rodzaju podejmuje się próby integracji tych dwóch klas metod.

Modele formalne drugiego rodzaju mają zastosowanie w prognozowaniu sprzedaży nowych produktów [Shim 2000 s. 95-102; Gardner 1991]. Przyjmowane jest

wówczas założenie o postaci funkcyjnej modelu na podstawie spodziewanego kształtu krzywej życia produktu, a stosować można funkcje: liniową, wykładniczą, wykładniczą odwrotnościową (z asymptotą poziomą) lub logistyczną. Subiektywne modele tendencji rozwojowych wykorzystywane były także w długookresowym prognozowaniu zapotrzebowania na energię elektryczną z odnawialnych źródeł energii [Poradowska 2013]. Modele te mogą sprawdzać się w sytuacji, gdy o prognozowanej zmiennej brakuje informacji o przeszłości, informacje są niepełne lub nastąpiły istotne zmiany o charakterze jakościowym, takie jak zmiana kierunku trendu.

Za wyborem w niniejszym badaniu subiektywnych modeli formalnych przemawiają: brak dostatecznie długich szeregów czasowych o względnie małej zmienności, niejednorodność danych statystycznych związana ze zmianą sposobu agregacji (wcześniej wskaźnik zatrudnienia odnosił się do osób w wieku 15-64 lata) oraz zmiana kierunku dotychczasowych tendencji rozwojowych jako efekt kryzysu gospodarczego lat 2008 i 2009.

Wartości parametrów subiektywnych modeli tendencji rozwojowych, w przeciwieństwie do obiektywnych modeli formalnych, nie są szacowane klasycznymi metodami statystycznymi, lecz określane na podstawie wartości początkowej (y_1 w okresie $t = 1$) i wartości końcowej (y_n w okresie $t = n$) ustalonych przez eksperta lub grupę ekspertów. Korzystanie z modeli formalnych drugiego rodzaju pozwala na wyznaczenie wartości znajdujących się pomiędzy tymi dwiema znanymi wartościami [Dittmann i in. 2011, s. 189-191].

Model właściwy dla stałego tempa zmian w czasie to model liniowej funkcji trendu opisany równaniem (1). Przyspieszone lub spowolnione tempa zmian w czasie określone są przez model z wykładniczą funkcją trendu – równanie (2).

$$y_t = \alpha + \beta \times t, \quad (1)$$

$$y_t = \alpha(1 + g)^t, \quad (2)$$

gdzie: t – zmienna czasowa, α , β , g – parametry modelu.

Dla opisanego coraz wolniejszych zmian w czasie można zastosować modele wykładniczy odwrotnościowy lub logistyczny [Dittmann i in. 2011, s. 189-191]. Skorzystanie z tych modeli poza wartościami początkową i końcową wymaga określenia poziomu nasycenia oznaczającego skończony potencjał rynku. Alternatywnym rozwiązaniem dla określenia spowolnionych zmian w czasie bez określania poziomu nasycenia może być model logarytmiczny:

$$y_t = \alpha + \beta \times \ln t, \quad (3)$$

gdzie: t – zmienna czasowa, α , β – parametry modelu.

W tabeli 1 zestawiono odpowiednie formuły pozwalające na wyznaczenie parametrów α , β , g na podstawie dwóch znanych wartości początkowej (y_1) i końcowej (y_n).

Tabela 1. Formuły parametrów wybranych modeli formalnych drugiego rodzaju

Postać funkcji trendu	Parametry modelu		
	α	β	g
Liniiowa	$\alpha = y_1 - \beta$	$\beta = \frac{y_n - y_1}{n - 1}$	
Wykładnicza	$\alpha = \frac{y_1}{1 + g}$		$g = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} - 1$
Logarytmiczna	$\alpha = y_1$	$\beta = \frac{y_n - y_1}{\ln(n)}$	

Źródło: opracowanie własne na podstawie [Dittmann i in. 2011, s. 189-191].

W modelu z liniową postacią funkcji trendu parametr β określa stałe tempo zmian w czasie, dodatnia wartość oznacza stały wzrost wartości w czasie, ujemna – stały spadek. W modelu z wykładniczą postacią funkcji trendu dodatnia wartość parametru g oznacza coraz szybszy wzrost, a ujemna – coraz wolniejszy spadek. Natomiast w modelu z logarytmiczną postacią trendu parametr β o dodatniej wartości wskazuje na coraz wolniejszy wzrost, a o ujemnej – coraz wolniejszy spadek.

Prognozę na dowolny okres ($t > 1$) wyznacza się poprzez ekstrapolację zbudowanego modelu. Weryfikację prognoz uzyskanych modelami formalnymi drugiego rodzaju przeprowadza się z zastosowaniem średnich błędów *ex post*. Przedział weryfikacji obejmuje okresy od $t = 1$ do $t = T$. Wykorzystać można następujące błędy: średni błąd prognozy *ex post* (ME), średni absolutny błąd prognozy *ex post* (MAE), średni absolutny błąd procentowy prognoz *ex post* (MAPE) oraz współczynnik Theila (I^2). Bliskie zeru wartości błędów *ex post*, a co za tym idzie – stosunkowo niskie wartości współczynnika Theila, będą świadczyć o wysokiej dokładności prognoz [Cieślak (red.) 2005, s. 51-52; Dittmann i in. 2011, s. 34-35].

W celu ustalenia przyczyn ewentualnej złej jakości prognoz stosuje się trzy mierniki będące składnikami współczynnika Theila. Wartości tych miar określają wielkość błędów popełnionych z tytułu: nieobciążoności prognozy, czyli nieodgadnięcia średniej wartości zmiennej (I^2_1), niedostatecznej elastyczności, czyli nieodgadnięcia wahań przypadkowych (I^2_2) oraz niedostatecznej zgodności prognoz z rzeczywistym kierunkiem zmian zmiennej, tj. nieodgadnięcia kierunku trendu (I^2_3). Dla ustalenia udziału poszczególnych przyczyn w całkowitym błędzie prognozy stosuje się relacje poszczególnych składników współczynnika względem I^2 [Cieślak (red.) 2005, s. 51-52].

Dodatkowo, aby określić dokładność prognozowania tendencji rozwojowej, wykorzystać można współczynnik rozbieżności dla różnic (U^A), obliczany według wzoru (4) [Kowalewski 2009, s. 42]:

$$U^{\Delta} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T-1} (\Delta y_t - \Delta y_t^*)^2}{\sum_{t=1}^{T-1} \Delta y_t^2}}, \quad (4)$$

gdzie: $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$, $\Delta y_t^* = y_{t+1}^* - y_t^*$, y_t – wartość rzeczywista w okresie t , y_t^* – wartość prognozowana w okresie t .

O wysokiej dokładności prognozowania tendencji rozwojowej będą świadczyć bliskie zero wartości tego współczynnika. Miernik ten stosowany jest w badaniach koniunktury gospodarczej, użyteczność współczynnika jest wysoka, gdy korzysta się z długich szeregów czasowych.

4. Uzyskane wyniki

Subiektywne modele formalne zbudowano dla każdego kraju Unii (z wyjątkiem Wielkiej Brytanii¹) oraz całej wspólnoty (UE-28). W budowie modeli określających różne tempa zmian w czasie przyjęto, że rok 2009 jest okresem początkowym ($t = 1$), a rok 2020 – okresem końcowym ($t = 12$). Wartością początkową (y_1) była wartość wskaźnika zatrudnienia obserwowana w kraju lub wspólnocie w 2009 roku, a wartością końcową (y_n) – wartość wskaźnika zatrudnienia ustalona jako cel w 2020 roku w kraju lub wspólnocie. Obliczono wartości parametrów subiektywnych modeli formalnych, zestawiając je w tab. 2.

Tabela 2. Wartości parametrów modeli formalnych drugiego rodzaju dla całej Unii oraz krajów członkowskich

Kraj	Model liniowy		Model wykładniczy		Model logarytmiczny	
	β	α	g	α	β	α
1	2	3	4	5	6	7
UE-28	0,55	68,45	0,0076	68,48	2,41	69,00
Austria	0,33	73,07	0,0044	73,08	1,45	73,40
Belgia	0,55	66,55	0,0079	66,57	2,45	67,10
Bułgaria	0,65	68,15	0,0091	68,18	2,90	68,80
Chorwacja	-0,12	64,32	-0,0019	64,32	-0,52	64,20
Cypr	-0,03	75,33	-0,0004	75,33	-0,12	75,30
Czechy	0,37	70,53	0,0051	70,54	1,65	70,90
Dania	0,23	77,27	0,0029	77,28	1,01	77,50

¹ Wielka Brytania nie określiła wartości docelowej wskaźnika w 2020 roku.

Tabela 2, cd.

1	2	3	4	5	6	7
Estonia	0,55	69,45	0,0075	69,48	2,41	70,00
Finlandia	0,41	73,09	0,0054	73,10	1,81	73,50
Francja	0,49	69,11	0,0068	69,13	2,17	69,60
Grecja	0,40	65,20	0,0059	65,21	1,77	65,60
Hiszpania	0,91	63,09	0,0133	63,16	4,02	64,00
Holandia	0,11	78,69	0,0014	78,69	0,48	78,80
Irlandia	0,19	66,71	0,0028	66,71	0,85	66,90
Litwa	0,53	66,47	0,0076	66,50	2,33	67,00
Luksemburg	0,24	70,16	0,0033	70,17	1,05	70,40
Łotwa	0,57	66,13	0,0082	66,15	2,54	66,70
Malta	1,00	58,00	0,0157	58,09	4,43	59,00
Niemcy	0,25	73,95	0,0034	73,95	1,13	74,20
Polska	0,55	64,35	0,0082	64,37	2,45	64,90
Portugalia	0,35	70,75	0,0049	70,76	1,57	71,10
Rumunia	0,59	62,91	0,0089	62,94	2,62	63,50
Słowacja	0,51	65,89	0,0074	65,91	2,25	66,40
Słowenia	0,28	71,62	0,0038	71,62	1,25	71,90
Szwecja	0,15	78,15	0,0020	78,15	0,68	78,30
Węgry	1,35	58,75	0,0203	58,90	6,00	60,10
Włochy	0,49	61,11	0,0077	61,13	2,17	61,60

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych z Eurostatu.

Uzyskano dodatkowo wartości parametrów określających tempo zmian w czasie trzech modeli o różnych postaciach funkcji trendu, co oznacza wzrost wartości wskaźnika zatrudnienia do 2020 roku w prawie wszystkich badanych krajach i całej wspólnocie. Wyjątkiem – z ujemnymi wartościami parametrów tempa zmian w każdym z trzech modeli – były dwa kraje: Chorwacja i Cypr.

Na podstawie skonstruowanych subiektywnych modeli formalnych wyznaczono prognozy wartości wskaźnika zatrudnienia na lata 2010-2020. Następnie zweryfikowano prognozy dla lat 2010-2015. Przedział weryfikacji obejmuje zatem okresy od $t = 2$ do $t = 6$, a pominięcie pierwszej obserwacji wynika z faktu, że prognoza na ten okres jest równa wartości rzeczywistej. Posłużono się błędami *ex post*: średnim (ME), średnim absolutnym (MAE) i średnim absolutnym błędem procentowym (MAPE). Wartości błędów zawarto w tab. 3.

Zauważono zbliżone wartości błędów średnich *ex post* prognoz wskaźnika zatrudnienia uzyskanych z modeli o liniowych i wykładniczych postaciach funkcji trendu. Porównano wartości błędów średnich (ME) i średnich absolutnych (MAE)

Tabela 3. Średnie błędy *ex post* prognoz wskaźnika zatrudnienia na lata 2010-2015 dla całej Unii oraz krajów członkowskich

Kraj	Model liniowy			Model wykładniczy			Model logarytmiczny		
	ME	MAE	MAPE (%)	ME	MAE	MAPE (%)	ME	MAE	MAPE (%)
UE-28	-2,0	2,0	2,9	-2,0	2,0	2,9	-3,5	3,5	5,1
Austria	-0,3	0,4	0,5	-0,3	0,4	0,5	-1,2	1,2	1,6
Belgia	-1,7	1,7	2,6	-1,7	1,7	2,5	-3,3	3,3	4,9
Bułgaria	-6,7	6,7	10,4	-6,6	6,6	10,3	-8,5	8,5	13,3
Chorwacja	-4,3	4,3	7,3	-4,3	4,3	7,3	-4,0	4,0	6,8
Cypr	-5,0	5,0	7,3	-5,0	5,0	7,3	-4,9	4,9	7,2
Czechy	0,1	0,8	1,1	0,1	0,8	1,1	-1,0	1,2	1,7
Dania	-2,5	2,5	3,2	-2,5	2,5	3,2	-3,1	3,1	4,1
Estonia	0,4	1,8	2,5	0,5	1,8	2,6	-1,1	1,7	2,5
Finlandia	-1,6	1,6	2,2	-1,6	1,6	2,1	-2,7	2,7	3,7
Francja	-1,7	1,7	2,5	-1,7	1,7	2,4	-3,1	3,1	4,5
Grecja	-10,4	10,4	19,0	-10,4	10,4	19,0	-11,5	11,5	21,0
Hiszpania	-6,3	6,3	10,5	-6,2	6,2	10,3	-8,9	8,9	14,7
Holandia	-2,9	2,9	3,8	-2,9	2,9	3,8	-3,2	3,2	4,2
Irlandia	-2,0	2,2	3,5	-2,0	2,2	3,5	-2,5	2,6	4,0
Litwa	0,3	1,8	2,6	0,3	1,8	2,6	-1,2	2,0	3,0
Luksemburg	-0,2	0,5	0,7	-0,2	0,5	0,7	-0,8	0,8	1,2
Łotwa	-0,1	1,5	2,2	0,0	1,5	2,2	-1,7	2,0	3,0
Malta	1,5	1,5	2,2	1,6	1,6	2,5	-1,3	1,4	2,2
Niemcy	1,8	1,8	2,3	1,8	1,8	2,4	1,1	1,1	1,4
Polska	-1,4	1,4	2,1	-1,3	1,3	2,1	-2,9	2,9	4,5
Portugalia	-4,4	4,4	6,6	-4,4	4,4	6,6	-5,4	5,4	8,0
Rumunia	-0,6	0,8	1,3	-0,5	0,8	1,2	-2,3	2,3	3,5
Słowacja	-2,6	2,6	4,0	-2,6	2,6	3,9	-4,0	4,0	6,2
Słowenia	-4,4	4,4	6,4	-4,4	4,4	6,4	-5,2	5,2	7,6
Szwecja	0,7	0,8	1,0	0,7	0,8	1,0	0,3	0,5	0,6
Węgry	-1,4	1,6	2,7	-1,1	1,5	2,5	-5,2	5,2	8,3
Włochy	-2,8	2,8	4,7	-2,8	2,8	4,6	-4,2	4,2	6,9

Źródło: obliczenia własne.

dla wspólnoty i każdego z krajów Unii. Stwierdzono, że w większości badanych krajów (18) oraz całej wspólnoty prognozy z modeli liniowych oraz z modeli wykładniczych były systematycznie zawyżane, natomiast w trzech krajach (Malta, Niemcy, Szwecja) – systematycznie zaniżane. Bardzo wysokie wartości błędów

ex post uzyskano dla trzech krajów: Grecji, Bułgarii i Hiszpanii. Wartości średnich błędów (ME) bliskie zeru wskazują, że prognozy były nieobciążone w 6 z 28 badanych obiektów: Czechach, Estonii, Litwie, Luksemburgu, Łotwie i na Węgrzech. Co więcej, w wymienionych krajach średnie absolutne błędy procentowe (MAPE) były bardzo niskie – nie przekraczały 3%.

Analiza wartości błędów średnich dla prognoz wyznaczonych z modeli o logarytmicznych postaciach funkcji trendu pozwoliła na stwierdzenie, że w zdecydowanej większości krajów (23) oraz całej wspólnocie prognozy były systematycznie zawyżane, a w dwóch (Niemcy, Szwecja) – systematycznie zaniżane. Prognozami nieobciążonymi charakteryzowały się tylko dwa kraje: Litwa i Estonia. Największe błędy *ex post* uzyskano dla Grecji, Bułgarii i Hiszpanii. W tych trzech przypadkach błędy MAPE przekraczały 13% i były większe aniżeli te uzyskane dla prognoz z modelu liniowego i wykładniczego.

Sprawdzono, jakie są przyczyny złej jakości prognoz. Posłużono się współczynnikiem Theila (I^2), składnikami tego miernika (P_1, P_2, P_3) oraz współczynnikiem rozbieżności dla różnic (U^d). Obliczono wartości współczynnika Theila i współczynnika rozbieżności różnic (wartości zestawiono w tab. 4) oraz udziały trzech mierników w wartości współczynnika I^2 (tab. 5).

Tabela 4. Wartości współczynnika Theila (I^2) i współczynnika rozbieżności dla różnic (U^d) dla całej Unii oraz krajów członkowskich

Kraj	Model liniowy		Model wykładniczy		Model logarytmiczny	
	I^2	U^d	I^2	U^d	I^2	U^d
1	2	3	4	5	6	7
UE-28	0,0009	0,9488	0,0009	0,9335	0,0028	1,2842
Austria	0,0001	1,3435	0,0001	1,3389	0,0003	1,3296
Belgia	0,0009	4,1845	0,0009	4,1237	0,0027	4,9813
Bułgaria	0,0112	0,9490	0,0109	0,9424	0,0180	1,1355
Chorwacja	0,0059	0,9894	0,0059	0,9892	0,0051	0,9650
Cypr	0,0068	0,9914	0,0068	0,9914	0,0066	0,9886
Czechy	0,0002	0,6270	0,0002	0,6293	0,0003	0,6811
Dania	0,0011	0,9528	0,0011	0,9499	0,0017	1,1461
Estonia	0,0009	0,7866	0,0010	0,7905	0,0010	0,7243
Finlandia	0,0006	1,3171	0,0006	1,3146	0,0015	1,2123
Francja	0,0007	2,0197	0,0007	1,9833	0,0021	2,6850
Grecja	0,0399	1,0828	0,0397	1,0810	0,0479	1,1265
Hiszpania	0,0127	1,1925	0,0121	1,1774	0,0235	1,3572
Holandia	0,0015	1,0371	0,0015	1,0368	0,0019	1,0682
Irlandia	0,0015	0,9247	0,0015	0,9247	0,0020	0,9631
Litwa	0,0010	0,7278	0,0010	0,7324	0,0012	0,6805

1	2	3	4	5	6	7
Luksemburg	0,0001	1,0200	0,0001	1,0199	0,0002	1,0280
Łotwa	0,0007	0,6692	0,0007	0,6752	0,0012	0,6222
Malta	0,0007	0,3561	0,0009	0,3768	0,0006	0,3876
Niemcy	0,0006	0,7572	0,0006	0,7595	0,0002	0,6440
Polska	0,0005	0,6809	0,0005	0,6778	0,0021	0,8540
Portugalia	0,0051	1,0441	0,0050	1,0425	0,0073	1,1066
Rumunia	0,0002	1,0515	0,0002	1,0418	0,0014	1,2775
Słowacja	0,0017	0,7598	0,0016	0,7565	0,0039	0,9027
Słowenia	0,0045	1,0735	0,0044	1,0718	0,0061	1,1574
Szwecja	0,0001	0,8421	0,0001	0,8429	0,0000	0,7815
Węgry	0,0009	0,5607	0,0007	0,5592	0,0073	0,7487
Włochy	0,0026	1,3844	0,0025	1,3736	0,0053	1,5157

Źródło: obliczenia własne.

Uzyskano niskie, bliskie zeru wartości współczynnika Theila, co potwierdza wysoką dokładność prognoz wskaźnika zatrudnienia wyznaczonych modelami o różnych postaciach funkcji trendu. Także w przypadku krajów o średnich absolutnych błędach procentowych (MAPE), przekraczających 10%, współczynnik Theila był relatywnie bliski zeru. W większości przypadków wartości współczynnika rozbieżności dla różnic na ogół przekraczają 1 lub oscylują wokół tej wartości, co wskazuje na niezbyt wysoką precyzję prognozowania tendencji rozwojowej wskaźnika zatrudnienia.

Obliczone udziały składników współczynnika Theila oznaczają, że w większości przypadków w każdym z trzech modeli o różnych postaciach funkcji trendu przyczyną złej jakości prognoz było nieodgadnięcie tendencji centralnej. I tak np. model logarytmiczny dla całej wspólnoty (UE-28) dał prognozy, których błąd w 95,2% wynikał z nieprecyzyjnego przewidywania średniej, 1,3% wynikało z nieodpowiedniej zmienności prognoz w stosunku do rzeczywistości, a 3,5% z niedostatecznej zgodności kierunku zmian prognoz z wartościami rzeczywistymi. Jedynie w przypadku Luksemburga na niezgodność kierunku trendu wskazały wartości udziałów składników współczynnika Theila (P_3) dla prognoz wyznaczonych modelem liniowym (75,3% błędu prognozy) oraz wykładniczym (75,7% błędu prognozy). Należy tu zauważyć, iż dla Luksemburga współczynnik Theila uzyskany dla wymienionych typów modeli był najmniejszy wśród badanych krajów członkowskich Unii Europejskiej. Z kolei modele zbudowane dla Estonii, Litwy, Czech i Łotwy dawały błędy, w których znaczna część była rezultatem nieodgadnięcia wahań przypadkowych.

W celu ustalenia, która z postaci funkcji trendu jest właściwa do osiągnięcia docelowej wartości wskaźnika zatrudnienia w 2020 roku w poszczególnych krajach Unii Europejskiej oraz całej wspólnocie, zastosowano kryterium najmniejszego

Tabela 5. Udziały (w %) składników współczynnika Theila dla całej Unii oraz krajów członkowskich

Kraj	Model liniowy			Model wykładniczy			Model logarytmiczny		
	F_1	F_2	F_3	F_1	F_2	F_3	F_1	F_2	F_3
UE-28	91,3	2,3	6,3	91,3	2,3	6,5	95,2	1,3	3,5
Austria	24,6	37,8	37,6	22,7	38,3	39,0	84,5	9,6	5,9
Belgia	73,3	15,7	11,0	72,8	15,9	11,3	89,0	6,7	4,4
Bułgaria	97,2	0,3	2,6	97,2	0,3	2,5	97,5	0,1	2,5
Chorwacja	88,7	9,2	2,1	88,7	9,2	2,1	87,6	10,4	2,0
Cypr	73,9	26,0	0,1	73,9	26,0	0,1	73,4	26,6	0,1
Czechy	0,7	96,2	3,1	1,2	96,0	2,8	52,8	40,0	7,1
Dania	98,1	0,0	1,8	98,2	0,0	1,8	98,3	0,1	1,7
Estonia	3,4	93,4	3,2	4,2	92,6	3,2	22,7	76,2	1,1
Finlandia	73,9	2,4	23,6	73,5	2,4	24,1	89,0	1,5	9,4
Francja	89,0	9,6	1,4	88,9	9,7	1,4	94,8	4,2	0,9
Grecja	84,5	8,0	7,5	84,4	8,1	7,5	86,4	6,4	7,2
Hiszpania	85,9	0,0	14,1	85,8	0,0	14,2	90,8	0,0	9,2
Holandia	96,0	0,9	3,1	96,0	0,9	3,1	96,5	0,6	2,9
Irlandia	62,1	35,2	2,7	61,9	35,4	2,7	72,0	24,3	3,7
Litwa	1,8	97,7	0,5	2,4	97,1	0,5	25,2	73,9	0,9
Luksemburg	10,2	14,5	75,3	9,2	15,1	75,7	71,9	3,0	25,1
Łotwa	0,4	98,9	0,7	0,1	99,1	0,8	51,0	48,3	0,7
Malta	70,1	29,8	0,1	72,6	27,4	0,1	69,0	24,2	6,7
Niemcy	90,4	8,3	1,3	90,4	8,3	1,3	81,8	17,1	1,0
Polska	85,6	4,7	9,7	84,6	5,5	9,9	94,4	0,6	5,0
Portugalia	83,7	4,9	11,3	83,7	5,0	11,3	87,3	3,0	9,7
Rumunia	48,0	11,3	40,7	44,0	11,2	44,8	88,7	2,7	8,6
Słowacja	95,7	0,3	4,0	95,6	0,4	4,0	97,1	0,0	2,9
Słowenia	92,1	1,3	6,7	92,1	1,3	6,6	93,4	0,8	5,9
Szwecja	65,2	31,2	3,6	65,3	31,1	3,6	23,6	70,7	5,8
Węgry	56,3	27,6	16,1	42,0	40,8	17,2	92,4	2,0	5,7
Włochy	83,7	1,0	15,3	83,5	1,0	15,5	90,7	0,8	8,4

Źródło: obliczenia własne.

średniego absolutnego błędu procentowego (MAPE) uzyskanego dla trzech postaci funkcji trendu. Wyniki klasyfikacji oraz jej jakość określoną wartościami średnich absolutnych błędów procentowych (MAPE) zestawiono w tab. 6.

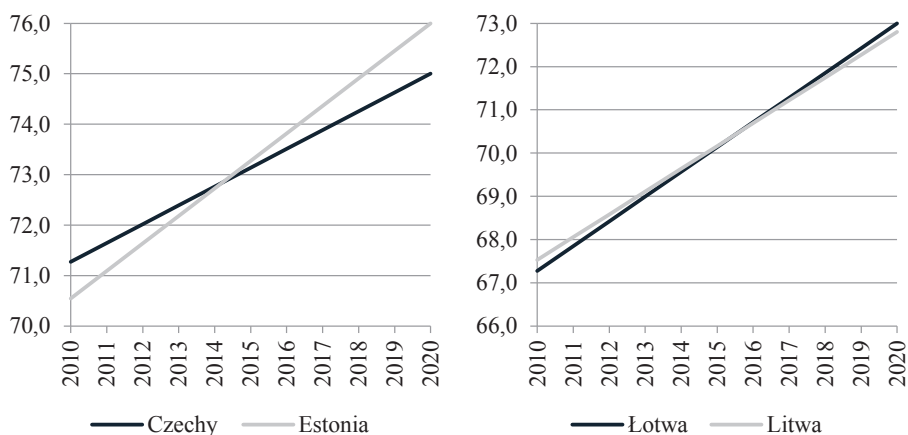
Stałe tempo wzrostu wskaźnika zatrudnienia (postać trendu liniowego) było odpowiednie dla czterech krajów: Czech, Estonii, Litwy i Łotwy. Spowolniony wzrost

Tabela 6. Klasyfikacja krajów Unii Europejskiej ze względu na wskazaną postać funkcji trendu wskaźnika zatrudnienia

Błąd średni MAPE	Model liniowy	Model wykładniczy	Model logarytmiczny
	stały wzrost (4)	coraz szybszy wzrost (19)	coraz wolniejszy wzrost (3) coraz wolniejszy spadek (2)
do 4%	Czechy, Estonia, Litwa, Łotwa	UE-28, Austria, Belgia, Dania, Finlandia, Francja, Holandia, Irlandia, Luksemburg, Polska, Rumunia, Słowacja, Węgry	Niemcy, Malta, Szwecja
4%-8%	–	Portugalia, Słowenia, Włochy	Chorwacja, Cypr
powyżej 8%	–	Bułgaria, Grecja, Hiszpania	–

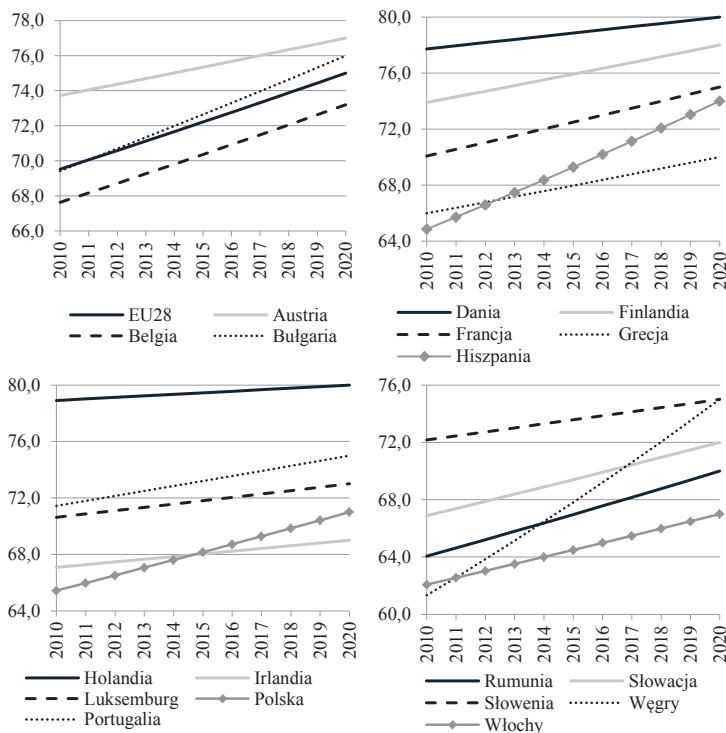
Źródło: obliczenia własne.

wskaźnika zatrudnienia (trend postaci logarytmicznej z dodatnią wartością parametru β) charakteryzował trzy kraje: Malte, Niemcy oraz Szwecję. Coraz wolniejszy spadek wskaźnika (trend postaci logarytmicznej z ujemną wartością parametru β) występował w dwóch krajach: Chorwacji i na Cyprze. Natomiast 18 krajów oraz cała wspólnota (UE-28) cechowały się przyspieszonym wzrostem wskaźnika zatrudnienia (postać wykładnicza trendu z dodatnią wartością parametru g). Podobne rezultaty odnośnie do wskazania tempa zmian w czasie wskaźnika zatrudnienia otrzymano z wykorzystaniem kryterium najmniejszego współczynnika Theila (T) oraz współczynnika rozbieżności dla różnic (U^d) uzyskanych dla trzech postaci funkcji trendu. Na rysunkach 3-5 przedstawiono skonstruowane prognozy wskaźnika zatrudnienia na lata 2010-2020 zgodnie ze wskazanymi postaciami funkcji trendu.



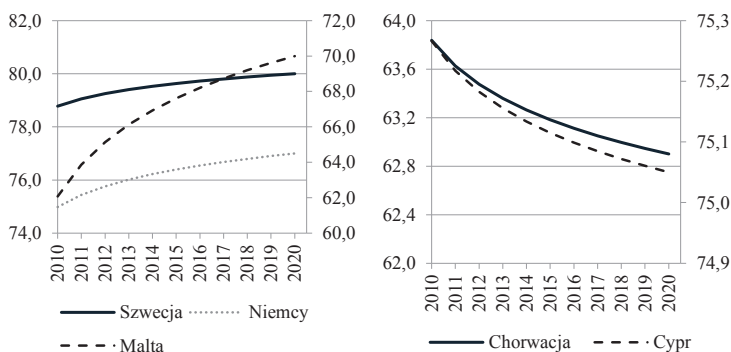
Rys. 3. Prognozy wskaźnika zatrudnienia na lata 2010-2020 w krajach Unii Europejskiej na podstawie modeli formalnych drugiego rodzaju z liniową funkcją trendu

Źródło: obliczenia własne.



Rys. 4. Prognozy wskaźnika zatrudnienia na lata 2010-2020 w krajach Unii Europejskiej na podstawie modeli formalnych drugiego rodzaju z wykładniczą funkcją trendu

Źródło: obliczenia własne.



Objaśnienie: oś pionowa po prawej stronie wykresu odnosi się do kraju, który jest wymieniony jako ostatni w legendzie.

Rys. 5. Prognozy wskaźnika zatrudnienia na lata 2010-2020 w krajach Unii Europejskiej na podstawie modeli formalnych drugiego rodzaju z logarytmiczną funkcją trendu

Źródło: obliczenia własne.

5. Zakończenie

Weryfikacja prognoz wyznaczonych na podstawie subiektywnych modeli formalnych pozwoliła na ustalenie trajektorii rozwoju wskaźnika zatrudnienia w grupie osób w wieku 20-64 lata do 2020 roku w krajach członkowskich Unii Europejskiej. W zdecydowanej większości badanych krajów uzyskano niskie wartości średnich błędów *ex post* (ME, MAE, MAPE, współczynnik Theila), co potwierdza wysoką dokładność prognoz wskaźnika zatrudnienia wyznaczonych modelami formalnymi drugiego rodzaju. Choć prognozy były generalnie obarczone małymi błędami, to były systematycznie zawyżane. Przyczynami złej jakości prognoz było nieodgadnięcie średniej wartości zmiennej. Otrzymane dość wysokie wartości współczynnika rozbieżności dla różnic mogły być rezultatem małej liczby obserwacji w przedziale weryfikacji prognoz (6 okresów), na podstawie których oceniano dokładność prognozowania tendencji rozwojowej. Wysokie wartości błędów średnich *ex post* w przedziale weryfikacji prognoz zaobserwowane w Grecji wskazują, że w kraju kryzys gospodarczy jeszcze się nie zakończył.

Kryterium minimalizacji błędu średniego *ex post* posłużyło do ustalenia dotychczasowego tempa zmian w czasie wskaźnika zatrudnienia. Model liniowy ze stałym tempem wzrostu wskaźnika zatrudnienia był odpowiedni dla Czech, Estonii, Litwy i Łotwy. Model logarytmiczny z dodatnią wartością parametru β , tj. spowolniony wzrost wskaźnika zatrudnienia, charakteryzował Malte, Niemcy oraz Szwecję. Model logarytmiczny z ujemną wartością parametru β , tj. spowolniony spadek wskaźnika, występował w Chorwacji i na Cyprze. Model wykładniczy z przyspieszonym tempem wzrostu wskaźnika zatrudnienia cechował 18 krajów oraz całą wspólnotę (UE-28). Nieobciążone prognozy (błędy ME bliskie zeru), a dodatkowo błędy MAPE nieprzekraczające 4% uzyskano w 6 krajach (w Czechach, Estonii, na Litwie, w Luksemburgu, na Łotwie i na Węgrzech), co utwierdza w przekonaniu o przyspieszonym tempie wzrostu wskaźnika zatrudnienia w tych krajach. Z kolei z ostrożnością należy traktować wskazania tempa dla trzech krajów: Grecji, Hiszpanii i Bułgarii, w których średnie błędy *ex post* (MAPE) przekroczyły 8%.

Ustalone w badaniu przyspieszone tempo wzrostu wskaźnika zatrudnienia w Polsce do 2020 roku zgadza się ze ścieżką wskazaną w [Krajowy Program Reform ... 2011]. Jakość prognoz z Krajowego Programu Reform była lepsza niż jakość prognoz z przeprowadzonego badania (MAPE 0,8% wobec 2,1%). W przypadku Estonii prognozy wskaźnika zatrudnienia osób w wieku 20-64 lata na lata 2011-2020 zawarte w [National Reform Programme... 2011] wynikały ze stałego wzrostu tej zmiennej, co odpowiadało stałemu wzrostowi wskaźnika zatrudnienia ustalonemu w badaniu. Jednakże jakość prognoz była gorsza; średni absolutny błąd procentowy prognoz *ex post* (MAPE) w przedziale weryfikacji 2011-2015 prognoz NRP był większy niż otrzymany dla prognoz z liniowego modelu formalnego drugiego rodzaju (odpowiednio 4,5% i 1,9%). Powyższe rezultaty sugerują dalsze monitorowanie prognoz wskaźnika zatrudnienia osób w wieku 20-64 lata w krajach Unii Europejskiej.

Literatura

- Arendt Ł., 2012, *Holenderskie i niemieckie doświadczenia w prognozowaniu popytu na pracę – wnioski dla polskiego systemu prognozowania zatrudnienia*, Instytut Pracy i Spraw Socjalnych oraz Centrum Rozwoju Zasobów Ludzkich, Warszawa.
- Arendt Ł., Ulrichs M. (red.), 2012, *Dobre praktyki prognozowania popytu na pracę w Europie*, Instytut Pracy i Spraw Socjalnych oraz Centrum Rozwoju Zasobów Ludzkich, Warszawa.
- Batóg J., Batóg B., Mojsiewicz M., Rozkrut M., 2016, *Wsparcie monitorowania i prognozowania rynku pracy przez statystykę publiczną*, Wiadomości Statystyczne, nr 1, s. 12-26.
- Cieślak M. (red.), 2005, *Prognozowanie gospodarcze. Metody i zastosowania*, PWN, Warszawa.
- Dittmann P., Szabela-Pasierbińska E., Dittmann I., Szpulak A., 2011, *Prognozowanie w zarządzaniu sprzedażą i finansami przedsiębiorstw*, Oficyna Wolters Kluwer business, Warszawa.
- Fiedorowicz K., 2011, *Zmiany spójności w Polsce*, Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, nr 81, s. 22-30.
- Gardner E., Jr., 1991, *Forecast with no data*, Lotus, vol. 7, no. 6.
- Gudgin G., Coutts K., Gibson N., Buchanan J., 2015, *UK Economy Forecasts Report*, Centre for Business Research, Cambridge.
- Komisja Europejska, 2010, Komunikat Komisji *Europa 2020. Strategia na rzecz inteligentnego i zrównoważonego rozwoju, sprzyjającego włączeniu społecznemu*, Bruksela 03.03.2010.
- Komisja Europejska, 2014, Komunikat Komisji do Parlamentu Europejskiego, Rady, Europejskiego Komitetu Ekonomiczno-Społecznego i Komitetu Regionów, *Podsumowanie realizacji strategii „Europa 2020” na rzecz inteligentnego, trwałego wzrostu gospodarczego, sprzyjającego włączeniu społecznemu*, Bruksela, 05.03.2014, http://ec.europa.eu/europe2020/pdf/europe2020stocktaking_pl.pdf (10.06.2016).
- Kowalewski G., 2009, *Zarys metod badania koniunktury gospodarczej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Wrocław.
- Krajowy Program Reform „Europa 2020”, 2011, http://ec.europa.eu/europe2020/pdf/nrp/nrp_poland_pl.pdf (05.06.2016).
- Kryńska E., Suchecka J., Suchecki B., 1998, *Prognoza podaży i popytu na pracę w Polsce do roku 2010*, Instytut Pracy i Spraw Socjalnych, Warszawa.
- Kwiatkowski E., Suchecki B. (red.), 2014, *Wyniki prognozy zatrudnienia w kraju według grup zawodów i obszarów statystycznych NUTS II do 2020 roku*, Instytut Pracy i Spraw Socjalnych oraz Centrum Rozwoju Zasobów Ludzkich, Warszawa.
- Makridakis S., Wheelwright S.C., Hyndman R.J., 1998, *Forecasting: Methods and Applications*, J. Wiley, New York.
- Medeiros J., Minty P., 2012, *Analytical support in the setting of EU employment rate targets for 2020*, Working Paper 1/2012, European Commission, Brussels.
- National Reform Programme „Estonia 2020”, 2011, http://ec.europa.eu/europe2020/pdf/nrp/nrp_estonia_en.pdf (05.06.2016)
- Poradowska K., 2013, *Modele subiektywne w konstrukcji prognoz długookresowych*, Studia Ekonomiczne, nr 124, s. 29-44.
- Projekcja rynku pracy na lata 2004-2020*, 2003, [w:] *Wstępny projekt Narodowego Planu Rozwoju 2007-2013*, Departament Analiz i Prognoz Ekonomicznych Ministerstwa Gospodarki i Pracy, Warszawa.
- Shim J.K., 2000, *Strategic Business Forecasting*, St. Lucie Press, New York.
- Skills Supply and Demand in Europe. Medium-Term Forecast up to 2020*, 2010, European Centre for the Development of Vocational Training, Luxembourg.
- Suchecki B. (red.), 2005, *Prognoza zatrudnienia w województwie śląskim*, ASM – Centrum Badań i Analiz Rynku, Łódź-Kutno.
- Suchecki B. (red.), 2010, *Ekonometria przestrzenna. Metody i modele analizy danych przestrzennych*, C.H. Beck, Warszawa.
- The 2009 Ageing Report: Underlying Assumptions and Projection Methodologies for the EU-27 Member States (2007-2060)*, 2008, European Economy 7/2008, European Communities, Luxembourg.