EKONOMETRIA ECONOMETRICS 1(55) • 2017

ISSN 1507-3866
e-ISSN 2449-9994

Jerzy Witold Wiśniewski
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
e-mail: Jerzy.Wisniewski@umk.pl

PREDYKCJA Z UKŁADU RÓWNAŃ WSPÓŁZALEŻNYCH

PREDICTION FROM AN INTERDEPENDENT SYSTEM OF EQUATIONS

DOI: 10.15611/ekt.2017.1.01
JEL Classification: C01, C32, C53

Streszczenie: Predykcję z układu równań współzależnych można przeprowadzić na podstawie równań formy zredukowanej. Predykcja z równań formy zredukowanej może jednak prowadzić do prognoz rozbieżnych. W pracy przedstawiona została procedura predykcji z układu równań współzależnych, nazwana zredukowano-łańcuchową. Następuje „rozerwanie" sprzężenia zwrotnego (zamkniętego cyklu powiązań). Umożliwi to rozpoczęcie predykcji, która będzie kontynuowana zgodnie z kierunkiem w mechanizmie powiązań zmiennych łącznie współzależnych, według zasady predykcji łańcuchowej. Prognoza z równania formy zredukowanej zostanie wykorzystana do szacowania prognoz, zgodnie z regułą predykcji łańcuchowej w pozostałych równaniach układu. Procedurę predykcji kontynuuje się, jeśli prognoza z formy zredukowanej różni się istotnie od prognozy z tegoż równania formy strukturalnej.

Słowa kluczowe: predykcja ekonometryczna, prognoza ekonometryczna, predyktor, układ równań współzależnych.

Summary: Prediction from an interdependent system of equations can be carried out in two ways. In the first procedure, equations of the structural form of a model are used. In the second proceeding, inference into the future is based on the reduced-form equations. Prediction from the reduced form, however, can lead to divergent forecasts. The work presents the procedure of prediction from an interdependent system of equations, based on the structural form, which can be called the *reduced-chain prediction procedure*. The procedure requires a "break" of the feedback or of the closed cycle of links. It will allow starting an econometric prediction, which will be continued in accordance with the direction in the linkage mechanism of jointly interdependent variables, according to the chain prediction principle. The forecast obtained from the reduced-form equation will be used for forecast estimation, in accordance with the chain prediction principle in the other equations of the system. The prediction procedure is continued, if the first forecast from the reduced-form equation differs significantly from an analogous equation of the structural form, after the completion of the process on the cycle of equations.

Keywords: econometric prediction, econometric forecast, predictor, system of interdependent equations.

1. Wstęp

Predykcja z układów równań współzależnych nie należy do zagadnień często prezentowanych w literaturze ekonomicznej. Zainteresowanie makromodelami ekonometrycznymi powodowało w przeszłości wzmiankowe traktowanie w literaturze predykcji z układów równań współzależnych. Znane w literaturze układy równań współzależnych są głównie modelami gospodarek narodowych różnych państw.

Makromodele są oparte najczęściej na danych w postaci rocznych szeregów czasowych, które charakteryzują się „gładkim" przebiegiem. Wyjątkowo zdarzają się makromodele ekonometryczne oparte na danych kwartalnych. W takich przypadkach dokładność opisu każdego z równań jest zazwyczaj wysoka, dominują bowiem przypadki współczynnika zbieżności R^2 na poziomie powyżej 0,95, często osiągając wartość 0,99. W takiej sytuacji nie dostrzega się kwestii ewentualnych rozbieżności prognoz, uzyskiwanych z formy zredukowanej, po ich konfrontacji z wynikami predykcji z równań w formie strukturalnej modelu.

Celem niniejszej pracy jest prezentacja autorskiej metody predykcji z układu równań współzależnych, opierającej się na empirycznych równaniach formy strukturalnej, przeznaczonej głównie dla mikromodeli ekonometrycznych. Procedura predykcji będzie analogiczna do tzw. predykcji łańcuchowej, właściwej dla modelu rekurencyjnego. Różnica – w porównaniu z predykcją z modelu rekurencyjnego – polega na konieczności wykorzystania jednego z empirycznych równań formy zredukowanej do rozpoczęcia procedury budowy ciągu prognoz z kolejnych równań empirycznych z formy strukturalnej. Konsekwencją tego będzie propozycja procedury predykcji z układu równań współzależnych, którą można określić jako **zredukowano-łańcuchową** [Wiśniewski 2016a, s. 43-45]. Stanowi to wkład do teorii budowy prognoz ekonometrycznych we wskazanych poniżej okolicznościach. Proponowana procedura predykcji ekonometrycznej zilustrowana została przykładem empirycznym, opartym na danych z realnie istniejącego małego przedsiębiorstwa.

2. Specyfika predykcji z układów równań współzależnych

Predykcję z układu równań współzależnych można przeprowadzić dwoma sposobami. W pierwszym sposobie postępowania wykorzystuje się równania strukturalnej formy modelu, w drugim natomiast – wnioskowanie w przyszłość odbywa się na podstawie równań formy zredukowanej. Metody te nie zastępują się wzajemnie, a stosowalność każdej z nich zależy od rodzaju pytań, jakie są stawiane i na które należy odpowiedzieć poprzez przeprowadzenie wnioskowania w przyszłość.

Równania formy zredukowanej można wykorzystywać wtedy, gdy pomija się w rozważaniach istnienie wzajemnych powiązań przyczynowych w stochastycznych zmiennych łącznie współzależnych oraz gdy dąży się do oszacowania efektu tylko jednostronnej zależności tych zmiennych. Sposób postępowania jest wówczas zbliżony do tego, jaki stosuje się w przypadku równań prostych. Wartości zmiennych endogenicznych odgrywających w równaniach rolę objaśniających ustala się przy tym na okres prognozowany T takimi metodami, jakie stosuje się do zmiennych egzogenicznych.

Predykcja oparta na równaniach formy strukturalnej, uwzględniająca tylko jedną stronę wielostronnych powiązań pomiędzy zmiennymi łącznie współzależnymi, ma więc charakter wnioskowania w przyszłość wyłącznie na bardzo krótkie okresy [Pawłowski 1973, s. 259-265; Zeliaś 1997, s. 20]. Tylko w bardzo krótkim okresie można abstrahować od innych stron współzależności między zmiennymi łącznie współzależnymi. W dłuższych okresach współzależności pomiędzy zmiennymi endogenicznymi odgrywają istotną rolę, a pominięcie ich może wypaczyć sens i wyniki badań prognostycznych.

Z powyższego względu większe znaczenie praktyczne ma drugi sposób wnioskowania w przyszłość – oparty na równaniach zredukowanej formy modelu. W tej metodzie prognozę można traktować jako warunkową nadzieję matematyczną, przy czym w warunku występują zmienne z góry ustalone. Predykcję przeprowadza się na podstawie każdego z równań formy zredukowanej pojedynczo. Postępowanie jest tu identyczne jak w przypadku modelu prostego. Forma zredukowana ma bowiem charakter modelu prostego.

Jeśli bezpośrednio oszacowano parametry równań formy zredukowanej, wówczas znane są wariancje i kowariancje szacunków parametrów strukturalnych każdego z równań tej formy. Łatwo można wówczas wyznaczyć wariancje predykcji dla każdego z równań. Trudniej jest natomiast w sytuacji, gdy formę zredukowaną wyznaczono z empirycznej formy strukturalnej. Warto zwrócić uwagę, że zazwyczaj równania formy zredukowanej, z których każde zawiera wszystkie zmienne z góry ustalone, charakteryzują się występowaniem nieistotnych statystycznie zmiennych objaśniających. Konsekwencją tego są duże zazwyczaj średnie błędy predykcji, obliczane z formy zredukowanej. Dlatego też średnie błędy predykcji dla prognoz z układów równań współzależnych, otrzymanych z równań formy zredukowanej, warto wyznaczać z macierzy wariancji i kowariancji ocen parametrów strukturalnych uzyskiwanych z równań formy strukturalnej.

Predykcja oparta na równaniach formy zredukowanej modelu ma w pewnym sensie własności optymalne, jeśli do szacowania parametrów zastosowano odpowiednią metodę estymacji [Pawłowski 1973, s. 254; Wiśniewski, Zieliński 2004, s. 374]. Predykcja oparta na podstawie równań formy zredukowanej ma cechę optymalności w tym sensie, że daje ona mniejsze błędy średnie predykcji niż inne metody wykorzystujące ten sam zasób informacji.

Rozważmy predykcję z układu równań współzależnych na podstawie następującego modelu:

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \alpha_{10} + \alpha_{11}x_{t1} + \alpha_{14}t + \alpha_{15}y_{3t-1} + \eta_{1t}, \\ y_{2t} &= \alpha_{20} + \alpha_{22}x_{t2} + \alpha_{24}t + \beta_{23}y_{3t} + \eta_{2t}, \\ y_{3t} &= \alpha_{30} + \alpha_{33}x_{t3} + \beta_{32}y_{2t} + \eta_{3t}. \end{aligned} \tag{1}$$

Predykcję z równania pierwszego powyższego układu na okres $T = n + 1$ można wykonać niezależnie od pozostałych równań, ponieważ jest to równanie oderwane. Prognozy $y_{2T}^{(p)}$ oraz $y_{3T}^{(p)}$ należy szacować na podstawie predyktora z formy zredukowanej:

$$y_{2T}^{(p)} = \hat{c}_{20} + \hat{c}_{21} x_{T1} + \hat{c}_{22} x_{T2} + \hat{c}_{23} x_{T3} + \hat{c}_{24} T + \hat{c}_{25} y_{3T-1},$$

$$y_{3T}^{(p)} = \hat{c}_{30} + \hat{c}_{31} x_{T1} + \hat{c}_{32} x_{T2} + \hat{c}_{33} x_{T3} + \hat{c}_{34} T + \hat{c}_{35} y_{3T-1}, \tag{2}$$

gdzie symbolami $\hat{c}_{gj}$ (g = 2, 3; j = 0, 1, ..., 5) oznaczono oceny parametrów równań drugiego i trzeciego z formy zredukowanej, uzyskane za pomocą KMNK. Predyktorem dla pierwszej zmiennej łącznie współzależnej będzie:

$$y_{1T}^{(p)} = a_{10} + a_{11} x_{T1} + a_{14} T + a_{15} y_{3T-1}, \tag{3}$$

w którym symbolami $a_{10}, a_{11}, a_{14}, a_{15}$ oznaczono oceny parametrów strukturalnych równania, uzyskane za pomocą klasycznej metody najmniejszych kwadratów (KMNK).

Dostrzec można, że w kolejnych okresach prognozowanych ($T = n + 2$, $n + 3$, ..., $n + \tau$) pojawia się konieczność stosowania predykcji sekwencyjnej. Zmienna opóźniona y_{3T-1}, występująca w każdym z równań rozpatrywanego predyktora, powoduje konieczność szacowania w pierwszej kolejności prognoz trzeciej zmiennej łącznie współzależnej. Pozwoli to na wykorzystywanie w kolejnych okresach – w każdym z równań predyktora $\mathbf{Y}_{\mathrm{Tp}}$ – prognozy $y_{3T-1}^{(p)}$ jako zmiennej objaśniającej w poszczególnych równaniach.

3. Proponowana procedura predykcji

Problematyka modeli wielorównaniowych należy do klasyki teorii ekonometrii oraz ekonometrii stosowanej. Empiryczne zagadnienia prognozowania oparte na modelach wielorównaniowych nie należą do często przedstawianych w literaturze. Szczególnie mało jest prac na temat prognoz z układów równań współzależnych. Dotyczy to zwłaszcza mikromodeli ekonometrycznych. Mimo niewielkiego zainteresowania tą problematyką ze strony badaczy należy wzbogacać literaturę o nowe rozwiązania prognostyczne. Pozwoli to rozwiązywać ważne zagadnienia prognozowania, zwłaszcza w mikroskali, gdy pojawi się konieczność szacowania prognoz opartych na układach równań współzależnych na poziomie przedsiębiorstw.

Prognozy z układu równań współzależnych można szacować również częściowo z równań formy zredukowanej oraz w części z równań formy strukturalnej. Rozważmy następujący układ równań:

$$y_{1t} = \alpha_{10} + \alpha_{11} x_{t1} + \alpha_{14} t + \alpha_{16} y_{3t-1} + \beta_{14} y_{4t} + \eta_{1t},$$

$$
\begin{aligned}
y_{2t} &= \alpha_{20} + \alpha_{22}x_{t2} + \beta_{21}y_{1t} + \alpha_{25}y_{2t-1} + \eta_{2t}, \\
y_{3t} &= \alpha_{30} + \alpha_{34}t + \beta_{31}y_{1t} + \beta_{32}y_{2t} + \alpha_{35}y_{2t-1} + \eta_{3t}, \\
y_{4t} &= \alpha_{40} + \alpha_{43}x_{t3} + \beta_{43}y_{3t} + \alpha_{46}y_{3t-1} + \eta_{4t}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Dostrzega się zamknięty cykl powiązań zmiennych łącznie współzależnych:

$$
\begin{array}{ccc}
y_{1t} & \rightarrow & y_{2t} \\
\uparrow & & \downarrow \\
y_{4t} & \leftarrow & y_{3t}
\end{array},
\tag{5}
$$

który oznacza układ równań współzależnych. Predykcję z powyższego modelu można przeprowadzić techniką mieszaną: częściowo z formy zredukowanej oraz częściowo z formy strukturalnej, stosując technikę predykcji łańcuchowej, specyficznej dla modelu rekurencyjnego. Korzystanie w szacowaniu prognoz z predyktora formy strukturalnej o postaci:

$$
\begin{aligned}
y_{1T}^{(p)} &= a_{10} + a_{11}x_{T1} + a_{14}T + a_{16}y_{3T-1} + b_{14}y_{4T}^{(p)}, \\
y_{2T}^{(p)} &= a_{20} + a_{22}x_{T2} + b_{21}y_{1T}^{(p)} + a_{25}y_{2T-1}, \\
y_{3T}^{(p)} &= a_{30} + a_{34}T + b_{31}y_{1T}^{(p)} + b_{32}y_{2T}^{(p)} + a_{35}y_{2T-1}, \\
y_{4T}^{(p)} &= a_{40} + a_{43}x_{T3} + b_{43}y_{3T}^{(p)} + a_{46}y_{3T-1},
\end{aligned}
\tag{6}
$$

nie jest natychmiastowo możliwe. Przeszkodą jest brak równania początkowego jako rezultat zamkniętego cyklu powiązań, tworzącego „pętlę” (5). Likwidacja „pętli” może nastąpić przez wykorzystanie równania formy zredukowanej do oszacowania prognozy $y_{1T}^{(p0)}$, czyli:

$$
y_{1T}^{(p0)} = \hat{c}_{10} + \hat{c}_{11}\, x_{T1} + \hat{c}_{12}\, x_{T2} + \hat{c}_{13}\, x_{T3} + \hat{c}_{14}\, T + \hat{c}_{15}\, y_{3T-1} + \hat{c}_{16} y_{3T-1}.
\tag{7}
$$

Znajomość prognozy $y_{1T}^{(p0)}$ umożliwia zastosowanie techniki predykcji łańcuchowej do kolejnych równań predyktora w formie strukturalnej. Możemy zatem oszacować prognozę $y_{2T}^{(p0)}$ z równania:

$$
y_{2T}^{(p0)} = a_{20} + a_{22}x_{T2} + b_{21}y_{1T}^{(p0)} + a_{25}y_{2T-1}.
\tag{8}
$$

Dysponowanie prognozami $y_{1T}^{(p0)}$ oraz $y_{2T}^{(p0)}$ umożliwia oszacowanie prognozy $y_{3T}^{(p0)}$ na podstawie równania:

$$
y_{3T}^{(p0)} = a_{30} + a_{34}T + b_{31}y_{1T}^{(p0)} + b_{32}y_{2T}^{(p0)} + a_{35}y_{2T-1}.
\tag{9}
$$

Mając prognozę $y_{3T}^{(p0)}$, można oszacować prognozy $y_{4T}^{(p0)}$, opierając się na równaniu:

$$y_{4T}^{(p0)} = a_{40} + a_{43}x_{T3} + b_{43}y_{3T}^{(p0)} + a_{46}y_{3T-1}. \tag{10}$$

Posiadanie prognozy $y_{4T}^{(p0)}$ umożliwia z kolei oszacowanie prognozy $y_{1T}^{(p1)}$ z równania formy strukturalnej:

$$y_{1T}^{(p1)} = a_{10} + a_{11}x_{T1} + a_{14}T + a_{16}y_{3T-1} + b_{14}y_{4T}^{(p0)}. \tag{11}$$

Istnieje bowiem konieczność porównania prognozy $y_{1T}^{(p1)}$ z prognozą $y_{1T}^{(p0)}$. W przypadku istotnej różnicy pomiędzy tymi prognozami należy oszacować prognozę $y_{2T}^{(p1)}$ z równania:

$$y_{2T}^{(p1)} = a_{20} + a_{22}x_{T2} + b_{21}y_{1T}^{(p1)} + a_{25}y_{2T-1}. \tag{12}$$

Prowadzi to do wyznaczenia kolejnych prognoz $y_{3T}^{(p1)}$ oraz $y_{4T}^{(p1)}$ na podstawie równania:

$$y_{3T}^{(p1)} = a_{30} + a_{34}T + b_{31}y_{1T}^{(p1)} + b_{32}y_{2T}^{(p1)} + a_{35}y_{2T-1} \tag{13}$$

oraz

$$y_{4T}^{(p1)} = a_{40} + a_{43}x_{T3} + b_{43}y_{3T}^{(p1)} + a_{46}y_{3T-1}. \tag{14}$$

Proponowana technika predykcji na kolejne okresy prognozowane T winna uwzględniać konieczność postępowania sekwencyjnego, wynikającego z występowania opóźnionych zmiennych endogenicznych $y_{2T-1}^{(p)}$ oraz $y_{3T-1}^{(p)}$. Ostatecznie predykcja z układu równań współzależnych może łączyć predykcję z równań formy zredukowanej z predykcją sekwencyjną oraz łańcuchową.

Korzystanie w szacowaniu prognoz z predyktora formy strukturalnej o postaci:

$$\begin{gathered}
y_{1T}^{(p2)} = a_{10} + a_{11}x_{T1} + a_{14}T + a_{16}y_{3T-1} + b_{14}y_{4T}^{(p1)}, \\
y_{2T}^{(p2)} = a_{20} + a_{22}x_{T2} + b_{21}y_{1T}^{(p2)} + a_{25}y_{2T-1}, \\
y_{3T}^{(p2)} = a_{30} + a_{34}T + b_{31}y_{1T}^{(p2)} + b_{32}y_{2T}^{(p2)} + a_{35}y_{2T-1}, \\
y_{4T}^{(p2)} = a_{40} + a_{43}x_{T3} + b_{43}y_{3T}^{(p2)} + a_{46}y_{3T-1},
\end{gathered} \tag{15}$$

można dopuścić z powtórzeń, co doprowadzi ostatecznie do prognoz zbieżnych z równań o postaci:

$$\begin{gathered}
y_{1T}^{(pz)} = a_{10} + a_{11}x_{T1} + a_{14}T + a_{16}y_{3T-1} + b_{14}y_{4T}^{(pz-1)}, \\
y_{2T}^{(pz)} = a_{20} + a_{22}x_{T2} + b_{21}y_{1T}^{(pz)} + a_{25}y_{2T-1},
\end{gathered}$$

$$y_{3T}^{(pz)} = a_{30} + a_{34}T + b_{31}y_{1T}^{(pz)} + b_{32}y_{2T}^{(pz)} + a_{35}y_{2T-1}, \tag{16}$$

$$y_{4T}^{(pz)} = a_{40} + a_{43}x_{T3} + b_{43}y_{3T}^{(pz)} + a_{46}y_{3T-1}.$$

Prowadzi to do prognoz $y_{1T}^{(p2)}$, $y_{2T}^{(p2)}$, $y_{3T}^{(p2)}$, $y_{4T}^{(p2)}$, które należy porównać z analogicznymi prognozami z pierwszej iteracji, czyli $y_{1T}^{(p1)}, y_{2T}^{(p1)}, y_{3T}^{(p1)}, y_{4T}^{(p1)}$. W przypadku znacznych różnic $y_{iT}^{(p2)} - y_{iT}^{(p1)}$ (i = 1, 2, 3, 4) należy kontynuować obliczenia prognoz w kolejnych iteracjach, aż do iteracji o numerze z, w celu uzyskania nieistotnych różnic[1] w ostatniej iteracji obliczeń (z) w porównaniu z iteracją bezpośrednio poprzedzającą (z – 1).

Prognozy z poszczególnych równań predyktora (6), uzyskane w kolejnych v = 1, …, z, iteracjach zamieszczono w tab. 1. Tabela ta zawiera również różnice pomiędzy prognozami otrzymanymi w kolejnych, sąsiadujących iteracjach obliczeniowych.

Tabela 1. Prognozy z układu równań współzależnych w kolejnych z iteracjach

Równanie predyktora	Iteracja 0	Iteracja 1	Różnica 1	Iteracja 2	Różnica 2	…	Iteracja z	Różnica z
$y_{1T}^{(p)}$	$y_{1T}^{(p0)}$	$y_{1T}^{(p1)}$	$y_{1T}^{(p1)} - y_{1T}^{(p0)}$	$y_{1T}^{(p2)}$	$y_{1T}^{(p2)} - y_{1T}^{(p1)}$	…	$y_{1T}^{(pz)}$	$y_{1T}^{(pz)} - y_{1T}^{(pz-1)}$
$y_{2T}^{(p)}$	$y_{2T}^{(p0)}$	$y_{2T}^{(p1)}$	$y_{2T}^{(p1)} - y_{2T}^{(p0)}$	$y_{2T}^{(p2)}$	$y_{2T}^{(p2)} - y_{2T}^{(p1)}$	…	$y_{2T}^{(pz)}$	$y_{2T}^{(pz)} - y_{2T}^{(pz-1)}$
$y_{3T}^{(p)}$	$y_{3T}^{(p0)}$	$y_{3T}^{(p1)}$	$y_{3T}^{(p1)} - y_{3T}^{(p0)}$	$y_{3T}^{(p2)}$	$y_{3T}^{(p2)} - y_{3T}^{(p1)}$	…	$y_{3T}^{(pz)}$	$y_{3T}^{(pz)} - y_{3T}^{(pz-1)}$
$y_{4T}^{(p)}$	$y_{4T}^{(p0)}$	$y_{4T}^{(p1)}$	$y_{4T}^{(p1)} - y_{4T}^{(p0)}$	$y_{4T}^{(p2)}$	$y_{4T}^{(p2)} - y_{4T}^{(p1)}$	…	$y_{4T}^{(pz)}$	$y_{4T}^{(pz)} - y_{4T}^{(pz-1)}$

Źródło: opracowanie własne.

Proponowana procedura budowy prognoz z układów równań współzależnych należy do najtrudniejszych przez znaczną komplikację postępowania badawczego. Dla każdego z okresów prognozowanych T ($T = n + 1, \dots n + \tau$) należy bowiem przeprowadzić z_g ($g = 1, \dots, \tau$) iteracji. Jeśli dodać do tego konieczność uważnego postępowania związanego z sekwencyjnością predykcji, przy uwzględnianiu możliwych zmiennych kryteriów zbieżności w kolejnych okresach i zmiennych prognozowanych, to skala trudności okazuje się relatywnie wysoka. Potrzeba budowy prognoz dokładnych oraz o znacznej użyteczności dla decydenta wywołuje jednak konieczność poszukiwania procedur spełniających zapotrzebowanie praktyki gospodarczej, zwłaszcza na poziomie przedsiębiorstwa.

4. Przykłady modeli o równaniach współzależnych

W ostatnich latach w literaturze pojawiają się rozwiązania modelowe z obszaru mikroekonometrii, uwzględniające opis przedsiębiorstwa lub jego części za pomocą

[1] Zdefiniowanie poziomu nieistotnej różnicy należy do użytkownika prognoz. Wielkości te zależą od potrzeb użytkownika (decydenta).

układów równań współzależnych. Wywołuje to potrzebę konstrukcji adekwatnych rozwiązań, związanych z wykorzystaniem tych modeli do budowy prognoz ekonometrycznych. W literaturze zagranicznej brakuje wielorównaniowych mikromodeli ekonometrycznych. Wynika to przede wszystkim z definiowania mikroekonometrii w sposób prezentowany przez Heckmana i McFaddena – jako tworzenie narzędzi analizy mikrodanych. W Polsce mikroekonometria rozumiana jest jednak przez część badaczy podmiotowo jako część mikroekonomii [Hozer 2013]. Dlatego w Polsce pojawiły się pierwsze mikromodele ekonometryczne, opisujące przedsiębiorstwo.

Konkretne empiryczne modele o równaniach współzależnych, zastosowanych w przedsiębiorstwie, znaleźć można w pracach Wiśniewskiego [2003; 2009; 2016a; 2016b] oraz w pracy Stryjewskiego [2005]. Sprzężenie zwrotne występuje jako współzależność pomiędzy wydajnością pracy (WP) a przeciętną płacą (SRPL), co można zapisać jako [Wiśniewski 2016a, s. 48, 73]:

$$\begin{tikzcd} \boxed{\mathbf{WP}} \arrow[r] & \boxed{\mathbf{SRPL}} \arrow[l, bend left] \end{tikzcd} . \qquad (17)$$

Analogiczne sprzężenie zwrotne występuje pomiędzy miernikiem skuteczności windykacji wierzytelności w przedsiębiorstwie (liq_t) a miernikiem płynności finansowej ($evind_t$):

$$liq_t \rightleftarrows evind_t . \qquad (18)$$

Występowanie sprzężeń zwrotnych (17) i (18) powoduje konieczność predykcji zredukowano-łańcuchowej. Są to przypadki najprostsze, niepowodujące nadmiernych komplikacji w procesie predykcji.

Komplikacje pojawiają się w sytuacji zamkniętego cyklu powiązań, obejmującego wiele zmiennych łącznie współzależnych. Taka sytuacja ma miejsce w ekonometrycznym modelu małego przedsiębiorstwa, w którym występuje jednocześnie kilka takich przypadków [Wiśniewski 2003, s. 70]. Jeden z tych cykli ma następującą postać:

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{PIEN}} \arrow[rrrr, bend right] & \boxed{\text{SPRZED}} \arrow[l] & \boxed{\text{PROD}} \arrow[l] & \boxed{\text{MTRW}} \arrow[l] & \boxed{\text{INW}} \arrow[l] \end{tikzcd} . \qquad (19)$$

W mechanizmie (19) występują:

PIEN – wartość wpływów pieniężnych,

SPRZED – wartość przychodów ze sprzedaży brutto,

PROD – wartość produkcji gotowej,

MTRW – wartość początkowa środków trwałych,

INW – wartość inwestycji w małym przedsiębiorstwie w danym okresie.

Przeprowadzenie predykcji z układu pięciu równań współzależnych jest procedurą o dużym stopniu komplikacji już na poziomie pierwszego okresu prognozowane-go. Zważywszy na to, że w empirycznym modelu ekonometrycznym małego przedsiębiorstwa, opartym na danych miesięcznych, występuje wiele zmiennych endogenicznych o rozmaitych okresach opóźnień, zadanie budowy prognoz jest nadzwyczaj skomplikowane. Konieczne doświadczenia empiryczne mogą doprowadzić do ustalenia procedury ogólnej lub procedur specyficznych w określonych warunkach modelowych.

5. Przykład empiryczny

Poniżej przedstawiony zostanie empiryczny układ równań współzależnych[2] ze sprzężeniem zwrotnym typu (17). Model zbudowany został na podstawie kwartalnych szeregów czasowych z kolejnych ośmiu lat.

W modelu występują następujące oznaczenia zmiennych:

WYDt – wydajność pracy w tys. zł na 1 zatrudnionego kwartalnie,

SRPLt – średnia płaca netto w tys. zł na 1 zatrudnionego kwartalnie,

t – zmienna czasowa,

*Q*1 – zmienna zero-jedynkowa przyjmująca wartość 1 w każdym pierwszym kwartale oraz 0 w pozostałych kwartałach,

Q2 – zmienna zero-jedynkowa przyjmująca wartość 1 w każdym drugim kwartale oraz 0 w pozostałych kwartałach.

Ponadto występują charakterystyki dokładności opisu równań empirycznych z odpowiednimi indeksami, adekwatnymi dla poszczególnych równań:

*R*2 – współczynnik determinacji,

Su – błąd standardowy reszt,

DW – wartość statystyki Durbina i Watsona,

hDrb – wartość statystyki *h* Durbina,

$\hat{\rho}_1$ – współczynnik autokorelacji reszt pierwszego rzędu.

Empiryczne równania w formie strukturalnej mają następującą postać:

$$\hat{WYD}_t = \underset{(7,598)}{13,04} + \underset{(3,932)}{0,0025} SRPL_t - \underset{(4,686)}{5,2}\, Q_1 - \underset{(5,631)}{6,3}\, Q_2 \tag{20}$$

$$R^2_{wyd} = 0,704, Su_{wyd} = 2,54, DW_{wyd} = 1,772.$$

$$\hat{SRPL}_t = \underset{(0,351)}{73,23} + \underset{(4,506)}{40,2} WYD_t + \underset{(3,917)}{0,493} SRPL_{t-1} + \underset{(2,717)}{27,5}\, t + \underset{(3,498)}{298,9} Q_1, \tag{21}$$

$$R^2_{srpl} = 0,937; Su_{srpl} = 188,9; hDrb_{srpl} = 0,849; \hat{\rho}_{1srpl} = 0,1109.$$

[2] Dane statystyczne, niezbędne do budowy tego typu modeli, znaleźć można na stronie internetowej: www.wiley.com/go/Wisniewski/Microeconometrics. Są to w większości przypadków informacje statystyczne pochodzące z realnie istniejących przedsiębiorstw. Obliczenia wykonano za pomocą pakietu GRETL.

Układ równań empirycznych w formie zredukowanej jest następujący:

$$WYD_t^* = \underset{(6,325}{14,7} + \underset{(0,755)}{0,0014}SRPL_{t-1} + \underset{(0514)}{0,076}t - \underset{(4,308)}{5,4}\,Q_1 - \underset{(5,754)}{7,1}\,Q_2, \tag{22}$$

$$R^2_{zwyd} = 0,673; Su_{zwyd} = 2,75; DW_{zwyd} = 1,901.$$

$$SRPL_t^* = \underset{(3,767)}{660,8} + \underset{(3,960)}{0567}\,SRPL_{t-1} + \underset{(2,623)}{29,3}t + \underset{(0,719)}{68,2}Q_1 - \underset{(3,484)}{326,6}Q_2, \tag{23}$$

$$R^2_{zsrpl} = 0,924; Su_{zsrpl} = 208,1; hD_{zsrpl} = 0,0198; \hat{\rho}_{1srpl} = 0,0021.$$

Rozstrzygnięcia wymaga, czy predykcję z równania formy zredukowanej można rozpocząć od dowolnego równania[3], czy też warto ustalić zasadę wskazywania takiego równania. Intuicyjnie można uznać, że rozpocząć należy od równania formy zredukowanej o najwyższej wartości współczynnika determinacji (R^2). W związku z tym predyktor pozwalający oszacować prognozę średniej płacy zapisać można następująco:

$$SRPL_{Tp}^* = 660,8 + 0,567SRPL_{T-1} + 29,3T + 68,2Q_1 - 326,6Q_2. \tag{24}$$

Wystarczy znać wartość ostatniej obserwacji na przeciętnej płacy kwartalnej w przedsiębiorstwie, która wynosi $SRPL_{2008;IV}$ = 3482,4 tys. zł na 1 zatrudnionego kwartalnie.

Prognoza średniej płacy na pierwszy kwartał 2009 roku wynosi:

$$SRPL^*_{2009;1,p} = 3670,4.$$

Posiadanie prognozy średniej płacy z predyktora w formie zredukowanej umożliwia wyznaczenie prognozy wydajności pracy na pierwszy kwartał 2009 roku z formy strukturalnej za pomocą równania predyktora:

$$\hat{WYD}_{Tp} = 13,04 + 0,0025SRPL_{Tp} - 5,2Q_1 - 6,3Q_2. \tag{25}$$

Prognoza wydajności pracy na pierwszy kwartał 2009 roku:

$$\hat{WYD}_{2009;1,p} = 17,016.$$

Możliwe jest teraz wyznaczenie prognozy średniej płacy na pierwszy kwartał 2009 roku z równania predyktora w formie strukturalnej:

$$\hat{SRPL}_{Tp} = \underset{(0,351)}{73,23} + \underset{(4,506)}{40,2}WYD_{Tp} + \underset{(3,917)}{0,493}\,SRPL_{T-1} + \underset{(2,717)}{27,5}T + \underset{(3,498)}{298,9}Q_1. \tag{26}$$

[3] Ma to szczególnie duże znaczenie przy znacznej liczbie zmiennych, występujących w zamkniętym cyklu, np. w przypadku mechanizmu typu (19).

Prognoza średniej płacy obliczona na podstawie równania (26) wynosi:

$$\hat{SRPL}_{2009;1,p} = 3680,5.$$

Możliwa jest teraz konfrontacja prognozy przeciętnej płacy kwartalnej, uzyskanej na podstawie równania predyktora z formy strukturalnej ($\hat{SRPL}_{2009;1,p} = 3680,5$), z prognozą tejże średniej płacy, obliczonej na podstawie predyktora z formy zredukowanej ($SRPL^{*}_{2009;1,p} = 3670,4$). Pojawia się różnica w wartościach prognoz, która wynosi 10,1 zł na 1 zatrudnionego, czyli około 0,27%. Z punktu widzenia praktyki zarządzania przedsiębiorstwem różnicę tę można uznać za nieistotną[4]. Oznacza to uzyskanie prognoz zbieżnych średniej płacy. Można zatem zakończyć procedurę predykcji na pierwszej iteracji, bez konieczności poprawiania prognoz. Pozwoli to wykorzystać prognozy wydajności pracy i przeciętnej płacy do podejmowania adekwatnych decyzji zarządczych.

6. Zakończenie

Problematyka modeli wielorównaniowych należy do klasyki teorii ekonometrii oraz ekonometrii stosowanej. Empiryczne zagadnienia prognozowania oparte na modelach wielorównaniowych nie należą do często przedstawianych w literaturze. Szczególnie mało jest prac na temat prognoz z układów równań współzależnych, zwłaszcza mikromodeli ekonometrycznych, opisujących konkretny podmiot gospodarujący.

Obserwuje się niewielkie zainteresowanie badaczy problematyką mikromodeli ekonometrycznych opisujących przedsiębiorstwo. Fundamentalnym powodem jest brak dostępu do informacji statystycznych na poziomie przedsiębiorstwa. Wskutek tego dominują prace empiryczne z obszaru ekonometrii finansowej. Powszechnie dostępne są bowiem dane statystyczne z giełdy czy też z rynków finansowych, pozwalające zaspokoić „głód" ekonometrycznych badań empirycznych.

Przejście na etap wykorzystywania danych z podmiotów gospodarczych do budowy mikromodeli przedsiębiorstw stworzy potrzebę ich wykorzystania do budowy prognoz. Pozwoli to rozwiązywać ważne zagadnienia prognozowania, zwłaszcza w mikroskali, gdy pojawi się konieczność szacowania prognoz opartych na układach równań współzależnych na poziomie przedsiębiorstw. Konkretne badania empiryczne, w których będą wykorzystywane układy równań współzależnych do budowy prognoz ekonometrycznych, zweryfikują rozmaite propozycje metod predykcji. Pomogą one we wskazaniu najlepszych procedur w określonych okolicznościach pro-

[4] Możliwe jest tu zastosowanie rozmaitych kryteriów zbieżności. Statystyk zapewne chciałby testować istotność różnicy pomiędzy prognozami, wykorzystując odpowiedni test statystyczny. Praktyk zarządzający przedsiębiorstwem wybierze raczej kryterium analogiczne do granicznego błędu predykcji lub względnego granicznego błędu predykcji.

gnozowania. W obecnym stanie zaawansowania badań nad ekonometrycznymi modelami przedsiębiorstw trudne są niezbędne w nauce uogólnienia.

Literatura

Hozer J., 2013, *Mikroekonometria*, Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania Uniwersytetu Szczecińskiego, nr 31, s. 7-12.
Pawłowski Z., 1971, *Modele ekonometryczne równań opisowych*, wyd. drugie, PWN, Warszawa.
Pawłowski Z., 1973, *Prognozy ekonometryczne*, PWN, Warszawa.
Pawłowski Z., 1976, *Ekonometryczna analiza procesu produkcyjnego,* PWN, Warszawa.
Stryjewski T., 2005, *Podejście modułowo-relacyjne jako uniwersalny schemat budowy ekonometrycznego modelu przedsiębiorstwa*, praca doktorska, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń.
Wiśniewski J.W., 2003, *Ekonometryczny model małego przedsiębiorstwa,* GRAVIS, Toruń.
Wiśniewski J.W., 2009, *Mikroekonometria*, Wydawnictwo Naukowe UMK, Toruń.
Wiśniewski J.W., 2016a, *Microeconometrics in Business Management*, John Wiley & Sons, Ltd, New York, Chichester, Singapore.
Wiśniewski J.W., 2016b, *Empirical econometric model of an enterprise*, Folia Oeconomica Stetinensia, s. 232-247.
Wiśniewski J.W., Zieliński Z., 2004, *Elementy ekonometrii*, wyd. piąte zmienione UMK, Toruń.
www.wiley.com/go/Wisniewski/Microeconometrics.
Zeliaś A., 1997, *Teoria prognozy*, PWE, Warszawa.